



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA, INOVAÇÕES E COMUNICAÇÕES
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

sid.inpe.br/mtc-m21c/2018/11.21.13.47-TDI

EVENTOS EXTREMOS E ESTRUTURAS COERENTES NA TURBULÊNCIA: ESTUDO DE CASO PARA O VENTO SOLAR

Tiago Francisco Pinheiro Gomes

Tese de Doutorado do Curso de Pós-Graduação em Geofísica Espacial/Ciências do Ambiente Solar-Terrestre, orientada pelos Drs. Erico Luiz Rempel, Abraham Chian Long-Chian, e Fernando Manuel Ramos, aprovada em 19 de outubro de 2018.

URL do documento original:

<<http://urlib.net/8JMKD3MGP3W34R/3S94U7P>>

INPE
São José dos Campos
2018

PUBLICADO POR:

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE

Gabinete do Diretor (GBDIR)

Serviço de Informação e Documentação (SESID)

CEP 12.227-010

São José dos Campos - SP - Brasil

Tel.:(012) 3208-6923/7348

E-mail: pubtc@inpe.br

CONSELHO DE EDITORAÇÃO E PRESERVAÇÃO DA PRODUÇÃO INTELECTUAL DO INPE - CEPPII (PORTARIA N° 176/2018/SEI-INPE):

Presidente:

Dr. Marley Cavalcante de Lima Moscati - Centro de Previsão de Tempo e Estudos Climáticos (CGCPT)

Membros:

Dra. Carina Barros Mello - Coordenação de Laboratórios Associados (COCTE)

Dr. Alisson Dal Lago - Coordenação-Geral de Ciências Espaciais e Atmosféricas (CGCEA)

Dr. Evandro Albiach Branco - Centro de Ciência do Sistema Terrestre (COCST)

Dr. Evandro Marconi Rocco - Coordenação-Geral de Engenharia e Tecnologia Espacial (CGETE)

Dr. Hermann Johann Heinrich Kux - Coordenação-Geral de Observação da Terra (CGOBT)

Dra. Ieda Del Arco Sanches - Conselho de Pós-Graduação - (CPG)

Silvia Castro Marcelino - Serviço de Informação e Documentação (SESID)

BIBLIOTECA DIGITAL:

Dr. Gerald Jean Francis Banon

Clayton Martins Pereira - Serviço de Informação e Documentação (SESID)

REVISÃO E NORMALIZAÇÃO DOCUMENTÁRIA:

Simone Angélica Del Ducca Barbedo - Serviço de Informação e Documentação (SESID)

André Luis Dias Fernandes - Serviço de Informação e Documentação (SESID)

EDITORAÇÃO ELETRÔNICA:

Ivone Martins - Serviço de Informação e Documentação (SESID)

Cauê Silva Fróes - Serviço de Informação e Documentação (SESID)



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA, INOVAÇÕES E COMUNICAÇÕES
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

sid.inpe.br/mtc-m21c/2018/11.21.13.47-TDI

EVENTOS EXTREMOS E ESTRUTURAS COERENTES NA TURBULÊNCIA: ESTUDO DE CASO PARA O VENTO SOLAR

Tiago Francisco Pinheiro Gomes

Tese de Doutorado do Curso de Pós-Graduação em Geofísica Espacial/Ciências do Ambiente Solar-Terrestre, orientada pelos Drs. Erico Luiz Rempel, Abraham Chian Long-Chian, e Fernando Manuel Ramos, aprovada em 19 de outubro de 2018.

URL do documento original:

<<http://urlib.net/8JMKD3MGP3W34R/3S94U7P>>

INPE
São José dos Campos
2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Gomes, Tiago Francisco Pinheiro.

G585e Eventos extremos e estruturas coerentes na turbulência: estudo de caso para o vento solar / Tiago Francisco Pinheiro Gomes. – São José dos Campos : INPE, 2018.
xxxvii + 232 p. ; (sid.inpe.br/mtc-m21c/2018/11.21.13.47-TDI)

Tese (Doutorado em Geofísica Espacial/Ciências do Ambiente Solar-Terrestre) – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2018.

Orientadores : Drs. Erico Luiz Rempel, Abraham Chian Long-Chian, e Fernando Manuel Ramos.

1. Vento solar. 2. Estruturas coerentes. 3. Eventos extremos. 4. Turbulência. 5. Vórtices magnéticos. I. Título.

CDU 523.745



Esta obra foi licenciada sob uma Licença [Creative Commons Atribuição-NãoComercial 3.0 Não Adaptada](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/).

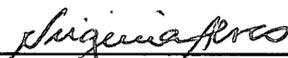
This work is licensed under a [Creative Commons Attribution-NonCommercial 3.0 Unported License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/).

Aluno (a): **Tiago Francisco Pinheiro Gomes**

Título: "EVENTOS EXTREMOS E ESTRUTURAS COERENTES NA TURBULÊNCIA:
ESTUDO DE CASO PARA O VENTO SOLAR"

Aprovado (a) pela Banca Examinadora
em cumprimento ao requisito exigido para
obtenção do Título de **Doutor(a)** em
**Geofísica Espacial/Ciências do Ambiente
Solar-Terrestre**

Dra. Maria Virginia Alves



Presidente / INPE / SJCampos - SP

() Participação por Vídeo - Conferência

Aprovado () Reprovado

Dr. Erico Luiz Rempel



Orientador(a) / ITA / SJCampos - SP

() Participação por Vídeo - Conferência

Aprovado () Reprovado

Dr. Abraham Chian Long-Chian

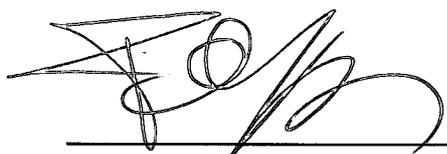


Orientador(a) / INPE / São José dos Campos - SP

() Participação por Vídeo - Conferência

() Aprovado () Reprovado

Dr. Fernando Manuel Ramos



Orientador(a) / INPE / SJCampos - SP

() Participação por Vídeo - Conferência

Aprovado () Reprovado

Este trabalho foi aprovado por:

() maioria simples

() unanimidade

Aprovado (a) pela Banca Examinadora
em cumprimento ao requisito exigido para
obtenção do Título de **Doutor(a)** em
**Geofísica Espacial/Ciências do Ambiente
Solar-Terrestre**

Dr. Renato Sérgio Dallaqua



Membro da Banca / INPE / São José dos Campos - SP

() Participação por Vídeo - Conferência

Aprovado () Reprovado

Dr. Rodrigo Andrés Miranda Cerda



Convidado(a) / UNB GAMA / Brasília - DF

() Participação por Vídeo - Conferência

Aprovado () Reprovado

Dra. Marisa Roberto



Convidado(a) / ITA / São José dos Campos - SP

() Participação por Vídeo - Conferência

Aprovado () Reprovado

Este trabalho foi aprovado por:

() maioria simples

() unanimidade

São José dos Campos, 19 de outubro de 2018

TIAGO FRANCISCO PINHEIRO GOMES
*“As lágrimas dos fracassados escorrem pelos seus olhos, as
dos vencedores por suas testas”, 2012*

A minha querida esposa Laura, a meus queridos pais Rui e Edneide, a meu querido irmão Gustavo, a minha querida Pipoca, minha querida avó Júlia, a meu querido avô Rubens (in memoriam), a meu querido amigo Pepe (in memoriam), a meus orientadores, a todos os meus amigos, a meus padrinhos, a meus primos e tios mais próximos, a Capes e a Deus.

AGRADECIMENTOS

Agradeço imensamente minha querida esposa Laura Maria, pelo apoio, compreensão, companheirismo, dedicação e cuidados para comigo e por todos os momentos de alegria por ela proporcionados. Agradeço também a sua participação direta no desenvolvimento deste trabalho, trocando suas horas de lazer pela elaboração de figuras e apoio moral, sem os quais esta tese não se concretizaria. Sou grato também pela sua total dedicação nos momentos mais difíceis que atravessei ao longo desta jornada, se mostrando não apenas uma grande esposa, mas também uma grande amiga e companheira. Sou completamente grato aos meus queridos pais, Edneide e Rui, primeiramente pela base moral passada na minha formação como pessoa. Sou grato a eles por sempre estarem presentes nos momentos felizes e difíceis da minha vida. Agradeço-lhes por sempre terem investido na minha educação e por nunca terem permitido que me faltasse absolutamente nada, tornando assim possível chegar aonde cheguei. Agradeço aos meus pais também por toda ajuda financeira ao longo de todo o difícil período sem bolsa. Agradeço ao meu irmão Gustavo, pelo companheirismo, paciência, dedicação, momentos felizes vividos e empenho nos momentos de turbulência das nossas vidas. Agradeço à minha avó simplesmente por ter sido uma segunda mãe na minha vida. Agradeço imensamente aos meus orientadores Érico Rempel, Fernando Ramos e Abraham Chian pela paciência, dedicação e empenho no desenvolvimento deste trabalho. Agradeço-lhes também por terem aceitado me orientar, mostrando-se orientadores empenhados em meu processo de aprendizagem e formação, estando sempre dispostos a ajudar. Gostaria de agradecer especialmente ao professor Érico Rempel, o qual tem convivido mais de perto comigo ao longo de todo doutorado, mostrando-se não somente um orientador exemplar, mas também um grande amigo, sendo completamente compreensivo diante de todos os meus problemas e limitações. Agradeço aos professores do INPE, os quais contribuíram para a minha formação acadêmica. Agradeço à biblioteca do INPE por todo cuidado e empenho na correção e formatação deste trabalho, em especial, ao amigo André Luis Dias Fernandes, que além de ter contribuído na correção e formatação da tese, ainda possibilitou a melhoria de seu conteúdo.

Este agradecimento, obviamente, é extensivo aos meus amigos Francis, Dalton e Adriane, que em muito contribuíram para que este período árduo de nossas vidas fosse mais divertido e menos desgastante, além de todas as discussões que favoreceram para o enriquecimento do trabalho. Agradeço também à amiga Suzana por toda sua contribuição nesta tese, destacando sua participação direta por meio de simulações computacionais e discussões, os quais foram essenciais para o desenvolvimento e

sucesso do trabalho. Agradeço também à todas as pessoas que de maneira direta ou indireta contribuíram para a minha formação acadêmica e pessoal. Agradeço imensamente à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro e investimento sem os quais não seria possível realizar este trabalho, além de toda confiança depositada em mim.

Finalizo, agradecendo àquele que colocou em meu caminho todas as pessoas citadas acima, sem as quais eu não seria nada. Àquele que sempre esteve presente na minha vida, me amparando nos momentos mais difíceis. Àquele que todos os dias me faz acreditar que para tudo há um propósito e que, com perseverança e fé, no final tudo dará certo. **Obrigado meu Deus!**

RESUMO

Na presente tese, são aplicadas técnicas estatísticas para modelagens de distribuições de eventos extremos, detecção de lâminas de correntes, análises de turbulência intermitente e detecção de *Dragon Kings* em dados observacionais e simulados do vento solar. Mostramos que lâminas de correntes são as estruturas coerentes responsáveis pela presença de turbulência bem desenvolvida de Kolmogorov em séries temporais do módulo do campo magnético do vento solar, além de serem as grandes responsáveis pela positividade do parâmetro de forma, principal parâmetro da teoria clássica de valores extremos e responsável por caracterizar o comportamento das caudas das distribuições generalizadas de Pareto e de valores extremos. Propomos uma nova técnica para detecção de lâminas de correntes e reconexões magnéticas baseada na volatilidade. Além disto, propomos uma prova teórica para a objetividade de uma nova técnica lagrangiana de detecção de vórtices magnéticos, validando sua utilização em plasmas espaciais. Baseado no campo de velocidades, propomos uma nova técnica euleriana e independente do referencial para detecção de centros vorticais. Identificamos inconsistências em técnica lagrangiana e objetiva de detecção de vórtices baseados na vorticidade quando aplicado em plasma solar, para o qual propomos uma solução. Para a modelagem estatística de eventos extremos, utilizamos a teoria clássica de eventos extremos, a qual se baseia nas técnicas de picos acima de um limiar e de máximos em blocos. Para a simulação de ambiente interplanetário, utilizamos simulação MHD-3D compressível, adiabática e com forçante não helicoidal. Fomos os primeiros a aplicar com sucesso a teoria de *Dragon Kings* em dados do vento solar, encontrando fortes evidências de que reconexões magnéticas pertencem a esta classe especial de eventos extremos. Para as análises estatísticas de *Dragon Kings*, utilizamos o teste-U, teste-DK e intervalos de confiança para distribuições de leis de potência.

Palavras-chave: Vento solar. Estruturas coerentes. Lâminas de correntes. Eventos extremos. Volatilidade. Dragon Kings. Turbulência. Vórtices magnéticos.

EXTREME EVENTS AND COHERENT STRUCTURES IN TURBULENCE: A CASE STUDY FOR THE SOLAR WIND

ABSTRACT

In the present work, statistical techniques are employed in the modelling of extreme events distributions, detection of current sheets, analysis of intermittent turbulence and detection of Dragon Kings in observational and simulated solar wind data. We have shown that current sheets are the principal coherent structures responsible for the presence of Kolmogorov turbulence in solar wind time series of the modulus of magnetic field, as well as being responsible for the positivity of the shape parameter, the main parameter of extreme values theory and responsible for characterizing the tails behavior of generalized Pareto and extreme values distributions. We propose a new technique for detection of current sheets and magnetic reconnections based on volatility. Additionally, we propose a mathematical proof for the objectivity of a new technique for the detection of magnetic vortices, validating its application in space plasmas. Based on the velocity field, we propose a new frame invariant eulerian technique for vortex centers detection. We identified inconsistencies in lagrangian and objective vortex detection technique based on vorticity when applied to solar plasma, for which we propose a solution. For the statistical modelling of extreme events, the classical theory of extreme events is adopted, which is based on the peaks over threshold and block maxima techniques. For the interplanetary environment simulation, 3D compressible and adiabatic MHD simulations are used with a non-helical forcing. We were the first to successfully apply the dragon kings theory to solar wind data, finding strong evidence that magnetic reconnections belong to this special class of extreme events. For the statistical analyses of Dragon Kings, the U-test and the DK-test are adopted.

Keywords: Solar wind. Coherent structures. Current sheets. Extreme events. Volatility. Dragon Kings. Turbulence. Magnetic vortices.

LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>	
1.1	Figura ilustrando em (a) uma série temporal do módulo do campo magnético do vento solar do dia 2 de fevereiro de 2002 e em (b) uma série financeira dos ativos da multinacional General Electric (GE) para o período de 1998 a 2004. Painel em (a) foi retirado de Chian et al. (2016) e representa as 4 primeiras horas da série temporal do vento solar em (a). Neste painel pode-se observar a interação entre 3 tubos magnéticos interplanetários (IMFR's), sendo que na região de interação entre os tubos IMFR-2 e IMFR-3 (região roxa) há a presença de reconexão magnética (pico de mínimo). Tal região de reconexão magnética é destacada na série temporal em (a) com um círculo azul. Região destacada com círculo azul em (b) representa o período no qual o ex CEO da General Electric, Jack Welch, aposenta-se. Pode-se notar um pico de mínimo dos ativos da série financeira neste período bastante semelhante ao pico de mínimo da série do vento solar em (a).	5
3.1	Figura ilustrando a cascata de energia idealizada por Richardson. A energia é injetada nas maiores escalas, transmitida em escalas intermediárias e então dissipada nas menores escalas. Neste caso, a energia é transmitida por meio de um processo contínuo de quebra de vórtices maiores em vórtices menores, até que os vórtices alcancem um tamanho compatível com a escala de dissipação e passam a ser destruídos.	14
3.2	Figura ilustrativa do gráfico Log-Log do espectro de potência de um fluxo turbulento. Nota-se três regiões: Região de injeção de energia, de transferência de energia (intervalo inercial) e de dissipação de energia (intervalo dissipativo), sendo que as duas últimas se encontram na faixa de equilíbrio universal. Após o intervalo inercial (inclinação $-\frac{5}{3}$), na escala l_d , surge um ponto de quebra separando-o do intervalo dissipativo. Este ponto de quebra fica evidenciado pelo início de um decréscimo mais acentuado de energia. A partir da escala de comprimento de Kolmogorov, quase não há energia no fluxo.	21

3.3	Figura ilustrando linhas de campo magnético congeladas em uma plasma. Pertubações no plasma faz com que as linhas de campo oscilem transversalmente, tais quais cordas elásticas. Tais oscilações representam a propagação de ondas de Alfvén. Setas vermelha e azul indicam, respectivamente, sentido de propagação e de oscilação da onda.	23
3.4	Figura ilustrando a alta correlação existente entre as flutuações do campo magnético e da velocidade no vento solar, indicando presença de ondas de Alfvén.	25
3.5	Figura ilustrando a interação entre feixes rápidos (B) com feixes lentos (A) e a região de compressão. O choque frontal (FS), interface (IF) e choque reverso (RS) são indicados. As ondas de Alfvén provenientes dos feixes rápidos são amplificadas ao entrar na região RS-IF.	27
3.6	Figura ilustrando colisão entre dois pacotes de ondas de Alfvén que viajam em sentidos opostos ao longo de uma linha de campo magético. Tal processo de colisão é responsável pela cascatas de energia sob a óptica da teoria de turbulência IK.	28
3.7	Figura ilustrando três distribuições com diferentes curtoses. A distribuição em azul representa uma distribuição normal (mesocúrtica) com $K = 0$. A distribuição em amarelo representa uma distribuição mais afunilada e com caudas mais pesadas que a distribuição normal (leptocúrtica), neste caso $K > 0$. Finalmente, a distribuição em vermelho representa uma distribuição mais achatada e com caudas mais leves que a distribuição normal (platicúrtica), neste caso $K < 0$	33
3.8	Figura ilustrando comportamento anômalo do expoente de escalamento $\zeta(p)$ calculado para série temporal do módulo do campo magnético do vento solar do dia 2 de fevereiro de 2002. De acordo com a teoria K41, o gráfico $(\zeta(p) \times p)$ deveria ser uma reta de inclinação 1/3. No entanto, para $p > 3$, $\zeta(p)$ se torna anômalo.	35
3.9	Figura ilustrando cascatas de energia sob a óptica da teoria K41 e do ponto de vista multifractal. Na cascata superior (óptica da teoria K41), as estruturas coerentes se distribuem homoganeamente e preenchem todo o espaço. Na cascata inferior (óptica da teoria multifractal) as estruturas coerentes deixam buracos no espaço, fazendo surgir o fenômeno de intermitência.	37
3.10	Figura ilustrando uma densidade de corrente \vec{J} em forma de lâmina (lâmina de corrente) formada por uma região de descontinuidade do vetor campo magnético \vec{B}	39

3.11	Figura ilustrando a detecção de uma região contendo lâmina de corrente (pontos vermelhos) centrada em T . Neste caso foi utilizada uma janela deslizante de tamanho 2τ , delimitada pelas linhas azuis. O limiar L é representado pela linha tracejada vermelha. O parâmetro τ define a escala típica da lâmina de corrente detectada.	40
4.1	Figura ilustrando as três famílias de distribuições: Weibull, Fréchet e Gumbel.	48
4.2	Figura ilustrando uma série temporal dividida em blocos de mesmo tamanho. São selecionados os valores mais altos de cada bloco de tal forma a obter uma nova série contendo os máximos de cada bloco.	52
4.3	Figura ilustrando uma série temporal limitada superiormente por um limiar, acima do qual se encontram os valores extremos que formaram uma nova série temporal de pontos acima de um limiar.	57
4.4	Figura ilustrativa da ocorrência de um Dragon King. Neste caso, existe um subespaço invariante Σ (plano em cinza) de um espaço de fase, onde a órbita do sistema (linha sólida preta) fica confinada. Ao passar por estruturas instáveis (linhas vermelhas) localizadas neste subespaço, a trajetória da órbita é arremessada para fora de Σ , fazendo surgir um Dragon King.	66
5.1	Espectro de potência da série do módulo do campo magnético do dia 09 de março de 2009 exibindo turbulência bem desenvolvida de Kolmogorov. Utilizamos este PSD como guia para escolhermos a escala de tamanho das estruturas coerentes (lâminas de correntes) que sejam suficientemente energéticas, porém que não estejam sendo dissipadas. Uma escala de tamanho localizada no meio do intervalo inercial contempla tais características.	80
5.2	Séries temporais do módulo do campo magnético do vento solar e suas respectivas volatilidades para os dias 9 de março de 2008, 24 de fevereiro de 2009 e 8 de março de 2009. Regiões em magenta representam lâminas de correntes detectadas.	82
5.3	Séries temporais do módulo do campo magnético e respectivas séries de volatilidade para um período aproximado de 14 horas dentro dos dias 01 de fevereiro de 2003, 21 de abril de 2004 e 25 de janeiro de 2016. Nestes períodos não foram identificadas lâminas de correntes com a escala de tamanho procurada.	83
5.4	Mesmas séries temporais da figura 5.2, porém com as lâminas de correntes removidas.	84

5.5	Figuras do <i>mean residual life</i> , escala reparametrizada e parâmetros de forma em função dos limiares, para o dia 25 de janeiro de 2016 (a), (b) e (c), para o dia 9 de março de 2008 (d), (e) e (f) e para o dia 9 de março de 2008 com as lâminas de correntes removidas (g), (h) e (i). Áreas sombreadas em cinza delimitam intervalos para os quais o <i>mean residual life</i> é aproximadamente linear, dentro de um intervalo de confiança de 95% (linhas cinzas tracejadas) e o parâmetro de forma é aproximadamente constante, dentro das barras de erro.	86
5.6	Séries temporais da volatilidade do módulo do campo magnético para os dias 9 de março de 2008 (a), 9 de março de 2008 após remoção das lâminas de corrente (b) e 25 de janeiro de 2016 (c). Linhas tracejadas vermelhas indicam o limiar e os pontos destacados acima do limiar representam a nova série temporal obtida após o processo de declusterização.	88
5.7	Função de autocorrelação das séries da volatilidade do dia 9 de março de 2008, antes da declusterização (a) e após declusterização (b); do dia 9 de março de 2008, com lâminas de corrente removidas e antes da declusterização (c) e após declusterização (d); do dia 25 de janeiro de 2016, antes da declusterização (e) e após declusterização (f). Linhas horizontais azuis delimitam os intervalos dentro dos quais a função de autocorrelação é considerada nula, para um nível de significância de 5%.	89
5.8	Valores dos testes estatísticos Q de Ljung-Box para o dia 9 de março de 2008 (linha magenta), para o dia 9 de março de 2008, após a remoção das lâminas de correntes (linha vermelha) e para o dia 25 de janeiro de 2016 (linha azul). Os valores críticos do teste são representados pelas linhas tracejadas (nível de significância de 1%), ponto-tracejada (nível de significância de 5%) e pontilhada (nível de significância de 10%).	91

5.9	Figura expondo o diagnóstico do ajuste para a modelagem da distribuição GPD para série de volatilidade do dia 9 de março de 2008. Em (a), é mostrado o QQ-plot, onde o eixo-y representa os quantis dos dados observacionais e o eixo-x, os quantis dos dados teóricos. Para um perfeito ajuste, os pontos devem estar sobre a linha sólida preta diagonal (1-1 line). Em (b), o mesmo de (a), porém desta vez os quantis dos dados empíricos são comparados com os quantis dos dados gerados randomicamente pela distribuição GPD, dentro de um intervalo de confiança de 95% (linhas tracejadas em cinza). Linha sólida preta representa a regressão linear dos pontos e linha tracejada laranja representa a linha diagonal (1-1 line). Em (c), são mostrados as funções de densidade de probabilidade dos dados empíricos (linha sólida) e dos dados teóricos (linha tracejada azul). Em (d), encontram-se os níveis de retorno da volatilidade (linha sólida preta) em termos dos períodos de retornos dos eventos. Linhas tracejadas cinzas representam o intervalo de confiança ponto a ponto (<i>pointwise</i>) de 95%. Em (e) são mostrados a série temporal da volatilidade e seus níveis de retorno previstos para a cada ocorrência de 10 eventos (linha sólida vermelha), 20 eventos (linha tracejada verde) e 100 eventos (linha pontilhada azul). O limiar utilizado para a modelagem da GPD é apresentado pela linha sólida amarela.	93
5.10	O mesmo da Figura 5.9, porém desta vez para o dia 9 de março de 2008, com as lâminas de correntes removidas.	95
5.11	O mesmo da Figura 5.9, porém desta vez para o dia 25 de janeiro de 2016, período em que não foram detectadas lâminas de correntes na escala procurada.	96

5.12	Figura expondo o diagnóstico do ajuste para a modelagem da distribuição GEV para série de volatilidade do dia 9 de março de 2008. Em (a), é mostrado o QQ-plot, onde o eixo-y representa os quantis dos dados observacionais e o eixo-x, os quantis dos dados teóricos. Para um perfeito ajuste, os pontos devem estar sobre a linha sólida preta diagonal (1-1 line). Em (b), o mesmo de (a), porém desta vez os quantis dos dados empíricos são comparados com os quantis dos dados gerados randomicamente pela distribuição GEV, dentro de um intervalo de confiança de 95% (linhas tracejadas em cinza). Linha sólida preta representa a regressão linear dos pontos e linha tracejada laranja representa a linha diagonal (1-1 line). Em (c), são mostrados as funções de densidade de probabilidade dos dados empíricos (linha sólida) e dos dados teóricos (linha tracejada azul). Em (d), encontram-se os níveis de retorno da volatilidade (linha sólida preta) em termos dos períodos de retornos dos eventos. Linhas tracejadas cinzas representam o intervalo de confiança ponto a ponto (<i>pointwise</i>) de 95%.	101
5.13	O mesmo da Figura 5.12, porém desta vez para o dia 9 de março de 2008, com as lâminas de correntes removidas.	102
5.14	O mesmo da Figura 5.12, porém desta vez para o dia 25 de janeiro de 2016, dia em que não foram identificadas lâminas de correntes com a escala de tamanho procurada.	103
5.15	Figura dos espectros de potência (PSD) calculados pelo método de Welch (1967) para os dias 09 de março de 2009 com a presença de lâminas (a) e com as lâminas removidas (b) e para o dia 25 de janeiro de 2016 (c). Região sombreada em cinza representa o intervalo inercial e linhas vermelhas representam retas ajustadas por regressão linear dos dados neste intervalo. Percebe-se que para o dia com a presença de lâminas de correntes, a lei de potência K41 (inclinação $-5/3$) é observada. Por outro lado, dias com lâminas ausentes ou removidas a lei de potência IK (inclinação $-3/2$) passa a ser observada.	106

5.16	Figura das funções zeta para os dias 09 de março de 2008 e 21 de abril de 2004. Função zeta para a série original do dia 09 de março é representada por triângulos vermelhos. Já a função zeta para esta mesma série, após a aplicação do processo de surrogate de randomização de fases e com lâminas de correntes removidas, são dadas respectivamente por quadrados azuis e círculos magenta. Finalmente, para o dia 21 de abril de 2004, a função zeta é representada por losangos verdes. Coeficientes de determinação R^2 das regressões lineares calculada para as curvas de zeta para todos casos também são mostrados. Valores de R^2 mais próximos de $R^2 = 1$, indicam ótimos ajustes lineares para a função zeta. Neste caso, a monofractalidade é sugerida.	108
5.17	Figura ilustrativa de uma região próxima à região da x-line (representada pelas linhas pontilhadas), onde linhas de campo são reconectadas (linhas vermelhas). B_g é o campo magnético perpendicular ao plano da figura, que juntamente com o gradiente de pressão eletrônica (direção indicada pela linha verde), faz surgir uma deriva diamagnética na mesma direção do outflow (linhas azuis).	113
5.18	Figura da série temporal do módulo do campo magnético do dia 24 de fevereiro de 2009 (painel superior), onde regiões com prováveis presenças de lâminas de correntes são destacadas na cor magenta. Painel inferior mostra a correspondente série de volatilidade.	116
5.19	Série de volatilidade do módulo do campo magnético do dia 24 de fevereiro de 2009 após o processo de declusterização. Pontos pretos representam a série declusterizada.	117
5.20	Teste-U para a série declusterizada da volatilidade do dia 24 de fevereiro de 2009. Linha vermelha representa os valores dos p-values para cada posto da amostra. Linha tracejada indica o nível de significância utilizado no teste, que neste caso é 0.1.	118
5.21	Figura apresentando o teste-p da série declusterizada da volatilidade do dia 24 de fevereiro de 2009. Triângulos verdes representam os valores do teste. Para teste-p = 1, temos p-value < 0.1. Para teste-p = 0, temos p-value < 0.1	119
5.22	Figura apresentando o teste-DK para $r = 11$ da série declusterizada da volatilidade do dia 24 de fevereiro de 2009. Linha vermelha representa os p-values para cada posto.	120

5.23	Figura representando a aplicação do teste de Janczura e Weron (2012) para a série declusterizada da volatilidade do dia 24 de fevereiro de 2009. Intervalos para os níveis de confiança 90%, 95% e 99%, são representados respectivamente pelas linhas tracejadas verde, azul e magenta. Linha vermelha representa a distribuição teórica de Weibull obtida por ajustes estatísticos. Pontos empíricos são representados por x.	121
5.24	Figura da série temporal do módulo do campo magnético do dia 24 de fevereiro de 2009 (painel superior), onde regiões com prováveis presenças de lâminas de correntes são destacadas na cor magenta. Painel inferior mostra a série de volatilidade sobreposta por pontos da série declusterizada (círculos sólidos vermelhos e azuis), que coincidem com as regiões contendo lâminas de corrente. Círculos sólidos vermelhos representam DK's, ao passo que os azuis não são DK's.	122
5.25	Figura da série temporal do módulo do campo magnético do dia 24 de fevereiro de 2009 (painel superior), onde regiões com prováveis presenças de lâminas de correntes são destacadas na cor magenta. Painel inferior mostra a série do beta do plasma, obtida por meio da equação 5.9.	123
5.26	Figura da série temporal do módulo do campo magnético do dia 24 de fevereiro de 2009 (painel superior), onde regiões com prováveis presenças de lâminas de correntes são destacadas na cor magenta. Painel inferior mostra a série do <i>shear angle</i> , obtida por meio da equação 5.10.	124
5.27	Aplicação da condição diamagnética de (SWISDAK et al., 2010) para a série declusterizada da volatilidade do dia 24 de fevereiro de 2009. A linha verde é obtida da condição diamagnética em 5.8 e separa as regiões onde as reconexões magnéticas são possíveis (acima da linha verde) e a região onde as reconexões não são permitidas (abaixo da linha verde). Círculos sólidos vermelhos (DK) e azuis (não DK) são exatamente os mesmos da Figura 5.24.	125
6.1	Densidade de corrente obtida de simulação MHD-3D realizada no código Pencil para um instante de tempo de simulação $t = t1$. Linhas amarelas representam, hipoteticamente, uma trajetória com condições de contorno periódico de uma espaçonave viajando sobre uma região permeada por lâminas de correntes. Para esta idealização foi utilizada a hipótese de Taylor. A barra de cores representa as intensidades das densidades de correntes obtidas nesta simulação.	130
6.2	O mesmo que Fig. (6.1), porém para um instante de tempo de simulação posterior $t = t2$	131

6.3	Séries espaciais do campo magnético (azul) e da densidade de corrente (preto) medidas pela hipotética trajetória da espaçonave (linhas amarelas em Fig. (6.1) para o tempo de simulação $t = t1$	132
6.4	O mesmo que em Fig. (6.3), porém para o tempo de simulação posterior $t = t2$, referente à trajetória em Fig. (6.2)	133
6.5	Trajetoária sobre uma malha 2D com condição de contorno periódica . . .	134
6.6	Séries espaciais da densidade de corrente (preto) e sua respectiva série de volatilidade (vermelho) calculada por meio da relação 5.1, para um tempo de simulação $t = t1$. Vale a pena notar a grande correlação existente entre as duas séries, principalmente para os valores extremos, sugerindo assim a volatilidade como um bom parâmetro para identificação de intensas densidades de correntes (possíveis lâminas ou reconexões magnéticas). . .	135
6.7	O mesmo que Fig. (6.6), porém agora para um tempo de simulação posterior $t = t2$. A exemplo de Fig. (6.6), existe uma grande correlação entre as duas séries, principalmente para valores extremos.	136
6.8	Séries espaciais da densidade de corrente (preto) e dos métodos PVI (vermelho) e volatilidade (azul) para o tempo de simulação MHD ($t = t1$), obtidas a partir da hipotética trajetória indicada pela linha amarela em Fig.(6.1). Linha tracejada representa o limiar acima do qual se encontram as densidades de correntes mais intensas > 7.5 (regiões brancas em Fig.(6.10). Valores de PVI e volatilidade acima deste limiar são marcados sobre a trajetória em Fig.(6.10) por círculos amarelos e azuis, respectivamente.	137
6.9	O mesmo que em Fig. (6.8), porém para um tempo de simulação posterior $t = t2$. Desta vez, a linha tracejada representa o limiar acima do qual se encontram as densidades de correntes mais intensas > 10 (regiões brancas em Fig.(6.11). Valores de PVI e volatilidade acima deste limiar são marcados sobre a trajetória em Fig.(6.11) por círculos amarelos e azuis, respectivamente.	138
6.10	O mesmo que Fig. 6.1, porém com os valores de PVI > 7.5 (círculos amarelos) e volatilidade > 7.5 (círculos azuis), inseridos em suas respectivas posições sobre a hipotética trajetória da espaçonave de Fig (6.1). Embora ambos os métodos tenham identificado com sucesso as possíveis lâminas de correntes (regiões brancas) que estão sobre a trajetória, a volatilidade se mostrou mais eficaz, pelo menos para o limiar utilizado.	139

6.11	O mesmo que Fig. 6.2, porém com os valores de PVI > 10 (círculos amarelos) e volatilidade > 10 (círculos azuis) obtidos em Fig (6.9), inseridos em suas respectivas posições sobre a hipotética trajetória da espaçonave de Fig (6.2). Embora ambos os métodos tenham identificado com sucesso as possíveis lâminas de correntes (regiões brancas) que estão sobre a trajetória, a volatilidade novamente se mostrou superior, pelo menos para o limiar utilizado.	142
6.12	Série espacial da densidade de corrente de Fig. (6.6-painel superior), porém com as densidade de corrente mais intensas (prováveis lâminas de correntes) removidas. Somente densidades de correntes com valores inferiores a 7.5 são analisadas.	143
6.13	Série espacial da densidade de corrente de Fig. (6.7-painel superior), porém com as densidade de corrente mais intensas (prováveis lâminas de correntes) removidas. Somente densidades de correntes com valores inferiores a 10 são analisadas.	143
6.14	Em (a) e (c), <i>mean residual life</i> , escala reparametrizada e parâmetros de forma em função dos limiares calculados para a série espacial da densidade de corrente obtida pela trajetória em Fig. (6.1). Em (b) e (d) o mesmo que em (a) e (c), porém desta vez para série espacial da densidade de corrente obtida pela trajetória em Fig. (6.2). Áreas sombreadas em cinza delimitam intervalos para os quais o <i>mean residual life</i> é aproximadamente linear dentro de um intervalo de confiança de 95% (linhas cinzas tracejadas) e o parâmetro de forma é aproximadamente constante, consideradas as barras de erro. O menor valor de limiar dentro desta região é dado como adequado para o ajuste GPD.	144
6.15	O mesmo que Fig. (6.14), porém desta vez, para as séries espaciais de Fig. (6.12) e (6.13).	145
6.16	Séries espaciais declusterizadas das densidades de corrente são representadas pelos pontos acima do limiar, que estão pintados em preto. Em (a), série espacial declusterizada da densidade de corrente obtida pela trajetória em Fig. (6.1). Em (b), série espacial declusterizada da densidade de corrente obtida pela trajetória em Fig. (6.2). Para o processo de declusterização foi utilizado o método de <i>runs declustering</i>	146

6.17	Figura expondo o diagnóstico do ajuste para a modelagem da distribuição GPD para série espacial declusterizada das densidades de correntes obtidas em Fig. (6.1). Em (a), é mostrado o QQ-plot, onde o eixo-y representa os quantis dos dados observacionais e o eixo-x, os quantis dos dados teóricos. Para um perfeito ajuste, os pontos devem estar sobre a linha sólida preta diagonal (1-1 line). Em (b), o mesmo de (a), porém desta vez os quantis dos dados empíricos são comparados com os quantis dos dados gerados randomicamente pela distribuição GPD, dentro de um intervalo de confiança de 95% (linhas tracejadas em cinza). A linha sólida preta representa a regressão linear dos pontos e a linha tracejada laranja representa a linha diagonal (1-1 line). Em (c), são mostradas as funções de densidade de probabilidade dos dados empíricos (linha sólida) e dos dados teóricos (linha tracejada azul). Em (d), encontram-se os níveis de retorno da densidade de corrente declusterizada (linha sólida preta) em termos dos períodos de retornos dos índices. Linhas tracejadas cinzas representam o intervalo de confiança ponto a ponto (<i>pointwise</i>) de 95%. Em (e) são mostrados a série temporal da série de densidade de corrente declusterizada e seus níveis de retorno previstos a cada ocorrência de 2 eventos (linha sólida vermelha), 20 eventos (linha tracejada verde) e 100 eventos (linha pontilhada azul). O limiar utilizado para a modelagem da GPD é representado pela linha sólida amarela.	147
6.18	O mesmo que em Fig. (6.17), porém desta vez, com o ajuste da GPD realizado para série espacial declusterizada das densidades de correntes obtidas em Fig. (6.2).	148
6.19	O mesmo que em Fig. (6.17), porém desta vez, com o ajuste da GPD realizado para série espacial de Fig. (6.12).	149
6.20	O mesmo que em Fig. (6.17), porém desta vez, com o ajuste da GPD realizado para série espacial de Fig. (6.13).	150
7.1	Geometria de um ângulo de rotação intrínseco $\psi_{t_0}^t(x_0)$ ao longo de uma trajetória material $x(t)$	153
7.2	Figura ilustrando vórtices lagrangianos coerentes $\mathcal{V}(t)$ evoluindo no tempo.	154
7.3	Figura ilustrando vórtices eulerianos coerentes $V(t)$ evoluindo no tempo.	158
7.4	Um vórtice coerente euleriano é o limite de um vórtice coerente lagrangiano sob um tempo de integração nulo.	159
7.5	Ilustração de dois frames $\bar{\mathcal{O}}$ e \mathcal{O} e um vetor posição \vec{x} para um ponto P	161
7.6	Frames ao longo de uma linha parametrizada por $s = s_0, s_1, s_2, \dots$	163

7.7	Figura ilustrando linhas de campo magnético medidas para dois diferentes observadores. Em (a) uma sela é identificada pelo referencial \mathcal{O} , enquanto que em (b), um vórtice é identificado para um outro referencial $\bar{\mathcal{O}}$ transladado e rotacionado em relação à \mathcal{O}	167
7.8	Figura ilustrando a geometria de uma linha de campo magnética vista por observadores situados em referenciais distintos. Em (a), o observador (linha vermelha) está em um referencial (\hat{e}_1) em repouso com relação ao referencial de uma linha de campo magnético (linha azul) irrotacional. Para este observador $\nabla \times \vec{B} = 0$, e portanto, densidades de correntes não deveriam ser vistas. Em (b), o referencial do observador passa a rotacionar (\hat{e}'_1) em relação à linha de campo, de modo que o efeito observado é de uma torção da linha, conforme (c). Neste caso $\nabla \times \vec{B} \neq 0$ e densidades de correntes deveriam ser vistas, surgindo assim uma inconsistência física.	169
7.9	Coordenadas lagrangianas e espaciais para um corpo deformável (fluido). Linha tracejada indica a posição de P para cada parâmetro s	172
8.1	Figura ilustrando o campo de velocidades contendo vórtices de Orszag-Tang. Em (b), um zoom da região central de (a). Em (c), as linhas de campo magnético integradas a partir do campo de velocidades. As setas indicam a localização de <i>X-point</i>	181
8.2	O mesmo da Figura 8.1, porém após a integração de uma unidade de tempo ($t = 1$).	182
8.3	Figura ilustrando a detecção de estruturas vorticais de um campo de Orszag-Tang em t_0 utilizando a técnica de densidade de correntes. Em (a), está ilustrada as magnitudes das densidades de correntes normalizadas e as estruturas vorticais (linhas pretas) detectadas pelo <i>contour plot</i> , onde são escolhidas as curvas de nível centradas nos valores máximos das densidades de corrente de corrente normalizada, de modo que estas sejam convexas e mais externas. Em (b), o mesmo de (a), porém com plot de superfície. Em (c), são destacadas linhas de campo magnético superposta por um dos dois vórtices detectados pela técnica usual de densidade de corrente, o qual é destacado por uma linha vermelha. Sobre este vórtice, são colocadas condições iniciais representadas por pontos amarelos, os quais são integrados, formando as linhas amarelas, cujas trajetórias se afastam da linha vortical.	184

8.4	Figura ilustrando a detecção de estruturas vorticais de um campo de Orszag-Tang em t_0 utilizando a técnica IACD. Em (a), está ilustrado o campo IACD normalizado e as estruturas vorticais (linhas vermelhas) detectadas. Em (b), o mesmo de (a), porém com plot de superfície. Em (c), são destacadas linhas de campo magnético superposta por um dos dois vórtices detectados pela técnica IACD, o qual é destacado por uma linha amarela. Sobre este vórtice, são colocadas condições iniciais representadas por pontos vermelhos, os quais são integrados, formando as linhas vermelhas, cujas trajetórias permanecem sobre a linha vortical.	186
8.5	Figura ilustrando a densidade de corrente para o campo de Orszag-Tang em $t = 1$. Em (a), a magnitude da densidade de corrente normalizada e os pequenos vórtices (linhas amarelas) detectados por esta metodologia. Em (b), o mesmo de (a), porém plotado em superfície.	187
8.6	Figura ilustrando em $t = 1$. Em (a), o campo IACD normalizado e os vórtices (linhas amarelas) detectados por esta metodologia. Em (b), o mesmo de (a), porém plotado em superfície. Em (c), as linhas de campo magnético superpostas pelas trajetórias (linha amarela) de condições iniciais colocadas sobre as estruturas vorticais detectadas pela técnica IACD.	188
8.7	Campos vorticais de Wu-Chang em $t = 300$ (painéis superiores) e em $t = 386$ (painéis inferiores). Em (a) e (d) são mostrados vetores de campo magnético. Em (b) e (e) são mostradas linhas de campo magnético. Em (c) and (f) são mostradas as densidades de correntes.	190
8.8	Campos vorticais de Wu-Chang em $t = 300$ vistos por ângulos diferentes. Os anéis amarelos centrados nos pontos de máxima densidade de corrente representam as curvas de nível convexas e mais externas, representando os vórtices detectados pela técnica de densidade de corrente.	191
8.9	Campos vorticais de Wu-Chang em $t = 300$ vistos por ângulos diferentes. Os anéis amarelos centrados nos pontos de máximo IACD representam os vórtices detectados pela técnica IACD.	192
8.10	Figura mostrando um dos vórtices de Fig.8.9(b) aumentado. Pontos brancos e verdes representam condições iniciais colocadas sobre e fora do vórtice, respectivamente. Linhas brancas e verdes representam as trajetórias dos pontos brancos e verdes, respectivamente, quando integrados.	193
8.11	Figura ilustrando dois anéis magnéticos entrelaçados em um tempo inicial t_0 , os quais são utilizados como condições iniciais magnética.	195
8.12	Figura ilustrando os dois anéis magnéticos entrelaçados da Figura 8.12 após um tempo de $t = 100$. Os painéis (a) e (b) são exatamente os mesmos, porém vistos de ângulos diferentes.	196

8.13	Figura ilustrando o campo magnético horizontal sobre o plano $z = 0$ em $t = 100$. Em (a), as componentes horizontais (B_x, B_y) dos vetores campo magnético. Em (b), as linhas de campo magnético utilizando apenas componentes horizontais. Em (c), o campo IACD com dois vórtices magnéticos detectados (linhas pretas).	197
8.14	Em (a) e (b), são mostrados tubos magnéticos construídos a partir de vórtices coerentes detectados pela técnica IACD. Em (c) e (d), os mesmo de (a) e (b), porém com a inclusão de linhas de campo magnético (linhas verdes) construídas a partir de pontos fora dos vórtices coerentes detectados pelo IACD.	198
9.1	Figura ilustrando três situações distintas em que a vorticidade é diferente de zero.	199
9.2	O mesmo que a Figura 9.1, porém agora para o caso do rotacional do campo magético.	200
9.3	Figura esquemática do método parâmetro-D. Bolas azuis sólidas representam as posições iniciais de 5 partículas vizinhas, enquanto que os círculos azuis representam suas posições finais.	201
9.4	Figura ilustrando a componente horizontal do campo de velocidades fotosférico sobre uma única célula de super-granulação em $t=05:47:34$ UT. O tamanho da região é de $50Mm \times 50Mm$	202
9.5	Figura ilustrando vórtices detectado pelo LAVD no intervalo de tempo de $t=05:47:34$ UT até $t=06:02:34$ UT. Note que em (a) foi detectado um falso vórtice. Linhas de correntes do campo de velocidade fotosférico também são mostradas.	203
9.6	Figura ilustrando a detecção de vórtices na região completa da Figura 9.4 para o intervalo de tempo de $t=05:47:34$ UT até $t=06:02:34$ UT. Em (a), vórtices detectados pelo LAVD e campo de velocidade. Em (b), os vórtices detectados pelo parâmetro-D e fundo colorido pela intensidade do deslocamento.	204
9.7	Figura ilustrando as linhas de correntes e os vórtices B3, B6 e B7, presentes na Figura 9.6. A figura se encontra colorida pela intensidade de $\nabla \times D$	204
10.1	Figura ilustrando duas naves com diferentes velocidades. Em (a), estão ilustradas as velocidades das naves em relação a um observador na Terra, enquanto que em (b) está ilustrado a velocidade da nave 2 em relação á nave 1.	208

10.2	Figura ilustrando quatro partículas, cada uma com uma velocidade, as quais formam um padrão vortical. Em (a), estão ilustradas as velocidades das partículas e do astronauta em relação a um observador na Terra, enquanto que em (b) estão ilustradas as velocidades das partículas em relação ao astronauta. Note que as velocidades observadas pelos dois referenciais são completamente diferentes	209
10.3	Figura ilustrando os vetores diferença de velocidade, onde fez-se a diferença entre as velocidades da Figura 10.2 de cada partícula e a velocidade no ponto central das linhas pontilhadas. Neste caso, os vetores diferença de velocidade são exatamente os mesmos nos dois referenciais. Além disto, o padrão vortical é conservado	210
10.4	Figura ilustrando dois referenciais se movendo um em relação ao outro. Neste caso, um ponto no espaço terá o vetor posição \vec{r} em relação a um referencial e \vec{r}^* em relação ao outro. O vetor distância entre os dois referenciais é dado por \vec{c}	211

LISTA DE TABELAS

	<u>Pág.</u>
5.1 Tabela dos valores dos parâmetros de forma ξ e de escala σ e seus respectivos intervalos de confiança de 95%, ambos obtidos na modelagem da distribuição GPD de todas as séries de volatilidade das figuras 5.2, 5.3 e 5.4. Os parâmetros ξ e σ foram obtidos pelo método de <i>maximum likelihood estimate</i> , enquanto que seus respectivos intervalos de confiança foram obtidos por inferência, utilizando uma aproximação normal para os valores estimados.	99
5.2 Tabela dos valores dos parâmetros de forma ξ e de escala σ e seus respectivos intervalos de confiança de 95%, ambos obtidos na modelagem da distribuição GPD de todas as séries de volatilidade das figuras 5.2, 5.3 e 5.4. Os parâmetros ξ e σ foram obtidos pelo método de <i>maximum likelihood estimate</i> , enquanto que seus respectivos intervalos de confiança foram obtidos pela técnica de <i>profile likelihood</i>	99
5.3 Tabela dos valores dos parâmetros de forma ξ e de escala σ e seus respectivos intervalos de confiança de 95%, ambos obtidos na modelagem da distribuição GPD de todas as séries de volatilidade das figuras 5.2, 5.3 e 5.4. Os parâmetros ξ e σ foram obtidos pelo método de <i>maximum likelihood estimate</i> , enquanto que seus respectivos intervalos de confiança foram obtidos pela técnica de <i>Bootstrapping</i>	99
5.4 Tabela contendo os resultados das regressões lineares dos PSDs interiores aos intervalos inerciais de todas as séries das figuras 5.2, 5.3 e 5.4. A qualidade das regressões é dada pelo coeficiente de determinação (R^2). Valores obtidos para os <i>extremal indexes</i> (θ), antes e após o processo de declusterização na modelagem GPD, também são apresentados.	109

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

K41	–	Teoria de turbulência de Kolmogorov de 1941
K62	–	Teoria de turbulência de Kolmogorov de 1962
IK	–	Teoria de turbulência de Iroshnikov-Kraichnan
ARCH	–	modelos autorregressivos com heterocedasticidade condicional
DK	–	<i>Dragon Kings</i>
IACD	–	<i>Integrated Averaged Current Deviation</i>
LAVD	–	<i>Lagrangian averaged vorticity deviation</i>
IVD	–	<i>Instantaneous Vorticity Deviation</i>
EDF	–	Função de distribuição empírica
PSD	–	Densidade de espectro de potência
POT	–	Picos acima de um limiar
GEV	–	Distribuição generalizada de eventos extremos
GPD	–	Distribuição generalizada de Pareto
ACF	–	Função de autocorrelação
MHD	–	Magneto-hidrodinâmica
HILDCAA	–	<i>High Intensity Long Duration Continuous AE Activity</i>
IMFR	–	Fluxo de tubo magnético interplanetário
IMFR	–	Fluxo de tubo magnético interplanetário
LTC	–	<i>local correlation track</i>

SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
1 INTRODUÇÃO	1
2 Conceitos básicos de vento solar	9
3 TEORIA E METODOLOGIA	11
3.1 Conceitos básicos de turbulência intermitente	11
3.1.1 Modelo de turbulência de Kolmogorov	13
3.1.1.1 Hipóteses de Kolmogorov	14
3.1.1.2 Lei 2/3 de Kolmogorov	17
3.1.1.3 Lei 4/5 de Kolmogorov	18
3.1.1.4 Lei 5/3 de Kolmogorov	19
3.1.2 Modelo de turbulência de Iroshnikov-Kraichnan (IK)	22
3.1.2.1 Conceitos básicos de ondas de Alfvén	22
3.1.2.2 Variáveis de Elsässer e turbulência IK	27
3.1.3 Estruturas Coerentes na Turbulência	30
3.1.3.1 Localidade das Estruturas Coerentes na Turbulência e Intermitências	31
3.1.4 Fuga da Gaussianidade na Turbulência	32
3.1.5 Conceitos Básicos de Multifractalidade na Turbulência	34
3.2 Detecção de lâminas de correntes no vento solar - Método de Li	38
4 TEORIA CLÁSSICA DE EVENTOS EXTREMOS	41
4.1 Conceitos Estatísticos Básicos	42
4.1.1 Função Densidade de Probabilidade - PDF	42
4.1.2 Função de Máxima Verossimilhança	43
4.1.3 Conceitos Básicos de Função de Distribuição Empírica e Plot Quantílico	45
4.2 Modelos Assintóticos para Valores de Máximos em Blocos (Distribuição Generalizada de Eventos Extremos - GEV)	46
4.2.1 Modelagem de Máximos em Blocos	48
4.2.2 Modelagem de Mínimos em Blocos	52
4.2.3 Inferência Estatística para Distribuição GEV	53
4.3 Modelos de Excessos Acima de um Limiar (Distribuição Generalizada de Pareto - GPD)	56
4.3.1 Modelagem de Picos Acima de um Limiar	57

4.3.2	Prova do Teorema 4	59
4.3.3	Técnicas de Escolha do Limiar	60
4.3.4	Inferência Estatística para Distribuição GPD	63
4.4	Dragon Kings: uma nova classe de eventos extremos	65
4.4.1	Teste-DK	67
4.4.2	Teste-U	70
4.4.3	Teste do Intervalo de Confiança para Existência de Dragon King	73
5 PAPEL DAS LÂMINAS DE CORRENTES NA MODELAGEM DA TEORIA DE EVENTOS EXTREMOS NO VENTO SOLAR		77
5.1	Dados e pré-processamentos	77
5.1.1	Séries Temporais	81
5.1.2	Escolha do Limiar e Processo de Declusterização	84
5.1.3	Análise Estatística de Valores Acima do Limiar - POT	91
5.1.4	Análise Estatística de Máximos em Blocos	100
5.2	Papel das Lâminas de Correntes na Turbulência Intermitente e Multi-fractalidade no Vento Solar	104
5.3	Dragon Kings e reconexões magnéticas no vento solar	110
5.3.1	Condição Diamagnética para Reconexão Magnética	110
5.3.2	Reconexão Magnética: uma candidata a Dragon King no Vento Solar	114
5.3.2.1	Série Temporal Analisada	115
5.3.2.2	Aplicação dos Testes Estatísticos	116
6 SIMULAÇÃO MHD-3D: MODELO SIMPLIFICADO DE VENTO SOLAR		127
6.1	Simulação MHD-3D	127
6.2	Obtenção de Séries Espaciais de Campo Magnético e Densidades de Corrente em Simulação MHD-3D	128
6.3	Técnica para Obtenção de Série Espacial em Malhas-2D com Condições de Contorno Periódicas	131
6.4	DETECÇÃO DE POSSÍVEIS LÂMINAS DE CORRENTES EM SIMULAÇÃO MHD-3D	134
6.5	TEORIA DE VALORES EXTREMOS EM SIMULAÇÃO MHD-3D: MODELAGEM DA GPD	138
7 DETECÇÃO OBJETIVA DE ESTRUTURAS COERENTES VORTICAIS		151
7.1	Detecção Objetiva de Estruturas Vorticais Lagrangianas - LAVD	152

7.1.1	Rotacionalidade de Vórtices Lagrangianos Coerentes	154
7.2	Rotacionalidade de Vórtices Eulerianos Coerentes - IVD	156
7.3	Detecção objetiva de vórtices magnéticos	160
7.3.1	Objetividade Temporal	160
7.3.2	Objetividade Espacial	163
7.3.3	Introdução à Técnica IACD	167
7.3.4	Prova da Objetividade do IACD	169
8	APLICAÇÕES 2-D E 3-D DA TÉCNICA IACD	179
8.1	Problemas MHD 2-D incompressível	179
8.1.1	Condições iniciais vorticais de Orszag-Tang	179
8.1.2	Condições iniciais randômicas: modelo de magnetotail de Wu-Chang .	189
8.2	Problema MHD 3-D compressível	193
9	FALSAS DETECÇÕES DE VÓRTICES E APLICAÇÃO DO	
	PARÂMETRO-D NA FOTOSFERA SOLAR	199
9.1	Falsas detecções de vórtices	199
9.2	Parâmetro-D	200
9.3	Aplicação do Parâmetro-D em dados da fotosfera solar	202
10	DETECÇÃO EULERIANA E OBJETIVA DE CENTROS VOR-	
	TICAIAS ATRAVÉS DE CAMPO DE VELOCIDADES	207
11	CONCLUSÃO	217
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	221

1 INTRODUÇÃO

Na natureza, a maioria dos escoamentos são turbulentos, sendo neste caso muito importante compreender os mecanismos físicos que governam esse tipo de fenômeno. Este tipo de regime é altamente instável, contendo flutuações dependentes do tempo e localizadas pontualmente no espaço. Uma das principais características desse tipo de escoamento é a presença de múltiplas escalas envolvidas (FRISCH, 1995), propiciando a existência de intermitência e multifractalidade (FRISCH, 1995). Várias tentativas de descrever processos turbulentos têm sido realizadas, porém sua natureza não linear e a presença de um número enorme de graus de liberdade tornam esta tarefa praticamente impossível (LANDAU; LIFSHITZ, 1959). Nesse sentido, Taylor (1935) foi um dos pioneiros em introduzir ferramentas estatísticas para o estudo de turbulência, o que trouxe um avanço significativo para o seu entendimento. Outro grande nome desta área foi Kolmogorov, um dos pioneiros em estudos para descrever a maneira pela qual a equação de Navier-Stokes em três dimensões distribui a energia do regime turbulento entre os seus diversos graus de liberdade. Baseado nisso, ele formulou suas primeiras hipóteses que, em 1941, fundamentaram sua primeira lei, denominada lei K41 (KOLMOGOROV, 1941a). Por reconhecer a existência de fenômenos intermitentes, já previstos por Landau (LANDAU; LIFSHITZ, 1959), Kolmogorov aprimorou sua lei K41, publicando em 1962 sua segunda lei, chamada K62 (KOLMOGOROV, 1962).

Apesar de caóticos, os escoamentos turbulentos apresentam algumas regiões com certos padrões organizados (EIGER, 1989). Em turbulência, estas regiões estão associadas às chamadas estruturas coerentes (HUSSAIN, 1941), Moller e Silvestrine (2004), Robinson (1991), (CAMUSSI; GUJ, 1997) que, por sua vez, estão intimamente relacionadas com o conceito de vórtices, os quais se manifestam na turbulência em diferentes escalas de comprimento, interagindo entre si, trocando energia, momento, dentre outras propriedades (DAVIDSON, 2004) em um complexo processo de cascata (FRISCH, 1995), em que estão envolvidos também o fenômeno de estiramento das estruturas coerentes (DAVISON; SMITH, 1990). Em cada escala de tamanho deste processo, estruturas coerentes maiores decaem em outras menores, que por sua vez decaem em estruturas menores ainda, até que a escala de dissipação seja alcançada (RICHARDSON, 1922). Em cada etapa deste processo as estruturas nas suas diversas escalas preenchem o espaço de forma heterogênea e muito bem localizada (FRISCH, 1995). Neste sentido, surge o conceito de intermitência, descoberto experimentalmente por Batchelor e Townsend (1949) e que está relacionada com a presença de raros, mas fortes gradientes de alguma grandeza com acentuada localização no es-

paço ou no tempo, elevando fortemente a taxa de dissipação local de energia (STULL, 1988). Por sua vez, a intermitência interfere de forma direta nas características estatísticas da turbulência dentre suas diversas escalas (FRISCH, 1995). Assim, a turbulência não mais poderia ser considerada autossimilar, surgindo a necessidade de uma visão multifractal para tal fenômeno (HALSEY et al., 1986). Uma consequência direta da presença de multifractalidade e intermitência em processos turbulentos é a presença de eventos extremos.

O estudo de eventos extremos tem recebido notável interesse por uma ampla parte da comunidade científica, sendo empregado em diversas áreas do conhecimento, dados os impactos severos por eles gerados. Devido a isso, inúmeras ferramentas estatísticas têm sido desenvolvidas para esse tipo de análise. Devido ao fato dos eventos extremos serem geralmente raros, a modelagem das funções de distribuição baseada apenas nas amostras é uma tarefa difícil. Diante disto, surge a necessidade de modelos paramétricos que sejam capazes de modelar distribuições de probabilidades de tais eventos. Dentre elas, a teoria clássica de eventos extremos EVT, proposta por Fisher e Tippett (1928), a qual abrange avançadas técnicas e ferramentas estatísticas que permitem tal modelagem. Uma das grandes vantagens do EVT é que ela dispensa qualquer conhecimento prévio a respeito das distribuições de probabilidades originais da amostra, ou seja, as possíveis distribuições assintóticas para eventos extremos são universais (COLES, 2001), e portanto, independentes das distribuições reais da amostra. Basicamente a EVT engloba duas metodologias: a técnica de máximos em blocos (FISHER; TIPPETT, 1928) e a técnica de valores acima de um limiar (JAMES, 1975), (BALKEMA; HAAN, 1974).

Dentre várias aplicações da teoria clássica de eventos extremos, se encontram estudos de fenômenos naturais como velocidade do vento (FAWCETT; WALSHAW, 2006), secas e inundações (ENGELAND et al., 2004), terremotos (OGATA, 1988), doenças (THOMAS et al., 2016), etc. Devido ao alto grau de impacto sobre o nosso planeta, atualmente esta linha de estudos tem sido largamente empregada para o clima espacial (“space weather”) (RILEY, 2012), (HANSLMEIER, 2007). Nessa área, vários estudos de caso têm sido analisados, tais quais em solar flares (TSIFTSI; LUZ, 2018), tempestades geomagnéticas (TSUBOUCHI; OMURA, 2007), injeção de energia do vento solar na magnetosfera terrestre (MOLONEY; DAVIDSEN, 2010), número de manchas solares (ACERO et al., 2017), (ACERO et al., 2018), dentre outros.

De todos os agentes que compõem o clima espacial, o vento solar merece destaque, visto sua constante interação com a magnetosfera terrestre. Além disto, o vento solar

é considerado um laboratório natural para observação de turbulência intermitente (BRUNO; CARBONE, 2013). A primeira tentativa de descrever um modelo para processos turbulentos na presença de campo magnético foi feito por Iroshnikov (1964) e Kraichnan (1965). Neste modelo, denominado modelo IK, era considerada a presença de um campo magnético externo uniforme, cujas perturbações propagam-se como ondas com velocidade de Alfvén (ALFVÉN, 1942), e portanto, a cascata de energia neste modelo era guiada por colisões de ondas de Alfvén, diferentemente do modelo de Kolmogorov, que considerava este processo sendo devido às interações entre vórtices de diferentes escalas.

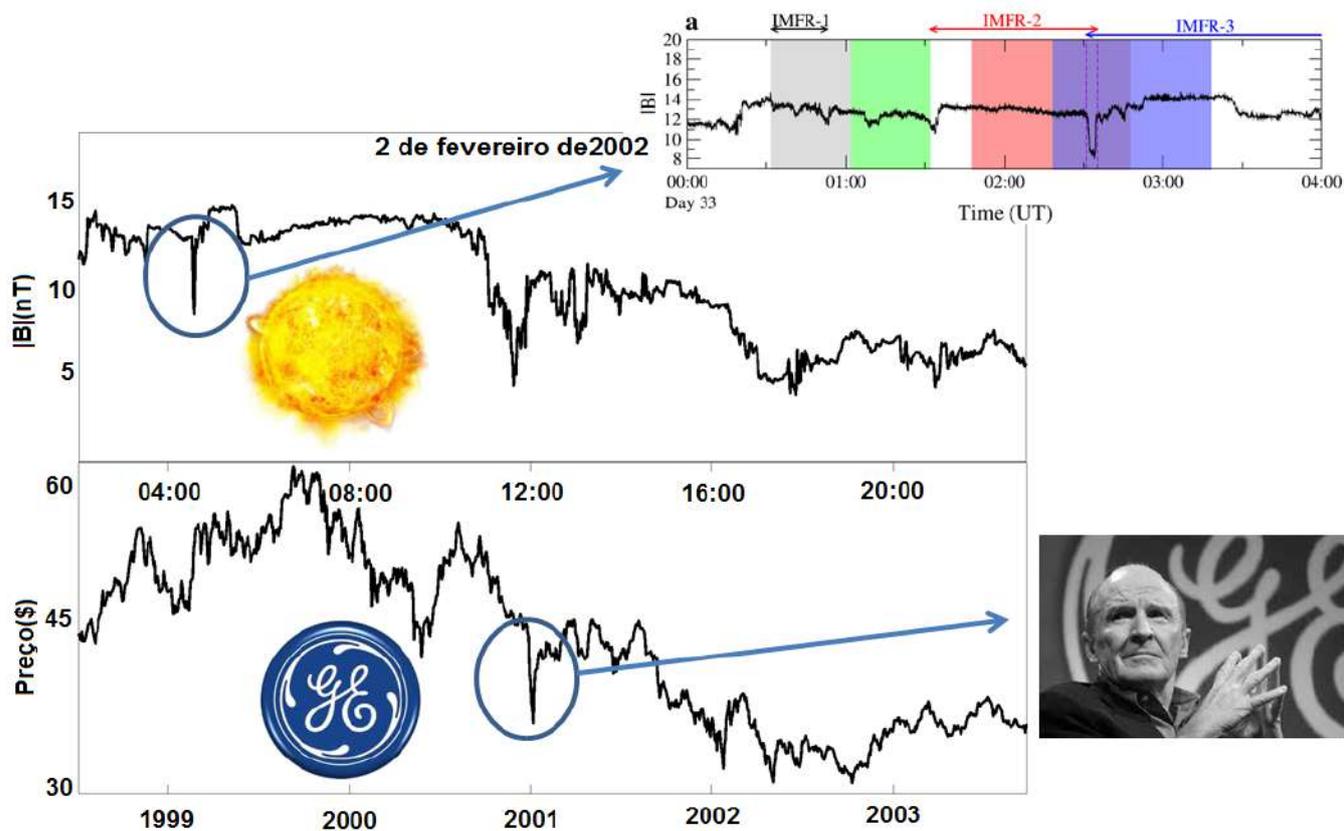
Sabe-se que o vento solar é permeado por estruturas coerentes, as quais são as grandes responsáveis pela intermitência em séries temporais do módulo do campo magnético no vento solar (CHIAN; MIRANDA, 2009; CHIAN et al., 2016). Além disso, estudos apontam que o processo de turbulência bem desenvolvida no vento solar apresenta ambas as leis de escala de Kolmogorov K41 (KOLMOGOROV, 1941a) e de Iroshnikov-Kraichnan (IK) (SALEM et al., 2009), onde foi sugerido que as lâminas de correntes são as estruturas que possivelmente são as responsáveis pela lei de escala K41 no vento solar (LI et al., 2011). A maioria dos achados mostram que o vento solar segue uma lei de escala K41 e que raramente apresenta uma lei IK (LI et al., 2011).

As estruturas coerentes estão presentes na turbulência do vento solar em diversas escalas e bem são localizadas no espaço (CHIAN et al., 2016), fazendo surgir grandes gradientes de flutuações, apresentando o fenômeno de intermitência (GRECO et al., 2009), (GRECO et al., 2017). Essas estruturas estão associadas às lâminas de correntes, que são densidades de correntes em forma de folha, geradas por regiões com descontinuidades do vetor campo magnético. A associação entre essas estruturas e a ocorrência de eventos extremos no meio interplanetário surge naturalmente, como será mostrado no presente trabalho. Baseado no fato de que lâminas de correntes estão associadas às abruptas rotações do vetor campo magnético, Li (2008) desenvolveu um método para detecção destas estruturas, que é utilizada nesta tese.

Uma das áreas do conhecimento em que eventos extremos são mais estudados é a economia, sendo que diversos trabalhos dessa área podem contribuir com a análise de séries temporais de Geofísica Espacial. Na verdade, séries financeiras compartilham várias características em comum com séries de campo magnético do vento solar, como a presença de multifractalidade (GREEN et al., 2014), de eventos extremos (GREEN et al., 2014), de caoticidade (HOLYST et al., 2001) e de turbulência (JOHAN-

NES, 2005), fazendo com que a comparação qualitativa entre os dois tipos de séries seja inevitável. A Figura 1.1 ilustra uma série temporal do módulo do campo magnético do vento solar do dia 2 de fevereiro de 2002 e uma série financeira dos ativos da multinacional General Electric (GE) para o período de 1998 a 2004. Em Fig1.1(a) é destacada uma região de interação entre dois tubos magnéticos interplanetários, onde ocorre um processo de reconexão magnética. Já em Fig1.1(b) é destacada uma região onde os ativos da multinacional caíram abruptamente, correspondendo ao período de 2001. Tal queda se deve ao fato deste ano ter ocorrido a aposentadoria do até então CEO Jack Welch, o qual presidiu a multinacional no período de 1981 a 2001. A semelhança entre as duas séries temporais é bastante significativa e não se limita apenas à impressão visual, isto porque as duas séries apresentam multifractalidade, caoticidade e eventos extremos, os quais foram calculados, porém foram omitidos neste trabalho. Além disto, os picos de mínimos destacados nas duas séries parecem possuir um mesmo comportamento qualitativo, o que não é de se espantar, já que reconexões magnéticas representam mudanças abruptas no vetor campo magnético, enquanto que crises financeiras apresentam mudanças abruptas em preços de ativos. Portanto, esta é uma das grandes motivações pelas quais dedicamos uma boa parte desta tese para à adaptação de técnicas financeiras para a área de Física solar. Além disto, crises financeiras são exemplos bem conhecidos de evento extremos, cujas ocorrências são impactantes para a sociedade, assim como reconexões magnéticas. Geralmente, crises financeiras são identificadas em séries econômicas por meio da volatilidade (TSAY, 2010), que nada mais é do que a medida dos desvios padrões de determinados períodos das séries dos retornos financeiros (TSAY, 2010). Existem alguns fatos estilizados acerca da volatilidade e retornos financeiros (TSAY, 2010), dentre eles, o efeito de memória, que por sua vez faz com que valores da volatilidade em um dado período de tempo sejam bastante dependentes de valores passados. Diante disso, uma maneira muito comum de se modelar e até mesmo prever volatilidade em séries financeiras é utilizando modelos auto regressivos para variância, tal qual o famoso modelo ARCH (Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) (ENGLE, 1982). No presente trabalho, fazemos uso intensivo da volatilidade para o estudo de eventos extremos gerados pela presença de lâminas de corrente em séries temporais do vento solar.

Figura 1.1 - Figura ilustrando em (a) uma série temporal do módulo do campo magnético do vento solar do dia 2 de fevereiro de 2002 e em (b) uma série financeira dos ativos da multinacional General Electric (GE) para o período de 1998 a 2004. Painel em (a) foi retirado de Chian et al. (2016) e representa as 4 primeiras horas da série temporal do vento solar em (a). Neste painel pode-se observar a interação entre 3 tubos magnéticos interplanetários (IMFR's), sendo que na região de interação entre os tubos IMFR-2 e IMFR-3 (região roxa) há a presença de reconexão magnética (pico de mínimo). Tal região de reconexão magnética é destacada na série temporal em (a) com um círculo azul. Região destacada com círculo azul em (b) representa o período no qual o ex CEO da General Electric, Jack Welch, aposenta-se. Pode-se notar um pico de mínimo dos ativos da série financeira neste período bastante semelhante ao pico de mínimo da série do vento solar em (a).



Fonte: Produção do autor.

Sabe-se hoje que sistemas dinâmicos não lineares tais quais plasmas espaciais, possuem partes endógenas altamente interagentes, de modo que suas estruturas internas podem sofrer auto-organizações, levando o sistema a um estado fora do equilíbrio, fazendo surgir eventos discrepantes, tais quais *outliers* (WHEATLEY; SORNETTE, 2015).

Baseado nisso, [Sornette e Ouillon \(2012\)](#), introduziu o interessante conceito de Dragon Kings (DK), que são uma classe especial de eventos extremos que, devido a algum mecanismo dinâmico interno ao sistema (endógena), ou alguma influência externa (exógena), sofreram uma amplificação atípica, que os fizeram escapar de suas distribuições originais. Neste caso, DK's seriam eventos que poderiam ser identificados, previstos ou até mesmo suprimidos ([CAVALCANTE et al., 2013](#)), ([GALUZIO et al., 2014](#)). Atualmente, DK's têm sido estudados em diversas áreas do conhecimento, tais quais furacões ([SORNETTE; OUILLON, 2012](#)), rupturas de materiais ([SORNETTE; OUILLON, 2012](#)), enchentes ([SORNETTE; OUILLON, 2012](#)), terremotos ([SORNETTE; OUILLON, 2012](#)), tempestades ([SUVEGES; DAVISON, 2012](#)), avalanches ([ANCEY, 2012](#)), atividades cerebrais ([MISHRA et al., 2018](#)), dentre outros. No entanto, este tipo de análise ainda não tem sido feito para plasmas espaciais, embora este ambiente tenha condições favoráveis para ocorrência de tais eventos. Do ponto de vista da turbulência intermitente, DK's correspondem às estruturas coerentes vorticiais localizadas pontualmente em regiões localmente imersas em caos e desordem ([REMPEL et al., 2013](#)).

Dada a importância das estruturas vorticiais para processos turbulentos, inúmeras técnicas para sua detecção têm sido desenvolvidas (veja, e.g., [Haller et al. \(2016\)](#), [Rempel et al. \(2017\)](#), [Suzana et al. \(2018\)](#) e referências internas). Dentre essas técnicas, existem aquelas que usam uma abordagem euleriana e aquelas que adotam a perspectiva lagrangiana. A última tem sido preferível por fornecer maior precisão na detecção de regiões do fluido que aprisionam partículas ao longo do tempo. Entretanto, independente de qual técnica for utilizada, um conceito muito importante que deve ser levado em consideração é a invariância de referencial. Isso porque uma mesma técnica utilizada para detecção de vórtices em referenciais distintos pode apresentar conclusões divergentes. Por exemplo, referenciais rotacionando em relação a um campo magnético homogêneo e constante podem identificar falsas curvaturas de linhas de campo, levando-se a uma falsa conclusão da existência de uma densidade de corrente. Esse problema é explicado em detalhes nesta tese, onde apresentamos um resultado crucial para a técnica IACD *Integrated Averaged Current Deviation*, recentemente publicada por [Rempel et al. \(2017\)](#). Provamos formalmente que o IACD é invariante a mudanças de referenciais por meio de rotações e translações dependentes do espaço.

O presente trabalho se encontra basicamente dividido em sete partes, sendo esta, a introdução, a primeira. A segunda consiste em uma breve revisão teórica e metodológica, que inclui noções básicas de vento solar, turbulência intermitente, detecção

de lâminas de corrente no vento solar, teoria clássica de eventos extremos e teoria de *Dragon Kings*. Na terceira parte, aplicamos técnicas estatísticas de eventos extremos e turbulência intermitente em dados de vento solar e propomos uma técnica auxiliar para detecção de lâminas de correntes baseado na volatilidade. A quarta parte é dedicada à aplicação da teoria de *Dragon Kings* em dados do vento solar. Na quinta parte, utilizamos simulação MHD-3D compressível e adiabática para simularmos de forma bastante simplificada o ambiente interplanetário. Neste caso, geramos séries espaciais, nas quais aplicamos a teoria clássica de eventos extremos e empregamos a volatilidade para detecção de possíveis regiões com a presença de lâminas de correntes e reconexões magnéticas. Posteriormente, comparamos os resultados com dados simulados obtidos nesta parte do trabalho com os resultados de dados observacionais obtidos na segunda parte. Na sexta parte fazemos uma breve introdução à técnica LAVD (*Lagrangian averaged vorticity deviation*) (HALLER et al., 2016), à técnica IVD (*Instantaneous Vorticity Deviation*) (HALLER et al., 2016) e à técnica IACD, bem como uma breve introdução aos conceitos básicos de objetividade (HALLER et al., 2016). Nesta parte provamos também que o método IACD é objetivo e pode, portanto, ser aplicado como uma nova técnica para detecção de vórtices em plasmas espaciais. Além disto, identificamos inconsistências na técnica LAVD quando aplicada à plasma solar e propomos uma solução. Desenvolvemos também um método euleriano e objetivo para detecção de centros vorticais baseado no campo de velocidades. Finalmente, na sétima parte deste trabalho concluímos e discutimos todos os resultados obtidos ao longo de toda esta tese.

2 Conceitos básicos de vento solar

A relação Sol-Terra é um assunto intrigante e atual, altamente afetada pela dinâmica de plasma do vento solar, cujas perturbações interplanetárias são causadas por eventos solares. A energia do Sol é proveniente de fusões nucleares de núcleos de hidrogênio, gerando núcleos de hélio. Uma combinação de processos radioativos e convectivos transporta a energia produzida durante o processo de fusão para a superfície visível do Sol, onde a energia é irradiada para o espaço. A maior parte desta energia é irradiada na forma de radiação eletromagnética, porém fluxos de partículas (neutras e ionizadas) também são ejetados para o meio interplanetário, através do vento solar. Estas partículas escapam ao longo de linhas de campo magnético a velocidades variáveis. Este fluxo de partículas é resultado da diferença de pressão existente entre a coroa solar, camada mais externa da atmosfera solar, e o espaço interplanetário, que faz com que o gás ionizado se expanda para o meio interplanetário do campo magnético solar (HUNDHAUSEN, 1972). Além do vento solar, outros fenômenos podem gerar a emissão de partículas e energia pelo Sol, tais quais as explosões solares, que se verificam como liberações bruscas de enormes quantidades de energia e matéria. Muitas das partículas lançadas no espaço atingem a Terra horas depois, afetando o campo magnético terrestre e podendo causar bloqueios de telecomunicações, danificar componentes eletrônicos em satélites e afetar sistemas de navegação. Observações das regiões ativas solares e do vento solar revelam que os plasmas nestas regiões são dominados por ondas e instabilidades. Em específico, flutuações de baixa frequência no campo magnético e na velocidade do plasma medidas no vento solar são, em geral, altamente correlacionadas, o que tem levado à sugestão de que as flutuações nos ventos solares são geradas por ondas de Alfvén (ALFVÉN, 1942). Ondas de Alfvén são ondas transversais que se propagam ao longo das linhas de campo magnético, tal qual corda de violão, podendo ser geradas em qualquer fluido eletricamente condutor permeado por um campo magnético. Acredita-se que Alfvénidade do vento solar é devida ao fato de que os modos Alfvênicos têm um tempo de vida maior que outros modos MHD. Durante o mínimo solar, por exemplo, as ondas Alfvén interplanetárias seriam as causas dominantes da intermitência observada na reconexão magnética na magnetopausa. A importância do vento solar e das flutuações Alfvênicas na relação Sol-Terra e na física da magnetosfera não podem ser subestimadas pois estes são os principais meios através dos quais a atividade solar comunica-se com o ambiente terrestre, o que justifica seu contínuo monitoramento.

Basicamente, observa-se o vento solar dividido em dois regimes bem definidos, sendo neste caso dividido em vento solar lento e vento solar rápido. Este último é originado

em buracos coronais e pode alcançar uma velocidade de aproximadamente 750 km/s e temperatura média de 1.6×10^6 Kelvin, ao passo que a velocidade do vento solar lento gira em torno de 350 km/s e sua temperatura é de aproximadamente 8×10^5 Kelvin. Sabe-se hoje que o vento solar é repleto de processos não lineares que contribuem diretamente para o surgimento de regimes de turbulências. O número de Reynolds aproximado para o vento solar é de cerca de $10^{10} - 10^{12}$, sendo um valor bastante apreciável. Embora tenha ocorrido um avanço imenso em relação aos estudos do vento solar, ainda assim há questões que necessitam ser esclarecidas. Um exemplo disto é o fato do vento solar acelerar a medida que se afasta do sol, além de ter sua variação de temperatura incompatível com um processo de expansão adiabática, o qual se acreditava ocorrer com o vento solar. Na tentativa de responder esta e outras questões a sonda *Parker Solar Probe*, desenvolvida pela NASA, foi lançada em direção à atmosfera solar. Existe até hoje várias discussões acerca da compressibilidade do vento solar, entretanto, a densidade média do vento solar em condições de sol calmo é de aproximadamente 7 partículas/cm³, além de um valor do módulo do campo magnético de aproximadamente 5 nT. Outro parâmetro a ser considerado é o beta do plasma β , que nada mais é que a razão entre as pressões cinética e magnética. Para o vento solar $\beta \approx 1$, podendo chegar a algo em torno de $\beta \approx 15$ em regiões com a presença de lâminas de correntes e reconexões magnéticas.

3 TEORIA E METODOLOGIA

3.1 Conceitos básicos de turbulência intermitente

Grande parte dos escoamentos encontrados na natureza e em aplicações práticas são turbulentos, sendo muito importante compreender os mecanismos físicos que governam esse tipo de fenômeno. Escoamentos turbulentos são instáveis e contêm flutuações que são dependentes do tempo e que estão bem localizadas no espaço. Dentre várias, uma das principais características deste tipo de escoamento é a presença de multiplicidade de escalas (FRISCH, 1995), propiciando o surgimento de um comportamento intermitente e multifractal (FRISCH, 1995). As maiores estruturas coerentes (baixas frequências), são em geral controladas pela geometria do escoamento, ao passo que as menores (altas frequências) são controladas pela viscosidade do fluido. Outra característica acerca deste tipo de regime é a presença de não-linearidades. Neste caso, pequenas perturbações podem ser amplificadas, gerando assim instabilidades que as conduzem a uma transição, podendo gerar flutuações de grande escala (eventos extremos). Um exemplo de parâmetro adimensional largamente utilizado para quantificar regimes turbulentos é o número de Reynolds, que é dado por (FRISCH, 1995).

$$Re = \frac{Ud}{\nu} \quad (3.1)$$

onde, U é a escala de velocidade, d é a escala de comprimento e ν é a viscosidade cinemática do fluido. Para baixos números de Reynolds o regime do escoamento é em geral laminar, ou seja, ocorre quando as partículas do fluido movem-se ao longo de trajetórias bem definidas, tais quais lâminas ou camadas. Por outro lado, para altos valores do número de Reynolds, as trajetórias das partículas do fluido em geral perdem sua forma bem definida e passam a se comportar caoticamente, fazendo com que o regime perca seu caráter laminar e evolua para um regime turbulento. Neste caso, quanto maior Re , mais turbulento será o escoamento.

De uma forma mais precisa, a turbulência pode ser definida como um regime dissipativo e com dinâmica não linear, manifestando um comportamento de caos no espaço e no tempo (GALUZIO et al., 2014), cuja evolução pode ser guiada por um grande número de graus de liberdade (FRISCH, 1995). Neste caso, uma tentativa para se descrever o fenômeno de turbulência foi a utilização das equações de Navier-Stokes, que se trata de equações diferenciais parciais não lineares, dadas por

$$\partial_t \vec{u} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = \nu \nabla^2 \vec{u} - \frac{\nabla p}{\rho} + \vec{f}, \quad (3.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0. \quad (3.3)$$

onde t é o tempo, $u = u(x, t)$ é o campo de velocidade, $\rho = \rho(x, t)$ é a densidade, $p = p(x, t)$ é o campo de pressão, ν é a viscosidade cinemática e $f(x, t)$ representa um campo de forças externas (LANDAU; LIFSHITZ, 1959). A equação 3.3 surge da equação de continuidade sob a condição de incompressibilidade (LANDAU; LIFSHITZ, 1959).

A grande dificuldade que surge para resolver as equações de Navier-Stokes reside no segundo termo do lado esquerdo da igualdade na equação 3.2. Esse termo é não linear e está diretamente relacionado com a turbulência. Para número de Reynolds muito elevados, esta não-linearidade torna a solução de 3.2 praticamente impossível (LANDAU; LIFSHITZ, 1959).

Kolmogorov (1941a) estudou a maneira pela qual a equação de Navier-Stokes em três dimensões distribui energia entre os seus diversos graus de liberdade. Ele propôs duas hipóteses em 1941 (KOLMOGOROV, 1941a) e, por reconhecer a existência de fenômenos intermitentes, previstos por Landau (LANDAU; LIFSHITZ, 1959), acrescentou uma terceira em 1962 (KOLMOGOROV, 1962). Tais hipóteses ficaram conhecidas como a teoria K41 e K62, respectivamente (FRISCH, 1995). Para uma melhor compreensão das hipóteses de Kolmogorov, será feita mais adiante uma breve discussão sobre as mesmas.

Dados os inúmeros graus de liberdade presentes em processos turbulentos, faz-se necessário a utilização de ferramentas estatísticas para seu estudo (MONIN; YAGLOM, 1971). Um dos primeiros métodos estatísticos utilizados na teoria de turbulência foi apresentado por Taylor (1935), que propôs caracterizar os campos turbulentos através de sua função de autocorrelação. Para simplificar os cálculos das funções de autocorrelação, Taylor (1935) formulou as hipóteses de homogeneidade estatística e de isotropia dos escoamentos turbulentos, nas quais as propriedades estatísticas do escoamento são invariantes sob translação e rotação, respectivamente. Além disto, a inserção de análises estatísticas no estudo de turbulência possibilitou análises de fenômenos de intermitência presentes em algumas escalas do processo turbulento.

A palavra turbulência sempre vem associada a fluidos, embora isso nem sempre seja

verdade. Qualquer sistema dinâmico regido por um número elevado de graus de liberdade pode atingir o regime de turbulência (FRISCH, 1995). Vale a pena ressaltar que sistemas dinâmicos com um número baixo de graus de liberdade pode não atingir um regime turbulento, porém, pode alcançar um comportamento altamente imprevisível. Neste sentido surge o conceito de caos determinístico (ALLIGOOD et al., 1996).

3.1.1 Modelo de turbulência de Kolmogorov

Apesar de não haver uma teoria definitiva para turbulência, Kolmogorov (1941a) desenvolveu um quadro conceitual conhecido hoje como teoria K41, que se aplica à turbulência isotrópica e homogênea. De acordo com essa teoria, a turbulência estaria dividida em certos intervalos, onde a energia deve ser injetada, transferida e dissipada (FRISCH, 1995). A escala intermediária acima da qual a energia é injetada e abaixo da qual a energia é dissipada, é chamada intervalo inercial (FRISCH, 1995). Nesse intervalo, a energia não é gerada e nem dissipada, mas sim transferida através das várias escalas existentes neste tipo de regime.

Utilizando hipóteses de localidade e de que o processo físico no intervalo inercial é governado por apenas um parâmetro¹, Kolmogorov (1941a) foi capaz de obter, por meio de análise dimensional, o espectro de energia de um fluxo turbulento bem desenvolvido. Ele verificou que $E(\kappa) \propto \varepsilon^{\frac{2}{3}} \kappa^{-\frac{5}{3}}$ (KOLMOGOROV, 1941a), onde κ é número de onda e ε é o parâmetro de dissipação de energia. Essa expressão é chamada de espectro de Kolmogorov (FRISCH, 1995). Dentro desse contexto, surge uma importante característica de processos turbulentos: a auto-similaridade. A energia do sistema, inicialmente concentrada em poucos modos espaciais, se redistribui para modos com números de onda cada vez maiores, de modo a formar um mecanismo de cascata de energia. É importante ressaltar que este resultado é previsto ser válido apenas para o intervalo inercial.

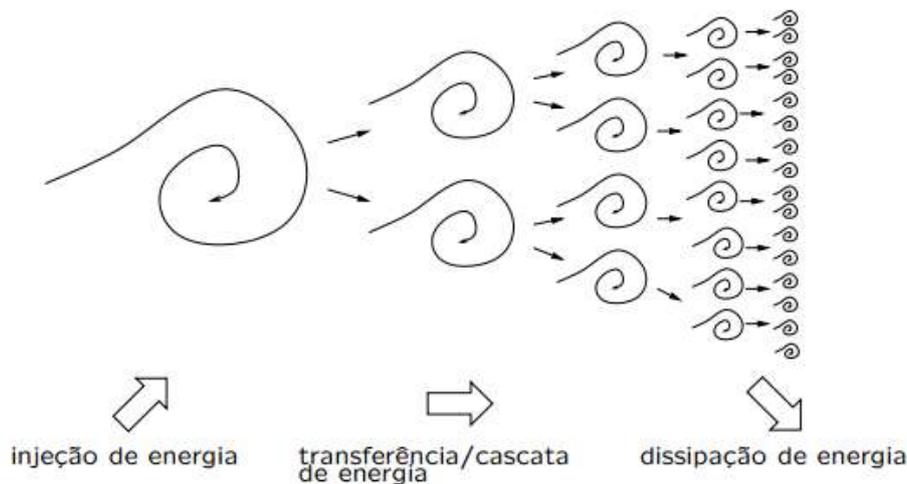
Questionado por Landau (LANDAU; LIFSHITZ, 1959), Kolmogorov se viu obrigado a aperfeiçoar sua teoria K41 e, em 1962, elaborou a teoria K62 (KOLMOGOROV, 1962), onde são incluídos os fenômenos de intermitência (FRISCH, 1995).

¹Este parâmetro é referente à taxa de dissipação de energia por unidade de massa (ε) (FRISCH, 1995).

3.1.1.1 Hipóteses de Kolmogorov

Richardson (1922) foi o primeiro a idealizar um processo de cascata de energia. Para ele, a turbulência era composta por estruturas de diversos tamanhos que seriam instáveis e, portanto, se quebrariam, transferindo energia para as estruturas menores, que por sua vez, também se quebram e transferem energia para estruturas ainda menores e assim por diante, até que os efeitos da viscosidade molecular se tornem efetivos, dissipando a energia cinética e estabilizando as estruturas. Este processo está ilustrado na Figura 3.1

Figura 3.1 - Figura ilustrando a cascata de energia idealizada por Richardson. A energia é injetada nas maiores escalas, transmitida em escalas intermediárias e então dissipada nas menores escalas. Neste caso, a energia é transmitida por meio de um processo contínuo de quebra de vórtices maiores em vórtices menores, até que os vórtices alcancem um tamanho compatível com a escala de dissipação e passam a ser destruídos.



Fonte: Davidson (2004).

Diante disso, várias questões são levantadas, como por exemplo, qual seria o tamanho das menores escalas das estruturas que são responsáveis pela dissipação da energia? À medida em que a escala de comprimento decresce, a velocidade e o tempo característicos aumentam, diminuem ou permanecem inalterados? Essas e outras questões foram respondidas por (KOLMOGOROV, 1941a). Para isso, ele propôs três hipóteses (FRISCH, 1995), a saber,

- **H1:** *No limite de número de Reynolds infinito, para pequenas escalas e*

longe das fronteiras, todas as possíveis simetrias das equações de Navier-Stokes, geralmente quebradas pelo mecanismo de produção de fluxo turbulento, são restauradas (exceto inversão temporal) em um sentido estatístico.

Neste caso, pequenas escalas são entendidas como escalas tais que $l \ll l_0$, onde l_0 é a escala integral (maiores escalas), onde a turbulência é produzida. Nesta primeira hipótese, (KOLMOGOROV, 1941a) resgata também a ideia de isotropia e homogeneidade para as pequenas escalas, ou seja, as propriedades estatísticas dos incrementos na velocidade são invariantes sob translação ou rotação. Matematicamente falando, dado o incremento nas diferenças de velocidade $\delta v(r, l) \equiv v(r + l) - v(r)$, então homogeneidade implica em

$$\delta v(r + \rho, l) = \delta v(r, l) \quad (3.4)$$

Já para as escalas maiores, grandes vórtices sofrem grandes influências da geometria e das condições de contorno do escoamento, surgindo assim uma direção privilegiada (anisotropia). À medida em que os grandes vórtices decaem em menores vórtices no processo de cascata de energia, as direções preferenciais dos grandes vórtices são perdidas por meio do processo caótico de redução de escala (FRISCH, 1995).

- **H2:** *Sob as mesmas condições de H1, o fluxo turbulento é autossimilar nas pequenas escalas, ou seja, possui um único expoente de escala “h”.*

Desta forma, deve existir um expoente de escala $h \in R$, tal que $\forall \lambda \in R$, podemos escrever (FRISCH, 1995)

$$\delta v(r, \lambda l) = \lambda^h \delta v(r, l), \quad (3.5)$$

para todo r e todo incremento l e λl pequenos comparados à escala integral l_0 .

Esta segunda hipótese tem um papel fundamental na turbulência, já que ela anuncia que para pequenas escalas, a turbulência é autossimilar. Intuitivamente, esta autossimilaridade significa que, ao variarmos a escala, as características estatísticas da turbulência são inalteradas (para pequenas escalas). Esta ideia indica que, para pe-

pequenas escalas, a turbulência é monofractal (FRISCH et al., 1978). Conforme veremos mais adiante, a ideia de monofractalidade foi posta em xeque, surgindo então uma proposta de multifractalidade para turbulência em pequenas escalas.

Uma outra importante consequência desta hipótese é o fato de que se $\delta v(r, l)$ possui invariância de escala, então $\delta v(r, l)$ pode ser escrito como uma lei de potência $\delta v(r, l) \propto l^h$. De fato,

$$\begin{aligned}\delta v(r, l) \propto l^h &\Rightarrow \delta v(r, l) = \alpha l^h, \\ \delta v(r, \lambda l) &= \alpha (\lambda l)^h = \lambda^h \alpha l^h = \lambda^h \delta v(r, l), \\ \delta v(r, \lambda l) &= \lambda^h \delta v(r, l),\end{aligned}$$

onde α é uma constante de proporcionalidade. Portanto, uma lei de potência possui invariância de escala.

- **H3:** *Sob as mesmas condições de H1, um fluxo turbulento possui uma taxa média de dissipação de energia “ ε ” por unidade de massa finita e não nula.*

Da mesma forma que a informação direcional das grandes estruturas se perde devido à isotropia (primeira hipótese), à medida em que a energia é transferida pela cascata, toda a informação sobre a geometria das grandes estruturas é perdida (FRISCH, 1995). Como consequência, a estatística para as pequenas escalas do movimento é universal (FRISCH, 1995). Diante disso, deve haver um intervalo característico que separa as grandes estruturas anisotrópicas das pequenas estruturas isotrópicas, sendo este intervalo chamado de intervalo de equilíbrio universal (FRISCH, 1995). Portanto, a turbulência no intervalo de equilíbrio universal não deve depender da geometria nem das condições de contorno da fonte geradora da turbulência (grandes escalas). Neste caso, surge a ideia de universalidade para este intervalo (DAVIDSON, 2004).

O processo de cascata de energia dentro do intervalo de equilíbrio universal é dominado pela transferência de energia e a dissipação viscosa. A taxa na qual as pequenas estruturas recebem energia das grandes estruturas nesse intervalo é representada pelo parâmetro “ ε ”, ao passo que a viscosidade cinemática é representada por ν . Diante disso, surge a primeira hipótese de similaridade de Kolmogorov (FRISCH, 1995):

- **Primeira hipótese de similaridade de Kolmogorov:** *em qualquer escoamento turbulento a números de Reynolds suficientemente altos, a esta-*

tística dos movimentos das pequenas escalas (intervalo de equilíbrio universal), possui uma forma universal que é determinada unicamente por “ ε ” e “ ν ”.

De acordo com a primeira hipótese de similaridade de Kolmogorov, pode-se escrever as escalas de tempo, comprimento e velocidade de forma única e em termos de “ ε ” e “ ν ”.

A segunda hipótese consiste em (FRISCH, 1995):

- **Segunda hipótese de similaridade de Kolmogorov:** *em todo escoamento turbulento a um número de Reynolds suficientemente grande, as estatísticas dos movimentos de escala l no intervalo inercial, possuem uma forma universal única determinada por “ ε ” e independente de “ ν ”.*

Nesse caso, a segunda hipótese afirma que a estatística no interior do intervalo inercial (que se encontra dentro do intervalo de equilíbrio universal) deve possuir uma forma universal, determinada unicamente por “ ε ” e não mais por “ ν ”.

3.1.1.2 Lei 2/3 de Kolmogorov

Seja a função de estrutura $S_p(l)$ definida como o valor médio dos vários momentos estatísticos dos incrementos das diferenças de velocidade $\delta u(l)$, ou seja, $S_p(l) \equiv \langle (\delta u(l))^p \rangle$ (FRISCH, 1995). Seja então a função de estrutura de segunda ordem $S_2(l)$. Fazendo uma análise dimensional direta, podemos mostrar que esta quantidade tem dimensão $[L]^2 [T]^{-2}$, onde $[L]$ e $[T]$ são unidades de comprimento e tempo, respectivamente. Para o intervalo inercial, a segunda hipótese de Kolmogorov **H2** permite escrever a função de estrutura de segunda ordem como uma lei de potência². Além disto, de acordo com a segunda hipótese de similaridade, a função de estrutura $S_p(l)$ deve depender somente da taxa de transferência de energia ε . Portanto, a lei de potência para $S_2(l)$, obedecidas as hipóteses de Kolmogorov, deve ser escrita como (FRISCH, 1995)

$$S_2(l) \equiv \langle (\delta u(l))^2 \rangle = C \varepsilon^n l^m, \quad (3.6)$$

²De acordo com **H2**, $\delta u(l)$ possui invariância de escala no interior do intervalo inercial, e portanto, pode ser escrito como uma lei de potência.

onde C é uma constante de proporcionalidade adimensional e n e m são números reais, que podem ser determinados via análise dimensional. De fato,

$$\begin{aligned} [S_2(l)] &= \frac{[L]^2}{[T]^2}, \\ [C\varepsilon^n l^m] &= \left(\frac{[L]^2}{[T]^3}\right)^n [L]^m, \\ \frac{[L]^2}{[T]^2} &= \left(\frac{[L]^2}{[T]^3}\right)^n [L]^m \Rightarrow n = m = \frac{2}{3}, \end{aligned}$$

onde foi usado o fato de que a dimensão da taxa de energia por unidade de massa ε é dada por $[L]^2 [T]^{-3}$. Portanto, chegamos ao importante resultado:

$$S_2(l) \equiv \langle (\delta u(l))^2 \rangle = C\varepsilon^{\frac{2}{3}} l^{\frac{2}{3}}. \quad (3.7)$$

A relação 3.7 ficou conhecida como lei 2/3 de Kolmogorov (FRISCH, 1995).

3.1.1.3 Lei 4/5 de Kolmogorov

Em 1941, baseado nas suas hipóteses **H1**, **H2** e **H3** e, a partir das equações de Navier-Stokes e da equação de Kármán-Howarth (KARMAN; HOWARTH, 1938), Kolmogorov (1941a) havia encontrado a seguinte relação para a função de estrutura de terceira ordem dos incrementos das diferenças de velocidade (DAVIDSON, 2004) :

$$S_3(l) = -\frac{4}{5}\varepsilon l + 6\nu \frac{dS_2(l)}{dl}. \quad (3.8)$$

No entanto, devido à segunda hipótese de similaridade, as forças viscosas ν no intervalo inercial devem ser desprezíveis, de forma que o segundo termo do lado direito da relação 3.8, deverá ser negligenciado. Diante disso, em seu terceiro trabalho, Kolmogorov (1941b), a seguinte lei é enunciada:

Lei 4/5 de Kolmogorov: *No limite de altos números de Reynolds, a função de estrutura de terceira ordem de um fluxo turbulento isotrópico e homogêneo, para uma escala “ l ” pequena, comparada à escala integral “ l_0 ”, é dada em termos do valor médio da taxa de dissipação de energia “ ε ” finita e não nula, de acordo com a seguinte relação*

$$S_3(l) \equiv \langle (\delta u(l))^3 \rangle = -\frac{4}{5}\varepsilon l \quad (3.9)$$

Este resultado viria a ser um dos mais importantes na turbulência plenamente desenvolvida, devido à sua exatidão e não-trivialidade, constituindo assim uma espécie de “condição de contorno” na teoria da turbulência (FRISCH, 1995).

3.1.1.4 Lei 5/3 de Kolmogorov

Um outro resultado de grande importância para o estudo de turbulência é a relação envolvendo o espectro de energia $E(k)$ no interior do intervalo inercial. Neste caso, temos que (DAVIDSON, 2004)

$$\varepsilon = \int_0^{\infty} E(k) dk, \quad (3.10)$$

onde ε é a energia cinética por unidade de massa e $E(k)$ é o espectro de energia cinética por unidade de massa. De acordo com Frisch (1995), pode-se escrever as funções de estrutura de segunda ordem e o espectro de energia cinética por unidade de massa por meio das seguintes leis de potências:

$$E(k) \propto k^{-n}, \quad (3.11)$$

$$S_2(l) \equiv \langle (\delta u(l))^2 \rangle \propto l^{n-1}, \quad (3.12)$$

onde ($1 < n < 3$). Fazendo uma comparação direta da equação 3.12 com a equação 3.7 (lei 2/3 de Kolmogorov), temos que

$$n - 1 = \frac{2}{3} \Rightarrow n = \frac{5}{3}. \quad (3.13)$$

Além disso, devido à segunda hipótese de similaridade de Kolmogorov, no intervalo inercial, o espectro de energia cinética por unidade de massa $E(k)$ não depende do parâmetro viscosidade ν , mas apenas do parâmetro ε . Neste caso a relação 3.11 passaria a ser escrita como

$$E(k) \propto \varepsilon^\beta k^{-n}. \quad (3.14)$$

Substituindo 3.13 em 3.14, obtemos a seguinte lei de potência:

$$E(k) \propto \varepsilon^\beta k^{-\frac{5}{3}}, \quad (3.15)$$

onde β é um número real. Da equação 3.10, facilmente obtemos a dimensão da grandeza $E(k)$. Portanto, através de uma análise dimensional simples, encontramos o valor para β . De fato,

$$[E(k)] = [\varepsilon]^\beta [k]^{-\frac{5}{3}},$$

$$\left(\frac{L^2}{T^2}\right) = \left(\frac{L^2}{T^3}\right)^\beta (L)^{\frac{5}{3}} \Rightarrow \beta = \frac{2}{3}. \quad (3.16)$$

Finalmente, substituindo 3.16 em 3.15, obtemos

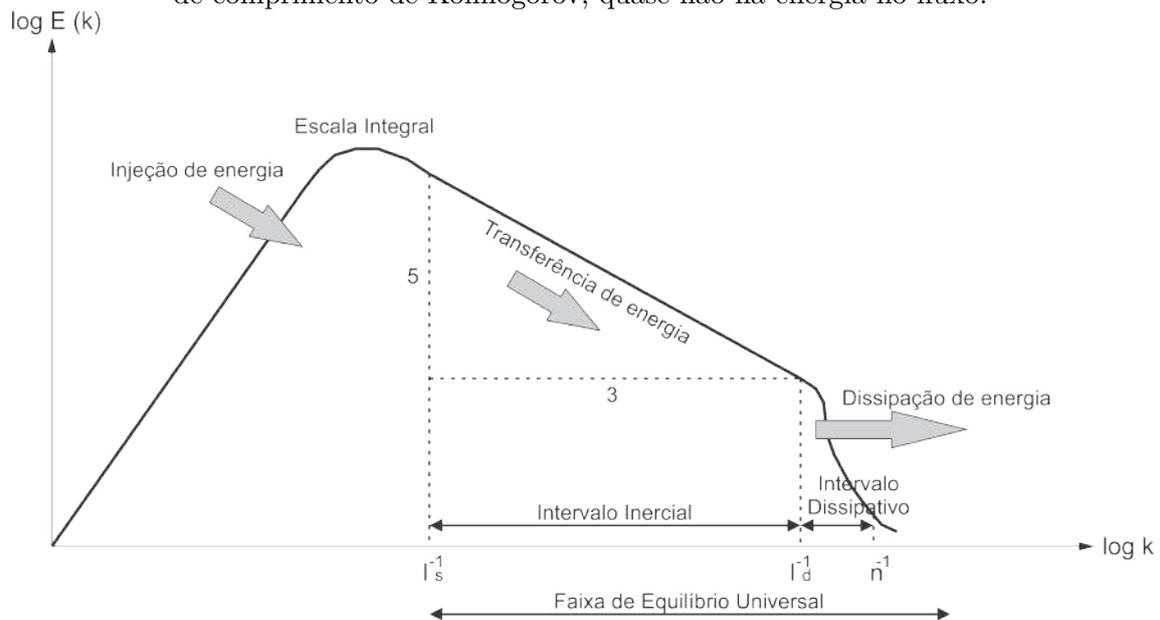
$$E(k) = C\varepsilon^{\frac{2}{3}}k^{-\frac{5}{3}}, \quad (3.17)$$

onde C é uma constante adimensional, determinada experimentalmente (FRISCH, 1995). A relação 3.17 acima, é a famosa lei 5/3 de Kolmogorov.

Uma grande utilidade da lei 5/3 de Kolmogorov é auxiliar na identificação aproximada do intervalo inercial um fluxo turbulento. Isso porque se plotarmos a equação 3.17 em um gráfico Log-Log, obtemos aproximadamente uma reta com inclinação

$(-\frac{5}{3})$, conforme a figura 3.2. Podemos notar que há um intervalo para o qual a energia é injetada no sistema à medida em que aumenta o número de onda “k”, ou equivalentemente, à medida em que diminui a escala ³. A partir de uma certa escala, a energia para de crescer e começa a ser transferida no interior do intervalo inercial, que pode ser identificado como uma aproximação de reta, cuja inclinação é $(-\frac{5}{3})$. Após o intervalo inercial, nota-se uma escala l_d , a partir da qual a energia começa a decair mais rapidamente. A partir deste ponto de quebra em l_d , surge o intervalo dissipativo.

Figura 3.2 - Figura ilustrativa do gráfico Log-Log do espectro de potência de um fluxo turbulento. Nota-se três regiões: Região de injeção de energia, de transferência de energia (intervalo inercial) e de dissipação de energia (intervalo dissipativo), sendo que as duas últimas se encontram na faixa de equilíbrio universal. Após o intervalo inercial (inclinação $-\frac{5}{3}$), na escala l_d , surge um ponto de quebra separando-o do intervalo dissipativo. Este ponto de quebra fica evidenciado pelo início de um decréscimo mais acentuado de energia. A partir da escala de comprimento de Kolmogorov, quase não há energia no fluxo.



Fonte: Produção do autor.

³O número de onda é inversamente proporcional à escala, visto que $k = \frac{2\pi}{l}$.

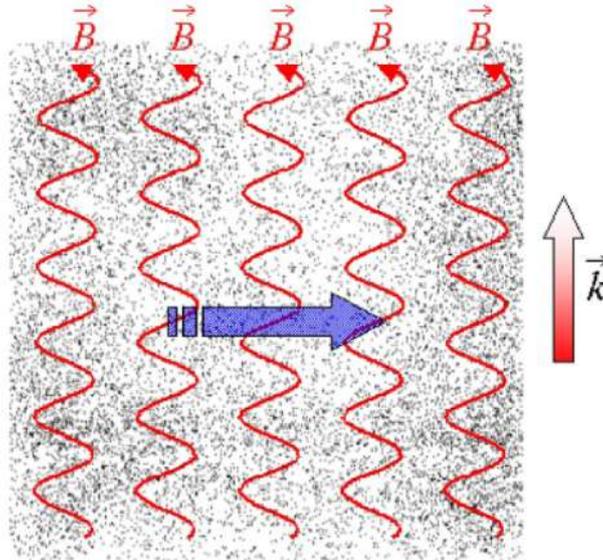
3.1.2 Modelo de turbulência de Iroshnikov-Kraichnan (IK)

A primeira tentativa de descrever um modelo para processos turbulentos na presença de campo magnético foi feito por Iroshnikov (1964) e Kraichnan (1965). Apesar da presença de campo magnético, este modelo de turbulência é considerado isotrópico, o que acaba lhe rendendo críticas (SRIDHAR; GOLDREICH, 1994; MONTGOMERY; MATTHAEUS, 1995; MATTHAEUS et al., 1996). Em tal modelo, também chamado IK, era considerada a presença de um campo magnético externo uniforme, cujas perturbações propagam-se como ondas com velocidade de Alfvén (ALFVÉN, 1942). Diferentemente do modelo K41, o qual considerava o processo turbulento sendo devido às interações entre vórtices de diferentes escalas, a transferência de energia no modelo IK era considerada guiada por colisões de ondas de Alfvén propagando ao longo de linhas de campo magnético. Neste caso, o espectro de energia surge devido espalhamentos não-lineares provenientes de colisões de pacotes de ondas de Alfvén. Diante disto, antes de darmos continuidade ao modelo de turbulência IK, faremos uma breve introdução aos conceitos básicos de ondas de Alfvén.

3.1.2.1 Conceitos básicos de ondas de Alfvén

Dentro da perspectiva da magneto-hidrodinâmica (BITTENCOURT, 2004), um fluido compressível e condutor imerso num campo magnético externo, possibilita a existência de alguns tipos de movimento ondulatório de baixa frequência, tais como as ondas Alfvén (ALFVÉN, 1942). Uma das propriedades notáveis do campo magnético dentro do contexto MHD é a propagação de ondas transversais ao longo das linhas de indução que representam esse campo. Tal processo muito se assemelha ao obtido quando cordas elásticas são postas para vibrar, conforme a Figura 3.3.

Figura 3.3 - Figura ilustrando linhas de campo magnético congeladas em uma plasma. Pertubações no plasma faz com que as linhas de campo oscilem transversalmente, tais quais cordas elásticas. Tais oscilações representam a propagação de ondas de Alfvén. Setas vermelha e azul indicam, respectivamente, sentido de propagação e de oscilação da onda.



Fonte: Bittencourt (2004).

Como bem se conhece, as vibrações transversais numa corda elástica se propagam com uma velocidade dada por

$$V_{corda} = \sqrt{\frac{\text{tensão da corda}}{\text{densidade}}}. \quad (3.18)$$

Quando um fluido condutor imerso num campo magnético é posto para oscilar, o efeito do congelamento das linhas de campo no fluido faz com que essas linhas também oscilem. Assim, trocando-se as cordas elásticas por linhas de campo magnético, a analogia fica perfeita. Nesta situação, a velocidade da onda gerada será dada de forma totalmente análoga, bastando substituir a tensão da corda pela tensão magnética. Portanto, estão presentes os elementos fundamentais para que um modo oscilatório se propague através do meio: a força restauradora (produzida pelo campo magnético) e a inércia (inerente à densidade do fluido).

Tomando o produto vetorial por \vec{B} da lei de Ampère obtemos a força de Lorentz na forma $\vec{J} \times \vec{B}$, ou seja,

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}, \quad (3.19)$$

$$\frac{1}{\mu_0} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B} = \vec{J} \times \vec{B}. \quad (3.20)$$

utilizando a identidade vetorial

$$\vec{\nabla} \left(\frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{B} \right) = \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}, \quad (3.21)$$

obtemos a força de Lorentz

$$\vec{J} \times \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} - \vec{\nabla} \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right). \quad (3.22)$$

O segundo termo da equação 3.22 é a pressão magnética isotrópica por unidade de área, enquanto que o primeiro termo é dado pela tensão magnética que aparece devido a distorção das linhas de campo magnético. Em unidades gaussianas, podemos escrever a tensão magnética como (BITTENCOURT, 2004)

$$T_{mag} = \frac{B^2}{4\pi}. \quad (3.23)$$

Portanto, a velocidade das ondas de Alfvén é dada por

$$V_A = \sqrt{\frac{\text{tensão magnética}}{\text{densidade}}}, \quad (3.24)$$

onde

$$V_A = \sqrt{\frac{B^2}{4\pi\rho}} \quad (3.25)$$

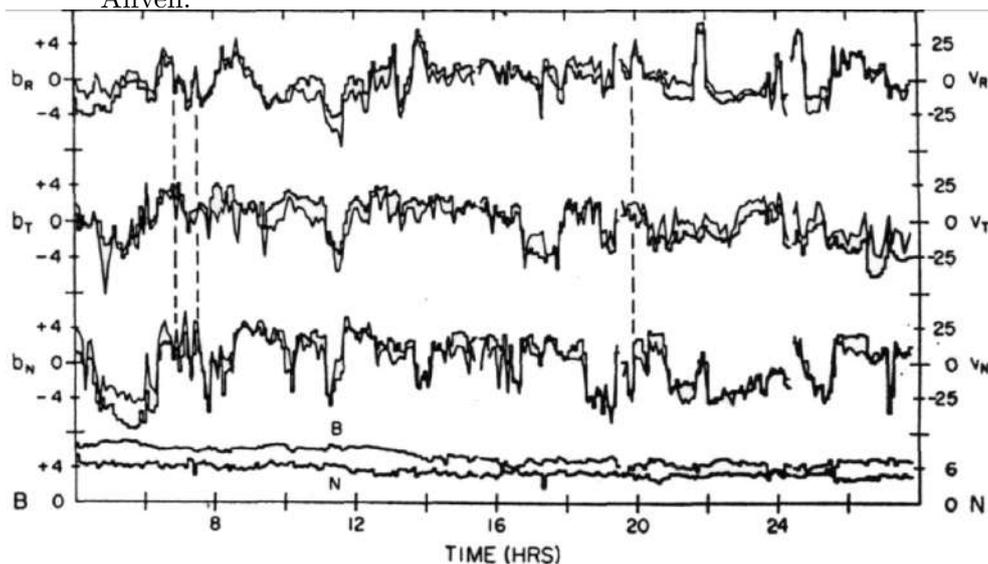
é a velocidade de Alfvén. A velocidade de propagação das ondas de Alfvén é bastante variável, a depender da região do espaço interplanetário onde esteja se propagando. Isto porque a velocidade de propagação depende do campo magnético e da densidade de partículas do meio. Por exemplo, a velocidade de fase dessas ondas próximo ao

Sol é extremamente alta se comparada com a velocidade nas proximidades da órbita da Terrestre.

Alfvén (1942) foi o primeiro a assinalar existência destas ondas. Face ao seu papel no processo de transporte de energia e momento, elas são de grande importância na Astrofísica.

A Figura 3.4 mostra algumas flutuações presentes no vento solar. Os três pares de curvas superiores mostram as componentes do campo magnético do vento solar B_N , B_T e B_R e as componentes da velocidade do vento solar U_N , U_T e U_R . O par de curvas inferior corresponde às intensidades totais do campo e da densidade. É possível notar que as componentes da velocidade e do campo magnético variaram, enquanto a magnitude total do campo e a densidade de plasma permaneceram aproximadamente constantes. Além disso, as variações nas componentes da velocidade e do campo magnético do vento solar foram bem correlacionadas entre si. Esse tipo de perturbação é característico das ondas de Alfvén. De fato, pela equação 3.25 temos que $B = V_A \sqrt{4\pi\rho}$, ou seja, existe uma correlação entre o campo magnético externo e a velocidade de Alfvén do plasma. Neste contexto, é de se esperar, que tais flutuações presentes no vento solar, são causadas por ondas de Alfvén.

Figura 3.4 - Figura ilustrando a alta correlação existente entre as flutuações do campo magnético e da velocidade no vento solar, indicando presença de ondas de Alfvén.

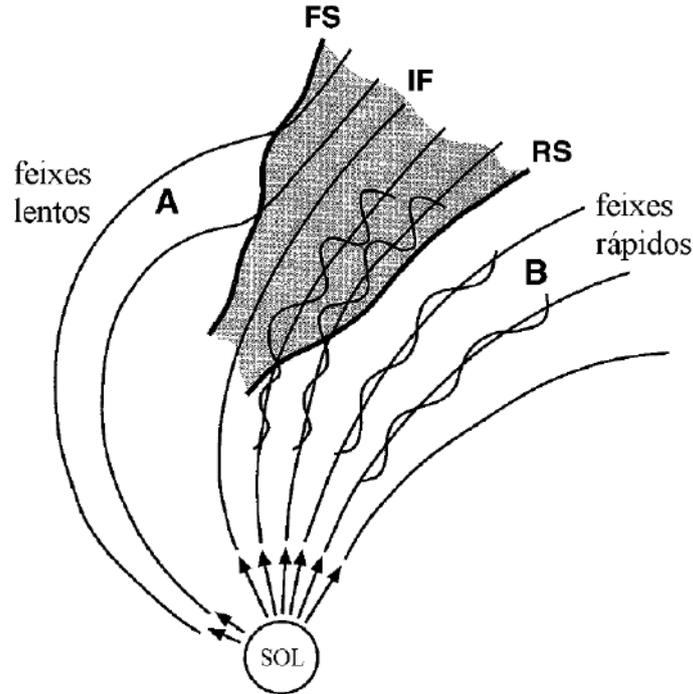


Fonte: Belcher e Davis (1971).

Durante o mínimo solar as ondas de Alfvén interplanetárias associadas com regiões de interação corrotacionais (CIRs) têm origem a partir da interação dos feixes de alta velocidade emanados dos buracos coronais com os feixes de baixa velocidade. Estas ondas são as causas dominantes da intermitência na reconexão magnética entre as componentes sul do campo magnético B_z das ondas de Alfvén e os campos magnéticos da magnetopausa, além das intermitentes atividades aurorais, e de injeção intermitente de energia da lâmina de plasma em outras regiões da corrente de anel, assinaturas dos eventos HILDCAAs ou (*High Intensity Long Duration Continuous AE Activity*) (GONZALEZ; TSURUTANI, 1999).

A interação entre os feixes de alta e baixa velocidade decorre de forma tal que o feixe solar mais rápido e mais rarefeito alcança o feixes mais lento e mais denso, dando lugar a uma região de interação conhecida como região de compressão. Geralmente existe uma interface entre os feixes isto é, uma mudança descontínua nos parâmetros do meio interplanetário, separando plasmas de diferentes origens e propriedades. Nessa região de interação de feixes, são aumentados a temperatura dos prótons, a velocidade do fluxo solar, sendo porém, a densidade diminuída. Nesta região, há também uma maximização da pressão cinética e a intensidade do campo magnético interplanetário. A Figura 3.5 mostra a interação entre feixes rápidos (B) com feixes lentos (A) e a região de compressão (região em preto). O choque frontal (FS), interface (IF) e choque reverso (RS) são indicados. As ondas de Alfvén provenientes dos feixes rápidos são amplificadas ao entrar na região RS-IF.

Figura 3.5 - Figura ilustrando a interação entre feixes rápidos (B) com feixes lentos (A) e a região de compressão. O choque frontal (FS), interface (IF) e choque reverso (RS) são indicados. As ondas de Alfvén provenientes dos feixes rápidos são amplificadas ao entrar na região RS-IF.



Fonte: Gonzalez e Tsurutani (1999).

3.1.2.2 Variáveis de Elsässer e turbulência IK

Para o tratamento da turbulência em plasmas espaciais as grandezas campo magnético e velocidade são essenciais. Neste caso, as equações MHD possuem papel importante neste tipo de estudo, sendo elas, para o caso incompressível, dadas por

$$\partial_t \vec{v} = -\vec{v} \cdot \nabla \vec{v} - \nabla p - \vec{b} \times (\nabla \times \vec{b}) + \mu \Delta \vec{v}, \quad (3.26)$$

$$\partial_t \vec{b} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{b}) + \eta \Delta \vec{b}, \quad (3.27)$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = \nabla \cdot \vec{b} = 0, \quad (3.28)$$

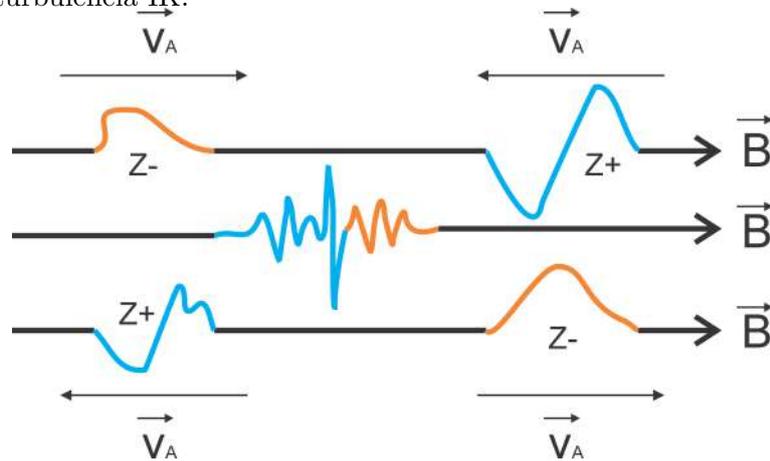
onde \vec{v} e \vec{b} são, respectivamente, a velocidade e campo magnético, μ é a viscosidade cinética e η é a difusividade magnética.

No caso da turbulência Alfvénica, por possuir um caráter ondulatório, torna-se necessário algumas adaptações nas equações MHD convencionais. Pensando nisto, Elsässer (1950) definiu as chamadas variáveis de Elsässer, definidas por $z^\pm = \vec{v} \pm \vec{b}$. Neste caso, substituindo estas variáveis nas equações MHD 3.26, 3.27 e 3.28, obtemos

$$\partial_t z^\pm = -z^\mp \cdot \nabla z^\pm - \nabla \left(p + \frac{b^2}{2} \right) + \frac{\mu + \eta}{2} \Delta z^\pm + \frac{\mu - \eta}{2} \Delta z^\mp. \quad (3.29)$$

Na presença de um campo magnético de fundo $|\vec{b}_0| \gg |\vec{b}|$ é possível interpretar z^\mp como pacotes de ondas de Alfvén viajando ao longo das linhas de campo de \vec{b}_0 , onde z^+ e z^- propagam em sentidos opostos. Neste caso, z_l é utilizado de forma completamente análoga de como \vec{v} é utilizado no caso hidrodinâmico. A transferência de energia no modelo IK é considerada guiada por colisões de ondas de Alfvén propagando-se em sentidos opostos ao longo de linhas de campo magnético, conforme ilustrado na Figura 3.6. Neste caso, a cascata de energia surge devido espalhamentos não-lineares provenientes de colisões de pacotes de ondas de Alfvén.

Figura 3.6 - Figura ilustrando colisão entre dois pacotes de ondas de Alfvén que viajam em sentidos opostos ao longo de uma linha de campo magético. Tal processo de colisão é responsável pela cascatas de energia sob a óptica da teoria de turbulência IK.



Fonte: Produção do autor.

O acoplamento dos campos magnético e de velocidade através da geração e atenuação das ondas de Alfvén conduzem ao surgimento de uma equipartição de energia cinética e magnética locais. Tal processo pode ser ilustrado considerando o movimento do

plasma em uma escala fixa l muito menor que a escala integral do regime turbulento. Neste caso, estruturas vorticiais energéticas com escala de tamanho l interagem com o campo magnético b_0 de modo que a velocidade de perturbação v_l engatilha ondas de Alfvén via deformação de b_0 , que, devido a incompressibilidade, possuem natureza transversal. Se as perturbações δv e δb são pequenas comparadas ao b_0 , então $\delta v = \pm \delta b$ (ELSASSER, 1950).

No caso de uma colisão entre duas ondas de Alfvén com escala de tamanho l , a escala de tempo na qual ocorrem trocas não lineares de energia são dadas por $\tau_A = l/b_0$ (ELSASSER, 1950). Devido ao fato de $b_0 \gg b_l$, τ_A este tempo é muito mais curto do que para o caso da turbulência K41, o qual é dado por $\tau_l = l/z_l$ (ELSASSER, 1950). Logo, pode-se fazer a seguinte transformação entre escalas(ELSASSER, 1950):

$$v_l \rightarrow z_l, \quad \tau_l \rightarrow \frac{\tau_l}{\tau_A} \tau_l. \quad (3.30)$$

Portanto, todos os resultados para a turbulência K41 podem ser adaptadas para a turbulência IK. Neste caso, para o caso da turbulência IK, pode-se escrever

$$z_l \sim (\varepsilon b_0 l)^{1/4} \Rightarrow S_p^z(l) \sim (\varepsilon b_0 l)^{p/4}, \quad (3.31)$$

onde ε é a energia dissipada e p é a ordem da função de estrutura $S_p^v(l) = \langle \delta v_l^p \rangle$

De maneira análoga e considerando o caso K41, podemos escrever a energia para o caso IK como

$$E(k) = C_{IK} (\varepsilon b_0)^{1/2} k^{-3/2}. \quad (3.32)$$

Portanto, pode-se notar que a energia do regime turbulento para o caso IK é bastante semelhante ao caso K41, sendo que neste caso o espectro de energia segue uma lei $-3/2$.

Mostraremos nesta tese que a presença de estruturas coerentes no vento solar, tais quais lâminas de correntes, é uma das grandes repensáveis pela presença da turbulência K41 no vento solar, sendo que na ausência de tais estruturas a turbulência IK toma lugar.

3.1.3 Estruturas Coerentes na Turbulência

Apesar do estado caótico que caracteriza os escoamentos turbulentos, algumas regiões com padrões organizados têm sido identificadas, via teoria ou experimentalmente (EIGER, 1989). O conceito de vórtice está associado a esses padrões básicos, também denominados estruturas coerentes (HUSSAIN, 1941). Conforme já mencionado, a turbulência se manifesta em diferentes escalas de comprimento, as quais estão relacionadas com as dimensões características desses vórtices. É usual definir o movimento turbulento como uma superposição de vórtices de diferentes tamanhos que interagem entre si, trocando energia, momento e outras propriedades (DAVIDSON, 2004).

Em física, o termo “coerente” é originalmente aplicado para sistemas ondulatórios quando estão em fase ou quando mantêm a diferença de fase constante no tempo (TIPLER, 1990). Tais propriedades também são conceitualmente estendidas para a mecânica quântica (BODMANN et al., 2013). A definição de coerência é consensual e matematicamente estabelecida como sistemas com diferença de fase constante, oscilando na mesma frequência. Eles estão relacionados com a manifestação de interferências construtivas ou destrutivas que, de modo geral, pode se apresentar de forma tanto espacial quanto temporal. Portanto, as Estruturas Coerentes estão diretamente ligadas a essa ideia, mas sua definição ainda carece de consenso e, por vezes, difere entre autores.

Estrutura coerente é definida por Hussain (1941) como sendo uma massa de fluido turbulento com grande escala, com vorticidade correlata e em fase, sobre a região do fluido. Já Moller e Silvestrine (2004) enumeram algumas características para a identificação de coerências em vórtices, tais quais: possuir uma concentração de vorticidade tal que trajetórias de fluido girem ao redor dele, ter um tempo de vida maior que o tempo de rotação local e possuir a propriedade de imprevisibilidade (no sentido da sensibilidade às condições iniciais). Por sua vez, Robinson (1991) propõe aspectos mais amplos, tais quais: uma estrutura coerente é definida como uma região tridimensional de fluxo ao longo do qual pelo menos uma variável fundamental de fluxo (componente de velocidade, a densidade, a temperatura, etc.) apresenta correlação significativa com ela própria ou com uma outra variável sobre um intervalo de espaço e/ou tempo que é significativamente maior do que as menores escalas locais do fluxo.

Vale a pena mencionar que inicialmente fazia-se analogia entre vórtices na turbulência e as moléculas de um gás em teoria cinética dos gases. Entretanto, esta analogia

não é perfeita, já que, a contra exemplo dos vórtices, as moléculas são facilmente identificáveis e definidas. Ao contrário das moléculas, vórtices exibem dimensões variáveis no tempo e espaço, trocam massa entre si e são caracterizados por uma orientação. Uma “colisão” entre dois vórtices, por exemplo, é um fenômeno muito mais complexo que uma colisão entre duas moléculas (EIGER, 1989), o que evidencia a imperfeição desta analogia.

3.1.3.1 Localidade das Estruturas Coerentes na Turbulência e Intermitências

Fisicamente, a intermitência está relacionada com a presença de raros, mas fortes, gradientes de alguma grandeza com acentuada localização no espaço ou no tempo. Na turbulência, este fenômeno é devido a estruturas altamente coerentes (CAMUSSI; GUJ, 1997) quase sempre não estacionárias, que não preenchem todo o espaço do escoamento (MENEVEAU; SREENIVASAN, 1991) e aumentam fortemente a taxa de dissipação local de energia cinética turbulenta (STULL, 1988).

O fenômeno da intermitência das flutuações turbulentas foi descoberto experimentalmente por Batchelor e Townsend (1949) e ainda hoje é assunto de interesse central. Acredita-se que essas flutuações sejam responsáveis por desvios importantes da fenomenologia de Kolmogorov K41 (KOLMOGOROV, 1941a), e que estejam relacionadas a configurações específicas do campo de velocidade, como tubos de vorticidade (DAVIDSON, 2004).

A observação de intermitência acaba batendo de frente com as hipóteses de Kolmogorov, que apontam uma universalidade numa faixa da cascata de energia, além de invariância de escala para um fluxo turbulento bem desenvolvido, conforme já mostrado. Landau e Lifshitz (1959) lançou duras críticas a essas hipóteses, o que levou Kolmogorov a incluir o fenômeno de intermitência em seu modelo (KOLMOGOROV, 1962).

A presença de intermitência faz com que as características qualitativas e estatísticas da turbulência devam mudar com a escala (FRISCH, 1995). Assim, a turbulência não mais poderia ser considerada autossimilar, surgindo a necessidade de uma teoria mais geral: a teoria multifractal (HALSEY et al., 1986).

Entretanto, a perda de autossimilaridade (intermitência) traz consigo uma outra consequência: a fuga da gaussianidade para escalas pequenas. Diante disso, a análise estatística se torna uma alternativa bastante conveniente para a detecção e estudo

de turbulência intermitente.

3.1.4 Fuga da Gaussianidade na Turbulência

Um conceito estatístico muito simples, porém não menos importante, é a curtose (DAVIDSON, 2004). A curtose é um índice estatístico que mede o grau de achatamento de uma distribuição em relação à distribuição normal. Esse índice está associado ao quarto momento estatístico da seguinte forma (DAVIDSON, 2004):

$$K = \frac{m^4}{\langle m^2 \rangle^2}, \quad (3.33)$$

onde m^4 e m^2 são o quarto e o segundo momentos estatísticos, respectivamente (DAVIDSON, 2004). Para uma distribuição normal, $K = 3$.

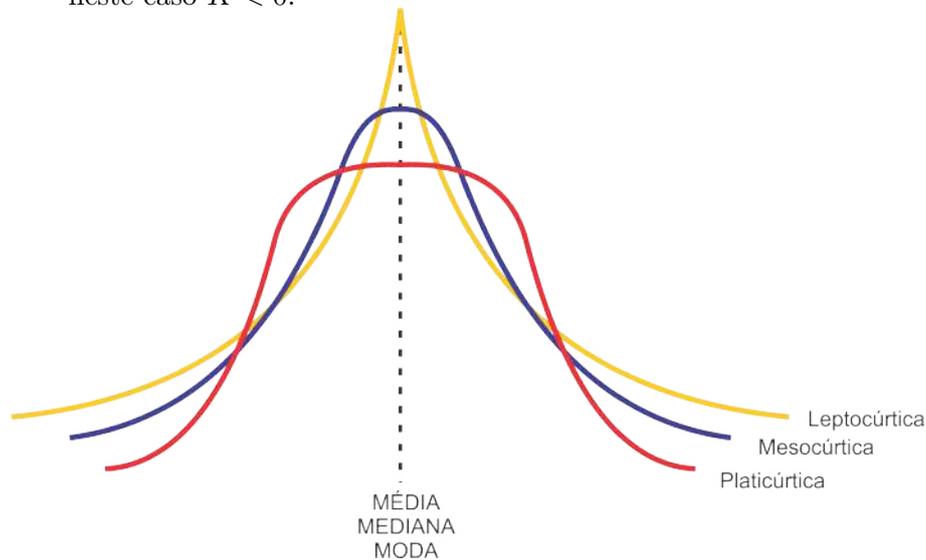
Em algumas análises, é muito interessante medir o grau de achatamento de uma distribuição em relação à distribuição normal, isso porque o grau de achatamento traz informações dos pesos das caudas das distribuições, possibilitando assim distribuições que contenham mais ou menos eventos que se situam longe da média (eventos extremos).

Sendo a distribuição normal a referência de comparação, alguns autores preferem definir a curtose da seguinte forma (CHIAN; MIRANDA, 2009):

$$K = \frac{m^4}{(m^2)^2} - 3. \quad (3.34)$$

Com esta definição, uma distribuição com ($K > 0$) seria menos achatada e com caudas mais pesadas que a distribuição normal, sendo neste caso denominada *Lep-tocúrtica*. Já as distribuições com ($K < 0$) são mais achatadas e com caudas mais leves que a distribuição normal, sendo denominadas *Platicúrticas*. Uma distribuição normal, claramente, possui ($K = 0$) e é denominada *Mesocúrtica*. A figura 3.7 ilustra bem estas situações.

Figura 3.7 - Figura ilustrando três distribuições com diferentes curtoses. A distribuição em azul representa uma distribuição normal (mesocúrtica) com $K = 0$. A distribuição em amarelo representa uma distribuição mais afunilada e com caudas mais pesadas que a distribuição normal (leptocúrtica), neste caso $K > 0$. Finalmente, a distribuição em vermelho representa uma distribuição mais achatada e com caudas mais leves que a distribuição normal (platicúrtica), neste caso $K < 0$.



Fonte: Produção do autor.

Pela figura 3.7, podemos notar que as distribuições platicúrticas, em comparação com a normal, apresentam uma menor probabilidade de ocorrência de valores distantes da média, possuindo dessa forma uma cauda mais leve. Por outro lado, uma distribuição leptocúrtica apresenta uma cauda mais pesada que a normal, sendo maior a ocorrência de eventos extremos. Além disso, temos uma outra característica de distribuições leptocúrticas que talvez seja a principal sob a óptica da teoria da turbulência. Estudos observacionais atuais apontaram que as funções densidade de probabilidade (PDF) dos incrementos de velocidade ou de campo magnético (fluidos magnetizados) apresentam uma fuga da gaussianidade para pequenas escalas (temporais ou espaciais) (CHIAN; MIRANDA, 2009), (CHIAN; MUNOZ, 2011), (CHIAN; MUNOZ, 2011). Neste caso, à medida em que se diminui a escala, a curtose das PDF's é aumentada, indicando que processos turbulentos são, de fato, intermitentes (DAVIDSON, 2004).

O fato da curtose ser dependente da escala, traz consigo a comprovação de que processos turbulentos não são autossimilares, ou seja, suas propriedades estatísticas

dependem da escala (FRISCH, 1995). Neste caso, surge a necessidade de um estudo mais geral que inclua esta dependência em relação à escala para turbulência: a multifractalidade.

3.1.5 Conceitos Básicos de Multifractalidade na Turbulência

Conforme visto anteriormente, as hipóteses de Kolmogorov sugerem a universalidade e invariância de escala na faixa de equilíbrio universal. Isto significa que, dentro desta faixa, a turbulência perderia toda informação geométrica e de condições de contorno das escalas maiores que a geraram (escala integral). Além disto, deveria haver uma autossimilaridade estatística perante uma mudança de escala. Entretanto, a universalidade foi fortemente criticada por Landau e Lifshitz (1959). Segundo ele, flutuações nas pequenas escalas de comprimento poderiam estar inevitavelmente “contaminadas” por perturbações advindas da escala integral, além de que os gradientes intensos de velocidades deveriam estar confinados em regiões bastante limitadas do escoamento, o que seria refletido no fenômeno de intermitência. Tais críticas levaram Kolmogorov a corrigir seu modelo K41 e formular o modelo K62. (KOLMOGOROV, 1962). Neste novo modelo, Kolmogorov refina sua hipótese de invariância de escala global, para invariância de escala local, incorporando o fenômeno de intermitência (FRISCH, 1995).

Considerando a segunda hipótese de similaridade de Kolmogorov, juntamente à hipótese de invariância de escala, dada por $\delta u(l) \propto l^h$, podemos escrever o seguinte:

$$S_p(l) \equiv \langle (\delta u(l))^p \rangle = C_p (\varepsilon l)^{ph} = C_p (\varepsilon l)^{\zeta(p)}, \quad (3.35)$$

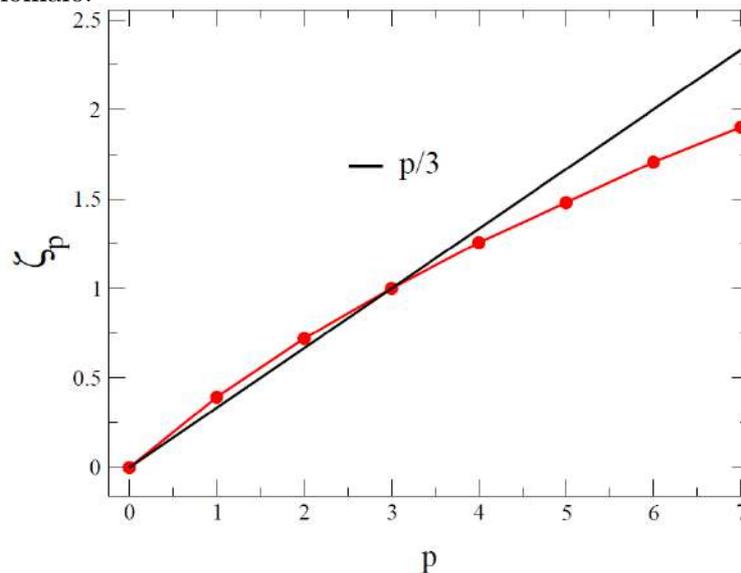
onde $\langle (\delta u(l))^p \rangle$ é definido como função de estrutura de ordem p (FRISCH, 1995), p representa o momento estatístico e $\zeta(p) = hp$ é o importante expoente de escalamento (FRISCH, 1995).

Se recordarmos das seções anteriores, as leis 2/3 e 4/5 de Kolmogorov são dadas respectivamente por $S_2(l) \equiv \langle (\delta u(l))^2 \rangle = C_2 \varepsilon^{\frac{2}{3}} l^{\frac{2}{3}}$ e $S_3(l) \equiv \langle \delta u(l)^3 \rangle = -4\varepsilon l/5$. Comparando estas duas leis com a equação 3.35, temos que $h = 1/3$. Portanto, a forma geral para a função de estrutura de ordem “p” fica da seguinte forma:

$$S_p(l) \equiv \langle (\delta u(l))^p \rangle = C_p \varepsilon^{\frac{p}{3}} l^{\frac{p}{3}}. \quad (3.36)$$

O valor constante de h , ou seja, $h = 1/3$, é o que reflete a autossimilaridade e invariância de escala da turbulência sob a óptica da teoria K41. Neste caso, o expoente de escala h permaneceria constante para qualquer escala. Diante disto, seria óbvio que a relação entre $\zeta(p)$ e p deveria ser linear, já que $\zeta(p) = hp$. No entanto, não é isto que ocorre (FRISCH, 1995). Observações têm apontado para a não linearidade de ζ , por exemplo em plasmas espaciais (BURLAGA, 1991; BENZI et al., 1993; CHIAN; MIRANDA, 2009; CHIAN; MUNOZ, 2011). Neste caso, a linearidade foi observada apenas para $p \leq 3$, ao passo que para $p > 3$ uma não linearidade entre $\zeta(p)$ e p passa a surgir, conforme mostrado na Figura 3.8. Este desvio da linearidade passou a ser chamado de comportamento “anômalo” (FRISCH, 1995).

Figura 3.8 - Figura ilustrando comportamento anômalo do expoente de escalamento $\zeta(p)$ calculado para série temporal do módulo do campo magnético do vento solar do dia 2 de fevereiro de 2002. De acordo com a teoria K41, o gráfico $(\zeta(p) \times p)$ deveria ser uma reta de inclinação $1/3$. No entanto, para $p > 3$, $\zeta(p)$ se torna anômalo.



Fonte: Produção do autor.

Uma consequência imediata desse comportamento reside no fato de que o expoente de escala h não mais seria constante, e portanto, teria que ser dependente da escala ($h(p)$), ou seja, multifractal (FRISCH, 1995)

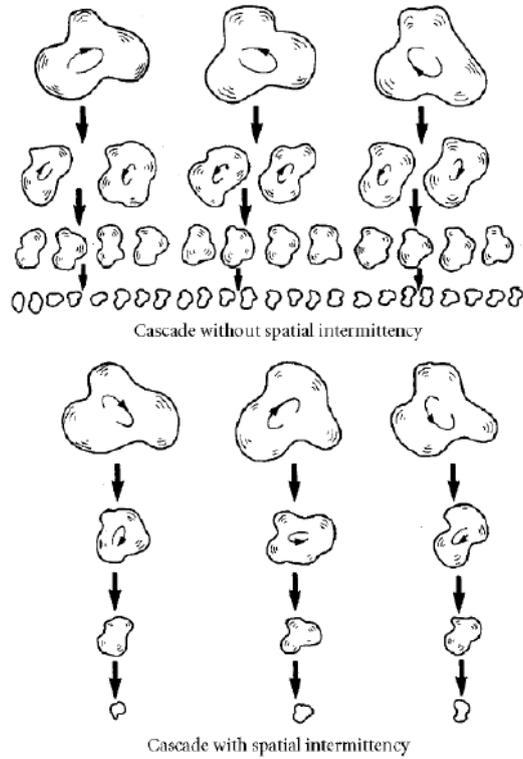
Embora a ideia de autossimilaridade global da turbulência tenha sido posta em xeque, autossimilaridades locais ainda podem existir (FRISCH, 1995). Portanto, esta

ideia não pode ser definitivamente rechaçada, mas sim evoluída para uma teoria mais geral: a teoria multifractal.

De acordo com a teoria K41, a transferência de energia é realizada por um processo de cascata, cujas estruturas coerentes (vórtices) decaem em estruturas de menores escalas, que por sua vez decaem em estruturas menores ainda e assim por diante, sendo que em cada processo de decaimento, os vórtices vão preenchendo homoganeamente todo espaço, sem deixar muitos buracos. No entanto, esse modelo não explica muito bem a presença dos fenômenos de multifractalidade e intermitência. Para esses fenômenos fazerem sentido, a cascata de energia deveria ocorrer de forma que as estruturas coerentes não preenchessem homoganeamente o espaço, ou seja, neste caso, as estruturas deveriam decair de forma localizada no espaço, conforme ilustra a figura 3.9. O resultado disso é que o espaço fica cada vez menos preenchido (lacunaridade)⁴ pelos vórtices de pequena escala, de forma que a dissipação torna-se não-uniforme no espaço (pontualmente localizado). Essa é, portanto, a ideia básica de intermitência e multifractalidade da turbulência plenamente desenvolvida.

⁴Segundo Madelbrot (1982), lacunaridade é um complemento da dimensão fractal, que descreve a textura de um fractal. Está relacionado com a distribuição e tamanho dos espaços vazios. De maneira geral, se um fractal tem grandes vazios ou buracos, tem lacunaridade alta. Por outro lado, se um fractal é quase invariante a translação, tem baixa lacunaridade (MADELBROT, 1982).

Figura 3.9 - Figura ilustrando cascatas de energia sob a óptica da teoria K41 e do ponto de vista multifractal. Na cascata superior (óptica da teoria K41), as estruturas coerentes se distribuem homogêneas e preenchem todo o espaço. Na cascata inferior (óptica da teoria multifractal) as estruturas coerentes deixam buracos no espaço, fazendo surgir o fenômeno de intermitência.

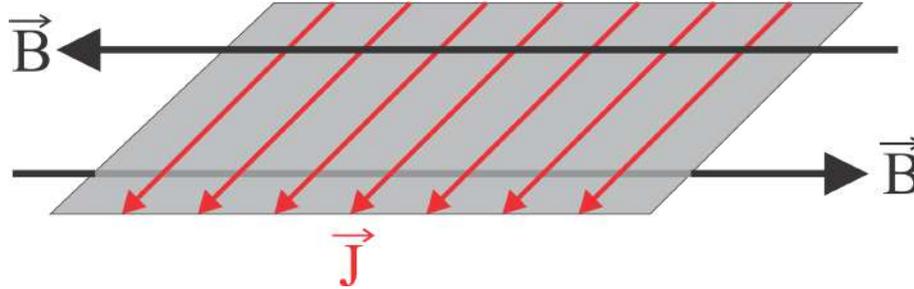


Fonte: Davidson (2004)

3.2 Detecção de lâminas de correntes no vento solar - Método de Li

Lâminas de correntes no vento solar são estruturas magnéticas coerentes localizadas em regiões aproximadamente bidimensionais, onde há uma rotação do vetor campo magnético (Lei de Ampère). Essas estruturas estão intimamente relacionadas ao processo de reconexão magnética no vento solar (GRECO et al., 2009), (GRECO et al., 2017) e são geralmente encontradas nas extremidades de tubos magnéticos que permeiam o plasma no ambiente interplanetário (CHIAN et al., 2016). Além disso, possuem papel importante no regime de turbulência bem desenvolvida e intermitências no vento solar (LI et al., 2011), (SALEM et al., 2009). Diante disso, torna-se inevitável a suspeita de que essas estruturas estejam de alguma forma envolvidas em processos extremos que ocorrem no plasma solar e interplanetário. Dentro desse contexto, as lâminas de correntes são as estruturas coerentes protagonistas deste trabalho, de modo que o uso de uma metodologia adequada para sua detecção possibilitou a obtenção de grande parte dos resultados aqui obtidos. Para isso, foi feita uma criteriosa revisão bibliográfica na tentativa de buscar uma metodologia simples, robusta e eficaz na tarefa de identificar lâminas de correntes no vento solar. Neste caso, o método de Li (2008) mostrou-se bastante adequado para este propósito. A ideia básica por trás desta técnica é baseada no conceito da lei de Ampère ($\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$) (JACKSON, 1998), ou seja, de que densidades de correntes estão associadas às rotações do vetor campo magnético. No entanto, a formação de densidades de correntes com geometria planar (lâminas) somente é possível em regiões onde os vetores campo magnético são aproximadamente anti-paralelos (descontínuos), conforme a Figura 3.10. Por este motivo, estas estruturas estão sempre presentes em regiões de reconexões magnéticas. Logo, um bom método para detecção de lâminas de correntes deve levar em consideração regiões com rotações abruptas do vetor campo magnético.

Figura 3.10 - Figura ilustrando uma densidade de corrente \vec{J} em forma de lâmina (lâmina de corrente) formada por uma região de descontinuidade do vetor campo magnético \vec{B} .



Fonte: Produção do autor.

Baseado no que foi dito, Li (2008) desenvolveu uma metodologia estatística que tem por objetivo encontrar regiões com maiores probabilidades de existir uma lâmina de corrente. Considere a série temporal de campo magnético $\vec{B}(t)$. Então, pode-se definir a densidade de probabilidade de encontrar ângulos de rotação entre dois vetores defasados temporalmente por uma defasagem (lag) τ , $\vec{B}(t + \tau)$ e $\vec{B}(t)$, dentro de um intervalo angular θ e $\theta + \Delta\theta$, como (LI, 2008)

$$f(\theta, \tau) \Delta\theta = \frac{N^\tau(\theta < \theta' < \theta + \Delta\theta)}{N^\tau(0 < \theta' < \pi)}, \quad (3.37)$$

onde $N^\tau(\theta < \theta' < \theta + \Delta\theta)$ é o número de pares de vetores de campo magnético $\vec{B}(t + \tau)$ e $\vec{B}(t)$ cujos ângulos entre eles esteja entre θ e $\theta + \Delta\theta$. Diante disto, pode-se definir uma função de distribuição (LI, 2008), dada por

$$F(\theta, \tau) = \int_\theta^\pi d\theta' f(\theta', \tau), \quad (3.38)$$

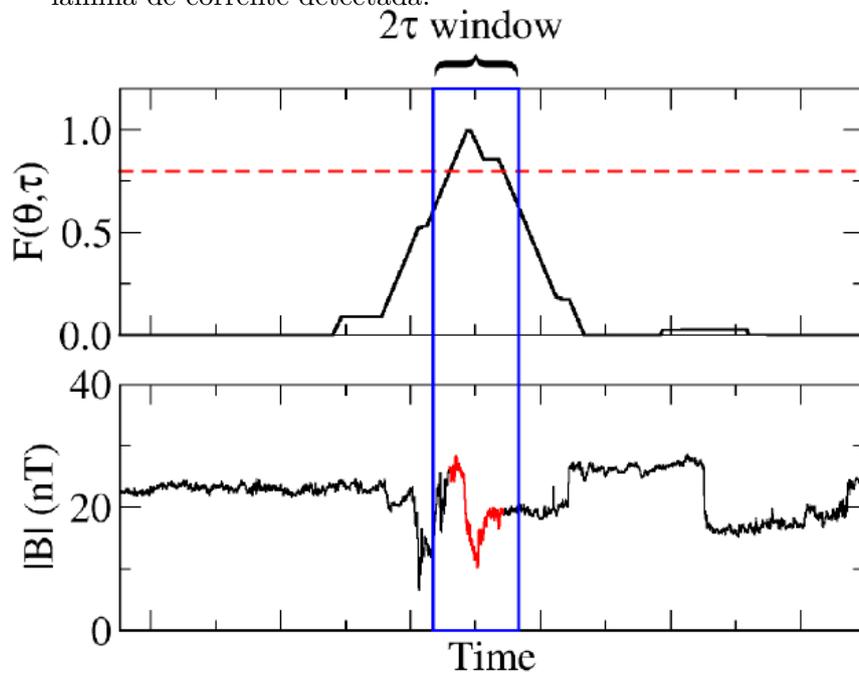
que nada mais é que a frequência de ocorrência de medidas de ângulos maiores que θ . Logo, se houver lâminas de correntes na série temporal de $\vec{B}(t)$, então a quantidade $F(\theta, \tau)$ deve obedecer uma lei de escala linear com o lag τ (LI, 2008), quando θ for maior que um ângulo crítico θ_0 , ou seja,

$$F(\theta, N\tau) \sim NF(\theta, \tau) \quad \text{quando } \theta > \theta_0. \quad (3.39)$$

Nesse caso, para cada janela de tamanho 2τ e centrada em T , conforme a Figura 3.11, verificamos a quantidade de ângulos entre $\vec{B}(t + \tau)$ e $\vec{B}(t)$ que são maiores que o ângulo crítico θ_0 . Se esta quantidade for maior que um certo limiar devidamente escolhido L , então é identificada uma lâmina de corrente em T .

Vale a pena mencionar que esta técnica somente consegue detectar lâminas de correntes com a mesma escala de tamanho da janela 2τ .

Figura 3.11 - Figura ilustrando a detecção de uma região contendo lâmina de corrente (pontos vermelhos) centrada em T . Neste caso foi utilizada uma janela deslizante de tamanho 2τ , delimitada pelas linhas azuis. O limiar L é representado pela linha tracejada vermelha. O parâmetro τ define a escala típica da lâmina de corrente detectada.



Fonte: Li (2008).

4 TEORIA CLÁSSICA DE EVENTOS EXTREMOS

O vento solar apresenta um comportamento de turbulência intermitente (CHIAN et al., 2016), possuindo distribuições com caudas cada vez mais pesadas à medida em que a escala diminui (CHIAN; MIRANDA, 2009). Além disso, sabe-se que o vento solar é turbulento e, portanto, permeado de estruturas coerentes distribuídas não uniformemente, de tal forma que são responsáveis pelo surgimento de grandes flutuações localizadas (intermitência) (GRECO et al., 2009), (GRECO et al., 2017). Neste contexto, a associação entre o comportamento intermitente e o desvio da gaussianidade (caudas mais pesadas), indicam a presença de possíveis eventos extremos no vento solar e no plasma espacial em geral.

O estudo de eventos extremos tem se tornado um dos principais temas da Estatística atual, sendo empregado em diversas áreas do conhecimento. Para a geofísica, por exemplo, seria muito interessante possuir informações de alguns eventos extremos catastróficos como terremotos e tsunamis. Na geofísica espacial, sabe-se que a atividade solar possui um comportamento aproximadamente periódico, alternando períodos de baixas e altas atividades. Muito embora se conheça esta sazonalidade, ainda assim podem haver períodos calmos ou máximos que extrapolam os valores usuais e que podem vir a trazer muitas consequências danosas. Neste caso, surge a necessidade de previsão estatística desses eventos extremos. No vento solar, as estruturas por trás destes picos, estão diretamente ligadas a processos de grande importância, tais quais reconexões magnéticas. Poderíamos identificar estruturas coerentes envolvidas em processos de reconexões magnéticas de forma indireta, ou seja, analisando as extremas flutuações por elas geradas. Diante disso e de vários outros motivos, o estudo da estatística de eventos extremos se torna imprescindível para diversas áreas, em especial a Geofísica.

Uma das formas de modelar eventos extremos é por meio da teoria clássica de valores extremos (TEV), proposta por Fisher e Tippett (1928). Segundo essa teoria, existem basicamente duas metodologias para a modelagem de eventos extremos. A primeira é baseada na técnica de máximos em blocos (FISHER; TIPPETT, 1928), enquanto a segunda é baseada em valores acima de um limiar (JAMES, 1975), (BALKEMA; HAAN, 1974).

A seguir, faremos um breve estudo dos principais tópicos que concernem a estatística de eventos extremos.

4.1 Conceitos Estatísticos Básicos

4.1.1 Função Densidade de Probabilidade - PDF

Um dos ingredientes básicos para uma modelagem estatística são as variáveis aleatórias X , as quais representam uma quantidade de origem incerta. O conjunto de possíveis valores de X é o Ω , denominado espaço amostral (TSAY, 2010). Outro ingrediente básico é a distribuição de probabilidade, a qual determina a probabilidade de eventos associados com a variável aleatória X . Dentro desse contexto, há basicamente duas possibilidades a serem consideradas: uma variável aleatória é dita discreta se o espaço amostral associado é discreto, por exemplo, $\Omega = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Neste caso, a distribuição de probabilidade é determinada por (COLES, 2001)

$$f(x) = \Pr\{X = x\}, \quad (4.1)$$

para cada valor de x no espaço amostral $x \in \Omega$. Assim, $f(x)$ é a probabilidade de a variável aleatória X tomar um valor x . No entanto, grande parte das variáveis aleatórias são contínuas, ou seja, possuem um espaço amostral Ω contínuo. Neste caso, ao invés de uma distribuição de probabilidades, é especificada uma função distribuição de probabilidades, definida como (COLES, 2001)

$$F(x) = \Pr(X \leq x), \quad (4.2)$$

para cada $x \in \Omega$, ou seja, $F(x)$ é a probabilidade de se obter valores em Ω menores que x . Para usuais axiomas de probabilidade serem satisfeitos, F deve ser uma função não-decrescente de x , tal que $F(x_-) = 0$ e $F(x_+) = 1$, onde x_- e x_+ são os valores mais baixos e mais altos de Ω , respectivamente. Diante disso, por meio da relação 4.2, podemos escrever o seguinte (TSAY, 2010)

$$\Pr\{a \leq X \leq b\} = F(b) - F(a). \quad (4.3)$$

Sendo a função distribuição F diferenciável, então é útil definir a função densidade de probabilidade (PDF) de X como (TSAY, 2010)

$$f(x) = \frac{dF}{dx}. \quad (4.4)$$

Neste caso,

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(u)du, \quad (4.5)$$

e conseqüentemente,

$$\Pr\{a \leq X \leq b\} = \int_a^b f(u)du. \quad (4.6)$$

4.1.2 Função de Máxima Verossimilhança

Infelizmente, na grande maioria das vezes, não temos acesso a todas as variáveis aleatórias de uma população, sendo necessário a retirada de uma amostra, ou seja, de uma parte desta população. Neste caso, o estudo estatístico da população seria “inferido” pelo estudo estatístico da amostra. Surge, então, um importante ramo da Estatística: a inferência estatística. A inferência estatística tem como objetivo estudar generalizações sobre uma população através de evidências fornecidas por uma amostra retirada desta população. Mesmo que a distribuição de uma população seja conhecida, os seus parâmetros (média e variância, por exemplo) não são. Nesse caso, surge a necessidade de, a partir de uma amostra, inferir os parâmetros da população, o que pode ser feito por meio de estimadores de máxima verossimilhança (COLES, 2001).

Antes de tudo, consideremos as variáveis aleatórias X_i com função densidade de probabilidade $f_{X_i}(x_i)$. Se as variáveis X_i forem independentes, então a função densidade de probabilidade conjunta das variáveis será o produto das densidades de probabilidade individuais, ou seja,

$$\begin{aligned} f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) &= f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \dots f_{X_n}(x_n) \\ &= \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Consideremos agora uma população cuja variável aleatória em estudo é dada por X . Seja $f(x, \theta)$, a função densidade de probabilidade associada a X e seja θ um parâmetro desconhecido. Retiremos uma amostra aleatória simples de X , de tamanho n , a saber X_1, \dots, X_n , sendo neste caso x_1, \dots, x_n os valores efetivamente observados.

Então, de acordo com a equação 4.7, a função densidade de probabilidade conjunta da amostra neste caso, também chamada de função de verossimilhança L (COLES, 2001), é dada por

$$\begin{aligned} L(\theta; x_1, \dots, x_n) &= f(x_1; \theta) \times \dots \times f(x_n; \theta) \\ &= \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta). \end{aligned} \tag{4.8}$$

Note que antes da retirada da amostra, cada observação é uma variável aleatória cuja função densidade de probabilidade é igual à função densidade de probabilidade da população. Em geral, para amostras suficientemente grandes, a média e a variância de cada amostra são iguais à média e variância da população em questão. É neste sentido que dizemos que na função densidade de probabilidade conjunta, antes da retirada da amostra, θ é fixo, mas os x_i são variáveis. Contudo, uma vez que tenha sido obtida uma amostra específica, x_i torna-se fixo e a função de densidade de probabilidade conjunta pode, então, ser reinterpretada como sendo uma função do vetor de parâmetros θ , que desta vez se tornam variáveis (COLES, 2001). Diante disso, os valores dos parâmetros mais prováveis (estimativas) de serem os verdadeiros parâmetros da população são dados pelo estimador de máxima verossimilhança de θ (TSAY, 2010). O estimador de máxima verossimilhança fornece os valores de parâmetros que maximizam a probabilidade de ocorrência das variáveis amostradas. Nesse caso, o estimador de máxima verossimilhança é aquele que, estatisticamente falando, mais se aproxima do valor real do parâmetro populacional.

Em termos de cálculo, é mais conveniente tomar o logaritmo de 4.8 e trabalhar com a função de log-verossimilhança, ou seja,

$$l(\theta; x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \log f(x_i; \theta) \tag{4.9}$$

A função log-verossimilhança é mais conveniente neste caso, pois para tomarmos o valor máximo da função de verossimilhança devemos trabalhar com derivadas do produto, ao passo que para função log-verossimilhança trabalhamos com derivadas de uma soma.

4.1.3 Conceitos Básicos de Função de Distribuição Empírica e Plot Quantílico

Um dos grandes objetivos da inferência estatística é tentar obter, por meio de uma amostra, o maior número possível de parâmetros e informações estatísticas da população. Além do método de máxima verossimilhança, uma maneira alternativa e simples de se fazer isso é pela modelagem estatística dos dados amostrados. Neste caso, a única opção para analisar a qualidade da modelagem é comparar a concordância dos valores teóricos obtidos por meio do modelo com os valores dos dados empíricos.

Sejam x_1, \dots, x_n um conjunto de variáveis aleatórias independentes e igualmente distribuídas (iid), com uma distribuição conhecida F . Seja \hat{F} , uma estimativa de F , obtida talvez por máxima verossimilhança. Considere também que x_1, \dots, x_n seja um conjunto ordenado, ou seja, $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, de modo que para qualquer x_i , a probabilidade de se obter valores menores ou iguais a x_i é dado por $\tilde{F}(x_i) = i/n$. De acordo com Coles (2001), é preferível escrever $\tilde{F}(x_i) = i/(n+1)$ para evitar que $\tilde{F}(x_n) = 1$. Neste caso, \tilde{F} é conhecida como função de distribuição empírica e, além disto, é uma estimativa da verdadeira distribuição de probabilidade F (COLES, 2001), e portanto, deve estar de acordo com \hat{F} , já que este é uma estimativa adequada de F , conforme já mencionado. Para realizar a comparação entre \hat{F} e \tilde{F} , existem basicamente dois métodos gráficos (COLES, 2001). O primeiro, denominado gráfico de probabilidade (COLES, 2001), consiste no seguinte plot:

$$\left\{ \left(\hat{F}(x_n), \frac{i}{(n+1)} \right) : i = 1, \dots, n \right\}. \quad (4.10)$$

Se a modelagem for razoável, então os pontos do gráfico de probabilidades devem se situar próximos à linha diagonal. No caso de ajustes pobres, os pontos fogem demasiadamente da linearidade. O gráfico de probabilidades também é largamente conhecido como PP-plot.

Já o segundo método gráfico, denominado gráfico quantílico (COLES, 2001), consiste em:

$$\left\{ \left(\hat{F}^{-1} \left(\frac{i}{(n+1)} \right), x_i \right) : i = 1, \dots, n \right\}. \quad (4.11)$$

Neste caso, $\hat{F}^{-1}(i/(n+1))$ e x_i fornecem uma estimativa do quantil $i/(n+1)$ da verdadeira distribuição F . A exemplo do caso anterior, um bom ajuste é indicado pela proximidade dos pontos sobre a linha diagonal. Este tipo de gráfico também é muito conhecido como QQ-plot. No presente trabalho, utilizaremos o QQ-plot para fazermos os diagnósticos das modelagens das distribuições generalizadas de eventos extremos e de Pareto aos dados de vento solar, as quais serão descritas, respectivamente, nas seções 4.2 e 4.3 .

4.2 Modelos Assintóticos para Valores de Máximos em Blocos (Distribuição Generalizada de Eventos Extremos - GEV)

Nesta seção faremos o desenvolvimento da “coluna dorsal” da teoria de eventos extremos. Para isto, utilizaremos Coles (2001) como referência principal. Neste modelo, consideramos a seguinte variável:

$$M_n = \max \{X_1, \dots, X_n\}, \quad (4.12)$$

onde X_1, \dots, X_n , é uma sequência de variáveis aleatórias tendo uma mesma função distribuição F e M_n é o maior valor dentro do bloco X_1, \dots, X_n . Por exemplo, se n é o número de observações em um ano, então M_n é o máximo anual.

Dentro da teoria de distribuições, M_n também é uma variável aleatória que pode ser obtida para todos os valores de n , a saber,

$$\Pr \{M_n \leq z\} = \Pr \{X_1 \leq z, \dots, X_n \leq z\}. \quad (4.13)$$

Considerando as variáveis aleatórias independentes, obtemos

$$\Pr \{M_n \leq z\} = \Pr \{X_1 \leq z\} \times \dots \times \Pr \{X_n \leq z\}. \quad (4.14)$$

Considerando agora que as variáveis aleatórias pertençam à mesma função distribuição, obtemos,

$$\Pr \{M_n \leq z\} = \{F(z)\}^n. \quad (4.15)$$

Contudo, a equação 4.15 não é muito útil no presente caso, visto que a função distribuição F não é conhecida. Uma alternativa seria fazer o uso de técnicas padrão de inferência estatística para estimar F , a partir dos observados. Porém, isto deve ser feito com cautela, já que qualquer discrepância de F levará a uma substancial discrepância em F^n em 4.15. Uma alternativa seria aceitar que F é de fato desconhecido e desviar as atenções para a família F^n , o qual pode ser estimado ou poderá ser um limite assintótico de alguma outra distribuição, tal qual ocorre no teorema central do limite (TSAY, 2010).

Neste caso, precisamos saber qual seria o comportamento de F^n quando $n \rightarrow \infty$, porém, somente isto não seria o suficiente, já que para $z < z_+^1$, $F^n(z) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Isso se deve ao fato da probabilidade de $z < z_+$ ser sempre menor que 1, ou seja, $F(z) < 1$. No entanto, esta dificuldade pode ser remediada se fizermos a seguinte renormalização linear da variável M_n (COLES, 2001):

$$M_n^* = \frac{M_n - b_n}{a_n}, \quad (4.16)$$

para uma sequência de constantes $a_n > 0$ e b_n . Pode-se mostrar que uma apropriada escolha para a_n e b_n , pode estabilizar M_n^* quando n cresce (COLES, 2001). Diante disso, anuncia-se o seguinte teorema (FISHER; TIPPETT, 1928):

Teorema 1: *Se existe uma sequência de constantes $a_n > 0$ e b_n tais que para $n \rightarrow \infty$*

$$\Pr \{(M_n - b_n)/a_n \leq z\} \rightarrow G(z), \quad (4.17)$$

onde G é uma função de distribuição não degenerada, então G pertence a uma das seguintes famílias:

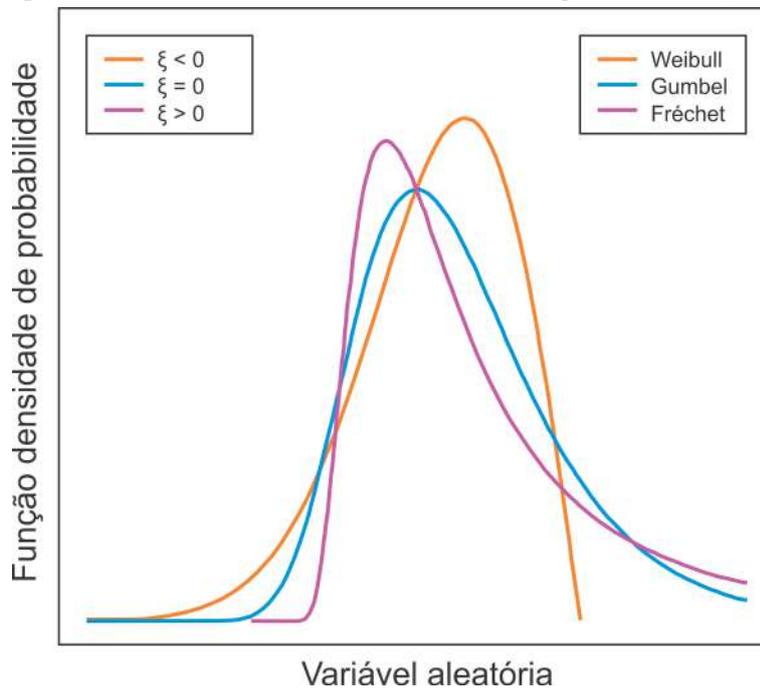
$$\begin{aligned} I : G(z) &= \exp \left\{ -\exp \left[-\left(\frac{z-b}{a} \right) \right] \right\}, & -\infty < z < \infty; \\ II : G(z) &= \begin{cases} 0, & z \leq b, \\ \exp \left\{ -\left(\frac{z-b}{a} \right)^{-\alpha} \right\}, & z > b; \end{cases} \\ III : G(z) &= \begin{cases} \exp \left\{ -\left[-\left(\frac{z-b}{a} \right)^{-\alpha} \right] \right\}, & z < b, \\ 1, & z \geq b, \end{cases} \end{aligned} \quad (4.18)$$

¹ z_+ é a menor variável de z , tal que $F(z) = 1$ (COLES, 2001)

onde $a > 0$ e $\alpha > 0$ para as famílias II e III.

Na verdade, o que o teorema 1 quer dizer é que a variável reescalada $(M_n - b_n)/a_n$ converge em distribuição para uma das três famílias I, II ou III, denominadas respectivamente por família de Gumbel, família de Fréchet e família de Weibull. As formas das distribuições destas três famílias são mostradas na figura 4.1. Vale a pena notar a semelhança deste teorema com o teorema central do limite.

Figura 4.1 - Figura ilustrando as três famílias de distribuições: Weibull, Fréchet e Gumbel.



Fonte: Produção do autor.

4.2.1 Modelagem de Máximos em Blocos

Fazendo uma simples análise das famílias I, II e III, podemos notar que as três podem ser combinadas em uma única família mais geral, tendo a seguinte função de distribuição (COLES, 2001):

$$G(z) = \exp \left\{ - \left[1 + \xi \left(\frac{z - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-1/\xi} \right\}, \quad (4.19)$$

definido sobre o conjunto $\{z : 1 + \xi(z - \mu)/\sigma > 0\}$, onde os parâmetros satisfazem

$-\infty < \mu < \infty$, $\sigma > 0$ e $-\infty < \xi < \infty$ (COLES, 2001). Esta distribuição mais geral é chamada de distribuição de valores extremos generalizada (GEV), do inglês *generalized extreme value*. Este modelo possui três importantes parâmetros: um parâmetro de localização, μ ; um parâmetro de escala, σ e por último e mais importante, o parâmetro de forma, ξ . O parâmetro de forma tem extrema importância pois caracteriza a cauda da distribuição. Para as famílias do tipo II e III, tem-se respectivamente $\xi > 0$ e $\xi < 0$. Para $\xi = 0$ temos a família de Gumbel (COLES, 2001).

Por conveniência, pode-se redefinir o teorema 1 da seguinte forma (FISHER; TIPPETT, 1928):

Teorema 2: *Se existe uma sequência de constantes $a_n > 0$ e b_n , tais que*

$$\Pr \{(M_n - b_n)/a_n \leq z\} \rightarrow G(z), \quad n \rightarrow \infty, \quad (4.20)$$

para uma função distribuição não degenerada G , então G é um membro da família GEV, ou seja,

$$G(z) = \exp \left\{ - \left[1 + \xi \left(\frac{z - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-1/\xi} \right\}, \quad (4.21)$$

definido sobre o conjunto $z : 1 + \xi(z - \mu)/\sigma > 0$, onde $-\infty < \mu < \infty$, $\sigma > 0$ e $-\infty < \xi < \infty$.

Interpretando o teorema 2, temos que, para uma renormalização adequada, uma série de máximos razoavelmente longa converge em distribuição para uma das famílias da distribuição GEV. Esta convergência é completamente análoga ao teorema central do limite (TSAY, 2010), onde uma série razoavelmente longa das médias amostrais converge para uma distribuição normal. A aparente dificuldade que surge do fato das constantes normalizadoras serem desconhecidas pode ser facilmente contornada se notarmos que, da relação 4.20,

$$\Pr \{(M_n - b_n)/a_n \leq z\} \approx G(z). \quad (4.22)$$

Neste caso, considerando a normalização

$$M^* \rightarrow \frac{(M_n - b_n)}{a_n}, \quad (4.23)$$

obtemos

$$\Pr \{M_n \leq z\} \approx G \{(z - b_n)/a_n\} = G^*(z), \quad (4.24)$$

onde G^* é um novo membro da família GEV. Em outras palavras, o teorema 2 permite uma aproximação da distribuição G^* por um membro da família GEV para altos valores de n . Portanto, este argumento leva à seguinte aproximação para modelar eventos extremos: dada uma série de variáveis aleatórias iid (independentes e igualmente distribuídas) X_1, X_2, \dots, X_k , pode-se extrair desta série uma certa quantidade de blocos de mesmo tamanho, contendo n variáveis (n grande) cada um, gerando assim uma série de blocos de mesmo tamanho n , a saber $B_{n,1}, B_{n,2}, \dots, B_{n,m}$, onde m é o número total de blocos ($m = k/n$). Se selecionarmos agora o valor máximo dentro de cada bloco, obtemos uma nova série de tamanho m , dada por $M_{n,1}, M_{n,2}, \dots, M_{n,m}$, onde $M_{n,m}$ é o valor máximo do m -ésimo bloco de tamanho n . Logo, esta série de máximos em bloco pode ser fitada por uma distribuição GEV. Frequentemente, esses blocos são escolhidos para corresponder a um período de tempo de um ano, onde são registradas n ocorrências. A série de máximos em bloco seria então uma série contendo os casos máximos anuais, durante um número determinado de anos, por exemplo, um século (COLES, 2001).

A estimativa de quantis extremos dos máximos em bloco podem ser facilmente obtidos da equação 4.19, ou seja,

$$z_p = \begin{cases} \mu - \frac{\sigma}{\xi} \left[1 - \{-\log(1-p)\}^{-\xi} \right], & \xi \neq 0, \\ \mu - \sigma \log \{-\log(1-p)\}, & \xi = 0, \end{cases} \quad (4.25)$$

onde $G(z_p) = 1 - p$. Dentro deste contexto, z_p é chamado nível de retorno (COLES, 2001), que está associado a um período de retorno, $1/p$. Nesse caso, espera-se que, dentro de um razoável grau de precisão, o nível z_p seja excedido em média uma vez a cada período de tempo de $1/p$. No caso do exemplo de máximos anuais, espera-se que o nível z_p seja excedido em média uma vez a cada $1/p$ anos, ou seja, a probabilidade de um máximo anual exceder z_p , é p . Os períodos e níveis de retorno são ferramentas amplamente utilizadas em previsões de ocorrência de eventos extremos.

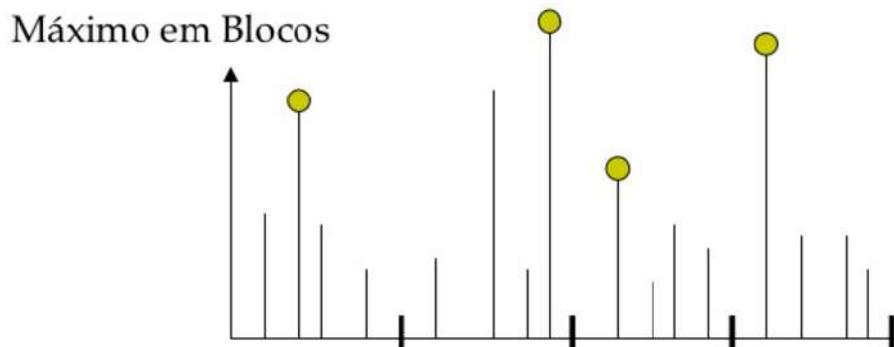
Se definirmos $y_p = -\log(1-p)$ (COLES, 2001), a equação 4.25 passa a ser escrita de uma forma mais simples, ou seja,

$$z_p = \begin{cases} \mu - \frac{\sigma}{\xi} [1 - y_p^{-\xi}], & \xi \neq 0, \\ \mu - \sigma \log y_p, & \xi = 0. \end{cases} \quad (4.26)$$

Logo, segue que se z_p é plotado em função de y_p em uma escala logarítmica, ou equivalentemente, se z_p é plotado em função de $\log y_p$, então o gráfico será linear se $\xi = 0$ (família de Gumbel). Por outro lado, se $\xi < 0$ (família de Weibull), então o gráfico será convexo para o limite de $p \rightarrow 0$ em $(\mu - \sigma)/\xi$, sendo, portanto, limitado assintoticamente. Finalmente, se $\xi > 0$ (família de Fréchet) então o gráfico será côncavo e, portanto, não limitado assintoticamente. Esse gráfico é chamado gráfico de nível de retorno (COLES, 2001). Observando a figura 4.1, podemos entender porque os gráficos de $(z_p \times \log y_p)$ das famílias de Weibull e de Fréchet são convexo e côncavo, respectivamente. Isso ocorre porque a distribuição da família de Weibull possui uma cauda direita limitada, ou seja, com um suporte finito ². Neste caso, deverá existir um valor limite para valores extremos nesse tipo de distribuição, portanto, o gráfico $(z_p \times \log y_p)$ deverá ter um valor assintótico para valores extremos. Por outro lado, as distribuições de Fréchet possuem caudas mais pesadas e ilimitadas (suporte infinito), sugerindo assim um gráfico côncavo dos níveis de retorno, para os quais não há um valor de limite máximo. Vale salientar que, apesar de a distribuição de Fréchet não possuir um limite superior para ocorrência de valores extremos, isso se limita apenas à teoria. Se, por exemplo, a ocorrência de chuvas em uma determinada região for modelada por uma distribuição de Fréchet, não significa que são possíveis tempestades infinitamente grandes. Nesse caso, obviamente, os resultados estatísticos não devem ser interpretados sozinhos e literalmente, mas sempre associados aos conhecimentos prévios dos fenômenos físicos analisados.

²Suporte de uma distribuição é o conjunto constituído por todos os valores que a variável pode assumir e pelas probabilidades de que esses valores ocorram (COLES, 2001), (TSAY, 2010)

Figura 4.2 - Figura ilustrando uma série temporal dividida em blocos de mesmo tamanho. São selecionados os valores mais altos de cada bloco de tal forma a obter uma nova série contendo os máximos de cada bloco.



Fonte: Produção do autor.

4.2.2 Modelagem de Mínimos em Blocos

Algumas aplicações requerem modelos para valores extremamente baixos, ao invés de valores extremos altos. Analogamente ao caso de máximos, podemos definir uma variável \tilde{M}_n , tal que $\tilde{M}_n = \min \{X_1, \dots, X_n\}$, onde X_i são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas e \tilde{M}_n é o valor mínimo do bloco X_1, \dots, X_n . De maneira análoga ao caso dos máximos em blocos M_n , a distribuição dos mínimos em bloco também converge para uma dada distribuição, se houver um adequado reescalamiento, tal qual o caso anterior. Os resultados para \tilde{M}_n são imediatamente obtidos a partir dos resultados de M_n , isso porque, tomando uma nova variável aleatória $Y_i = -X_i$, para $i = 1, \dots, n$, a mudança de sinal significa que pequenos valores de X_i , correspondem a altos valores de Y_i . Logo, se $\tilde{M}_n = \min \{X_1, \dots, X_n\}$, então $M_n = \max \{Y_1, \dots, Y_n\}$, ou seja, $\tilde{M}_n = -M_n$. Portanto, para grandes valores de n , obtemos

$$\begin{aligned} \Pr \{ \tilde{M}_n \leq z \} &= \Pr \{ -M_n \leq z \} \\ \Pr \{ \tilde{M}_n \leq z \} &= \Pr \{ M_n \geq -z \} \\ \Pr \{ \tilde{M}_n \leq z \} &= 1 - \Pr \{ M_n \leq -z \} \\ 1 - \Pr \{ M_n \leq -z \} &\approx 1 - \exp \left\{ - \left[1 + \xi \left(\frac{-z - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-1/\xi} \right\} = 1 - \exp \left\{ - \left[1 - \xi \left(\frac{z - \tilde{\mu}}{\sigma} \right) \right]^{-1/\xi} \right\} \end{aligned}$$

sobre o conjunto $z : 1 - \xi(z - \tilde{\mu})/\sigma > 0$, onde $\tilde{\mu} = -\mu$. Esta distribuição é a GEV

para mínimos. Desta forma, pode-se enunciar um teorema análogo ao teorema 2 (COLES, 2001):

Teorema 3: *Se existe uma sequência de constantes $a_n > 0$ e b_n , tais que*

$$\Pr \left\{ \left(\tilde{M}_n - b_n \right) / a_n \leq z \right\} \rightarrow \tilde{G}(z), \quad n \rightarrow \infty, \quad (4.27)$$

para uma função de distribuição não degenerada \tilde{G} , então G é um membro da família de distribuição GEV para mínimos, a saber

$$\tilde{G}(z) = 1 - \exp \left\{ - \left[1 - \xi \left(\frac{z - \tilde{\mu}}{\sigma} \right) \right]^{-1/\xi} \right\}, \quad (4.28)$$

definido sobre o conjunto $z : 1 - \xi(z - \tilde{\mu})/\sigma > 0$, onde $-\infty < \mu < \infty$, $\tilde{\sigma} > 0$ e $-\infty < \xi < \infty$.

Diante disso, na situação onde o modelo de mínimos em bloco é apropriado, a distribuição GEV para mínimos pode ser aplicada diretamente, ou alternativamente, explorar a dualidade entre as distribuições de máximo e mínimo. Isto porque, dado um conjunto de dados z_1, \dots, z_m que são realizações da distribuição GEV para mínimos, com parâmetros $(\tilde{\mu}, \sigma, \xi)$, então este ajuste é completamente análogo a um ajuste da distribuição GEV para máximos, porém das variáveis $-z_1, \dots, -z_m$, com os parâmetros dados por $(-\hat{\mu}, \sigma, \xi)$.

4.2.3 Inferência Estatística para Distribuição GEV

Conforme visto na seção anterior, a distribuição GEV fornece um modelo para a distribuição de máximos em bloco, o qual consiste em dividir o conjunto de dados em blocos de mesmo tamanho, e modelar a distribuição GEV para os valores máximos de cada bloco. No entanto, a escolha para o tamanho do bloco não deve ser aleatória (COLES, 2001). Isto porque blocos que são muito pequenos possuem a vantagem de perder poucos valores extremos, porém, os blocos serão pequenos (n pequeno) e, portanto, a aproximação dada pelo teorema 2 se torna deficiente e a modelagem pode se enviesada (COLES, 2001). Por outro lado, se o tamanho do bloco é muito grande, então serão gerados poucos blocos e, conseqüentemente, poucos pontos na série, gerando assim um erro de estimação apreciável. Além disto, escolhas de blocos muito grandes levam à perda de valores extremos, já que é retirado apenas o valor mais extremo de cada bloco. Portanto, deve-se tomar cuidado na escolha do tamanhos

dos blocos, de forma que eles não sejam grandes demais, gerando um enviesamento estatístico, ou pequenos demais, aumentando drasticamente o erro das estimativas.

Para se fazer inferências adequadas sobre os parâmetros da distribuição GEV, [Coles \(2001\)](#) afirma que foram propostas várias técnicas, dentre elas, incluem-se métodos gráficos, estimação pelo método dos momentos, máxima verossimilhança etc. Cada uma dessas técnicas apresenta pontos fortes e fracos. [Coles \(2001\)](#) também afirma que o método da máxima verossimilhança é o mais atraente, contanto que as condições de regularidades sejam satisfeitas, ou seja, que a função de verossimilhança seja monotonamente crescente. Diante disso, [Smith \(1985\)](#) observou que dependendo da estimativa do parâmetro de forma pelo método da máxima verossimilhança, essas condições nem sempre são observadas, uma vez que:

- quando $\xi > -0.5$, os estimadores de máxima verossimilhança são regulares, tendo suas propriedades assintóticas habituais;
- quando $-1 < \xi < -0.5$, o estimador de máxima verossimilhança é geralmente encontrado, porém as condições de regularidades não são observadas;
- quando $\xi < -1$, não é possível obter os estimadores de máxima verossimilhança.

O caso onde $\xi \leq -0.5$ corresponde às distribuições com caudas muito curtas e limitadas, situação que é dificilmente encontrada em modelagens de eventos extremos ([COLES, 2001](#)).

Para encontrarmos a função densidade de probabilidade $f(x)$ da distribuição GEV, devemos aplicar a derivada em [4.19](#), obtendo assim

$$f(x) = \frac{1}{\sigma} \left[1 + \xi \left\{ - \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right\} \right]^{\left(\frac{1+\xi}{\xi} \right)} \exp \left\{ - \left[1 + \xi \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^{-\frac{1}{\xi}} \right] \right\}, \quad (4.29)$$

onde $-\infty < x < (\mu - \sigma)/\xi$, para $\xi < 0$, que corresponde à Família de Weibull e $(\mu - \sigma)/\xi < x < \infty$, para $\xi > 0$, que corresponde à família de Fréchet. Por fim, quando ξ tende para zero, tem-se

$$f(x) = \frac{1}{\sigma} \left\{ \exp \left(- \frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right\} \exp \left[- \exp \left(- \frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right], \quad -\infty < x < \infty, \quad (4.30)$$

gerando assim a função densidade de probabilidade de Gumbel.

Utilizando as relação 4.9 de verossimilhança e a equação 4.29, obtemos a seguinte função de verossimilhança para $\xi \neq 0$:

$$L(\theta) = L(\mu, \sigma, \xi) = \frac{1}{\sigma^n} \prod_{i=1}^n \left[1 + \xi \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-\left(\frac{1+\xi}{\xi}\right)} \exp \left\{ \sum_{i=1}^n \left\{ - \left[1 + \xi \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^{-\frac{1}{\xi}} \right] \right\} \right\}, \quad (4.31)$$

que para $\xi < 0$, assume valores diferentes de zero se todos os valores de x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) forem menores que $\mu - \sigma/\xi$, sendo x_n o maior valor da série de observações. Se $\xi > 0$, então $L(\theta)$ será diferente de zero se todos os valores x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) forem maiores que $\mu - \sigma/\xi$. Caso contrário, $L(\theta) = 0$.

No entanto, conforme já visto, é mais conveniente trabalhar com o logaritmo da função verossimilhança, que é dado por:

$$\ell(\mu, \sigma, \xi) = -m \log \sigma - (1 + 1/\xi) \sum_{i=1}^m \log \left[1 + \xi \left(\frac{z_i - \mu}{\sigma} \right) \right] - \sum_{i=1}^m \left[1 + \xi \left(\frac{z_i - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-1/\xi}, \quad (4.32)$$

dado que

$$1 + \xi \left(\frac{z_i - \mu}{\sigma} \right) > 0. \quad (4.33)$$

Analogamente, encontra-se a função de log-verossimilhança para a família de Gumbel ($\xi = 0$),

$$\ell(\mu, \sigma) = -m \log \sigma - \sum_{i=1}^m \left(\frac{z_i - \mu}{\sigma} \right) - \sum_{i=1}^m \exp \left\{ - \left(\frac{z_i - \mu}{\sigma} \right) \right\}. \quad (4.34)$$

As estimativas de máxima verossimilhança de (μ, σ, ξ) são obtidos pelos valores máximos da equação 4.34 para cada parâmetro. Nesse caso, basta encontrar os seguintes valores críticos:

$$\frac{\partial \ell(\mu, \sigma, \xi)_{\mu=\mu_0}}{\partial \mu} = 0, \quad (4.35)$$

$$\frac{\partial \ell(\mu, \sigma, \xi)_{\sigma=\sigma_0}}{\partial \sigma} = 0, \quad (4.36)$$

$$\frac{\partial \ell(\mu, \sigma, \xi)_{\xi=\xi_0}}{\partial \xi} = 0. \quad (4.37)$$

Pela substituição das estimativas 4.35, 4.36 e 4.37 em 4.25, obtemos a estimativa de máxima verossimilhança de z_p (COLES, 2001),

$$\hat{z}_p = \begin{cases} \mu - \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\xi}} [1 - y_p^{-\hat{\xi}}], & \hat{\xi} \neq 0 \\ \hat{\mu} - \hat{\sigma} \log y_p, & \hat{\xi} = 0 \end{cases} \quad (4.38)$$

4.3 Modelos de Excessos Acima de um Limiar (Distribuição Generalizada de Pareto - GPD)

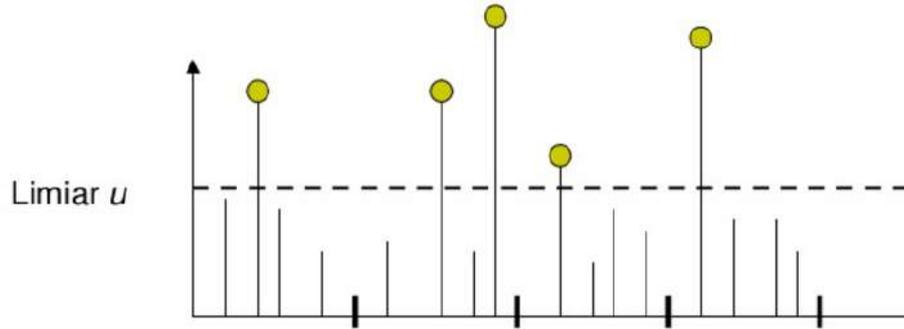
Nas seções anteriores foi estudado o modelo de máximo em blocos. No entanto, apesar de muito útil, este modelo acaba desperdiçando uma quantidade apreciável de valores extremos, isso porque dentro de um bloco podem haver muitos valores extremos, dentre os quais somente o mais alto é selecionado. Diante disto, talvez fosse prudente empregar um outro modelo que não apresentasse esse grau de desperdício, ou seja, um modelo que conseguisse capturar o maior número possível de valores extremos. Uma ideia intuitiva para isto é trabalhar com um limiar acima do qual todos os valores da série são considerados. Neste caso em particular, não há perdas de eventos extremos, no entanto, a escolha de um valor muito baixo para o limiar pode selecionar valores que não são considerados extremos, podendo prejudicar a modelagem.

Diante disto, sejam X_1, X_2, \dots uma sequência de variáveis aleatórias iid (independentes e igualmente distribuídas), possuindo a função de distribuição F . Seria natural e intuitivo considerar os valores extremos deste conjunto como os valores que extrapolam um dado valor limite u (limiar), conforme a figura 4.3. Considerando este limiar u , temos então que a probabilidade condicional da ocorrência de valores extremos, neste caso, é dada (COLES, 2001) por:

$$\begin{aligned}
\Pr(X > u + y | X > u) &= \frac{\Pr[(X > u + y) \cap (X > u)]}{\Pr(X > u)} \\
&= \frac{\Pr[X > u + y]}{\Pr(X > u)} \\
&= \frac{1 - F(u + y)}{1 - F(u)} \\
&= H(y), \quad y > 0
\end{aligned} \tag{4.39}$$

Se F fosse conhecido, o que não ocorre na prática, então a função de distribuição dos valores acima do threshold seria facilmente determinada. A exemplo do caso da distribuição GEV, precisamos fazer certas aproximações para o presente caso também.

Figura 4.3 - Figura ilustrando uma série temporal limitada superiormente por um limiar, acima do qual se encontram os valores extremos que formaram uma nova série temporal de pontos acima de um limiar.



Fonte: Produção do autor.

4.3.1 Modelagem de Picos Acima de um Limiar

Seja o seguinte teorema (JAMES, 1975), (BALKEMA; HAAN, 1974):

Teorema 4: *Seja X_1, X_2, \dots uma sequência de variáveis aleatórias independentes e igualmente distribuídas e*

$$M_n = \max \{X_1, \dots, X_n\}. \tag{4.40}$$

Denotemos um termo arbitrário na sequência X_i dado por X , e suponha que, para valores altos de n , F satisfaz o teorema 2, ou seja,

$$\Pr \{M_n \leq z\} \approx G(z), \quad (4.41)$$

onde

$$G(z) = \exp \left\{ - \left[1 + \xi \left(\frac{z - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-1/\xi} \right\}, \quad (4.42)$$

para algum $\mu, \sigma > 0$ e ξ . Então, para um valor de limiar u alto o suficiente, a função distribuição dos excessos acima de um limiar ($X - u$), condicionado ao fato de $X > u$, é aproximadamente

$$H(y) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{\xi y}{\sigma} \right)^{-1/\xi}, & \xi \neq 0, \\ 1 - \exp \left(-\frac{y}{\tilde{\sigma}} \right), & \xi \rightarrow 0, \\ \frac{y}{\tilde{\sigma}}, & \xi \rightarrow -1, \end{cases} \quad (4.43)$$

definida sobre $y > 0$ e $\left[1 + \left(\xi y / \tilde{\sigma} \right) \right] > 0$, onde

$$\tilde{\sigma} = \sigma + \xi(u - \mu), \quad (4.44)$$

em que (σ, μ, ξ) é conjunto de parâmetros da Generalized extreme values distribution (GEV) (COLES, 2001).

A relação 4.43 é chamada família de Pareto generalizada (GPD). O teorema 4 implica que se a distribuição de máximo em blocos converge em distribuição para G , então a distribuição dos excessos acima do limiar converge em distribuição para H . Além disto, os parâmetros da distribuição generalizada de Pareto são unicamente determinados pelos da distribuição GEV. Essa dualidade entre GEV e GPD significa que o parâmetro de forma ξ é responsável também por determinar o comportamento qualitativo da distribuição GPD.

Nesse caso, se $(\xi > 0)$ $\xi < 0$, a distribuição (não) é limitada superiormente, ou seja, possui um suporte (infinito) finito, dado por $(y =]0, \infty[)$ $y =]0, u - (\tilde{\sigma} / \xi)]$

(COLES, 2001).

Vale notar também pela relação 4.43, que se $\xi \rightarrow -1$ e $\xi \rightarrow 0$, então H é reduzida respectivamente para as distribuições uniforme $U(0, \tilde{\sigma})$ e exponencial com média $\tilde{\sigma}$. Portanto, essas distribuições são casos particulares da distribuição GPD.

4.3.2 Prova do Teorema 4

Seja X uma variável aleatória com função de distribuição dada por F . Assumindo o Teorema 1 e a equação 4.19, para valores suficientemente altos de u , obtemos,

$$F^n(z) \approx \exp \left\{ - \left[1 + \xi \left(\frac{z - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-1/\xi} \right\}$$

para algum parâmetro $(\mu, \sigma > 0)$ e ξ . Então

$$n \log F(z) \approx - \left[1 + \xi \left(\frac{z - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-1/\xi} \quad (4.45)$$

Porém, para valores altos de u , podemos fazer uma expansão em série de Taylor

$$\log F(z) \approx - \{1 - F(z)\}$$

Substituindo em 4.45, seguido por manipulação algébrica

$$1 - F(u) \approx \frac{1}{n} \left[1 + \xi \left(\frac{u - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-1/\xi}$$

para valores altos de u . Similarmente, para $y > 0$

$$1 - F(u + y) \approx \frac{1}{n} \left[1 + \xi \left(\frac{u + y - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-1/\xi}$$

Então,

$$\begin{aligned}
\Pr \{X > u + y | X > u\} &\approx \frac{n^{-1}[1 + \xi(u + y - \mu)/\sigma]^{-1/\xi}}{n^{-1}[1 + \xi(u - \mu)/\sigma]^{-1/\xi}} \\
&= \left[\frac{1 + \xi(u + y - \mu)/\sigma}{1 + \xi(u - \mu)/\sigma} \right]^{-1/\xi} \\
&= \left[1 + \frac{\xi y}{\tilde{\sigma}} \right]^{-1/\xi},
\end{aligned} \tag{4.46}$$

onde

$$\tilde{\sigma} = \sigma + \xi(u - \mu) \tag{4.47}$$

como queríamos demonstrar ³.

4.3.3 Técnicas de Escolha do Limiar

Conforme visto no teorema 4, dado um conjunto de variáveis x_1, \dots, x_2 (iid), os valores extremos são identificados por meio da escolha de um limiar, acima do qual todos os valores ($x_i > u$) serão considerados valores extremos. Sendo agora definida uma nova variável aleatória, dada pelos excessos ($y_i = x_i - u$) (COLES, 2001), então, pelo teorema 4, a distribuição das variáveis y_i pertence à GPD. Diante disto, a escolha do valor do limiar u é de extrema importância para uma boa modelagem n .

Além disto, a exemplo da escolha do tamanho dos blocos na modelagem da GEV, a escolha do limiar deve ser feita de forma a equilibrar o viés estatístico e a variância das estimativas. Neste caso, o limiar não deverá ser muito baixo, de modo que valores não extremos sejam selecionados, gerando assim um viés, e nem muito alto, de forma a serem selecionados poucos valores extremos, e assim, ocasionando um aumento da variância dos estimadores. Diante disso, surge a necessidade de uma metodologia que auxilie em uma escolha adequada deste parâmetro. Na teoria clássica de eventos extremos, existem duas técnicas muito simples que cumprem esta finalidade. A primeira, introduzida por Davison e Smith (1990), consiste em um método gráfico baseado na média dos valores que excedem o limiar, também chamados de *mean*

³Esta demonstração se encontra em Coles (2001), na página 77, porém com um erro, provavelmente de digitação, mas que não permite chegar corretamente no resultado final. Este erro foi retificado na demonstração acima.

excess(COLES, 2001). Partindo da equação 4.43, temos que o valor médio teórico de uma GPD, com parâmetros σ e ξ , é dado por (COLES, 2001):

$$E[H(y)] = \begin{cases} \frac{\sigma}{1-\xi}, & \xi < 1, \\ \infty, & \xi \geq 1. \end{cases} \quad (4.48)$$

Sejam agora os excessos acima de um limiar u_0 , cuja distribuição pertence a uma família GPD, conforme 4.43. A relação 4.48 passa a ser escrita como (COLES, 2001)

$$E(X - u_0 | X > u_0) = \frac{\sigma_{u_0}}{1 - \xi}, \quad \xi < 1, \quad (4.49)$$

onde σ_{u_0} corresponde ao parâmetro de escala de uma GPD para um limiar u_0 . Entretanto, se os excessos acima do limiar u_0 são modelados por uma GPD, então também serão os excessos acima de um limiar $u > u_0$. Neste caso, utilizando a equação 4.44 para fazer uma apropriada mudança no parâmetro de escala, a relação 4.49, para $u > u_0$, pode ser reescrita como (COLES, 2001):

$$\begin{aligned} E(X - u | X > u) &= M(u) \\ &= \frac{\sigma_u}{1 - \xi} \\ &= \frac{\sigma_{u_0} + \xi u}{1 - \xi}, \end{aligned} \quad (4.50)$$

onde $M(u)$ é chamado função de excesso da média *mean excess*. De acordo com a equação 4.50, para uma modelagem apropriada da GPD, é esperado que a função de excesso da média varie linearmente com o threshold u . Vale salientar que a inclinação do mean excess depende do sinal de ξ , sendo crescente para $\xi > 0$ e decrescente para $\xi < 0$.

Sendo $M(u)$ uma média dos excessos acima de um limiar u , uma escolha natural para um estimador não viesado de $M(u)$ é dada por (COLES, 2001)

$$\hat{M}(u) = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - u) \mathbb{1}_{[X_i > u]}}{\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{[X_i > u]}}, \quad u \geq 0, \quad (4.51)$$

onde $\hat{M}(u)$ é chamado média de vida residual *mean residual life* (COLES, 2001) e $\mathbb{1}_{[X_i > u]}$ é a função indicadora, definida como:

$$\mathbb{1}_{[X_i > u]} = \begin{cases} 1, & \text{se } X_i > u, \\ 0, & \text{se } X_i \leq u \end{cases}$$

A equação 4.51 é a forma empírica de calcular a média dos excessos. Considerando a normalidade da distribuição das média dos excessos, os intervalos de confiança de $\hat{M}(u)$ podem ser calculados (COLES, 2001).

Neste caso, a primeira técnica utilizada na escolha adequada do limiar baseia-se na procura de um intervalo onde $\hat{M}(u)$ seja aproximadamente linear, considerando os intervalos de confiança. O menor valor dentro desse intervalo é escolhido como um limiar ideal.

Apesar de muito útil, é comum o *mean residual life* trazer algum tipo de dificuldade de interpretação, comprometendo a escolha de um threshold adequado. Diante disso, um segundo método complementar, baseado na estabilidade dos parâmetros, é apresentado. Neste caso, se os excessos acima de um limiar u_0 seguem uma GPD com parâmetros ξ e σ , então os excessos acima de um limiar $u > u_0$ também seguem uma GPD com mesmo shape parameter ξ (COLES, 2001). No entanto, devido 4.44, o parâmetro de escala passa a ser escrito como (COLES, 2001):

$$\sigma_u = \sigma_{u_0} + \xi(u - u_0). \quad (4.52)$$

Logo, para $\xi \neq 0$, o parâmetro de escala varia com u . Porém, fazendo uma reparametrização, a saber $\sigma^* = \sigma_u - \xi u$ e considerando a equação 4.52, temos que

$$\sigma^* = \sigma_{u_0} - \xi u_0, \quad (4.53)$$

que é constante. Neste caso, $\sigma^*(u)$ é chamado parâmetro de escala reparametrizado (COLES, 2001). Diante disso, as estimativas para σ^* e ξ devem ser aproximadamente constantes para uma correta modelagem da GPD. A exemplo da técnica do *mean residual life*, um valor adequado para o limiar deverá ser o menor valor dentro de um intervalo de limiares para os quais σ^* e ξ sejam aproximadamente constantes. Vale salientar que, devido 4.53, os plots de $\sigma^*(u)$ e $\xi(u)$ possuem uma aparente simetria.

4.3.4 Inferência Estatística para Distribuição GPD

Na seção anterior foram ilustradas algumas alternativas para nos auxiliar na escolha de um limiar adequado. Tendo feito tal escolha, os parâmetros da GPD podem ser estimados. Existem hoje várias técnicas disponíveis para estimação dos parâmetros da GPD (HOSKING; WALLIS, 1987), (ZHANG, 2007), (JIN, 2010), (PARK; KIM, 2016), (LUCENO, 2006) e (COLES, 2001). Neste trabalho, a exemplo do caso da distribuição GEV, utilizaremos também o método de máxima verossimilhança (COLES, 2001), já que este, além de ser o mais popular, também é mais geral, flexível e robusto perante os outros métodos (TSAY, 2010).

Sejam as variáveis aleatórias $(y_i : i = 1, \dots, n)$ (iid), dadas pelos excessos acima do limiar u ($y_i = x_i - u$) e com distribuição GPD. Neste caso, a função de verossimilhança é dada por,

$$L(\sigma, \xi) = \prod_{i=1}^n h(y_i; \sigma, \xi), \quad (4.54)$$

onde $h(y; \sigma, \xi)$ é a densidade de probabilidade conjunta. Trabalhando com o logaritmo de 4.54, obtemos a função de log-verossimilhança, dada por

$$\begin{aligned} \ell(\sigma, \xi) &= \log L(\sigma, \xi) \\ &= \sum_{i=1}^n \log [h(y_i; \sigma, \xi)] \\ &= \sum_{i=1}^n \log \frac{\partial [H(y_i; \sigma, \xi)]}{\partial y_i}. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Portanto, substituindo (4.43) em (4.55), obtemos

$$\ell(\sigma, \xi) = \begin{cases} -n \log \sigma - \left(1 + \frac{1}{\xi}\right) \sum_{i=1}^n \log \left(1 + \frac{\xi y_i}{\sigma}\right), & \xi \neq 0 \\ -n \log \sigma - \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n y_i, & \xi \rightarrow 0. \end{cases} \quad (4.56)$$

dado que $(1 + \xi y_i / \sigma) > 0$ para $i = 1, \dots, n$ e $l(\sigma, \xi) = -\infty$ caso contrário. Os parâmetros ξ e σ estimados, são aqueles que maximizam (4.56).

Conforme já mencionado anteriormente, um dos principais objetivos da inferência

estatística é a previsão futura. Em se tratando de eventos extremos, este objetivo torna-se uma necessidade, visto o impacto por eles gerado. A exemplo do caso da distribuição GEV, também é possível obter os níveis e períodos de retorno para a GPD. Para isso, seja uma distribuição GPD com parâmetros σ e ξ , modelando excessos acima de limiar $x > u$ de uma variável aleatória X , ou seja,

$$\Pr \{X > x | X > u\} = \left[1 + \xi \left(\frac{x - u}{\sigma} \right) \right]^{-1/\xi}. \quad (4.57)$$

Disso, segue que

$$\Pr \{X > x\} = \varsigma_u \left[1 + \xi \left(\frac{x - u}{\sigma} \right) \right]^{-1/\xi}, \quad (4.58)$$

onde $\varsigma_u = Pr(x > u)$. Logo, o nível x_m que é em média excedido uma vez a cada m observações, é a solução de

$$\varsigma_u \left[1 + \xi \left(\frac{x_m - u}{\sigma} \right) \right]^{-1/\xi} = \frac{1}{m}. \quad (4.59)$$

Rearranjando os termos, obtemos

$$x_m = u + \frac{\sigma}{\xi} \left[(m\varsigma_u)^\xi - 1 \right], \quad (4.60)$$

dado que m é suficientemente grande, de modo a garantir que $x_m > u$. Tudo isso assume que $\xi \neq 0$. Caso $\xi = 0$, então podemos escrever a equação 4.60 da seguinte forma (COLES, 2001):

$$x_m = u + \sigma \log(m\varsigma_u) \quad (4.61)$$

De (4.60) e (4.61), o gráfico de x_m em função de m , em uma escala logarítmica, produz os mesmos comportamentos qualitativos dos níveis de retorno da GEV, ou seja, linearidade se $\xi = 0$, concavidade se $\xi > 0$ e convexidade caso $\xi < 0$ (COLES, 2001).

4.4 Dragon Kings: uma nova classe de eventos extremos

Sabe-se que leis de potência, em geral, são tipos de distribuição que são invariantes de escala (DUBRULLE et al., 1997) e, que neste caso, possuem flutuações de todas as escalas, incluindo eventos extremamente intensos. Neste caso, pequenas, grandes e extremas flutuações pertencem à mesma população e estão sujeitas a efeitos e mecanismos dinâmicos de uma mesma distribuição estística. No entanto, esta invariância de escala impede de trabalharmos com previsões desses tipos de eventos, visto que nada é capaz de distinguir, das pequenas flutuações, os processos que levaram às grandes flutuações (SORNETTE; OUIILLON, 2012). De acordo com Geller et al. (1997), a grande dificuldade de se fazer previsões de terremotos, por exemplo, é que estes seguem distribuições de leis de potência. Neste caso, tais eventos são invariantes de escala, ou seja, grandes terremotos são na verdade pequenos terremotos que sofreram algum tipo de amplificação de algum mecanismo físico interno ao sistema. Dentro deste contexto, Taleb (2008) introduziu o conceito de Cisnes Negros ou Black Swans⁴, que consiste na ideia de que eventos extremos são *outliers* raros, que pertencem a distribuições com invariância de escala, ou seja, eventos de escalas extremas são na verdade eventos de pequenas escalas, que foram sendo amplificados ao longo do tempo. Com isto, segundo Taleb (2008), a ocorrência de outliers seria impossível de ser prevista.

Entretanto, sabe-se hoje que sistemas não lineares com um grande número de partes interagentes, matematicamente representadas por variáveis acopladas, podem sofrer auto-organizações de suas estruturas internas, podendo levar o sistema a um estado fora do equilíbrio, fazendo surgir eventos discrepantes, tais quais *outliers*. *Outliers* são pontos que distam muitos desvios padrões da média e que, em grande parte das análises, são descartados por prejudicarem a análise estatística da população. No entanto, pode ser muito perigoso tratar estes eventos como erros sistemáticos ou aleatórios de medição, já que estes podem estar associados a não linearidades, podendo trazer informações preciosas do sistema físico.

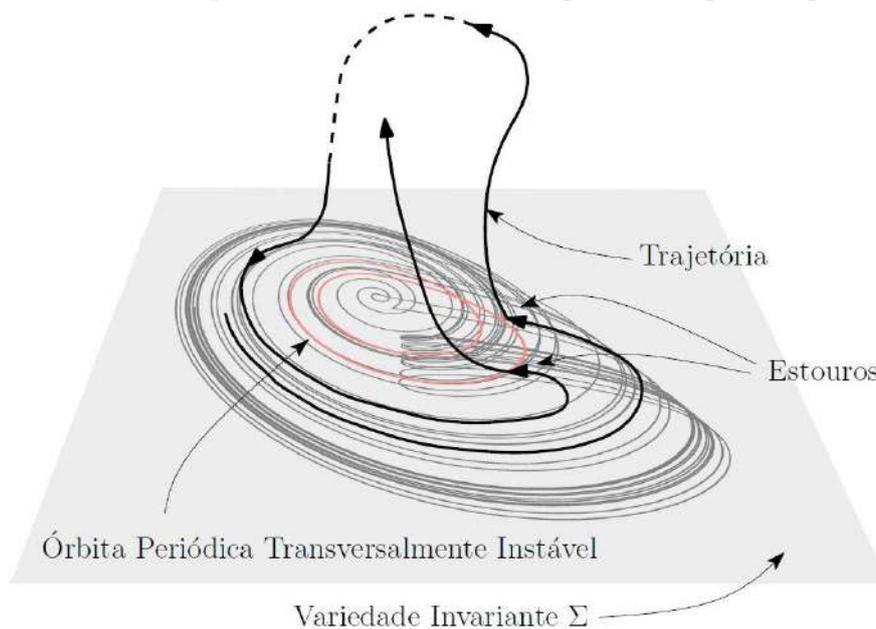
Baseado nisso, Sornette e Ouillon (2012), introduziu o conceito de Dragon Kings (DK). Dada população possuindo uma distribuição F , Dragon Kings são eventos que, devido a algum mecanismo dinâmico interno ao sistema (endógena), ou alguma influência externa (exógena), sofreram uma amplificação atípica, que os fizeram escapar de F . Neste caso, DK's são geralmente classificados como *outliers* estatísticos.

⁴Este nome é motivado pela ideia de que cisnes negros são animais exóticos e raros de se encontrar na natureza

O termo *dragon* arremete à ideia de um animal mitológico e extremamente poderoso, ao passo que *King*, surge da ideia da riqueza de um rei em um dado reino, ser um *outlier* (SORNETTE; OUILLON, 2012).

Do ponto de vista da turbulência, DK's correspondem à estruturas coerentes localizadas pontualmente em regiões com algum grau de desordem, característica esta compatível com intermitências e caoticidade (REMPERL et al., 2013). Já do ponto de vista de sistemas dinâmicos, DK's podem estar envolvidos em processos não lineares, como criticalidade auto organizada (OTT, 2002), bifurcações globais (ALLIGOOD et al., 1996), transições de fase (ALLIGOOD et al., 1996) etc. Dentro deste ponto de vista, DK's poderiam ser previstos e até mesmo suprimidos (GALUZIO et al., 2014), (CAVALCANTE et al., 2013).

Figura 4.4 - Figura ilustrativa da ocorrência de um Dragon King. Neste caso, existe um subespaço invariante Σ (plano em cinza) de um espaço de fase, onde a órbita do sistema (linha sólida preta) fica confinada. Ao passar por estruturas instáveis (linhas vermelhas) localizadas neste subespaço, a trajetória da órbita é arremessada para fora de Σ , fazendo surgir um Dragon King.



Fonte: Cavalcante et al. (2013).

Pesquisas em simulações computacionais de sistemas físicos elétricos (CAVALCANTE et al., 2013) e caos espaço-temporal (GALUZIO et al., 2014) foram capazes de identi-

ficar regiões do espaço de fase nas quais as variáveis de estado do sistema estavam confinadas e que, além disso, eram permeadas por estruturas instáveis localizadas pontualmente. Quando a trajetória passava por essas regiões, ela era abruptamente arremessada para outras regiões do espaço de fase, conforme a figura 4.4. Este processo fazia o sistema evoluir para caos espaço-temporal (GALUZIO et al., 2014). Neste caso, os pesquisadores foram capazes de identificar tais estruturas instáveis, de forma que, quando a trajetória do sistema passava próxima a estas, perturbações eram geradas de forma a desviar a trajetória. Neste caso, os eventos extremos (DK's) foram suprimidos (CAVALCANTE et al., 2013), (GALUZIO et al., 2014). Obviamente, simulações computacionais permitem manipulações e extrapolações, que dificilmente poderiam ser realizadas na vida real. No entanto, estes trabalhos, dentre outros, abrem a possibilidade de se tentar fazer previsões acerca dos *outliers*, o que não era possível dentro dos conceitos de Taleb (2008).

Atualmente, DK's têm sido estudados em diversas áreas do conhecimento, tais quais furacões (SORNETTE; OUILLON, 2012), rupturas de materiais (SORNETTE; OUILLON, 2012), enchentes (SORNETTE; OUILLON, 2012), terremotos (SORNETTE; OUILLON, 2012), tempestades (SUVEGES; DAIVSON, 2012), avalanches (ANCEY, 2012), atividades cerebrais (MISHRA et al., 2018), dentre outros.

A seguir, serão apresentadas algumas técnicas estatísticas para detecção de *Dragon Kings*, as quais serão utilizadas nesta tese para a realização de análises em dados do vento solar.

4.4.1 Teste-DK

Na presente seção, apresentaremos um simples teste estatístico, baseado na hipótese de que a população de uma certa variável aleatória pertence a uma distribuição de lei de potências. Neste caso, um teste de hipótese é realizado, de modo a verificar se existem evidências estatísticas que apontem que certos pontos da população, na verdade, não pertencem à mencionada lei de potência. Neste caso, presumiríamos que tais pontos sofreram algum tipo de amplificação que os demais não sofreram, qualificando-os como possíveis *Dragon Kings*. O teste estatístico que será apresentado a seguir pode ser encontrado na referência (PISARENKO; SORNETTE, 2012).

Seja um conjunto de variáveis aleatórias (iid), dadas por x_1, \dots, x_n , seguindo uma função densidade de probabilidade exponencial, ou seja,

$$f(x) = a \exp(-ax), \quad a > 0, \quad x \geq 0, \quad (4.62)$$

onde a é o parâmetro média. Considere, agora, o ordenamento em ordem decrescente dessas variáveis, ou seja, $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$, onde x_1 é o maior elemento do conjunto, x_2 é o segundo maior elemento, e assim por diante. Suponhamos que, deste conjunto, agora ordenado, existem r elementos suspeitos de serem DK, ou seja, suponhamos que suspeitamos dos elementos $x_r \leq x_{r-1} \leq \dots \leq x_1$. Neste caso, o restante dos elementos, a saber, $x_n \leq x_{n-1} \leq \dots \leq x_{r+1}$, pertenceriam a uma distribuição exponencial.

Feito isso, o seguinte teste de hipóteses é realizado (PISARENKO; SORNETTE, 2012):

$$\begin{cases} \mathbf{H0} : & \text{todas as observações são geradas pela mesma distribuição exponencial;} \\ \mathbf{H1} : & r \text{ observações não são geradas pela distribuição exponencial.} \end{cases} \quad (4.63)$$

Portanto, a hipótese nula deste teste é que todos os pontos pertencem à mesma distribuição exponencial, ou seja, não há DK's, ao passo que a hipótese alternativa é que existe pelo menos um DK.

Consideremos agora uma nova variável aleatória y , obtida da seguinte forma:

$$\begin{cases} y_k = x_k - x_{k-1}, & k = 1, \dots, n-1, \\ y_n = x_n. \end{cases} \quad (4.64)$$

Pode-se provar (EMBRECHTS et al., 2013) que se as variáveis aleatórias x_i são iid com distribuição exponencial, então y_k são também independentes e exponencialmente distribuídas, com média $1/ak$, onde a é o mesmo que aparece em (4.62).

Considere, ainda, uma nova variável aleatória z , definida por $z_k = ky_k, k = 1, \dots, n$ (PISARENKO; SORNETTE, 2012). Neste caso, pode-se construir um teste estatístico dado pela razão entre as médias da variável z , obtidas dos r suspeitos DK's e dos $n - r$ pontos restantes, ou seja, (PISARENKO; SORNETTE, 2012):

$$T = \frac{\frac{1}{r}(z_1 + \dots + z_r)}{\frac{1}{(n-r)}(z_{r+1} + \dots + z_n)}, \quad (4.65)$$

Desde que as variáveis y_i são exponencialmente distribuídas, z_k também será (PISARENKO; SORNETTE, 2012). No entanto, deve-se notar que uma distribuição exponencial é, a menos de um fator constante, uma distribuição χ^2 , com dois graus de liberdades (PISARENKO; SORNETTE, 2012). Neste caso, o numerador de (4.65), que é uma soma de variáveis com distribuição χ^2 , também pertence a uma distribuição χ^2 , porém agora com $2r$ graus de liberdade, visto que esta parcela é dividida por r . De forma análoga, tem-se que o denominador também segue uma distribuição χ^2 com $2(n - r)$ graus de liberdade. É sabido que a razão entre duas distribuições χ^2 com graus de liberdade dados respectivamente por p e q , é uma distribuição F , com (p, q) graus de liberdade (PISARENKO; SORNETTE, 2012). Neste caso, o teste T dado por (4.65) possui distribuição χ^2 , com $(2r, 2(n - r))$ graus de liberdade. Portanto, o p-value para o teste de hipóteses 4.63 é dado por:

$$p = 1 - F(T, 2r, 2(n - r)), \quad (4.66)$$

onde $F(T, 2r, 2(n - r))$ é a função de distribuição acumulada (CDF) da distribuição F , com $(2r, 2(n - r))$ graus de liberdade. Deve-se notar que o p-value em (4.66) não depende do parâmetro a de (4.62), ou seja, a média da distribuição exponencial não afeta o teste. O teste descrito acima é denominado teste-DK (PISARENKO; SORNETTE, 2012).

Considerando a variável $z_k = ky_k$, pode-se notar que para valores da distribuição com k muito alto, z_k pode resultar em um valor muito alto, mesmo para valores baixos y_k . Neste caso, deve-se tomar cuidado com a quantidade de variáveis que são incluídas no teste T, já que um teste com uma amostra muito grande pode trazer resultados espúrios. Neste caso, em análises futuras nesta tese, utilizaremos apenas metade da amostra para realizar o teste-DK.

Geralmente, inicia-se o teste com $r = 1$, ou seja, testando apenas o maior valor da amostra. Sendo o teste-DK negativo, passaremos a testar $r = 2$. Caso o teste seja negativo novamente, partiremos para $r = 3$ e assim por diante. O teste é interrompido para um valor de r para o qual a hipótese nula é rejeitada. Neste caso, r *Dragon Kings* são identificados. Se para um dado valor de r , digamos, 5% do tamanho total da série, o teste-DK não detectou a presença de DK's, então conclui-se que, neste

caso, a série analisada não possui *Dragon Kings*.

Embora o teste-DK tenha sido feito aqui para uma distribuição exponencial, pode-se aplicá-lo para qualquer lei de potência, como por exemplo, para distribuições de Pareto, Gumbel, Fréchet, Weibull etc. A escolha da distribuição para o teste-DK vai depender das características da amostra e do sistema físico envolvido.

A seguir, faremos um breve resumo esquemático da aplicação do teste-DK:

- (1) Primeiramente, ordene os dados em ordem decrescente, ou seja, $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$;
- (2) Especione visualmente a série e estabeleça o número r de pontos suspeitos de serem DK's;
- (3) Construa uma nova variável aleatória y , dada por

$$\begin{cases} y_k = x_k - x_{k-1}, & k = 1, \dots, n-1, \\ y_n = x_n. \end{cases} \quad (4.67)$$

- (4) Considere agora a variável aleatória $z_k = ky_k$, $k = 1, \dots, n$;
- (5) Construa o seguinte teste estatístico:

$$T = \frac{\frac{1}{r}(z_1 + \dots + z_r)}{\frac{1}{(n-r)}(z_{r+1} + \dots + z_n)}, \quad (4.68)$$

onde n é o número de pontos na série e r é o número de pontos suspeitos de serem DK's;

- (6) Calcule o p-valor através de $p = 1 - F(T, 2r, 2(n-r))$, onde $F(T, 2r, 2(n-r))$ é a função de distribuição acumulada (CDF) da distribuição F , com $(2r, 2(n-r))$ graus de liberdade;
- (7) Se o p-valor é menor que 0.1, então a hipótese nula é rejeitada e na série há r DK's. Caso o p-valor seja maior ou igual a 0.1, as r observações não serão DK's.

4.4.2 Teste-U

Na seção anterior foi apresentado o teste-DK, o qual consiste em testar se um conjunto de variáveis pertence ou não a uma mesma distribuição exponencial. Nesta

seção, será apresentado um teste alternativo, denominado teste-U. Este teste consiste basicamente em verificar se uma amostra possui ou não DK's. Diante disso, a exemplo do caso anterior, o teste-U também é baseado em um teste de hipótese, porém, desta vez, dado por:

$$\begin{cases} \mathbf{H0} : & \text{todas as observações são geradas pela mesma distribuição exponencial;} \\ \mathbf{H1} : & \text{uma ou mais observações não são geradas pela distribuição exponencial.} \end{cases} \quad (4.69)$$

Como pode-se perceber pelo teste (4.69), ao contrário do teste-DK, onde podemos inferir o número de DK's, o teste-U não é capaz fazer isto. Na verdade, o teste-U é muito útil e robusto para verificarmos a existência ou não de *Dragon Kings* na série. Neste caso, o ideal a se fazer é aplicar inicialmente o teste-U e, se for dado um resultado positivo, parte-se em seguida para o teste-DK para que seja inferida a quantidade aproximada de tais eventos.

Diante disto, consideremos uma função de distribuição acumulada (CDF) exponencial, dada por:

$$F(x|b) = 1 - \exp(-bx), \quad (4.70)$$

onde b é, em princípio, um parâmetro desconhecido. Geralmente, no teste-U, truncam-se as variáveis aleatórias em análise v_i por um limiar h , acima do qual seleciona-se a amostra de teste. Isto é feito quando se quer testar a região caudal da distribuição, o que não é obrigatoriamente necessário. Após a truncagem ou não da série, temos uma amostra ordenada de variáveis aleatórias $v_1 \geq v_2 \geq \dots \geq v_n$ ⁵, as quais passam por uma checagem visual, na tentativa de identificar o subconjunto de r suspeitos de serem DK. Após isso, obtemos o subconjunto $v_n \leq v_{n-1} \leq \dots \leq v_{r+1}$, o qual julga-se pertencer a uma distribuição dada por (4.70). Neste caso, utiliza-se o método de máxima verossimilhança para inferir o parâmetro b desta distribuição. Para isto, é utilizada a PDF f de $v_n \leq v_{n-1} \leq \dots \leq v_{r+1}$, e portanto, obtemos

⁵Alguns pesquisadores trabalham com logaritmo de v_i (PISARENKO; SORNETTE, 2012), porém, isto dependerá do sistema físico envolvido e do tipo de análise que se deseja fazer

$$f(x_{r+1,n}, \dots, x_{n,n}) \sim [1 - F(x_{r+1,n}|b)]^r \prod_{k=r+1}^n f(x_{k,n}|b); \quad F(x|b) = 1 - \exp(-b(x-h)); \quad x \geq h. \quad (4.71)$$

Portanto, a estimativa por máxima verossimilhança do parâmetro b é dada agora por \hat{b} . Diante disso, pode-se obter⁶ o p-value do teste 4.69 (PISARENKO; SORNETTE, 2012), a saber,

$$p(x_{k,n}) = 1 - \text{betainc}(F(x_{k,n}|\hat{b}), n - k + 1, k), \quad k = 1, \dots, n, \quad (4.72)$$

onde $\text{betainc}(F, n - k + 1, k)$ é a função Beta incompleta normalizada (KARP, 2016). Nesse caso, o p-value em 4.72 é interpretado como a probabilidade de alguma observação v_i da amostra não pertencer a uma distribuição exponencial, dada por (4.70). Portanto, se o p-value for menor que um dado nível de significância⁷, então a hipótese nula do teste 4.69 é rejeitada, e então existe evidência de haver ao menos um DK na amostra.

Conforme dito anteriormente, o teste-U apenas verifica a existência ou não de DK's, ao passo que o teste-DK dá uma estimativa da quantidade aproximada destes eventos na amostra. Por isso, é indicado aplicar primeiro o teste-U, para em seguida aplicar o teste-DK. Além disso, vale a pena ressaltar que, em geral, inicia-se o teste-U testando o maior elemento da amostra. Neste caso, deve-se tomar cuidado porque, intuitivamente, se o teste der negativo para o maior elemento da amostra, então conclui-se que não há DK's na série, visto que os outros elementos são menores, e portanto, menos extremos. No entanto, isso é um erro. Para entender o problema, considere, por exemplo, que a amostra possua 10 DK's. Nesse caso, se iniciarmos o teste-U com o maior elemento (o primeiro DK), ou seja $r = 1$, então o restante da série, à qual será ajustada uma lei de potência, vai conter os outros 9 DK's e, neste caso, o ajuste será falso, visto que existem 9 elementos que fogem da lei de potência. Diante disso, o teste poderá dar um falso negativo. Este efeito é comumente chamado de mascaramento (WHEATLEY; SORNETTE, 2015), já que os 9 DK's mascaram o DK mais extremo. Portanto, mesmo que o teste-U dê um resultado negativo para o maior elemento da amostra, é prudente repetir o teste para, no mínimo, os primeiros 30 a 50 maiores elementos.

⁶A prova disto é encontrada em (PISARENKO; SORNETTE, 2012).

⁷Para este teste, utiliza-se geralmente um nível de significância de 0.1

A seguir, faremos um breve resumo esquemático da aplicação do teste-U:

- (1) Por meio de uma inspeção visual, escolha um limiar h e selecione todos os pontos acima deste limiar. Fazendo isto, o teste-U será aplicado na cauda da distribuição. Caso se deseje aplicar o teste para o conjunto completo de dados, pule esta etapa;
- (2) Ordene os dados em ordem decrescente, ou seja, $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$;
- (3) Especione visualmente a série e estabeleça o número r de pontos suspeitos de serem DK's;
- (4) Selecione agora o subconjunto $v_n \leq v_{n-1} \leq \dots \leq v_{r+1}$, o qual julga-se pertencer a uma distribuição exponencial $F(x|b) = 1 - \exp(-bx)$;
- (5) Utilize o método de máxima verossimilhança para inferir o parâmetro b da distribuição exponencial das variáveis $v_n \leq v_{n-1} \leq \dots \leq v_{r+1}$. O parâmetro inferido neste caso é \hat{b} ;
- (6) Utilizando o valor \hat{b} inferido no passo anterior, Calcule o p-valor através de $p(x_{k,n}) = 1 - \text{betainc}(F(x_{k,n}|\hat{b}), n - k + 1, k)$, onde $k = 1, \dots, n$, e $\text{betainc}(F, n - k + 1, k)$ é a função Beta incompleta normalizada;
- (7) Se o p-valor é menor que 0.1, então a hipótese nula é rejeitada e na série há pelo menos um DK. Caso o p-valor seja maior ou igual a 0.1, conclui-se que não há DK na série analisada.

4.4.3 Teste do Intervalo de Confiança para Existência de Dragon King

Nas seções anteriores, baseado em [Pisarenko e Sornette \(2012\)](#), apresentamos dois testes estatísticos para detecção de *Dragon Kings* baseados em testes de hipóteses, cuja hipótese nula é de que todas as variáveis da série pertencem a uma mesma distribuição exponencial.

Na presente seção, apresentaremos o último teste estatístico que será utilizado nesta tese. Tal teste, desenvolvido por [Janczura e Weron \(2012\)](#), consiste em detectar *Dragon Kings* por meio de intervalos de confiança para certas leis de potência. Neste caso, constrói-se intervalos de confiança, dentro dos quais as variáveis são ditas pertencer a uma determinada distribuição, para um dado um nível de significância. Caso alguma observação extrapole estes intervalos, esta será considerada não pertencente à distribuição do restante da amostra, e portanto, será considerada um DK.

Para iniciarmos o teste, necessitamos inferir empiricamente a distribuição de uma amostra de variáveis aleatórias x_1, x_2, \dots, x_n . Para isso, utilizamos a função de distribuição empírica (EDF) da amostra, que, conforme já visto, é uma estimativa da distribuição verdadeira da população. Nesse caso,

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{x_i < x\}}, \quad (4.73)$$

onde $\mathbb{1}$ é a função indicadora, que neste caso é definida por,

$$\mathbb{1}_{[x_i < x]} = \begin{cases} 1, & \text{se } x_i < x, \\ 0, & \text{se } x_i \geq x. \end{cases} \quad (4.74)$$

Note que o número total Y de observações $x_i < x$ também é uma variável aleatória e, além disto, possui uma distribuição binomial com parâmetros⁸ n e $F(x)$ (JANCZURA; WERON, 2012), ou seja,

$$Y = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{x_i \leq x\}} \sim B(n, F(x)), \quad (4.75)$$

onde $F(x)$ é a distribuição verdadeira da população. Portanto, podemos escrever o seguinte intervalo (JANCZURA; WERON, 2012):

$$P(q_{\frac{\alpha}{2}}[n, F(x)] < Y \leq q_{1-\frac{\alpha}{2}}[n, F(x)]) = 1 - \alpha, \quad (4.76)$$

onde $q_\eta[n, r]$ é o η -quantil da distribuição binomial $B(n, r)$. De (4.73) e (4.76), pode-se construir respectivamente para as caudas esquerda e direita da distribuição, os seguintes intervalos de confiança ponto a ponto⁹ (JANCZURA; WERON, 2012):

⁸Vale a pena lembrar que o primeiro parâmetro de uma distribuição binomial representa o número de ocorrências ou variáveis n , enquanto que o segundo parâmetro consiste na probabilidade de sucesso de cada ocorrência, que no presente caso, é o valor da CDF para a variável x , ou seja $F(x)$.

⁹Intervalos de confiança ponto a ponto, ou *pointwise*, são intervalos construídos a partir de valores pontuais de x , ou seja, para cada ponto da amostra obtém-se um intervalo, cuja probabilidade de conter tal ponto é de $(1 - \alpha) \times 100\%$.

$$\begin{cases} P\left(\frac{1}{n}q_{\frac{\alpha}{2}}[n, F(x)] < F_n(x) \leq \frac{1}{n}q_{1-\frac{\alpha}{2}}[n, F(x)]\right) = 1 - \alpha, \\ P\left(\frac{1}{n}q_{\frac{\alpha}{2}}[n, 1 - F(x)] < 1 - F_n(x) \leq \frac{1}{n}q_{1-\frac{\alpha}{2}}[n, 1 - F(x)]\right) = 1 - \alpha, \end{cases} \quad (4.77)$$

onde $1 - \alpha$ é o nível de confiança. Como o pressuposto desse teste é que a população é exponencialmente distribuída, então é plausível considerar as caudas da verdadeira distribuição F seguindo uma lei de potência, ou seja,

$$\begin{cases} F(x) \approx b_1|x|^{p_1}, & x \rightarrow -\infty \\ 1 - F(x) \approx b_2x^{p_2}, & x \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (4.78)$$

Neste caso, utilizando (4.77) podemos escrever os intervalos dentro dos quais as caudas esquerda e direita da EDF têm probabilidade $(1 - \alpha) \times 100\%$ de estarem contidas. Assim, temos que,

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{n}q_{\frac{\alpha}{2}}[n, b_1|x|^{p_1}], \frac{1}{n}q_{1-\frac{\alpha}{2}}[n, b_1|x|^{p_1}]\right), \\ \left(\frac{1}{n}q_{\frac{\alpha}{2}}[n, b_2x^{p_2}], \frac{1}{n}q_{1-\frac{\alpha}{2}}[n, b_2x^{p_2}]\right), \end{cases} \quad (4.79)$$

Finalmente, basta agora ajustar uma lei de potência¹⁰ para as caudas esquerda e direita da EDF da amostra, obtida por 4.73 e, após isto, plotar os intervalos de confiança dados por 4.79. Pontos que eventualmente estiverem fora deste intervalo serão considerados não pertencentes à distribuição verdadeira do restante da população, sendo considerados *Dragon Kings*.

A seguir, faremos um breve resumo esquemático da aplicação do teste de intervalo de confiança para existência de DK's:

- (1) Construa a função de distribuição empírica (EDF) dos dados;
- (2) Escreva o intervalo de confiança $P(q_{\frac{\alpha}{2}}[n, F(x)] < Y \leq q_{1-\frac{\alpha}{2}}[n, F(x)]) = 1 - \alpha$, onde $q_{\eta}[n, r]$ é o η -quantil da distribuição binomial $B(n, r)$;
- (3) Escreva os intervalos de confiança ponto a ponto das caudas da direita e

¹⁰Isto pode ser feito, por exemplo, por máxima verossimilhança, conforme feito neste trabalho.

da esquerda da distribuição, ou seja,

$$\begin{cases} P\left(\frac{1}{n}q_{\frac{\alpha}{2}}[n, F(x)] < F_n(x) \leq \frac{1}{n}q_{1-\frac{\alpha}{2}}[n, F(x)]\right) = 1 - \alpha, \\ P\left(\frac{1}{n}q_{\frac{\alpha}{2}}[n, 1 - F(x)] < 1 - F_n(x) \leq \frac{1}{n}q_{1-\frac{\alpha}{2}}[n, 1 - F(x)]\right) = 1 - \alpha, \end{cases} \quad (4.80)$$

onde $1 - \alpha$ é o nível de confiança;

- (4) Considere as caudas da verdadeira distribuição F seguindo uma lei de potência (pode ser uma exponencial), ou seja,

$$\begin{cases} F(x) \approx b_1|x|^{p_1}, & x \rightarrow -\infty \\ 1 - F(x) \approx b_2x^{p_2}, & x \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (4.81)$$

- (5) Escreva os intervalos de confiança dentro dos quais as caudas esquerda e direita da EDF têm probabilidade $(1 - \alpha) \times 100\%$ de estarem contidas, ou seja,

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{n}q_{\frac{\alpha}{2}}[n, b_1|x|^{p_1}], \frac{1}{n}q_{1-\frac{\alpha}{2}}[n, b_1|x|^{p_1}]\right), \\ \left(\frac{1}{n}q_{\frac{\alpha}{2}}[n, b_2x^{p_2}], \frac{1}{n}q_{1-\frac{\alpha}{2}}[n, b_2x^{p_2}]\right), \end{cases} \quad (4.82)$$

- (6) Ajuste as leis de potência para as caudas esquerda e direita da EDF da amostra do passo (1) e obtenha o intervalo de confiança dados pelo passo anterior;
- (7) Caso algum ponto se encontre fora do intervalo de confiança, este não pertencerá à distribuição verdadeira, sendo considerado portanto um DK.

5 PAPEL DAS LÂMINAS DE CORRENTES NA MODELAGEM DA TEORIA DE EVENTOS EXTREMOS NO VENTO SOLAR

5.1 Dados e pré-processamentos

Os dados do módulo do campo magnético \vec{B} do vento solar utilizados neste trabalho foram coletados a uma frequência de 22 Hz, pelo instrumento FGM (Fluxgate Magnetometer) da espaçonave *Cluster-1*, em períodos de sua órbita onde ela se encontrava localizada próxima à região do bow shock da Terra, porém, externamente à magnetosfera terrestre, onde era possível o contato direto com ambiente de vento solar. Foram observadas todas as inúmeras séries temporais de \vec{B} desde 2001 até 2016 para as quais a Cluster-1 estava fora da magnetosfera. Dessas, foram baixadas um total de 20 séries com duração de 24 horas nas quais foi detectada a presença de lâminas de correntes. Desse total de 20 séries, 3 foram selecionadas para serem analisadas neste trabalho: 9 de março de 2008, 24 de fevereiro de 2009 e 8 de março de 2009. Desde que foi verificado um comportamento linear de $F(\theta, \tau)$ em função de θ para uma escala temporal variando de $\tau = 30s$ a $\tau = 240s$ e também um comportamento linear de $F(\theta, \tau)$ em função de τ para um ângulo crítico variando de $\theta_0 = 60^\circ$ a $\theta_0 = 120^\circ$, estamos aptos a aplicar a técnica de Li (2008) para detecção de lâminas de correntes aos nossos dados. Fazendo isto, fomos capazes de detectar inúmeras lâminas de corrente utilizando um ângulo crítico $\theta_0 = 60^\circ$ e escala de tempo $\tau = 120s$.

Durante todos estes anos investigados, foi possível apenas a detecção de 3 séries sem lâminas de correntes: 01 de fevereiro de 2003, 21 de abril de 2004 e 25 de janeiro de 2016, cujas durações máximas não foram superiores a 16 horas. A razão pela qual não foi possível detectar mais do que 3 séries sem lâminas de correntes com duração de tempo superior à encontrada deve-se ao fato de ser extremamente raro períodos muito longos com ausência total de lâminas de correntes no vento solar, visto que essas estruturas são extremamente frequentes neste ambiente. Vale ressaltar ainda que a ausência de lâminas de corrente refere-se à escala definida pela janela de busca empregada no método de Li, sendo que lâminas de escalas diferentes podem estar presentes nessas mesmas séries. Todas as séries temporais presentes neste trabalho estão disponíveis na website da *European Space Agency* (ESA), <https://www.cosmos.esa.int/web/csa>.

Geralmente, regiões com lâminas de correntes são marcadas como mínimos locais (valores extremos mínimos) em séries do módulo do campo magnético do vento solar. No entanto, isto nem sempre ocorre, não sendo assim ideal fazer a análise estatís-

tica de eventos extremos diretamente nas séries de \vec{B} . Com o objetivo de estudar o papel das lâminas de corrente na estatística de eventos extremos no vento solar, buscamos uma nova grandeza que consiga identificar, com boa aproximação e sem perda das características estatísticas básicas das séries originais, todas as regiões com a presença de lâminas de corrente. Pela lei de Ampère, sabemos que rotações no vetor campo magnético fazem surgir uma densidade de corrente (JACKSON, 1998). Nesse caso, lâminas de correntes muito intensas estão geralmente associadas a grandes rotações de \vec{B} , o que acaba gerando regiões de grandes flutuações em séries da diferença $\Delta B(t) = |\vec{B}(t + \tau)| - |\vec{B}(t)|$, onde τ é a defasagem temporal. Áreas como ciências econômicas e financeiras denominam essas flutuações como volatilidade (TSAY, 2010), que são geralmente associadas com mudanças violentas no mercado financeiro, tal como uma crise financeira.

Se estivermos trabalhando com ativos financeiros $r(t)$, ao invés do módulo do campo magnético, a série da diferença $\Delta r(t) = r(t + \tau) - r(t)$ é chamada de retorno financeiro (TSAY, 2010). A volatilidade nada mais é que a medida dos desvios padrões de determinados períodos das séries dos retornos financeiros. Diante disso, neste trabalho passaremos a chamar a série $\Delta B(t)$ de retorno magnético, simbolizado por Δr_{mag} , e sua respectiva volatilidade, de volatilidade magnética vol_{mag} . Na prática, é preferível trabalhar com retornos, visto que estes são livres de escalas e possuem propriedades estatísticas interessantes, como estacionaridade e ergodicidade (TSAY, 2010). Existem alguns fatos estilizados acerca da volatilidade e retornos financeiros (TSAY, 2010) que estão também presentes nas volatilidades e retornos magnéticos, dentre eles, o efeito de clusterização (formação de grupos, de maior ou menor variabilidade) ou efeito de memória. Este efeito faz com que a volatilidade em um período de tempo seja bastante dependente de volatilidades em períodos de tempos anteriores. Diante disso, uma maneira muito comum de se modelar e até mesmo prever a volatilidade em séries financeiras é utilizando modelos auto regressivos para variância, tal qual o famoso modelo ARCH (*Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*) (ENGLE, 1982). Na verdade, séries financeiras compartilham várias características em comum com séries de campo magnético do vento solar, como a presença de multifractalidade (GREEN et al., 2014), de eventos extremos (GREEN et al., 2014), de caoticidade (HOLYST et al., 2001) e de turbulência (JOHANNES, 2005).

Para a volatilidade magnética, calculamos os desvios padrões em uma janela móvel de tamanho w , que varre de forma sobreposta as séries de tamanho N dos log-retornos magnéticos $\Delta r_{mag}(t) = \log\left(\frac{|\vec{B}(t + \tau)|}{|\vec{B}(t)|}\right)$, que nada mais é do que o retorno magnético da série do logaritmo natural do módulo o campo magnético,

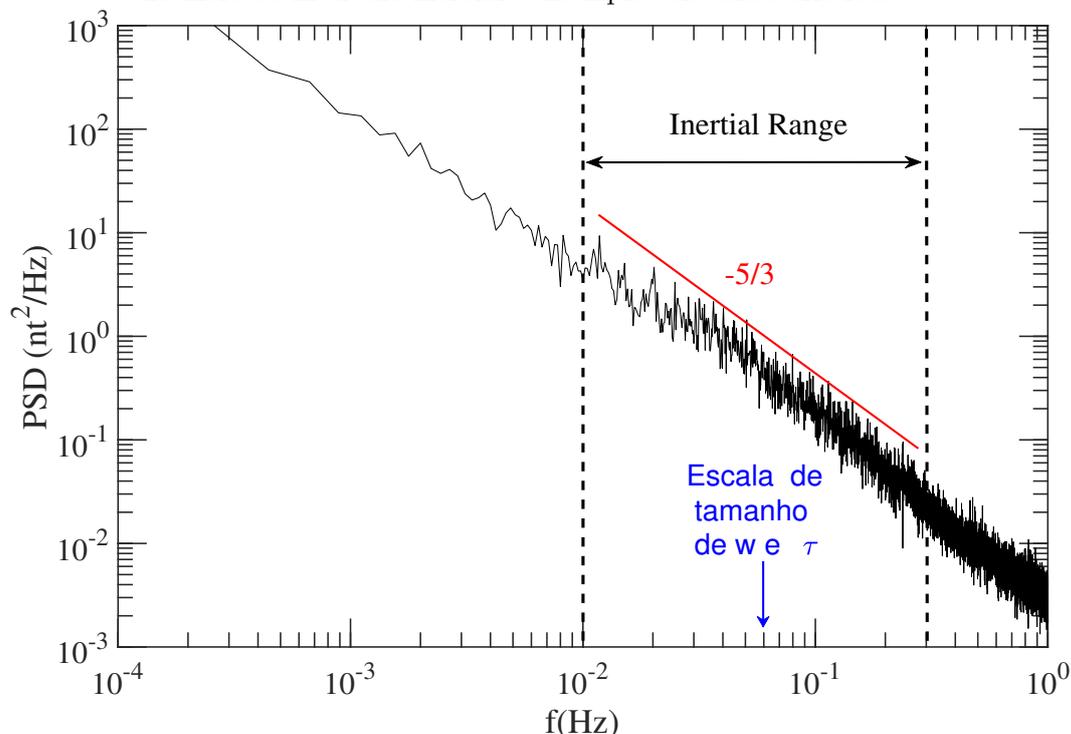
$r_{mag}(t) = \log(|\vec{B}(t)|)$. Neste caso, definimos volatilidade magnética como

$$vol_{mag}(j) = \sqrt{\frac{1}{w-1} \sum_{i=j}^{w+j-1} (\Delta r_{mag}(i) - \mu(j))^2}, \quad (5.1)$$

onde $j = 1, \dots, N - w + 1$ rotula a posição da janela móvel de tamanho w e $\mu(j)$ é a média de Δr_{mag} dentro desta janela. Para as análises nesta tese, os valores de w e τ são escolhidos de forma a possuírem, no máximo, uma escala de tamanho comparável a das estruturas coerentes mais energéticas, mas que ainda não sofrem dissipação devido ao processo turbulento. Neste caso, procuramos por uma escala de tamanho situada próxima à região intermediária do intervalo inercial, que pode ser identificada por meio do espectro de potências (PSD), mostrado na Figura 5.1. Diante disto, escolhemos para as análises desta tese uma escala localizada no centro do intervalo inercial, ou seja, $\tau = w = 50s$, já que $\tau = 1/f$.

Neste trabalho, o PSD foi computado utilizando o método de Welch (WELCH, 1967), que consiste em dividir a série temporal em um conjunto de subintervalos sobrepostos, onde cada subintervalo é multiplicado por uma função janela, que no nosso caso é a janela de Hanning (PASCHMANN; DALY, 1998). Em seguida, são gerados os PSDs para cada subintervalo utilizando a transformada rápida de Fourier. A média deste subconjunto de PSDs gera o PSD da série. Este método é vantajoso perante aos outros, pois reduz o erro do espectro estimado, gerando desta forma PSDs menos ruidosos.

Figura 5.1 - Espectro de potência da série do módulo do campo magnético do dia 09 de março de 2009 exibindo turbulência bem desenvolvida de Kolmogorov. Utilizamos este PSD como guia para escolhermos a escala de tamanho das estruturas coerentes (lâminas de correntes) que sejam suficientemente energéticas, porém que não estejam sendo dissipadas. Uma escala de tamanho localizada no meio do intervalo inercial contempla tais características.



Fonte: Trabalho submetido ao Monthly Notices of the Royal Astronomical Society.

No caso de séries financeiras, há um conjunto de razões para se trabalhar com o log-retorno, em vez do retorno simples (TSAY, 2010). No nosso caso, tomamos esta decisão principalmente pelo fato de séries dos logaritmos serem, em geral, mais bem comportadas. Além disso, a escala logarítmica facilita bastante a visualização e compreensão de grandezas que apresentam intervalos de variações muito grandes, como ocorre no nosso caso.

Com o intuito de diminuir ruídos e custo computacional, reduzimos por um fator $M = 10$ o número de pontos das séries por meio da técnica de decimação (OPPENHEIM; VERGHESE, 2017). O processo de decimação corresponde a uma redução na frequência de amostragem do sinal, o qual é precedido por uma filtragem passa baixo, cuja frequência de corte deve ser no máximo π/M , para garantir a não ocorrência do indesejado efeito aliasing (OPPENHEIM; VERGHESE, 2017). Neste trabalho,

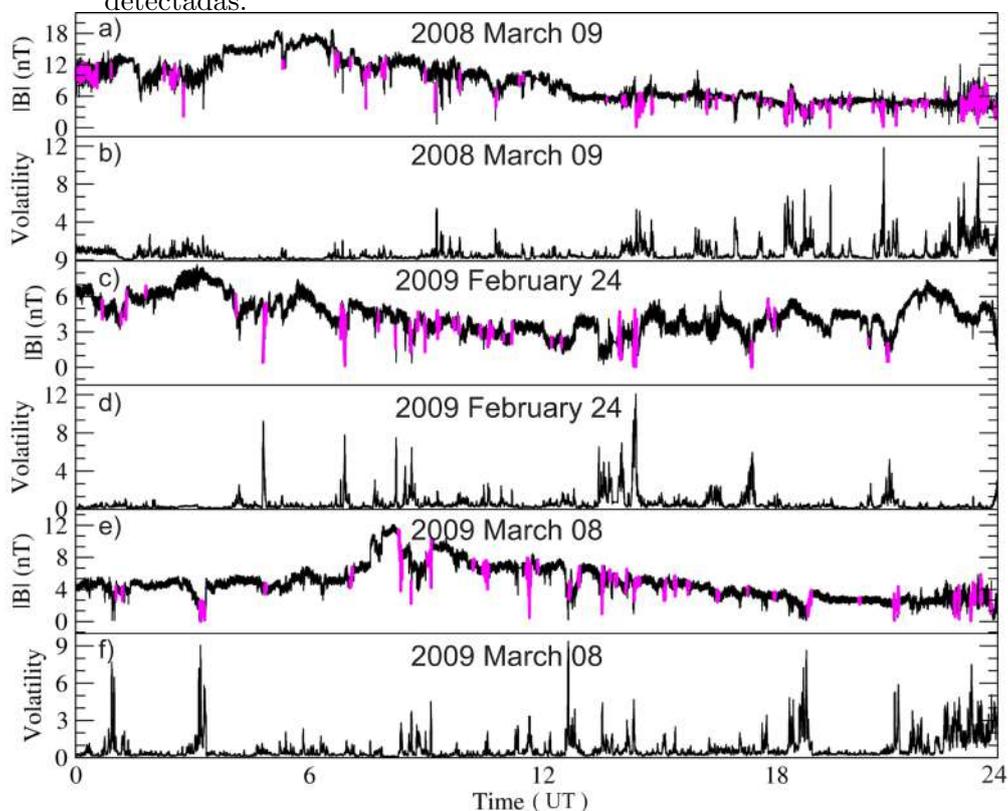
utilizamos o filtro de resposta ao impulso infinito de Chebyshev do tipo I e ordem 8 (OPPENHEIM; VERGHESE, 2017), com uma frequência de corte de $0.8/M$ (mais baixa que π/M), onde decimamos nossa amostra por um fator $M = 10$.

Após todo pré-processamento realizado nos dados originais, obtivemos as séries da volatilidade magnética, as quais foram submetidas a inúmeras análises estatísticas de eventos extremos, onde foi utilizado o pacote estatístico *in2extRemes* (GILLELAND; KATZ, 2016). Vale salientar que para o cálculo da volatilidade e retornos magnéticos, os tamanhos da janela w e da escala temporal τ foram devidamente escolhidos de forma a ter aproximadamente a mesma ordem de grandeza dos tamanhos das lâminas de correntes de maior energia, responsáveis pela ocorrência dos eventos extremos, conforme já mencionado.

5.1.1 Séries Temporais

A Figura 5.2 mostra as séries temporais dos módulos do campo magnético do vento solar e suas respectivas volatilidades para os dias 9 de março de 2008, 24 de fevereiro de 2009 e 8 de março de 2009. Pode-se notar uma forte correlação entre as regiões onde foram detectadas lâminas de corrente (magenta) e a ocorrência de eventos extremos na volatilidade. Esta correlação já era esperada, visto que lâminas de correntes estão associadas às bruscas rotações do vetor campo magnético, conforme já mencionado. Vale a pena mencionar que as lâminas detectadas possuem escala de tamanho comparável ao tamanho da janela utilizada na aplicação do método de Li (2008). Portanto, lâminas de correntes com outras escalas de tamanho, que não interferirão nas análises estatísticas feitas neste trabalho, poderão estar presentes.

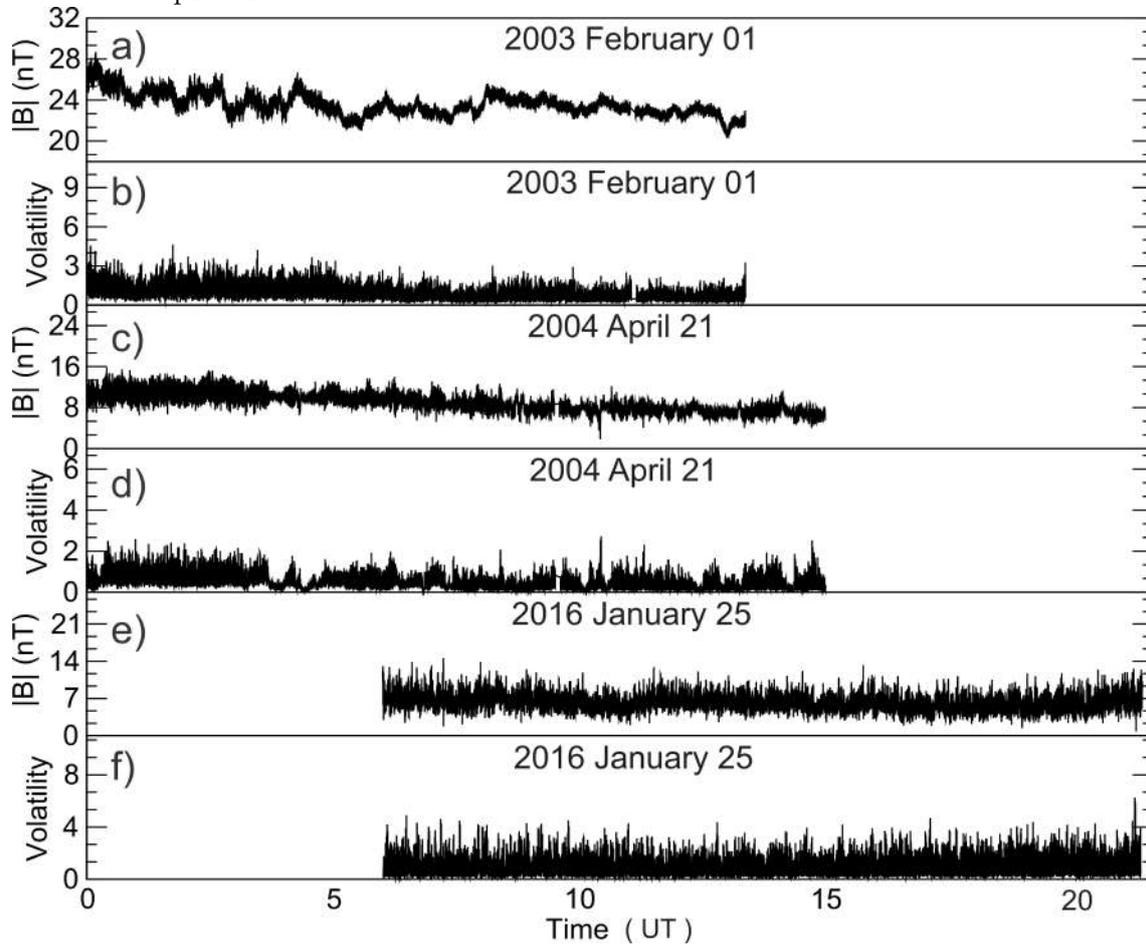
Figura 5.2 - Séries temporais do módulo do campo magnético do vento solar e suas respectivas volatilidades para os dias 9 de março de 2008, 24 de fevereiro de 2009 e 8 de março de 2009. Regiões em magenta representam lâminas de correntes detectadas.



Fonte: Trabalho submetido ao Monthly Notices of the Royal Astronomical Society.

Para uma análise do papel das lâminas de correntes no ajuste de GPD das séries do vento solar, foram selecionadas séries de $|B|$ de três dias em que não foram detectadas lâminas de correntes. Apesar de terem sido investigadas as séries para todos os dias em que a espaçonave Cluster 1 se encontrava próxima ao Bowshock, desde 2001 até 2016, não foi possível encontrar nenhum dia completo com duração de 24 horas com ausência de tais estruturas. Neste caso, somente foi possível encontrar três séries sem lâminas de corrente com escalas de tamanho procurada: 01 de fevereiro de 2003, 21 de abril de 2004 e 25 de janeiro de 2016. A duração média destas séries possuem aproximadamente 14 horas, conforme mostrado na figura 5.3. Vale salientar que, apesar destas séries serem mais curtas, não houve prejuízo algum nas análises estatísticas.

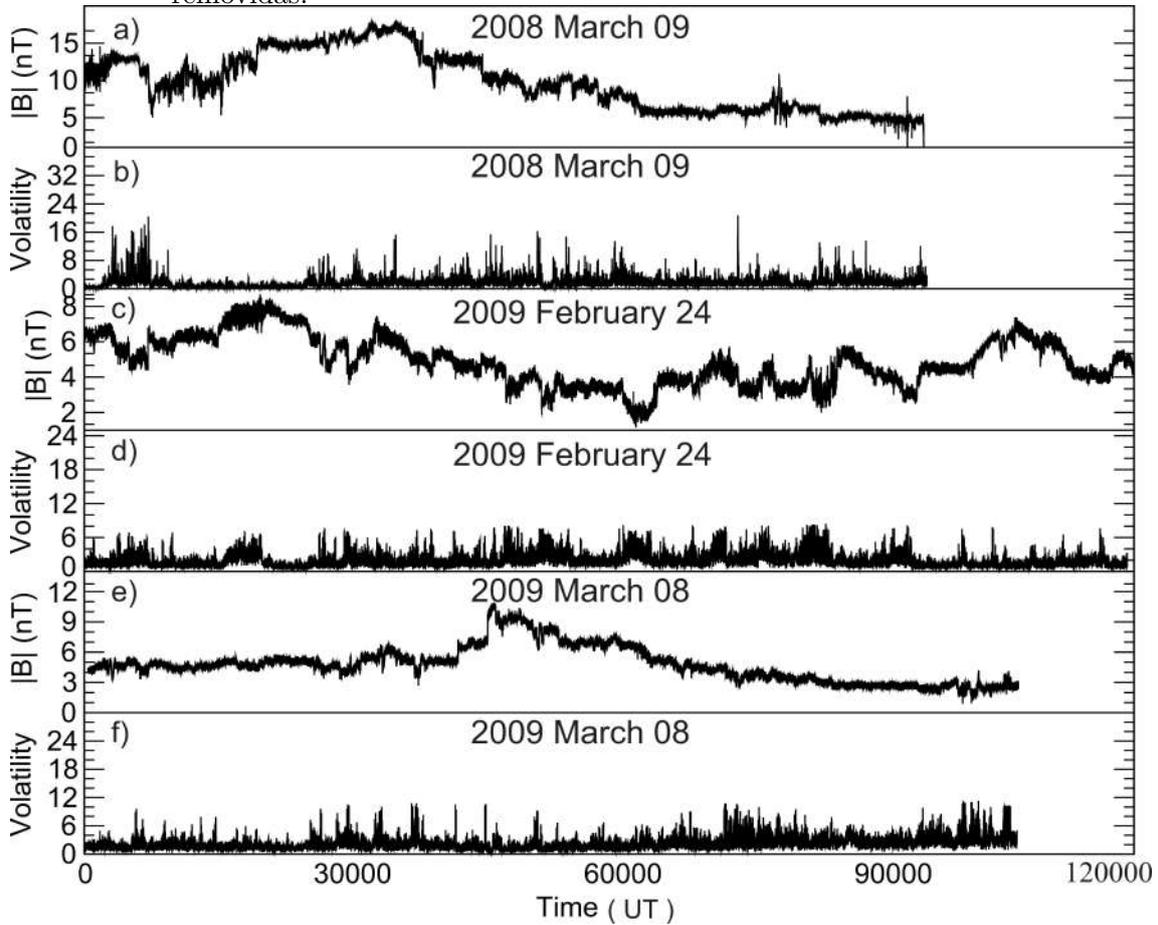
Figura 5.3 - Séries temporais do módulo do campo magnético e respectivas séries de volatilidade para um período aproximado de 14 horas dentro dos dias 01 de fevereiro de 2003, 21 de abril de 2004 e 25 de janeiro de 2016. Nestes períodos não foram identificadas lâminas de correntes com a escala de tamanho procurada.



Fonte: Trabalho submetido ao Monthly Notices of the Royal Astronomical Society.

Além disso, foram obtidas mais três séries temporais, a partir das séries temporais do módulo do campo magnético da figura 5.2, porém, com todas as lâminas de corrente removidas. Figura 5.4 mostra estas novas séries temporais de campo magnético após a remoção das lâminas de corrente. Pode-se verificar pela figura 5.3 e figura 5.4 que na ausência de lâminas de correntes, as séries temporais das volatilidades deixam de apresentar picos extremos isolados (intermitência).

Figura 5.4 - Mesmas séries temporais da figura 5.2, porém com as lâminas de correntes removidas.



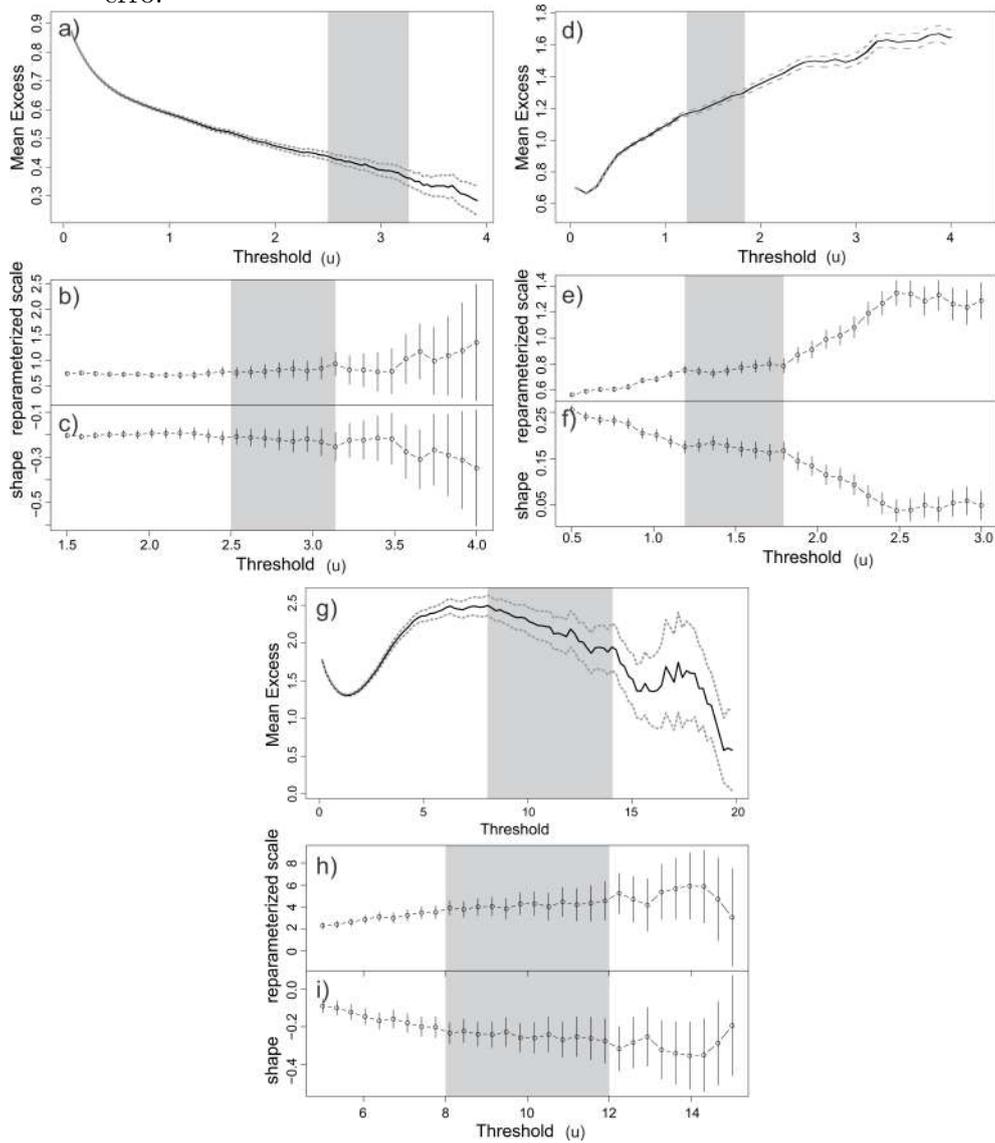
Fonte: Trabalho submetido ao Monthly Notices of the Royal Astronomical Society.

5.1.2 Escolha do Limiar e Processo de Declusterização

A técnica POT *peaks over threshold*, ou picos acima de um limiar analisa todos os pontos da amostra que excedem um certo limiar u , conforme visto na parte teórica deste trabalho. Neste caso, pode-se fazer a modelagem da distribuição probabilidade GPD destes pontos excedentes (JAMES, 1975; BALKEMA; HAAN, 1974). No entanto, para uma modelagem correta, é necessária a escolha de um limiar adequado, isto é, que não seja tão grande de forma a gerar poucos excedentes, consequentemente aumentando a variância; e nem tão pequeno de forma a gerar um bias na modelagem (COLES, 2001). Neste caso, são utilizados dois métodos auxiliares para a identificação do limiar. O primeiro método utiliza a linearidade do *mean residual life*, onde é selecionado como limiar adequado o menor valor, dentro de um dado intervalo,

a partir do qual o *mean residual life* tem um comportamento aproximadamente linear. O segundo método é baseado na estabilidade do parâmetro de forma, ou seja, seleciona-se como limiar o menor valor dentro de um dado intervalo, a partir do qual o parâmetro de forma é aproximadamente constante. Deve-se notar, no entanto, que a linearidade do *mean residual life* e a estabilidade do parâmetro de forma são condições necessárias, porém não suficientes, para a escolha do intervalo do limiar. Neste caso, intervalos para os quais as duas condições são satisfeitas, não são necessariamente intervalos adequados para a escolha do limiar. Por exemplo, analisando a figura 5.5(g), (h) e (i), poderíamos ter escolhido o intervalo um limiar $u = [6, 8]$, visto que neste o *mean residual life* tem um comportamento aproximadamente linear, para um nível de confiança de 95%. Além disto, o parâmetro de forma é aproximadamente estável, considerando-se as barras de erro. No entanto, a escolha deste intervalo nos levaria a escolher o limiar $u = 6$, que é o menor valor dentro do intervalo. Apesar desta escolha resultar em uma modelagem com uma variância bem pequena, o que é desejável, ela acaba selecionando também pontos da amostra que não são extremos, gerando assim um viés ou *bias*. Por outro lado, o intervalo $u = [13, 15]$ também poderia ter sido escolhido, já que *mean residual life* tem um comportamento aproximadamente linear para um nível de confiança de 95% e o parâmetro de forma é aproximadamente estável, considerando-se as barras de erro. Porém, para este intervalo, o limiar ideal seria $u = 15$, que é suficientemente alto para selecionar um número muito pequeno de valores extremos, levando a uma variância muito alta. Desta forma, a escolha do limiar deve ser feita com auxílio dos dois métodos, porém, mantendo o equilíbrio entre *bias* e variância, assim como também feito na escolha do tamanho do bloco na modelagem GEV. Estes dois métodos podem ser visualizados na figura 5.5, onde as regiões sombreadas em cinza delimitam os intervalos para os quais o *mean residual life* é aproximadamente linear e o parâmetro de forma é aproximadamente constante.

Figura 5.5 - Figuras do *mean residual life*, escala reparametrizada e parâmetros de forma em função dos limiares, para o dia 25 de janeiro de 2016 (a), (b) e (c), para o dia 9 de março de 2008 (d), (e) e (f) e para o dia 9 de março de 2008 com as lâminas de correntes removidas (g), (h) e (i). Áreas sombreadas em cinza delimitam intervalos para os quais o *mean residual life* é aproximadamente linear, dentro de um intervalo de confiança de 95% (linhas cinzas tracejadas) e o parâmetro de forma é aproximadamente constante, dentro das barras de erro.



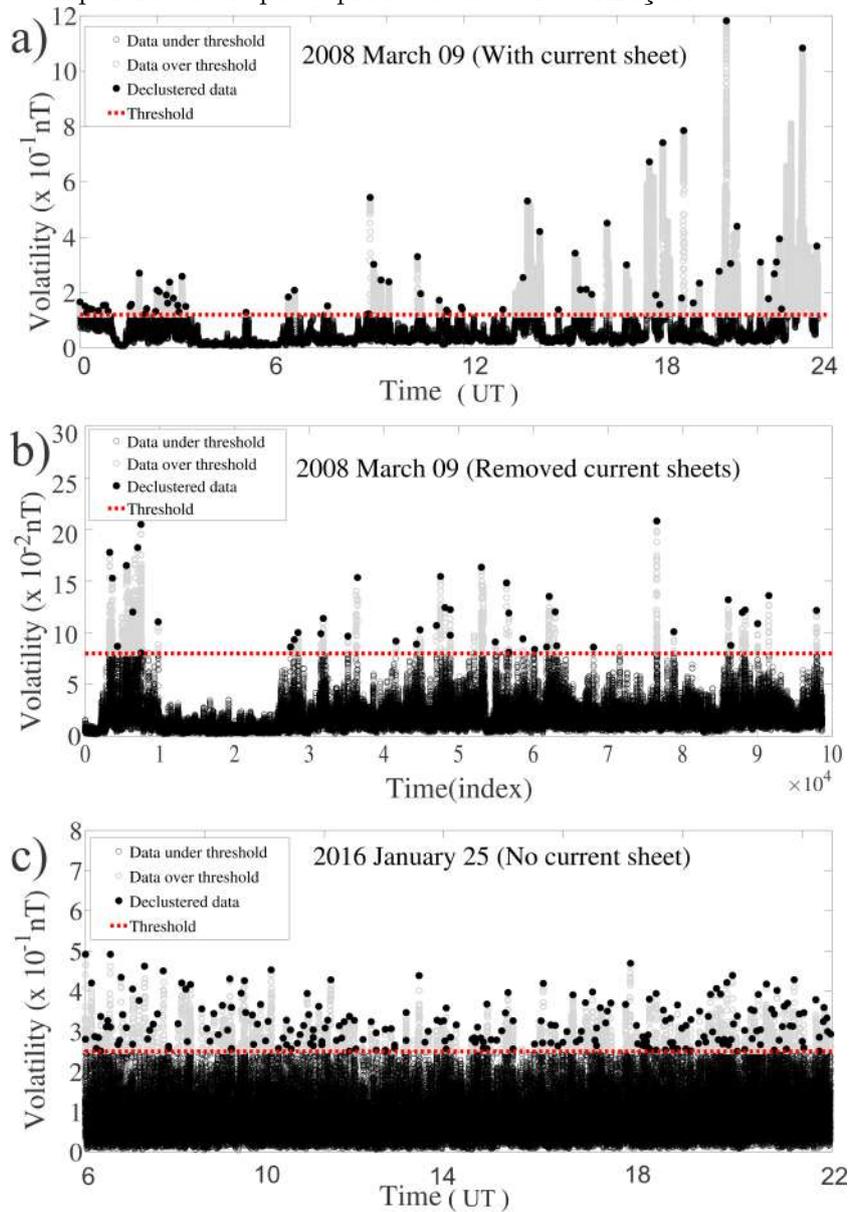
Fonte: Trabalho submetido ao Monthly Notices of the Royal Astronomical Society.

De acordo com Fig. 5.5(d), (e) e (f), o limiar adequado para as séries de volatilidade dos 9 de março de 2008 é $u = 1.2$, correspondendo ao 83.36th percentil. Já para o dia 25 de janeiro de 2016 o limiar adequado foi $u = 2.5$, correspondendo ao 97.53th

percentil, conforme pode ser visto em Fig. 5.5(a), (b) e (c). Finalmente, analisando 5.5(g), (h) e (i), verificamos que o limiar adequado para o dia 9 de março de 2008, porém com as lâminas removidas, é $u = 8$, correspondendo ao 98.88th percentil.

Em séries temporais de volatilidade, é muito comum a formação de *clusters*, ou seja, o agrupamento de pontos que excedem o limiar. O grande problema da formação de *clusters* é que eles aumentam a dependência e a memória entre os pontos da série temporal, violando assim o pressuposto básico de independência para a aplicação da modelagem estatística de eventos extremos. Diante disto, torna-se necessário um processo de declusterização para diminuir a memória de curto alcance da série. Neste caso, pode-se utilizar o método de *runs declustering* (LEADBETTER, 1983), que consiste em escolher um *run length*, r , tal que excedentes separados por um número de observações menor que r são considerados pertencentes ao mesmo *cluster*. Selecionando os valores máximos de cada cluster, uma nova amostra, declusterizada, é obtida. A escolha do r também requer um certo cuidado, já que um valor de r muito pequeno não resolve o problema de dependência entre as observações e um valor de r grande fará com que sejam perdidos um número muito grande de valores extremos, prejudicando assim a modelagem estatística.

Figura 5.6 - Séries temporais da volatilidade do módulo do campo magnético para os dias 9 de março de 2008 (a), 9 de março de 2008 após remoção das lâminas de corrente (b) e 25 de janeiro de 2016 (c). Linhas tracejadas vermelhas indicam o limiar e os pontos destacados acima do limiar representam a nova série temporal obtida após o processo de declusterização.



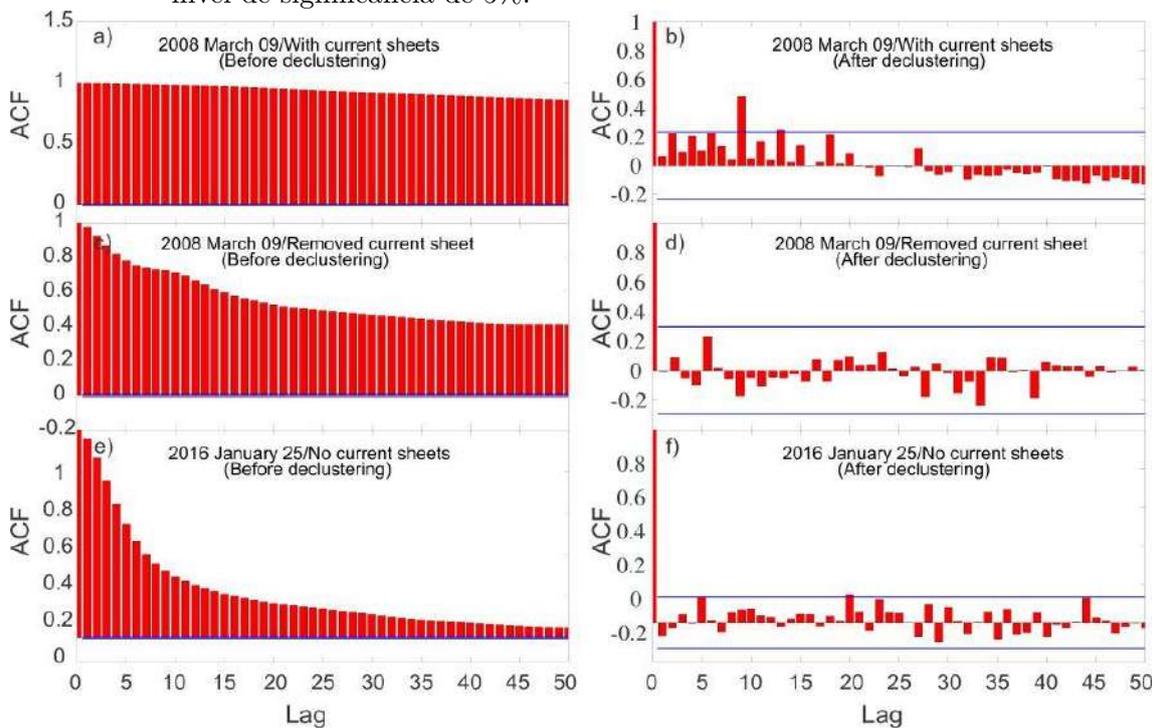
Fonte: Trabalho submetido ao Monthly Notices of the Royal Astronomical Society.

A Figura 5.6 mostra o processo de declusterização das séries de volatilidade dos dias 9 de março de 2008, 9 de março de 2008 após remoção das lâminas de corrente e 25 de janeiro de 2016. As novas amostras obtidas após o processo de declusterização são compostas pelas observações destacadas acima dos limiares (linhas tracejadas),

que possivelmente são independentes.

O nível de dependência de uma amostra pode ser mensurado por meio do *extremal index* θ (LEADBETTER, 1983), (COLES, 2001), onde $(0 \leq \theta \leq 1)$, sendo que para séries independentes $(\theta = 1)$. A tabela 5.4 mostra os valores de θ para todas as séries das figuras 5.2, 5.3 e 5.4, onde pode-se verificar que $(\theta \sim 0)$ antes da declusterização e $(\theta \sim 1)$ após o processo de declusterização.

Figura 5.7 - Função de autocorrelação das séries da volatilidade do dia 9 de março de 2008, antes da declusterização (a) e após declusterização (b); do dia 9 de março de 2008, com lâminas de corrente removidas e antes da declusterização (c) e após declusterização (d); do dia 25 de janeiro de 2016, antes da declusterização (e) e após declusterização (f). Linhas horizontais azuis delimitam os intervalos dentro dos quais a função de autocorrelação é considerada nula, para um nível de significância de 5%.



Fonte: Trabalho submetido ao Monthly Notices of the Royal Astronomical Society.

A fim de confirmar a eficácia do método de *runs declustering*, foram feitas análises de função de autocorrelação ou *autocorrelation function* (ACF) dos pontos excedentes nas séries dos dias 9 de março de 2008, 9 de março de 2008 após remoção das lâminas

de corrente e 25 de janeiro de 2016. A Figura 5.7 mostra uma forte dependência entre os pontos da amostra antes da aplicação do processo de declusterização (painéis à esquerda), visto que a ACF neste caso é significativamente diferente de zero, dado um nível de significância de 5% (linhas horizontais azuis). Em contrapartida, os correlogramas das séries após a aplicação do método de declusterização (painéis à direita) mostram autocorrelações significativamente iguais a zero, dado um nível de significância de 5%, o que sugere uma independência entre os pontos das amostras.

Adicionalmente, foi realizado também o teste estatístico Q de Ljung-Box (LJUNG; BOX, 1978), que consiste no teste estatístico, cujas hipóteses nula e alternativa são dadas por:

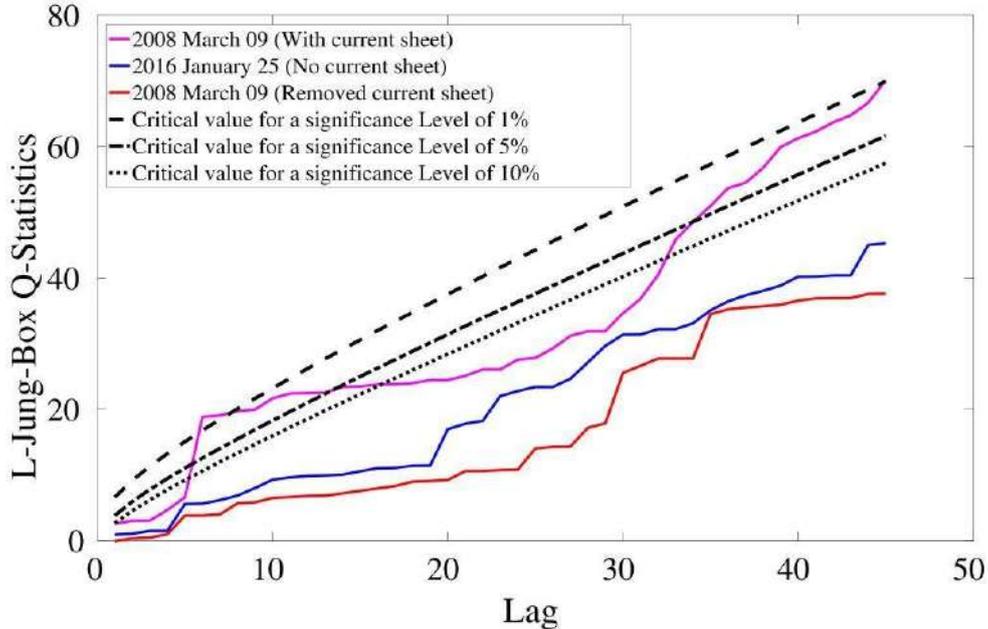
H_0 : Os dados são não correlacionados

H_a : Os dados são correlacionados

A Figura 5.8 mostra que, para todos os *lags*, os valores dos testes estatísticos não superam os valores críticos, para os níveis de significância de 1% (linhas tracejadas), 5% (linhas ponto-tracejadas) e 10% (linhas pontilhadas), exceto para o caso do dia 09 de março de 2008 com presença de lâminas de corrente, a qual não supera apenas o nível de significância de 1% ¹. Portanto, diante do teste estatístico Q de Ljung-Box, a hipótese nula de não correlação dos dados após a declusterização é aceita, confirmando ainda mais a eficácia da técnica de declusterização.

¹Vale salientar que analisando Fig.5.7(b) podemos perceber que a ACF para esta mesma série é estatisticamente diferente de zero para a defasagem 9 (lag=9). No entanto, devemos ter em mente que o intervalo de confiança neste caso possui um nível de confiança de 95%, ou seja, espera-se que a cada 20 defasagens haja uma ACF que esteja fora deste intervalo apenas devido ao acaso

Figura 5.8 - Valores dos testes estatísticos Q de Ljung-Box para o dia 9 de março de 2008 (linha magenta), para o dia 9 de março de 2008, após a remoção das lâminas de correntes (linha vermelha) e para o dia 25 de janeiro de 2016 (linha azul). Os valores críticos do teste são representados pelas linhas tracejadas (nível de significância de 1%), ponto-tracejada (nível de significância de 5%) e pontilhada (nível de significância de 10%).



Fonte: Trabalho submetido ao Monthly Notices of the Royal Astronomical Society.

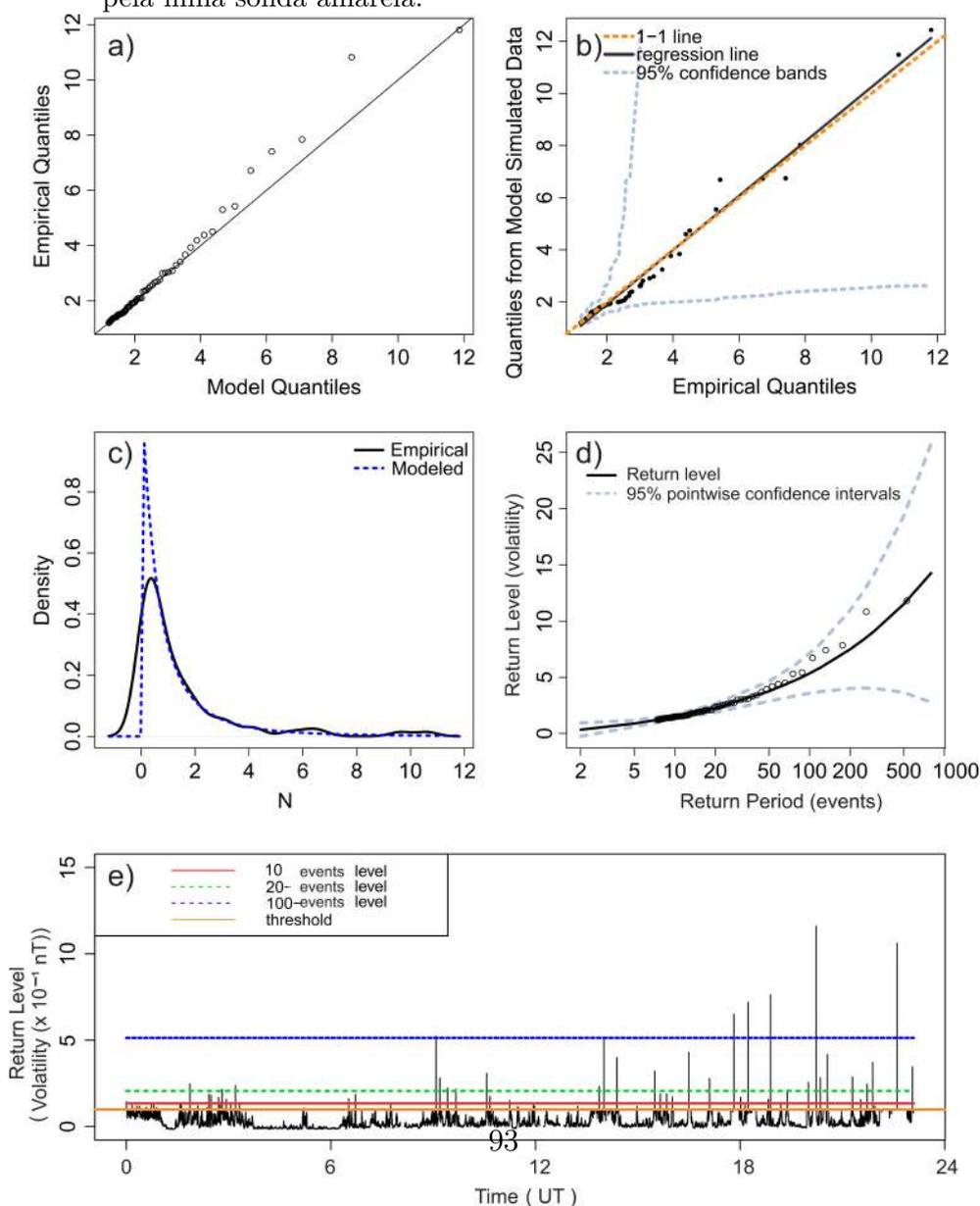
5.1.3 Análise Estatística de Valores Acima do Limiar - POT

Na seção anterior, verificamos que as séries “cruas” em análise possuem forte dependência entre seus pontos, quebrando assim um dos pressupostos básicos para aplicação da teoria de eventos extremos (COLES, 2001). Neste caso, foi necessária a aplicação da técnica de declusterização, a fim de que as séries se tornem aptas a serem analisadas. Além disto, aplicamos técnicas estatísticas para nos auxiliar na escolha adequada do limiar, o que completa as exigências necessárias para uma aplicação confiável da técnica POT.

As Figuras 5.9, 5.10 e 5.11 mostram os *diagnostic plots* dos modelos GPD's fitados para as séries temporais declusterizadas da volatilidade de \vec{B} dos dias 9 de março de 2008, 9 de março de 2008 após remoção das lâminas de corrente e 25 de janeiro de 2016. Os QQ-plots dos quantis dos dados empíricos com relação aos quantis teóricos são mostrados nas Figuras 5.9-(a), 5.10-(a) e 5.11-(a). Os eixos-y mostram os quantis empíricos obtidos por meio dos dados observacionais e os eixos-x mostram os quantis

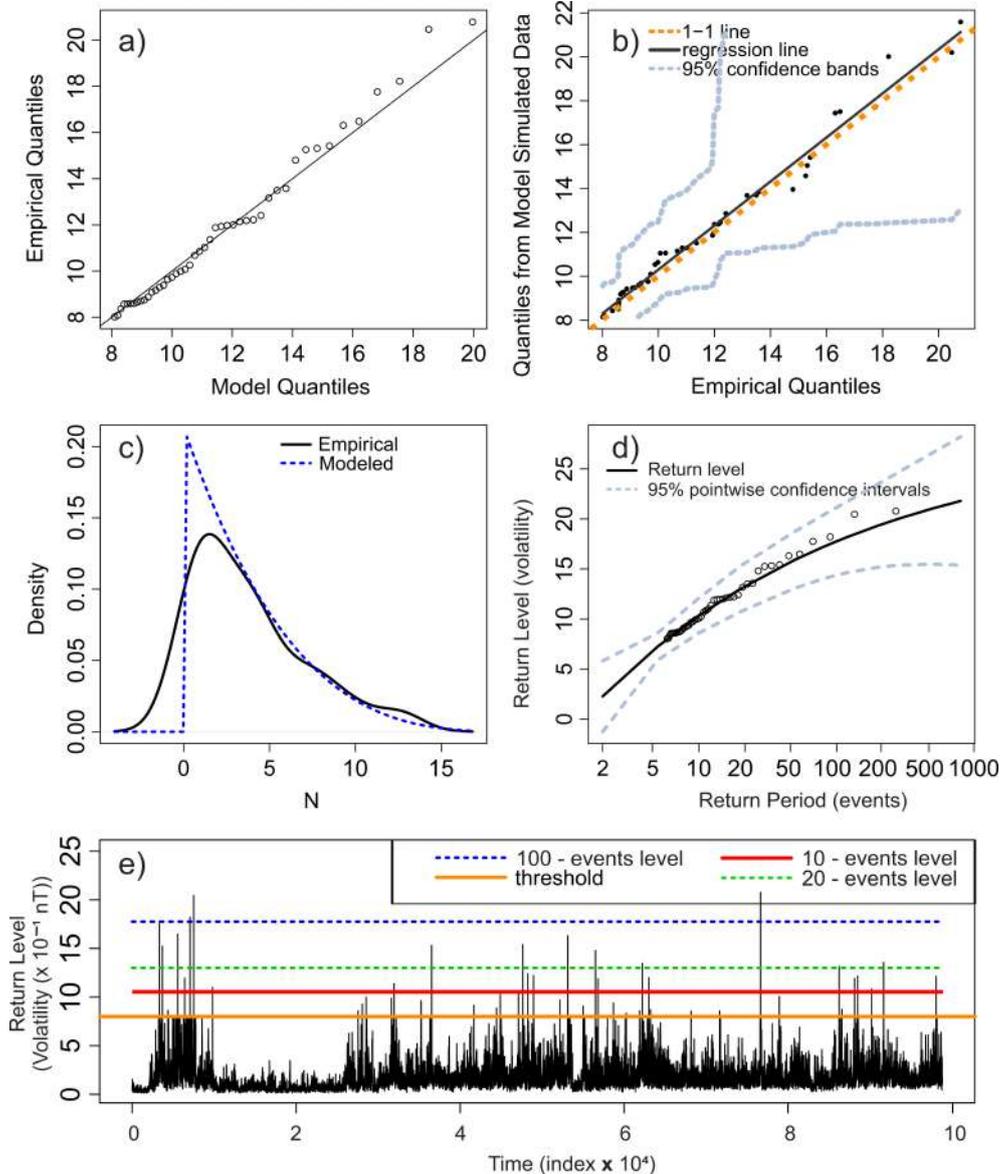
teóricos obtidos diretamente da relação da distribuição GPD. Estes QQ-plots revelam um excelente ajuste das séries temporais por uma GPD, conforme também pode ser verificado pela comparação dos histogramas empíricos e modelados, mostrados nas figuras 5.9-(c), 5.10-(c) e 5.11-(c). Vale a pena ressaltar que os histogramas teóricos (em azul) estão modelando apenas a cauda da direita das distribuições, visto que a técnica POT seleciona os valores mais altos das séries. Neste caso, a linha reta à esquerda do histograma e o “bico” acima deste não representam absolutamente nada. Portanto, a qualidade do ajuste neste caso deve ser avaliado apenas sobre a cauda direita da distribuição.

Figura 5.9 - Figura expondo o diagnóstico do ajuste para a modelagem da distribuição GPD para série de volatilidade do dia 9 de março de 2008. Em (a), é mostrado o QQ-plot, onde o eixo-y representa os quantis dos dados observacionais e o eixo-x, os quantis dos dados teóricos. Para um perfeito ajuste, os pontos devem estar sobre a linha sólida preta diagonal (1-1 line). Em (b), o mesmo de (a), porém desta vez os quantis dos dados empíricos são comparados com os quantis dos dados gerados randomicamente pela distribuição GPD, dentro de um intervalo de confiança de 95% (linhas tracejadas em cinza). Linha sólida preta representa a regressão linear dos pontos e linha tracejada laranja representa a linha diagonal (1-1 line). Em (c), são mostrados as funções de densidade de probabilidade dos dados empíricos (linha sólida) e dos dados teóricos (linha tracejada azul). Em (d), encontram-se os níveis de retorno da volatilidade (linha sólida preta) em termos dos períodos de retornos dos eventos. Linhas tracejadas cinzas representam o intervalo de confiança ponto a ponto (*pointwise*) de 95%. Em (e) são mostrados a série temporal da volatilidade e seus níveis de retorno previstos para a cada ocorrência de 10 eventos (linha sólida vermelha), 20 eventos (linha tracejada verde) e 100 eventos (linha pontilhada azul). O limiar utilizado para a modelagem da GPD é apresentado pela linha sólida amarela.



Embora os pontos do QQ-plot da Figura 5.9-(a) não pareçam estar tão bem ajustados sobre a reta diagonal $x = y$ (linha sólida) quanto nas Figuras 5.10-(a) e 5.11-(a), pode-se ainda considerar um ajuste satisfatório. Neste caso, a fuga dos pontos pela reta diagonal é explicada pelo fato da cauda da distribuição dos dados empíricos ser mais pesada do que a cauda prevista pela GPD teórica. Esta justificativa pode ser confirmada pelos histogramas na figura 5.9-(c), onde fica explícito que, apesar do bom ajuste obtido, o histograma empírico (linha sólida preta) possui uma cauda mais pesada do que o histograma teórico previsto pela distribuição GPD (linha tracejada azul).

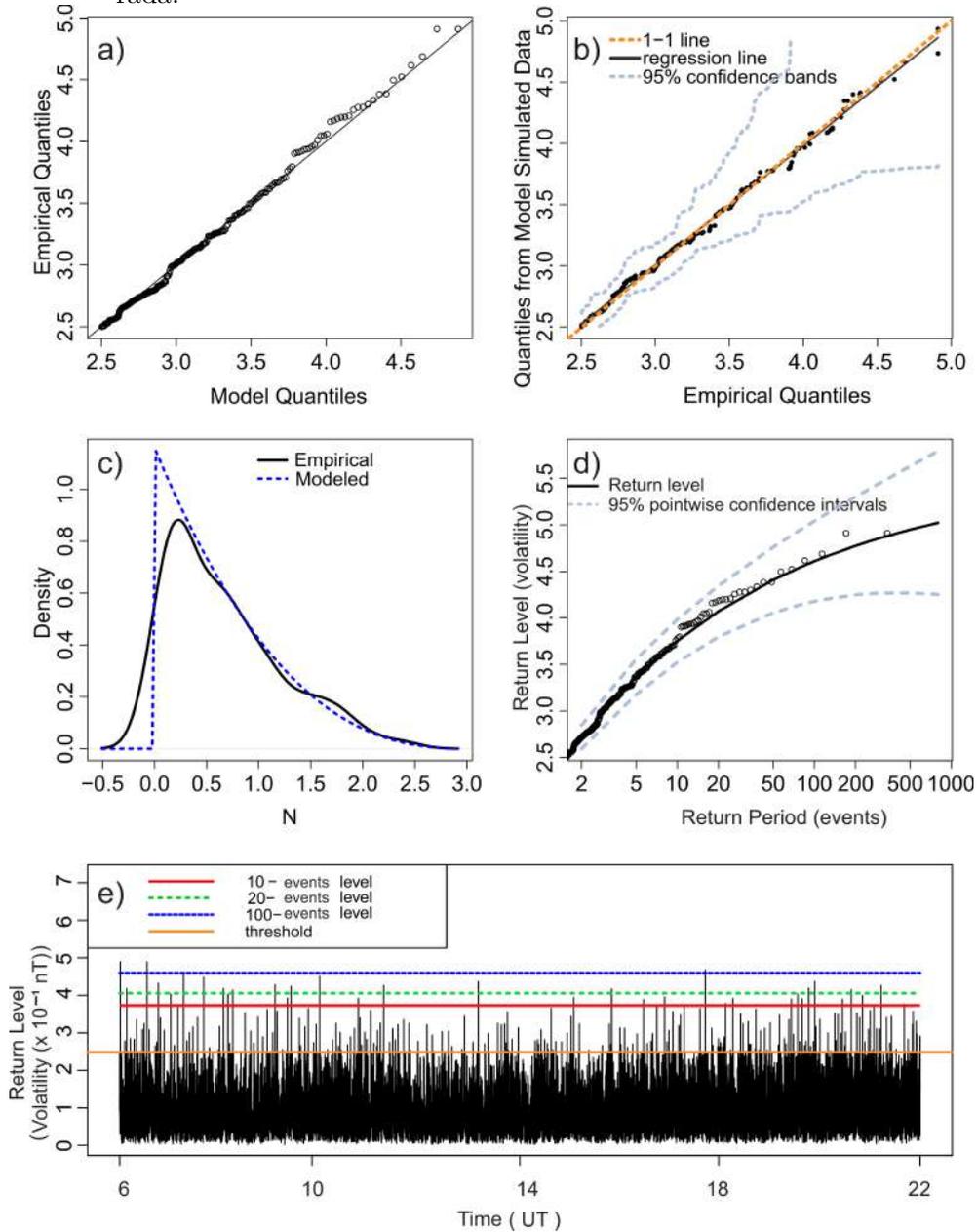
Figura 5.10 - O mesmo da Figura 5.9, porém desta vez para o dia 9 de março de 2008, com as lâminas de correntes removidas.



Fonte: Trabalho submetido ao Monthly Notices of the Royal Astronomical Society.

Os QQ-plots do quantis dos dados gerados randomicamente pela distribuição GPD em relação aos quantis dos dados empíricos, dado um intervalo de confiança de 95% (linhas tracejadas em cinza), são mostrados nas figuras 5.9-(b), 5.10-(b) e 5.11-(b). Neste caso, os eixos-x representam os quantis empíricos obtidos por meio dos dados observacionais e o eixos-y representam os quantis de uma distribuição GPD selecionada randomicamente. A qualidade dos ajustes estatísticos também pode ser verificada por estas figuras.

Figura 5.11 - O mesmo da Figura 5.9, porém desta vez para o dia 25 de janeiro de 2016, período em que não foram detectadas lâminas de correntes na escala procurada.



Fonte: Trabalho submetido ao Monthly Notices of the Royal Astronomical Society.

Os níveis de retorno com intervalos de confiança ponto a ponto *pointwise* de 95% (linhas tracejadas em cinza), obtidos por uma aproximação normal, são mostrados nas figuras 5.9-(d), 5.10-(d) e 5.11-(d). Nos eixos-x encontram-se, em escala logarítmica, os períodos de retorno, enquanto que os níveis de retorno associados encontram-se

nos eixos-y. A curva em Fig. 5.9-(d) se mostra convexa, e portanto, sem um limite assintótico, sugerindo que a distribuição da série com a presença de lâminas de corrente possui suporte infinito (*unbounded distribution*) (COLES, 2001). Neste caso, o parâmetro de forma é positivo ($\xi > 0$), conforme será confirmado mais adiante. Em contrapartida, a série temporal obtida com a remoção das lâminas de corrente e a série temporal para um intervalo de tempo no qual não foram detectadas tais estruturas coerentes, se mostram côncavas, e portanto, apresentam distribuição com um limite superior assintótico, sugerindo assim, que as distribuições das séries sem a presença de lâminas de corrente possui um suporte finito (*bounded distribution*) (COLES, 2001). Neste caso, o parâmetro de forma é negativo ($\xi < 0$), conforme também será confirmado mais adiante. Além disto, para todos os casos dos níveis de retorno estudados, os pontos representativos das amostras não extrapolam seus respectivos intervalos de confiança, dando mais evidências de que os ajustes pela GPD das séries analisadas foram satisfatórios. Os valores dos níveis de retorno para cada 10, 20 e 100 ocorrências de eventos, e seus respectivos intervalos de confiança, se encontram na tabela 5.1. Para a obtenção dos intervalos de confiança (linhas tracejadas em cinza) de todos níveis de retorno, é assumida a normalidade das distribuições das estimativas, fato este que não pode ser garantido (GILLELAND; KATZ, 2016). Devido a isso, a tabela 5.2 e a tabela 5.3 contêm os intervalos de confiança calculados pelo método de *profile likelihood* (PATRICK, 2007) e pela técnica de reamostragem *bootstrapping* (EFRON, 1979) com 500 reamostragens com reposição. A técnica de reamostragem *bootstrapping* consiste na obtenção de várias amostras retiradas com reposição, de uma dada população. Neste caso, considera-se que a distribuição das amostras sejam aproximadamente a mesma da população. Desta maneira, é possível obter um número grande de amostras e inferir parâmetros populacionais e intervalos de confiança. A grande vantagem deste método é a não necessidade de conhecimento prévio da distribuição verdadeira populacional. O método de *profile likelihood* também é utilizado para inferir parâmetros e intervalos de confiança, porém, neste caso, são plotadas funções de verossimilhança em termos de um intervalo de valores de cada parâmetro em análise. Desta maneira, a estimativa do parâmetro será o valor para o qual a curva da função de verossimilhança é máxima.

Conforme pode-se perceber, os valores presentes nas tabelas não são discordantes. Ambos os métodos *profile likelihood* e *bootstrapping* possuem a vantagem de não precisar assumir previamente a normalidade das estimativas. As tabelas 5.1, 5.2 e 5.3 apresentam também todos os resultados dos parâmetros estimados no ajuste GPD das séries temporais da volatilidade das figuras 5.2, 5.3 e 5.4, bem como todos seus intervalos de confiança, utilizando aproximação normal (Tabela 5.1), *profile*

likelihood (Tabela 5.2) e *bootstrapping* (Tabela 5.3) com 500 reamostragens com reposição. Os valores de todos os parâmetros são estimados por *maximum likelihood estimate*. Além disso, para a escolha dos modelos mais adequados, foram utilizados critérios que priorizam o *goodness of fit* e penalizam o excesso de parâmetros, tais quais os *negatives log-likelihood* e os critérios de informação. Os melhores modelos são aqueles com os menores valores do *negatives log-likelihood*, AIC e BIC (TSAY, 2010).

Pode-se notar que todas as séries de volatilidade que possuem lâminas de corrente (figura 5.2) apresentam um parâmetro de forma positivo $\xi > 0$. Apesar de alguns valores dos intervalos de confiança possuírem valores negativos, o intervalo é predominantemente positivo. Além disto, fica clara a correlação entre a ocorrência de lâminas de corrente e os picos de volatilidade. Tal correlação pode ser explicada pelo fato das lâminas de correntes serem regiões com mudança significativa do vetor campo magnético e a volatilidade ser um parâmetro que mede variações bruscas na série temporal. Desta forma, a volatilidade se torna um excelente “filtro amplificador” de eventos extremos gerados por mudanças abruptas em uma dada série temporal, o que justifica o seu uso neste trabalho. Diante disto, este trabalho origina a suspeita de que a volatilidade possa ser uma técnica boa e simples para detecção de lâminas de correntes no vento solar. De fato, veremos mais adiante que existem fortes evidências sustentando esta hipótese.

Para uma melhor visualização, todos os níveis e períodos de retorno citados acima são refeitos, porém, utilizando as próprias séries temporais. Neste caso, ambos os níveis de retorno e os limiares são representados pelas linhas horizontais, conforme pode ser visto nas figuras 5.9-(e), 5.10-(e) e 5.11-(e).

Em resumo, nesta seção verificamos que os valores dos parâmetros de forma, principal parâmetro na teoria de eventos extremos, foram significativamente negativos para séries da volatilidade com lâminas de correntes removidas e sem lâminas detectadas, ao passo que, séries com a presença de tais estruturas, o parâmetro de forma se mostrou estatisticamente positivo. Neste caso, surge a hipótese de uma provável relação entre as lâminas de correntes e o parâmetro ξ . A seguir, aplicaremos a técnica de máximos em blocos nas mesmas séries temporais, a fim de confirmar tal hipótese.

Tabela 5.1 - Tabela dos valores dos parâmetros de forma ξ e de escala σ e seus respectivos intervalos de confiança de 95%, ambos obtidos na modelagem da distribuição GPD de todas as séries de volatilidade das figuras 5.2, 5.3 e 5.4. Os parâmetros ξ e σ foram obtidos pelo método de *maximum likelihood estimate*, enquanto que seus respectivos intervalos de confiança foram obtidos por inferência, utilizando uma aproximação normal para os valores estimados.

Time Series	Normal Approximation									
	ξ		σ		10 events		20 events		100 events	
	Value	95% CI	Value	95% CI	Return Level	95% CI	Return Level	95% CI	Return Level	95% CI
2008 March 09 (With current sheet)	0.431	(0.083,0.780)	0.863	(0.511,1.214)	1.475	(1.270,1.679)	2.268	(1.806,3.078)	5.344	(3.574,7.114)
2009 February 24 (With current sheet)	0.409	(-0.302,1.120)	1.352	(0.297,2.406)	1.554	(0.712,2.397)	2.426	(1.951,2.902)	5.716	(3.961,7.471)
2009 March 08 (With current sheet)	0.225	(-0.301,0.751)	1.469	(0.583,3.555)	1.575	(1.061,2.088)	2.622	(2.078,3.166)	5.786	(4.270,7.301)
2008 March 09 (Removed current sheet)	-0.230	(-0.551,0.092)	4.683	(2.682,6.683)	10.343	(8.599,12.086)	12.100	(10.717,15.281)	17.755	(14.379,21.130)
2009 February 24 (Removed current sheet)	-0.234	(-0.483,0.014)	1.933	(1.292,2.575)	6.525	(5.868,7.181)	7.534	(6.727,8.340)	9.331	(8.125,10.536)
2009 March 08 (Removed current sheet)	-0.225	(-0.373,-0.076)	2.084	(1.636,2.531)	6.935	(6.311,7.559)	7.849	(7.116,8.581)	9.495	(8.371,10.618)
2003 February 01 (No current sheet)	-0.115	(-0.290,0.059)	0.673	(0.509,0.837)	2.917	(2.713,3.120)	3.295	(3.050,3.540)	4.065	(3.635,4.494)
2004 April 21 (No current sheet)	-0.360	(-0.540,-0.180)	0.511	(0.371,0.651)	1.804	(1.644,1.963)	2.051	(1.839,2.261)	2.433	(2.080,2.785)
2016 January 25 (No current sheet)	-0.284	(-0.406,-0.161)	0.861	(0.710,1.013)	3.754	(3.523,3.983)	4.072	(3.798,4.346)	4.609	(4.177,5.040)

Tabela 5.2 - Tabela dos valores dos parâmetros de forma ξ e de escala σ e seus respectivos intervalos de confiança de 95%, ambos obtidos na modelagem da distribuição GPD de todas as séries de volatilidade das figuras 5.2, 5.3 e 5.4. Os parâmetros ξ e σ foram obtidos pelo método de *maximum likelihood estimate*, enquanto que seus respectivos intervalos de confiança foram obtidos pela técnica de *profile likelihood*.

Time Series	Profile Likelihood									
	ξ		σ		10 events		20 events		100 events	
	Value	95% CI	Value	95% CI	Return Level	95% CI	Return Level	95% CI	Return Level	95% CI
2008 March 09 (With current sheet)	0.431	(0.035,0.732)	0.863	(0.554,1.310)	1.486	(1.393,1.597)	2.281	(1.957,2.702)	5.389	(3.809,7.429)
2009 February 24 (With current sheet)	0.410	(-0.224,0.830)	1.352	(0.780,2.627)	1.471	(0.681,1.863)	2.446	(2.325,2.632)	5.720	(4.340,7.842)
2009 March 08 (With current sheet)	0.225	(-0.260,0.577)	1.469	(0.900,2.445)	1.544	(1.308,1.708)	2.661	(2.358,3.078)	5.765	(4.570,7.422)
2008 March 09 (Removed current sheet)	-0.223	(-0.663,0.006)	4.683	(3.303,7.591)	10.431	(9.707,11.353)	13.137	(11.736,14.725)	17.474	(15.140,19.766)
2009 February 24 (Removed current sheet)	-0.234	(-0.520,-0.045)	1.933	(1.434,2.783)	6.560	(6.232,6.928)	7.541	(7.069,8.045)	9.213	(8.518,10.022)
2009 March 08 (Removed current sheet)	-0.225	(-0.402,-0.111)	2.083	(1.684,2.562)	6.936	(6.541,7.355)	7.828	(7.365,8.275)	9.422	(8.742,10.163)
2003 February 01 (No current sheet)	-0.115	(-0.309,0.022)	0.673	(0.545,0.870)	2.921	(2.780,3.066)	3.295	(3.116,3.503)	4.019	(3.693,4.415)
2004 April 21 (No current sheet)	-0.360	(-0.667,-0.210)	0.511	(0.388,0.704)	1.813	(1.743,1.892)	2.057	(1.955,2.163)	2.416	(2.285,2.531)
2016 January 25 (No current sheet)	-0.284	(-0.451,-0.196)	0.861	(0.745,1.059)	3.751	(3.631,3.878)	4.065	(3.925,4.200)	4.583	(4.366,4.768)

Tabela 5.3 - Tabela dos valores dos parâmetros de forma ξ e de escala σ e seus respectivos intervalos de confiança de 95%, ambos obtidos na modelagem da distribuição GPD de todas as séries de volatilidade das figuras 5.2, 5.3 e 5.4. Os parâmetros ξ e σ foram obtidos pelo método de *maximum likelihood estimate*, enquanto que seus respectivos intervalos de confiança foram obtidos pela técnica de *Bootstrapping*.

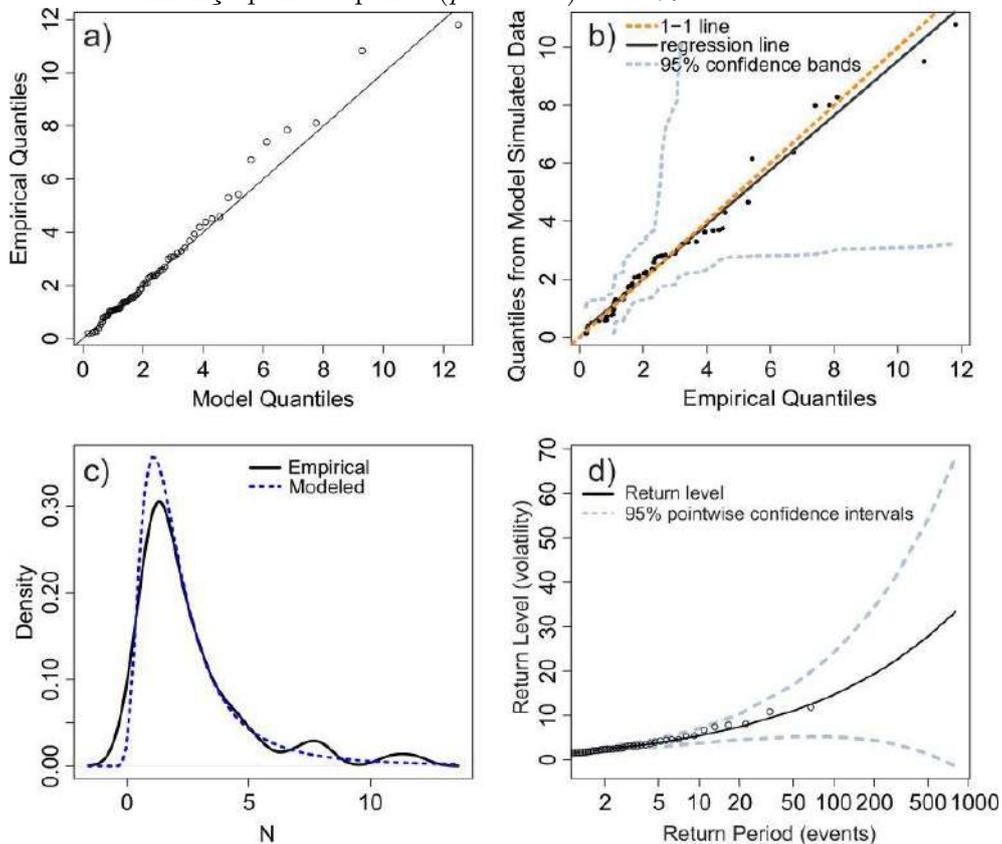
Time Series	Bootstrapping (500 resamples)									
	ξ		σ		10 events		20 events		100 events	
	Value	95% CI	Value	95% CI	Return Level	95% CI	Return Level	95% CI	Return Level	95% CI
2008 March 09 (With current sheet)	0.432	(0.147,0.858)	0.863	(0.576,1.282)	1.475	(1.476,1.587)	2.268	(2.106,2.676)	5.344	(4.097,8.459)
2009 February 24 (With current sheet)	0.409	(-0.102,1.300)	1.352	(0.614,2.802)	1.554	(0.670,1.950)	2.426	(2.465,2.650)	5.716	(4.375,8.000)
2009 March 08 (With current sheet)	0.225	(-0.189,0.910)	1.470	(0.769,2.579)	1.575	(1.301,1.739)	2.622	(2.320,3.064)	5.786	(4.619,8.000)
2008 March 09 (Removed current sheet)	-0.230	(-0.355,0.176)	4.683	(3.173,7.081)	10.343	(9.645,11.362)	13.000	(12.194,14.552)	17.755	(16.861,21.735)
2009 February 24 (Removed current sheet)	-0.234	(-0.316,0.061)	1.934	(1.431,2.675)	6.525	(6.232,6.928)	7.541	(7.069,8.045)	9.213	(9.259,10.680)
2009 March 08 (Removed current sheet)	-0.225	(-0.298,-0.055)	2.084	(1.677,2.572)	6.935	(6.642,7.253)	7.849	(7.541,8.235)	9.495	(9.331,10.702)
2003 February 01 (No current sheet)	-0.115	(-0.230,0.093)	0.673	(0.532,0.852)	2.917	(2.853,2.994)	3.295	(3.131,3.397)	4.065	(3.950,4.676)
2004 April 21 (No current sheet)	-0.360	(-0.387,-0.144)	0.512	(0.467,0.670)	1.804	(1.765,1.878)	2.051	(1.987,2.116)	2.433	(2.447,2.587)
2016 January 25 (No current sheet)	-0.284	(-0.357,-0.143)	0.862	(0.726,1.021)	3.754	(3.822,3.822)	4.072	(4.170,4.170)	4.609	(4.515,4.837)

5.1.4 Análise Estatística de Máximos em Blocos

A seção anterior foi dedicada à aplicação da técnica POT nas séries temporais de volatilidade em análise. Nossos achados sugerem que lâminas de correntes são as principais estruturas coerentes responsáveis pela positividade do parâmetro de forma na modelagem da distribuição GPD, e portanto, são as grandes protagonistas na ocorrência de eventos extremos no vento solar. Na tentativa de confirmarmos estes achados, aplicaremos nesta seção a técnica de máximos em blocos. Para este fim, os tamanhos dos blocos foram selecionados de forma a equilibrar o *bias* e a variância, tal qual é feito na escolha do limiar para o caso do GPD.

As Figuras 5.12, 5.13 e 5.14 mostram os *diagnostic plots* dos ajustes da distribuição GEV das séries temporais da volatilidade de $|\mathbf{B}|$ dos dias 9 de março de 2008, 9 de março de 2008 após remoção das lâminas de corrente e 25 de janeiro de 2016, respectivamente. Novamente, os QQ-plots e os histogramas mostraram um excelente ajuste estatístico dos dados, porém desta vez utilizando a modelagem para a distribuição GEV. A exemplo do ocorreu na seção anterior, os ajustes dos QQ-plots e dos histogramas para o dia 9 de março de 2008 foram menos precisos do que para os outros dias. No entanto, pelos mesmos motivos já explicados no caso da GPD para este mesmo dia, pode-se considerar este ajustes satisfatórios.

Figura 5.12 - Figura expondo o diagnóstico do ajuste para a modelagem da distribuição GEV para série de volatilidade do dia 9 de março de 2008. Em (a), é mostrado o QQ-plot, onde o eixo-y representa os quantis dos dados observacionais e o eixo-x, os quantis dos dados teóricos. Para um perfeito ajuste, os pontos devem estar sobre a linha sólida preta diagonal (1-1 line). Em (b), o mesmo de (a), porém desta vez os quantis dos dados empíricos são comparados com os quantis dos dados gerados randomicamente pela distribuição GEV, dentro de um intervalo de confiança de 95% (linhas tracejadas em cinza). Linha sólida preta representa a regressão linear dos pontos e linha tracejada laranja representa a linha diagonal (1-1 line). Em (c), são mostrados as funções de densidade de probabilidade dos dados empíricos (linha sólida) e dos dados teóricos (linha tracejada azul). Em (d), encontram-se os níveis de retorno da volatilidade (linha sólida preta) em termos dos períodos de retornos dos eventos. Linhas tracejadas cinzas representam o intervalo de confiança ponto a ponto (*pointwise*) de 95%.

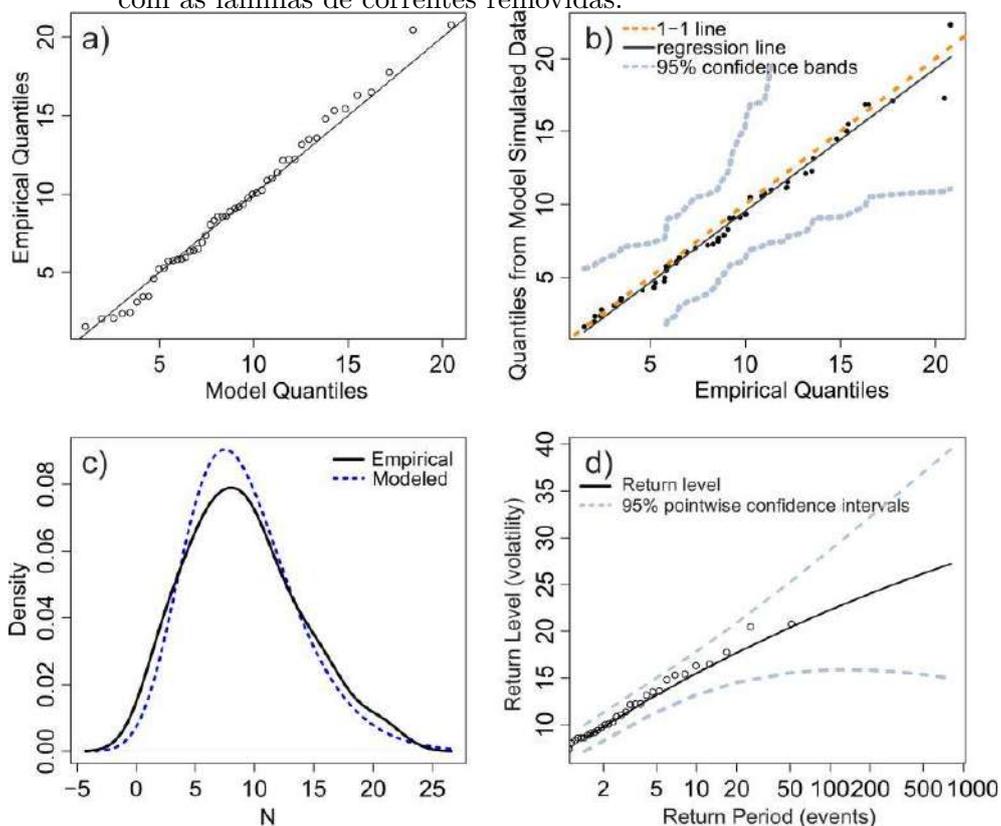


Fonte: Trabalho submetido ao Monthly Notices of the Royal Astronomical Society.

Os níveis de retorno e seus respectivos intervalos de confiança de 95%, para a modelagem da distribuição GEV dos dias 9 de março de 2008, 9 de março de 2008 após remoção das lâminas de corrente e 25 de janeiro de 2016, são mostrados nas Figs. 5.12(d), 5.13(d) e 5.14(d). De acordo com estas figuras, pode-se perceber que a

curva do nível de retorno do dia 9 de março de 2008 apresenta uma convexidade, ou seja, possui uma distribuição sem um limite superior (suporte infinito), sugerindo assim $\xi > 0$. Por outro lado, para os dias 9 de março de 2008 após remoção das lâminas de corrente e 25 de janeiro de 2016, as curvas são côncavas, possuindo assim uma distribuição com um limite superior (suporte finito), e portanto, apresentando $\xi < 0$. Portanto, estes plots estão em pleno acordo com o que já havia sido obtido anteriormente no caso da modelagem da GPD.

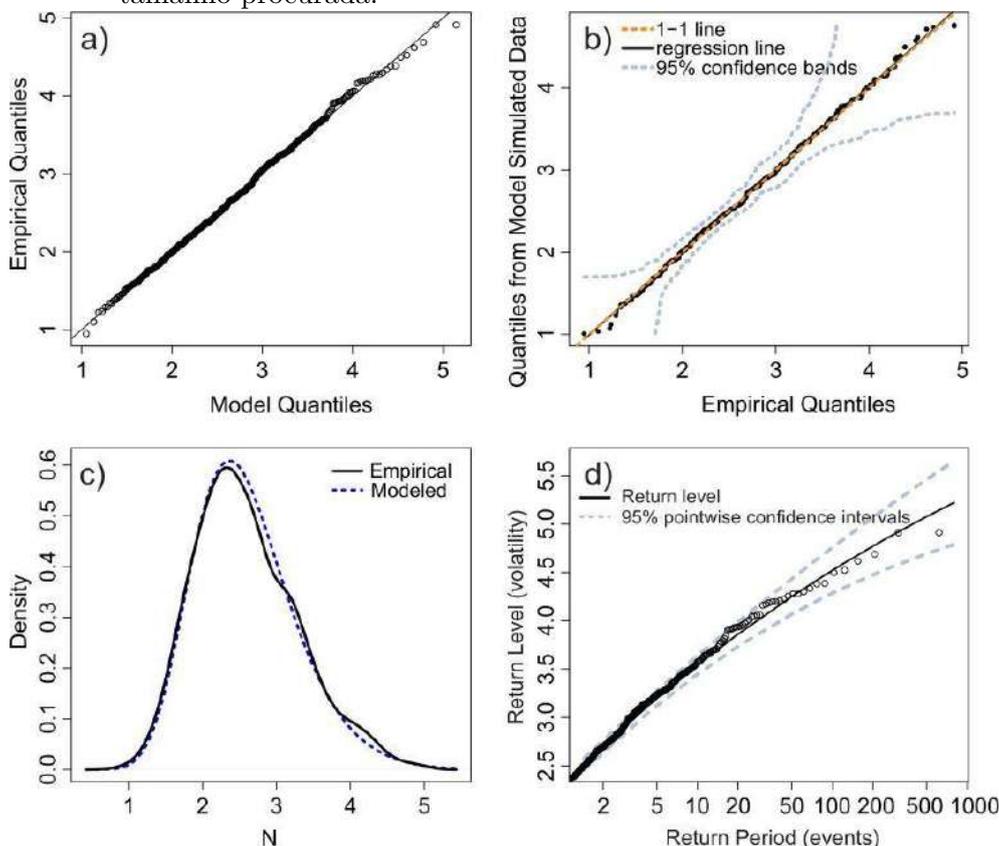
Figura 5.13 - O mesmo da Figura 5.12, porém desta vez para o dia 9 de março de 2008, com as lâminas de correntes removidas.



Fonte: Trabalho submetido ao Monthly Notices of the Royal Astronomical Society.

Embora os valores exatos dos parâmetros da distribuição GEV obtidos nesta modelagem não tenham sido mostrados aqui, pode-se garantir que todos os cálculos foram realizados para todas as séries de volatilidade das figuras 5.2, 5.3 e 5.4. Neste caso, novamente foram adquiridos parâmetros de forma negativos para todas as séries de volatilidade com lâminas de correntes ausentes ou removidas. Neste caso, estas séries possuem distribuição pertencendo à família de Weibull. Por outro lado, a exemplo

Figura 5.14 - O mesmo da Figura 5.12, porém desta vez para o dia 25 de janeiro de 2016, dia em que não foram identificadas lâminas de correntes com a escala de tamanho procurada.



Fonte: Trabalho submetido ao Monthly Notices of the Royal Astronomical Society.

da modelagem GPD, todas as séries de volatilidade com a presença de tais estruturas, os parâmetros de forma foram estatisticamente positivos. Neste caso, estas séries possuem distribuição pertencendo à família de Fréchet (caudas pesadas). Isso corrobora com os resultados obtidos na seção anterior.

Portanto, baseado nas rigorosas técnicas estatísticas aplicadas aos dados do vento solar neste capítulo, nossos achados sugerem fortemente que lâminas de correntes são as principais estruturas responsáveis pela positividade do parâmetro de forma para ambas as técnicas POT e máximo em blocos. Isto é extremamente importante já que abrimos a possibilidade de realizarmos análises de previsão da ocorrência de lâminas de correntes extremas, que podem estar associadas com o fenômeno de reconexão magnética. Adicionalmente, sugerimos a volatilidade como uma abordagem alternativa, simples e robusta para a detecção de lâminas de correntes e análise de eventos extremos no vento solar.

5.2 Papel das Lâminas de Correntes na Turbulência Intermitente e Multifractalidade no Vento Solar

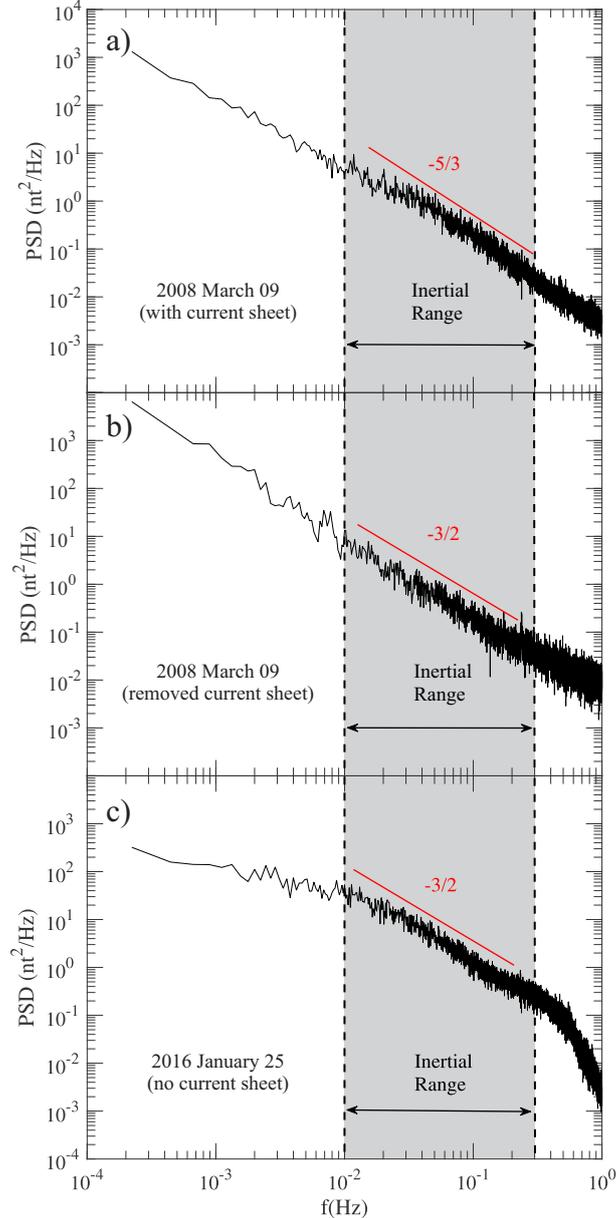
O vento solar é um ambiente que fornece um laboratório natural para observação de turbulência intermitente (BRUNO; CARBONE, 2013). Sabe-se hoje que o vento solar é permeado por estruturas coerentes, as quais são as grandes responsáveis pela intermitência e fuga da gaussianidade em séries temporais do módulo do campo magnético no vento solar (CHIAN; MIRANDA, 2009). Além disto, estudos apontam que a turbulência no vento solar apresenta ambas as leis de escala de Kolmogorov K41 (KOLMOGOROV, 1941a) e de Iroshnikov-Kraichnan (IK) (SALEM et al., 2009) em seus power spectrum. Li et al. (2011), sugeriu que as lâminas de correntes são as estruturas coerentes que possivelmente são as grandes responsáveis pela lei de escala K41 no vento solar e que, na ausência destas estruturas, o vento solar passava a apresentar uma lei de escala IK (LI et al., 2011). A maioria dos achados mostram que o vento solar segue uma lei de escala K41 e raramente a IK. Isto é devido ao fato das lâminas de correntes serem altamente frequentes em diversas escalas no vento solar, e que períodos sem estas, são raros.

Os espectros de potência (PSD) das séries temporais do módulo do campo magnético dos dias 9 de março de 2008 (lâminas de correntes presentes), 9 de março de 2008 (lâminas de correntes removidas) e 25 de janeiro de 2016 (lâminas de correntes ausentes) são mostrados na figura 5.15. Neste caso, os PSDs foram computados utilizando o método de Welch (WELCH, 1967), que consiste em dividir a série temporal em um conjunto de subintervalos sobrepostos, onde cada subintervalo é multiplicado por uma função janela, que no nosso caso é a janela de Hanning (PASCHMANN; DALY, 1998). Em seguida, são computados os PSDs para cada subintervalo utilizando a transformada rápida de Fourier. A média deste conjunto de PSDs gera o PSD da Figura 5.15. Este método é vantajoso perante aos outros, pois reduz o erro do espectro estimado, gerando desta forma PSDs menos ruidosos.

Conforme pode-se notar pela Figura 5.15(a), o PSD da série do módulo do campo magnético para o dia com lâmina de corrente segue aproximadamente a lei de escala K41 dentro do intervalo inercial (região sombreada em cinza), conforme pode-se observar pela reta ajustada por regressão linear (retas vermelhas), cuja inclinação obtida foi de $-5/3$. Em contra-partida, as séries temporais com lâminas de correntes removidas ou ausentes, apresentam um PSD seguindo aproximadamente uma lei de escala IK (inclinação $-3/2$) dentro do intervalo inercial. O cálculo das inclinações dos PSDs dentro dos intervalos inerciais de todas as séries das figuras 5.2, 5.3 e 5.4,

se encontram na tabela 5.4. O cálculo das inclinações foram realizados por meio de regressões lineares, cujos coeficientes de determinação R^2 também são mostrados. O coeficiente de determinação é uma medida de qualidade da regressão, cujos valores podem variar entre 0 e 1, sendo 1 para um ajuste perfeito.

Figura 5.15 - Figura dos espectros de potência (PSD) calculados pelo método de Welch (1967) para os dias 09 de março de 2009 com a presença de lâminas (a) e com as lâminas removidas (b) e para o dia 25 de janeiro de 2016 (c). Região sombreada em cinza representa o intervalo inercial e linhas vermelhas representam retas ajustadas por regressão linear dos dados neste intervalo. Percebe-se que para o dia com a presença de lâminas de correntes, a lei de potência K41 (inclinação $-5/3$) é observada. Por outro lado, dias com lâminas ausentes ou removidas a lei de potência IK (inclinação $-3/2$) passa a ser observada.



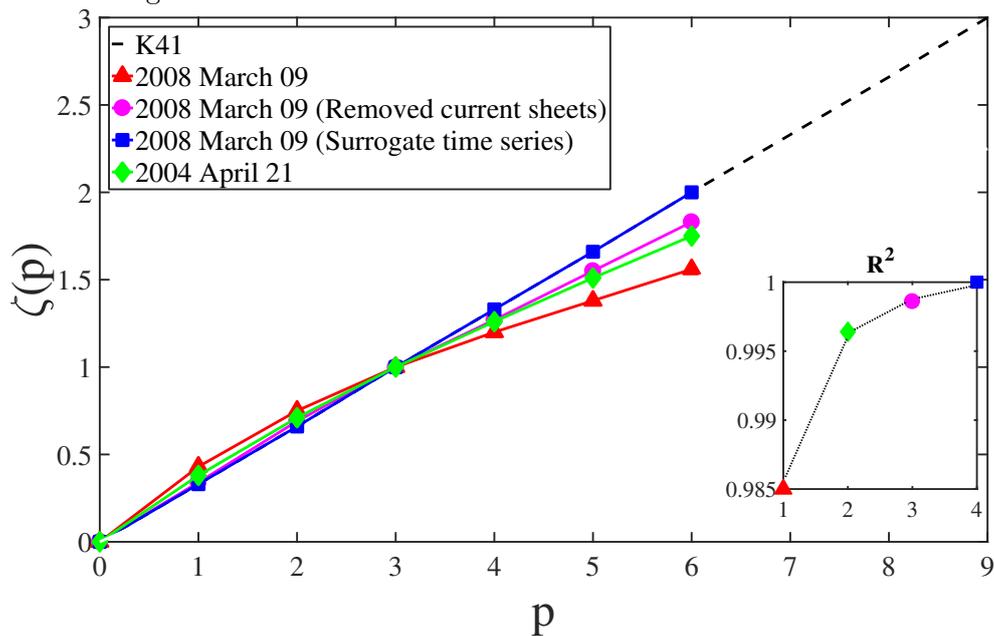
Fonte: Trabalho submetido ao Monthly Notices of the Royal Astronomical Society.

Com relação aos espectros de potência no interior dos intervalos inerciais, todas as séries com lâminas de correntes apresentam, com uma excelente aproximação, uma inclinação de aproximadamente $(-5/3)$, ao passo que para todas as séries com lâminas removidas ou ausentes, a inclinação é de aproximadamente $(-3/2)$. Portanto, nossos resultados corroboram os achados da referência (LI et al., 2011). Adicionalmente, a tabela 5.2 mostra que os coeficiente de determinação (R^2) das regressões lineares calculada em todos intervalos inerciais são bem próximos de 1, sugerindo assim um comportamento linear destas regiões.

Figura 5.16 mostra a função zeta em função dos momentos estatísticos $\zeta(p)$ para as séries temporais do módulo do campo magnético dos dias 9 de março de 2008 (lâminas de correntes presentes), 9 de março de 2008 (lâminas de correntes removidas) e 25 de janeiro de 2016 (lâminas de correntes ausentes). Pode-se notar claramente que o comportamento da função $\zeta(p)$ para série com lâmina de corrente foge mais da linearidade do que os casos com as lâminas de correntes são ausentes ou removidas. Isto pode ser confirmado pelos valores dos coeficientes de determinação R^2 apresentados na Figura 5.16, que é menor para a série com lâminas de correntes. Neste caso, sugerimos que as lâminas de corrente são responsáveis por aumentar a multifractalidade neste tipo de série temporal, o que é completamente plausível, visto que tais estruturas são reconhecidamente responsáveis por aumento da intermitência na série temporal do vento solar, aumentando sua heterogeneidade entre as escalas temporais.

Com intuito de analisarmos o tipo de multifractalidade predominante em séries temporais do vento solar e, além disto, analisar o grau de contribuição das lâminas corrente, aplicamos o *surrogate* de randomização de fases (KANTZ; SCHREIBER, 1997) na série temporal do dia 2008 March 09 (lâminas de correntes presentes). Basicamente, o *surrogate* de randomização de fases consiste na aplicação da transformada de Fourier da série original levando-a para o espaço de Fourier, onde tem suas fases completamente randomizadas. Após isto, a série é trazida de volta para o espaço real por meio de uma transformada inversa (KANTZ; SCHREIBER, 1997). Este tipo de surrogate quebra todas as não-linearidades, porém, preserva o PSD e, conseqüentemente, a função de autocorrelação linear. Além disto, a série transformada pelo por este tipo de *surrogate* passa a ter uma distribuição aproximadamente gaussiana, indicando que as estruturas coerentes responsáveis pela intermitência são destruídas após este tipo de transformação.

Figura 5.16 - Figura das funções zeta para os dias 09 de março de 2008 e 21 de abril de 2004. Função zeta para a série original do dia 09 de março é representada por triângulos vermelhos. Já a função zeta para esta mesma série, após a aplicação do processo de surrogate de randomização de fases e com lâminas de correntes removidas, são dadas respectivamente por quadrados azuis e círculos magenta. Finalmente, para o dia 21 de abril de 2004, a função zeta é representada por losangos verdes. Coeficientes de determinação R^2 das regressões lineares calculada para as curvas de zeta para todos casos também são mostrados. Valores de R^2 mais próximos de $R^2 = 1$, indicam ótimos ajustes lineares para a função zeta. Neste caso, a monofractalidade é sugerida.



Fonte: Trabalho submetido ao Monthly Notices of the Royal Astronomical Society.

Figura 5.16 mostra que a série pós-surrogate apresenta uma função $\zeta(p)$ quase que perfeitamente linear e sobreposta a reta representativa da lei K41 (monofractal). Neste caso, existe evidências que a principal fonte da multifractalidade neste tipo de série é devido à intermitência, ou seja, pela forma da distribuição, que é diretamente afetada pela presença das lâminas de corrente.

Tabela 5.4 - Tabela contendo os resultados das regressões lineares dos PSDs interiores aos intervalos inerciais de todas as séries das figuras 5.2, 5.3 e 5.4. A qualidade das regressões é dada pelo coeficiente de determinação (R^2). Valores obtidos para os *extremal indexes* (θ), antes e após o processo de declusterização na modelagem GPD, também são apresentados.

Time Series	Inertial range		Extremal index after declusterization		Extremal index before declusterization	
	Slope	R^2	θ	95% CI	θ	95% CI
2008 March 09 (With current sheet)	-1.69 ± 0.01	0.945	0.91	(0.76,1.00)	0.0016	(0.0010,0.0029)
2009 Februaty 24 (With current sheet)	-1.67 ± 0.01	0.949	0.69	(0.50,1.00)	0.0025	(0.0015,0.0047)
2009 March 08 (With current sheet)	-1.73 ± 0.01	0.957	0.83	(0.72,1.00)	0.0019	(0.0011,0.0044)
2008 March 09 (Removed current sheet)	-1.49 ± 0.01	0.895	0.69	(0.52,1.00)	0.02	(0.01,0.08)
2009 February 24 (Removed current sheet)	-1.50 ± 0.01	0.936	0.87	(0.77,1.00)	0.05	(0.04,0.07)
2009 March 08 (Removed current sheet)	-1.52 ± 0.01	0.924	0.82	(0.64,1.00)	0.03	(0.02,0.06)
2003 February 01 (No current sheet)	-1.45 ± 0.02	0.926	0.60	(0.45,1.00)	0.01	(0.008,0.03)
2004 April 21 (No current sheet)	-1.48 ± 0.01	0.917	0.75	(0.62,1.00)	0.03	(0.02,0.07)
2016 January 25 (No current sheet)	-1.55 ± 0.01	0.950	0.99	(0.98,1.00)	0.11	(0.10,0.13)

5.3 Dragon Kings e reconexões magnéticas no vento solar

Sabe-se hoje que o clima espacial (RILEY, 2012) é repleto de fenômenos não lineares, que levam a eventos extremos tais quais explosões solares (TSIFTSI; LUZ, 2018), tempestades geomagnéticas (TSUBOUCHI; OMURA, 2007), injeção de energia do vento solar na magnetosfera terrestre (MOLONEY; DAVIDSEN, 2010), número de manchas solares (ACERO et al., 2017), (ACERO et al., 2018), dentre outros, que podem afetar diretamente o planeta Terra. No entanto, a geofísica espacial ainda carece muito de análises de estatísticas desses tipos de eventos. Até o momento, não têm sido encontradas na literatura análises de *Dragon Kings* (SORNETTE; OULLON, 2012), (PISARENKO; SORNETTE, 2012) em clima espacial. Diante disso, o presente trabalho dedica exclusivamente este capítulo para a aplicação da teoria estatística de *Dragon Kings* em processos de possíveis reconexões magnéticas, os quais estão envolvidos em quase todos os processos extremos de clima espacial, que afetam o nosso planeta.

Conforme já visto, um dos achados deste trabalho é a caracterização do papel das lâminas de correntes na modelagem estatística de eventos extremos no vento solar. Neste caso, pudemos verificar que o principal parâmetro deste tipo de modelagem é completamente sensível à presença de tais estruturas, que estão diretamente envolvidas em processos de reconexões magnéticas. Diante disso, dedicamos este capítulo ao estudo da relação existente, ou não, entre esses tipos de processos e a ocorrência de eventos extremos no meio interplanetário. Para isso, necessitamos de uma ferramenta capaz de identificar possíveis regiões de reconexões magnéticas no vento solar.

5.3.1 Condição Diamagnética para Reconexão Magnética

Nesta seção, faremos uma breve análise das condições de existência e supressão de reconexões magnéticas, baseado nas condições diamagnéticas de Swisdak (SWISDAK et al., 2003), (SWISDAK et al., 2010). Para isso, considere a lei de Ohm generalizada, dada por (GONZALEZ; PARKER, 2016):

$$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \frac{\vec{J} \times \vec{B}}{ne} - \frac{\nabla \cdot \mathbf{p}_e}{ne} + \frac{m_e}{e} \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{J}}{ne} \right) + \eta \vec{J}, \quad (5.2)$$

onde \vec{v} é a velocidade do volume de fluido, \vec{B} é o campo magnético, \vec{J} , que pode ser obtida da lei de Ampère, é a densidade de corrente, n é a densidade eletrônica ou iônica, \mathbf{p}_e é o tensor de pressão eletrônica, m_e é a massa eletrônica e η é a re-

sistividade. O segundo termo do lado esquerdo de (5.2) é referente à convecção, o primeiro termo do lado direito é dado pelo efeito Hall, o segundo termo é a divergência do tensor de pressão eletrônica, o terceiro termo está relacionado com a inércia eletrônica e o último é referido como termo resistivo. Uma comparação feita sobre os termos de convecção presentes em 5.2, revela que a escala de comprimento crítica para que o termo Hall predomine é dada por (GONZALEZ; PARKER, 2016)

$$d_i = \left(\frac{\varepsilon_0 m_i c^2}{n q_i^2} \right)^{1/2}, \quad (5.3)$$

onde d_i , chamado *ion skin depth*, é a escala de comprimento abaixo da qual os íons não estão mais congelados no plasma, q_i é a carga iônica, ε_0 é a permissividade elétrica do vácuo, c é a velocidade da luz e m_i é a massa iônica. Nesse caso, o termo Hall predominará apenas quando os íons desacoplarem dos elétrons e não mais estiverem congelados no campo magnético próximo à região da *X-line* (Fig 5.17) (GONZALEZ; PARKER, 2016), que é onde as linhas de campo magnético mudam sua topologia e a reconexão acontece.

Em geral, em processos de reconexão magnética, existe uma componente de campo magnético B_g perpendicular ao plano da *X-line*, conforme a Figura 5.17. Neste caso, surge uma velocidade de deriva diamagnética, dada por (GONZALEZ; PARKER, 2016):

$$V_{*j} = -\frac{\nabla p_j \times \vec{B}}{q_j n_j B^2}, \quad (5.4)$$

onde v_{*j} é a velocidade de deriva diamagnética da espécie j , p é a pressão, \vec{B} o campo magnético total e n_j a densidade e q_j são respectivamente a densidade e a carga da espécie j .

Considerando que na região próxima à *X-line* os íons não obedecem mais a condição de congelamento e que, neste caso, estão desacoplados dos elétrons, então deve existir um termo Hall e, devido a isso, tal região deverá ser dominada pelos elétrons. Neste caso, podemos dizer que esta região está em equilíbrio térmico, e portanto, considerar a pressão como sendo isotrópica, ou seja, $(\nabla \cdot \mathbf{p}_j \rightarrow \nabla p_j)$. Além disso, esta região deve possuir uma resistividade e inércia eletrônica desprezíveis. Considerando todos estes fatos, podemos escrever a equação 5.2 como

$$\begin{aligned}
\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} &= \frac{\vec{J} \times \vec{B}}{ne} - \frac{\nabla \cdot \mathbf{p}_j}{ne} \\
&= \vec{E} + \left(\vec{v} - \frac{\vec{J}}{ne} \right) \times \vec{B} = -\frac{\nabla \cdot \mathbf{p}_j}{ne} \\
&= \vec{E} + \vec{v}_e \times \vec{B} = -\frac{\nabla \cdot \mathbf{p}_j}{ne},
\end{aligned} \tag{5.5}$$

onde $\vec{v}_e = \vec{v} - \vec{J}/ne$ é a velocidade do volume eletrônico (GONZALEZ; PARKER, 2016).

Utilizando a equação 5.4, podemos escrever 5.5 como

$$\vec{E} = -(\vec{v}_e + \vec{v}_{*e}) \times \vec{B}. \tag{5.6}$$

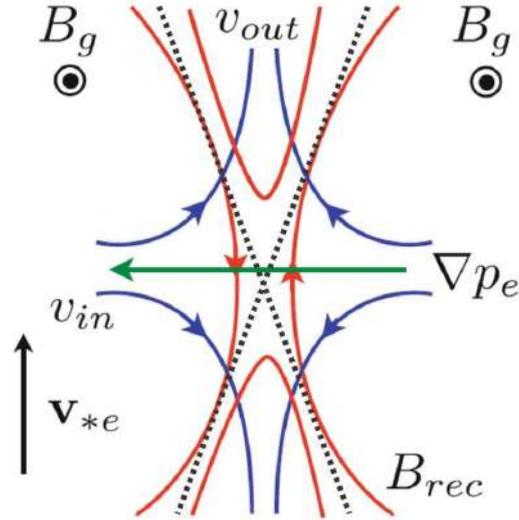
Nesse caso, a equação 5.6 é reduzida para a lei de Ohm no caso de resistividade nula ($\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = 0$), porém, com a velocidade do volume de fluido trocado por $\vec{v}_e + \vec{v}_{*e}$. Esta é a condição necessária para congelamento.

Dessa forma, em uma região próxima da *x-line* onde os íons são dissipados ($v_i = 0$), existirá uma deriva diamagnética na direção de *outflow* (Fig. 5.17), ou seja, nesse caso a *x-line* passa a ser convectada nessa direção. Se essa convecção for mais rápida do que a velocidade com a qual as linhas de campo reconectadas liberam sua tensão, então a energia magnética não é liberada através da mudança na topologia magnética (GONZALEZ; PARKER, 2016), e portanto, a reconexão magnética é suprimida. Resumindo em termos quantitativos, a supressão de reconexão magnética pode ser guiada pela seguinte condição (SWISDAK et al., 2010):

$$v_{*e} > v_{out}, \tag{5.7}$$

onde v_{out} é a velocidade Alfvénica do *outflow*.

Figura 5.17 - Figura ilustrativa de uma região próxima à região da x-line (representada pelas linhas pontilhadas), onde linhas de campo são reconectadas (linhas vermelhas). B_g é o campo magnético perpendicular ao plano da figura, que juntamente com o gradiente de pressão eletrônica (direção indicada pela linha verde), faz surgir uma deriva diamagnética na mesma direção do outflow (linhas azuis).



Fonte: Adaptado de Gonzalez e Parker (2016).

Swisdak et al. (2010) reescreveu a condição 5.7 em termos do beta do plasma e do *shear angle* da seguinte forma:

$$\Delta\beta > 2 \left(\frac{L}{\lambda_i} \right) \tan \left(\frac{\theta_{shear}}{2} \right), \quad (5.8)$$

onde $L = p/\nabla p$ representa a escala de comprimento da pressão, λ_i é a escala de comprimento do *ion skin depth*,

$$\beta = \frac{2\mu_0 k_B n T}{B^2} \quad (5.9)$$

e

$$\theta_\tau(t) = \cos^{-1} \frac{\vec{B}(t) \cdot \vec{B}(t+\tau)}{|\vec{B}(t)| |\vec{B}(t+\tau)|}, \quad (5.10)$$

onde μ_0 e k_B são respectivamente a permeabilidade magnética do vácuo e a constante de Boltzmann, θ é o ângulo de rotação do vetor campo magnético entre as extremidades da região da lâmina de corrente e $\Delta\beta$ é a diferença de valor do beta do plasma entre essas mesmas extremidades.

Nesse caso, segundo a condição 5.8, chamada condição diamagnética de Swisdak (SWISDAK et al., 2003), a reconexão magnética será mais provável de ocorrer em regiões onde θ é alto e $\Delta\beta$ é baixo. Além disto, podemos concluir também de (5.8) que em regiões com $\Delta\beta$ alto, as reconexões somente serão possíveis para $\theta \approx \pi$.

5.3.2 Reconexão Magnética: uma candidata a Dragon King no Vento Solar

Na seção anterior apresentamos rapidamente a condição diamagnética de Swisdak para ocorrência, ou não, de reconexão magnética. Esta técnica tem sido amplamente utilizada para localizar regiões com prováveis reconexões, como por exemplo, na magnetopausa (SWISDAK et al., 2003) e vento solar (CHIAN et al., 2016). Em (CHIAN et al., 2016), a técnica para estabelecer prováveis reconexões magnéticas em regiões de interação entre tubos magnéticos no vento solar foi aplicada. Neste caso, foi localizada uma região reconectante entre dois tubos magnéticos, onde foi encontrada uma forte turbulência e multifractalidade.

Apesar desses estudos, o vento solar ainda carece muito de análises estatísticas quantitativas acerca da ocorrência de eventos extremos. O que tem sido feito com relação a este tema são apenas análises qualitativas da presença de tais eventos no meio interplanetário, como por exemplo, estudo da fuga da gaussianidade e intermitência no vento solar (CHIAN; MIRANDA, 2009), (CHIAN; MUNOZ, 2011), que traz a informação da presença de eventos extremos neste ambiente, mas que não é capaz de quantificar suas causas e efeitos.

Até o momento, não há registro de análises acerca da ocorrência de *Dragon Kings* no meio interplanetário. Conforme já visto, esta classe de eventos extremos é muito especial, visto que, de acordo com Sornette e Ouillon (2012), *Dragon Kings* são eventos que podem ser identificados, previstos e, em algumas situações, eliminados (GALUZIO et al., 2014), (CAVALCANTE et al., 2013). Neste caso, dados os inúmeros fenômenos extremos que ocorrem em clima espacial e que afetam diretamente o nosso planeta, seria de extrema importância a identificação de um evento tal qual *Dragon King* no meio interplanetário.

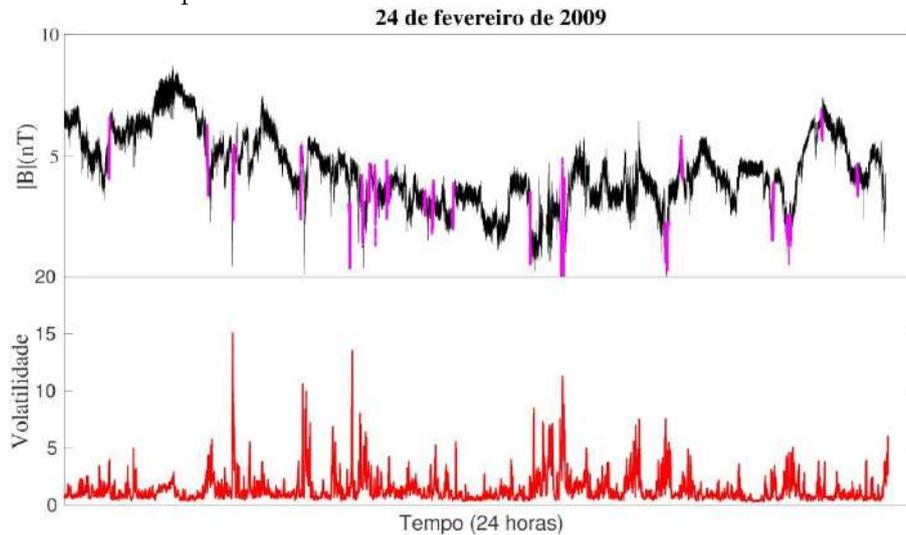
Diante disso, nesta seção faremos, pela primeira vez, uma análise da estatística de *Dragon Kings* no vento solar, especificamente em regiões de prováveis reconexões magnéticas, que estão relacionadas com diversos processos extremos na Geofísica Espacial. Para isso, faremos uso dos métodos estatísticos para identificação de DK apresentados na parte metodológica, bem como a condição diamagnética para ocorrência de reconexões, apresentada na seção anterior.

5.3.2.1 Série Temporal Analisada

Para a presente análise, trabalharemos com uma série temporal do módulo do campo magnético de um dia completo (24 de fevereiro de 2009). Neste caso, os dados foram coletados da espaçonave Cluster I, quando esta se localizava no meio interplanetário, próximo à região de *bowshock*. Os dados desta série estão disponíveis no website da *European Space Agency* (ESA), <https://www.cosmos.esa.int/web/csa>.

Com o intuito de detectarmos lâminas de correntes, utilizamos o método de Li (2008). Neste caso, foi utilizada uma janela de tamanho 200s. Embora provavelmente haja lâminas de correntes com outros tamanhos para este dia, foram detectadas apenas as estruturas com tamanhos comparáveis ao tamanho da janela. A Figura 5.18 (painel superior), mostra a série temporal do módulo do campo magnético para o dia 24 de fevereiro de 2009. As lâminas de correntes detectadas foram marcadas na cor magenta. No painel inferior, encontra-se a série temporal da volatilidade do módulo do campo magnético, onde foi utilizada uma janela de 50s, tamanho este escolhido baseado na mesma escala de tamanho das estruturas situadas no centro do intervalo inercial do espectro de potência. Pode-se notar claramente a correlação entre as duas séries. Por isso, uma das propostas deste trabalho é sugerir a volatilidade como um método complementar para detecção de lâminas de correntes e reconexões magnéticas.

Figura 5.18 - Figura da série temporal do módulo do campo magnético do dia 24 de fevereiro de 2009 (painel superior), onde regiões com prováveis presenças de lâminas de correntes são destacadas na cor magenta. Painel inferior mostra a correspondente série de volatilidade.

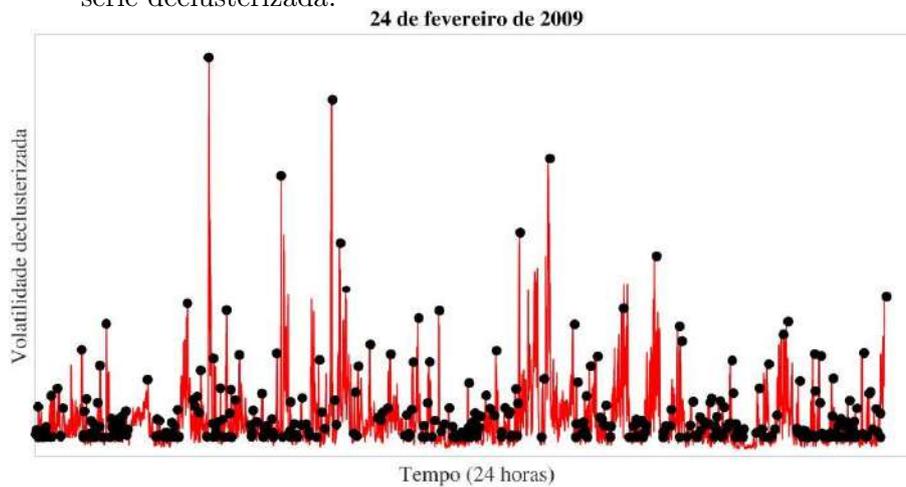


Fonte: Produção do autor.

5.3.2.2 Aplicação dos Testes Estatísticos

Conforme já analisado neste trabalho, a série temporal em questão possui uma memória muito forte entre seus pontos. Isso pode ser devido à dinâmica que conduz este sistema (multifractalidade), associado à grande frequência de amostragem, que neste caso é de 22Hz. Isso traz o indesejado efeito de clusterização aos dados, prejudicando o pressuposto básico de independência dos pontos para a aplicação de análises estatísticas de *Dragon Kings*. Diante disso, aplicamos um processo de declusterização da série de volatilidade, que será o objeto de estudo. Para isso, utilizamos o método de *runs declustering* (LEADBETTER, 1983), que consiste em escolher um *run length*, r , tal que excedentes separados por um número de observações menor que r , são considerados pertencer ao mesmo *cluster*. Selecionando os valores máximos de cada cluster, uma nova amostra, declusterizada, é obtida. A Figura 5.19, mostra a série de volatilidade após o processo de declusterização. Os pontos pretos representam a nova série de volatilidade declusterizada, a qual passará a ser analisada a partir de agora.

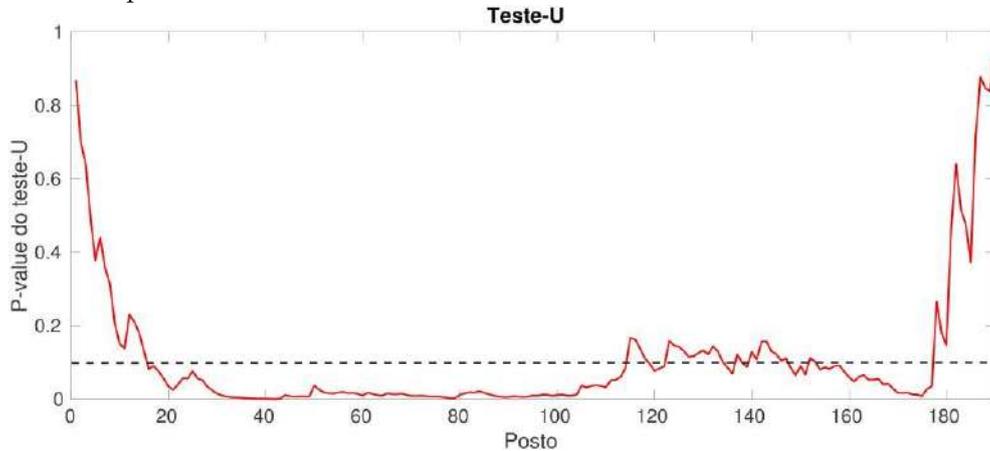
Figura 5.19 - Série de volatilidade do módulo do campo magnético do dia 24 de fevereiro de 2009 após o processo de declusterização. Pontos pretos representam a série declusterizada.



Fonte: Produção do autor.

Estando a série temporal em análise declusterizada, podemos iniciar a aplicação dos testes estatísticos. Inicialmente, aplicaremos o teste-U, com o intuito de verificar se existe ou não DK's na série. A Figura 5.20 mostra o resultado do teste-U para o maior elemento ($r = 1$) da série de volatilidade. Pode-se perceber que para vários valores de posições dos elementos ordenados da série (posto), o p-value assume valores menores que 0.1. Neste caso, a hipótese nula de não existência de DK's é rejeitada, e portanto, assumimos que existe pelo menos um DK na série analisada.

Figura 5.20 - Teste-U para a série declusterizada da volatilidade do dia 24 de fevereiro de 2009. Linha vermelha representa os valores dos p-values para cada posto da amostra. Linha tracejada indica o nível de significância utilizado no teste, que neste caso é 0.1.



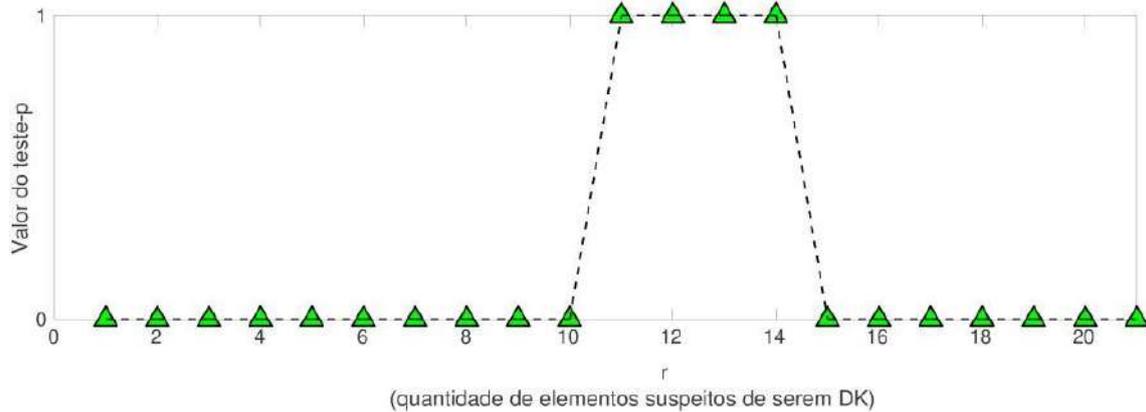
Fonte: Produção do autor.

Após a aplicação do teste-U na séries analisada, verificamos que existe pelo menos um DK na amostra. A fim de inferirmos o número aproximado de DK's existentes, partiremos para o segundo teste, ou seja, o teste-DK. Devemos começar o teste com o maior elemento da amostra ($r = 1$), após isto, acrescentaríamos o segundo maior elemento ao teste ($r = 2$), em seguida acrescentaríamos o terceiro maior elemento ($r = 1$) ao conjunto testado e assim por diante, até obtermos um conjunto de valores testados para o qual o p-value é menor que o nível de significância (p-value < 0.1 , neste caso). O valor de postos utilizados no teste fica a critério do pesquisador. Apenas não é indicado utilizar um número muito alto de postos, para que não ocorra resultados espúrios. Neste trabalho, fizemos o teste-DK para todos os 200 primeiros postos da amostra, o que representa menos da metade do tamanho da série.

Se, por exemplo, obtivermos p-value < 0.1 ao testarmos um conjunto de n prováveis DK ($posto = n$), então concluiríamos que existem n DK's na amostra. No entanto, este processo pode ser exaustivo se a série analisada for muito grande. Diante disso, propomos um teste que nos indique automaticamente a quantidade de elementos suspeito DK's (r) para o qual p-value < 0.1 . Chamamos este teste de “teste-p”. Dessa maneira, o teste-DK é aplicado automaticamente para diversos valores de r . Para valores de r nos quais o teste-DK fornece p-value > 0.1 , então teste-p = 0; caso contrário, se p-value < 0.1 , então teste-p = 1. A Figura 5.21 apresenta a aplicação deste teste. Pode-se perceber que p-value < 0.1 (teste-p = 1) para $r = 11$, ou seja,

para o conjunto formado pelos 11 maiores elementos da nossa amostra, a hipótese nula de não existência de DK's é rejeitada. Portanto, concluímos que o conjunto formado pelos 11 maiores elementos da amostra é formado por prováveis DK's.

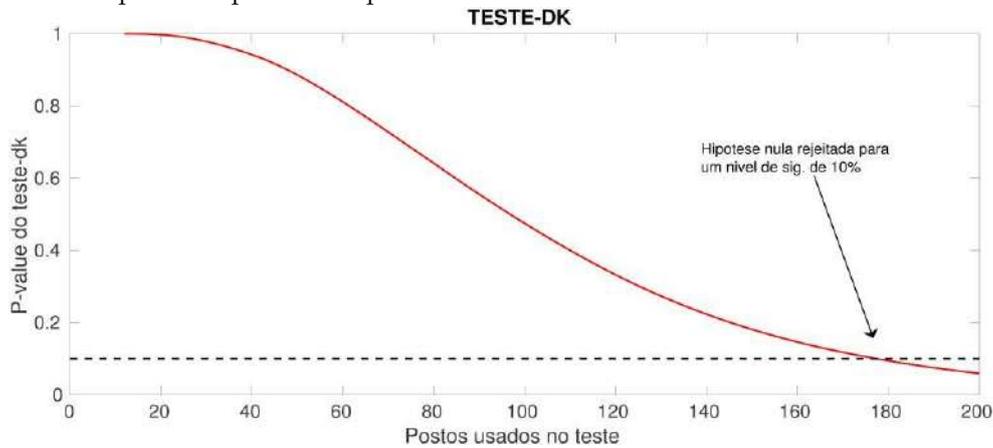
Figura 5.21 - Figura apresentando o teste-p da série declusterizada da volatilidade do dia 24 de fevereiro de 2009. Triângulos verdes representam os valores do teste. Para teste-p = 1, temos p-value < 0.1. Para teste-p = 0, temos p-value < 0.1



Fonte: Produção do autor.

A título de confirmação, aplicamos o teste-DK para os 11 maiores elementos da amostra ($r = 11$) até o 200º posto. Neste caso, pode-se verificar que, de fato, o p-value assume valores p-value < 0.1 para $posto \approx 180$, estando de acordo com o teste-p.

Figura 5.22 - Figura apresentando o teste-DK para $r = 11$ da série declusterizada da volatilidade do dia 24 de fevereiro de 2009. Linha vermelha representa os p-values para cada posto.



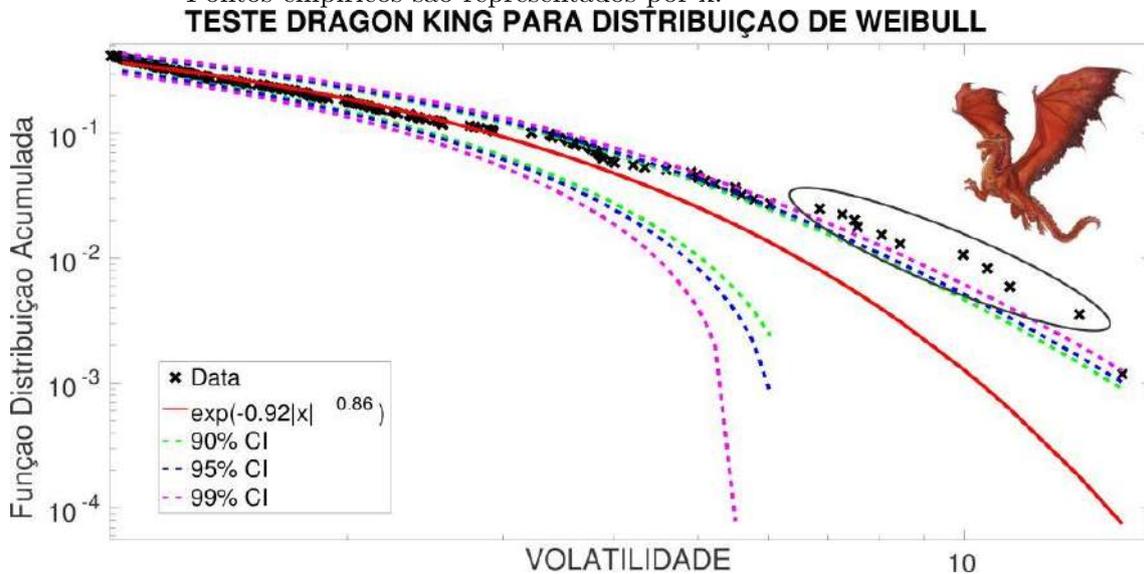
Fonte: Produção do autor.

Adicionalmente, aplicamos o teste de intervalos de confiança de (JANCZURA; WERON, 2012) à série de volatilidade do dia 24 de fevereiro de 2009. Para isso, em vez da distribuição exponencial, utilizamos o intervalo inter-quantílico $[0.4, 0.01]^2$ da cauda da distribuição de Weibull, para a construção dos intervalos de confiança.

Pode-se perceber pela Figura 5.23, que 10 dos 11 maiores valores da série de volatilidade declusterizada estão situados fora dos intervalos de confiança para os níveis de confiança de 90%, 95% e 99%, ou seja, esses pontos são estatisticamente considerados DK's, o que está em pleno acordo com os testes anteriores. Vale ressaltar que existe apenas um único ponto, dentre os 11 maiores valores da amostra, que não está fora de todos os intervalos. Porém, ele está fora dos intervalos, cujos níveis de confiança são de 90% e 95%. Portanto, ao nível de confiança de 95%, o teste de Janczura e Weron (2012) detectou exatamente o mesmo número de *Dragon Kings* que foi detectado pelo teste-DK, ou seja, 11 pontos.

²Nesse caso, a variável de menor valor deste intervalo (limite inferior), é maior que 40% da quantidade total de variáveis da amostra. Por outro lado, a variável de maior valor dentro deste intervalo (limite superior) é menor do que apenas 1% da quantidade total de variáveis na amostra.

Figura 5.23 - Figura representando a aplicação do teste de Janczura e Weron (2012) para a série declusterizada da volatilidade do dia 24 de fevereiro de 2009. Intervalos para os níveis de confiança 90%, 95% e 99%, são representados respectivamente pelas linhas tracejadas verde, azul e magenta. Linha vermelha representa a distribuição teórica de Weibull obtida por ajustes estatísticos. Pontos empíricos são representados por x.



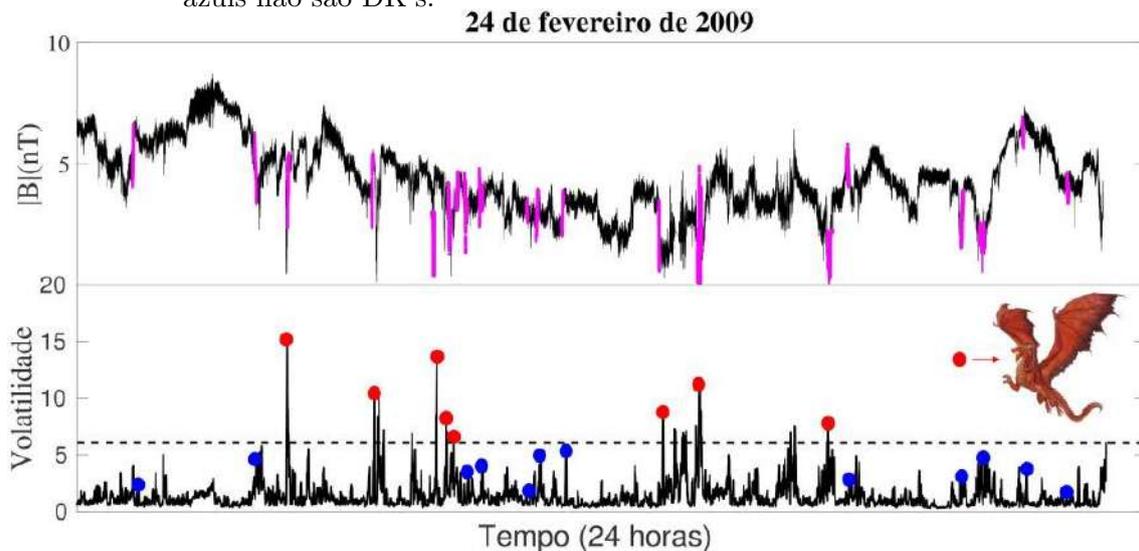
Portanto, de acordo com o teste-DK, teste-p e o teste de Janczura e Weron (2012), nossa série possui 11 prováveis *Dragon Kings*, a saber, os 11 maiores elementos. Neste caso, fica muito simples determinarmos quem seria o menor DK, ou seja, o 11º elemento do conjunto de DK's. Para isto, basta ordenarmos de forma crescente a série declusterizada em (Fig. 5.19) e verificar quem seria o 11º ponto. Neste caso, encontramos que o 11º maior valor da série de volatilidade declusterizada é 6,07.

Após isso, fazemos uma comparação entre os pontos da série declusterizada com a série do módulo do campo magnético e lâminas de correntes detectadas. A Figura 5.24 é a mesma que a Figura 5.18, porém, neste caso os pontos da série declusterizada da volatilidade (círculos sólidos pretos) em (Fig. 5.19), que coincidem com as posições das lâminas de corrente detectadas (pontos magenta) em (Fig. 5.18 - painel superior), são sobrepostas à série temporal da volatilidade em (Fig. 5.18 - painel inferior), resultando nos círculos sólidos azuis e vermelhos em (Fig. 5.24). Além disso, uma linha tracejada (volatilidade=6) é plotada em (Fig. 5.24). Esta linha, de acordo com o teste-DK, representa o limite acima do qual os pontos da série de volatilidade

declusterizada é considerada um DK (círculos sólidos vermelhos). Pontos da volatilidade declusterizada que coincidiram com as lâminas de corrente, porém que estão abaixo da linha tracejada, são pintadas na cor azul.

Portanto, de acordo com a figura 5.24, os círculos sólidos vermelhos representam regiões da volatilidade que detectaram lâminas de correntes e que, além disso, são considerados *Dragon Kings*. Por outro lado, regiões da volatilidade que identificaram com sucesso lâminas de correntes, mas que não são consideradas *Dragon Kings*, são representadas por círculos sólidos azuis.

Figura 5.24 - Figura da série temporal do módulo do campo magnético do dia 24 de fevereiro de 2009 (painel superior), onde regiões com prováveis presenças de lâminas de correntes são destacadas na cor magenta. Painel inferior mostra a série de volatilidade sobreposta por pontos da série declusterizada (círculos sólidos vermelhos e azuis), que coincidem com as regiões contendo lâminas de corrente. Círculos sólidos vermelhos representam DK's, ao passo que os azuis não são DK's.



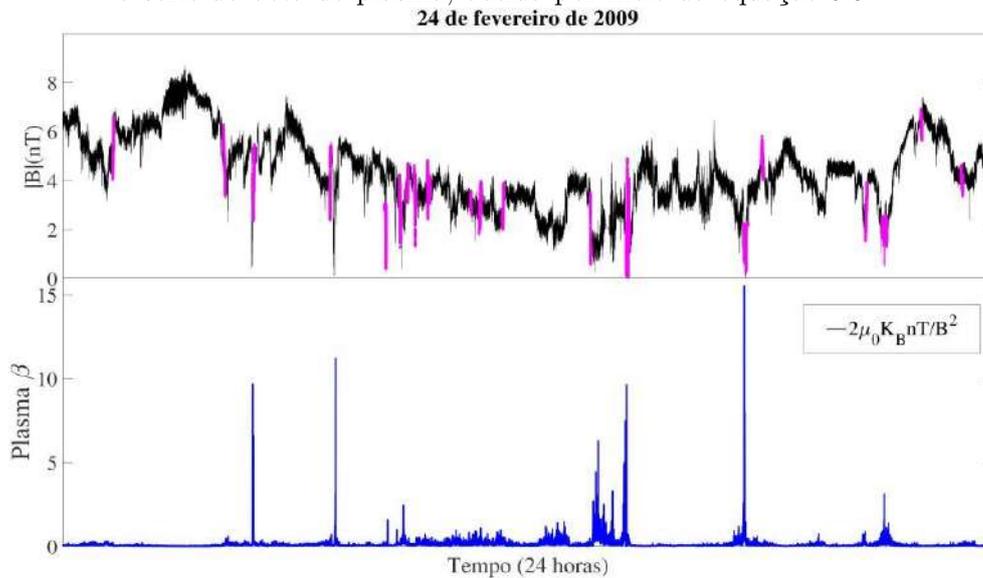
Fonte: Produção do autor.

Antes de tudo, deve-se notar que 8 dos 11 *Dragon Kings* detectados pelo teste-DK, identificaram com sucesso as lâminas de corrente, ou seja, apenas 3 seriam alarmes falsos. Entretanto, não podemos cravar a priori, que estes três eventos são de fato alarmes falsos. Isto porque, a detecção das lâminas de correntes foi realizada com o método de Li (2008). Assim, foram detectadas apenas estruturas com uma

determinada escala de tamanho (ordem de tamanho da janela utilizada no método), logo, os eventuais alarmes falsos da volatilidade poderão estar associados a lâminas com escalas de tamanhos diferentes, que o método de Li (2008) não foi capaz de detectar. Análises futuras poderão comprovar tal hipótese.

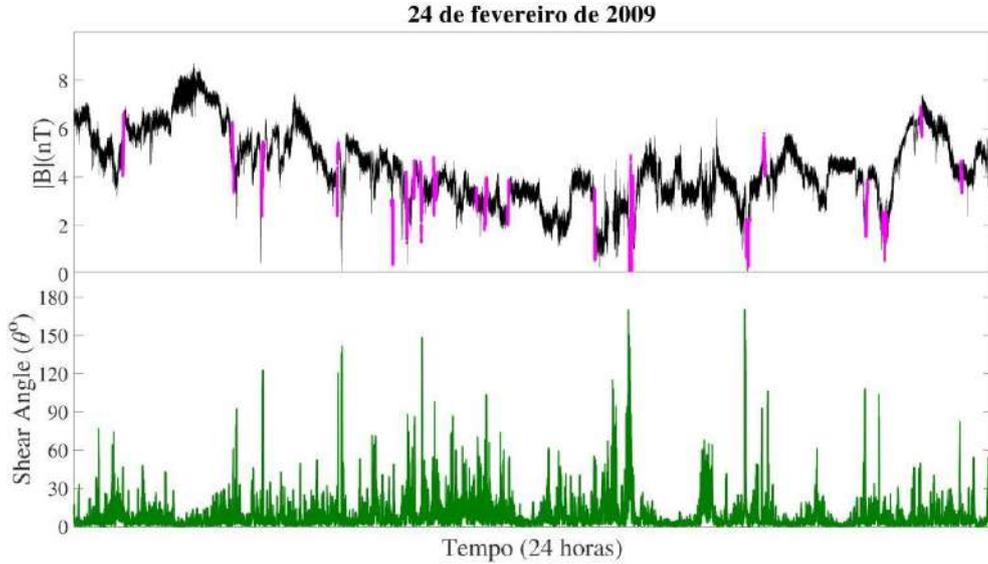
As Figuras 5.25 e 5.26 apresentam, respectivamente, as séries do beta do plasma e do *shear angle* da série do módulo do campo magnético do dia 24 de fevereiro de 2009. Foram utilizadas, respectivamente, as equações 5.9 e 5.10. Conforme pode-se notar, a exemplo da volatilidade, existe uma correlação muito grande entre as séries do beta do plasma e do *shear angle* com as lâminas de correntes detectadas.

Figura 5.25 - Figura da série temporal do módulo do campo magnético do dia 24 de fevereiro de 2009 (painel superior), onde regiões com prováveis presenças de lâminas de correntes são destacadas na cor magenta. Painel inferior mostra a série do beta do plasma, obtida por meio da equação 5.9.



Fonte: Produção do autor.

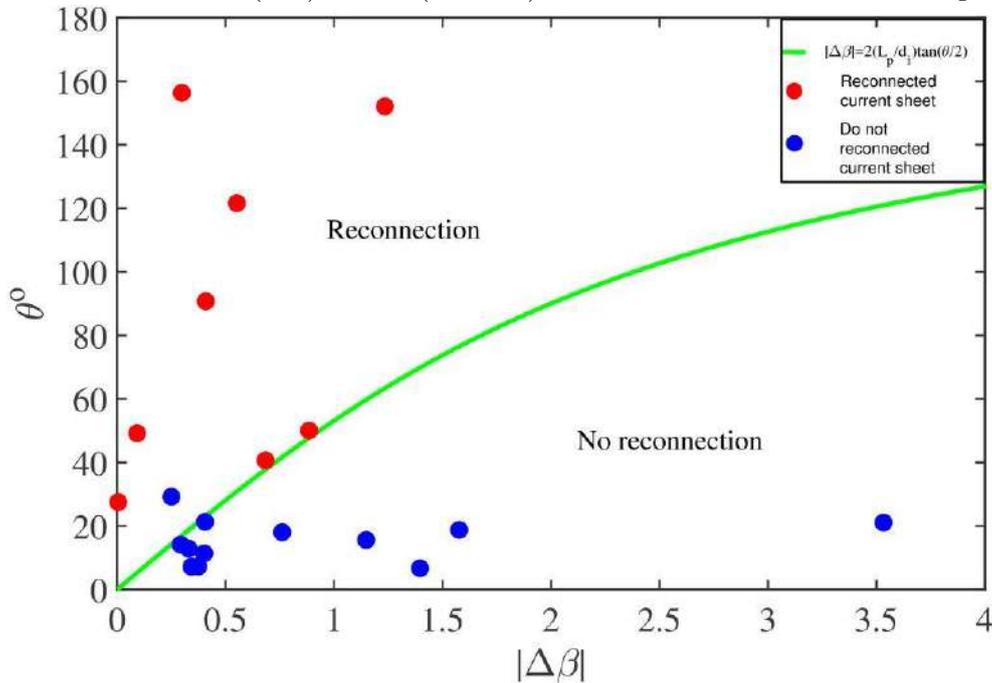
Figura 5.26 - Figura da série temporal do módulo do campo magnético do dia 24 de fevereiro de 2009 (painel superior), onde regiões com prováveis presenças de lâminas de correntes são destacadas na cor magenta. Painel inferior mostra a série do *shear angle*, obtida por meio da equação 5.10.



Fonte: Produção do autor.

Finalmente, estamos aptos a aplicar a condição diamagnética de Swisdak et al. (2010) aos círculos azuis (não DK) e vermelhos (DK) da Figura 5.24. De acordo com a Figura 5.27, notamos uma clara separação dos círculos azuis e vermelhos em duas regiões separadas pela linha verde, que é obtida pela equação $\Delta\beta = 2 \tan(\theta_{shear}/2)$. De acordo com a condição diamagnética 5.8, dado (L/λ_i) (GONZALEZ; PARKER, 2016), (CHIAN et al., 2016), a região acima da linha verde representa a região onde reconexões magnéticas são permitidas ($\Delta\beta < 2 \tan(\theta_{shear}/2)$), ao passo que a região abaixo da linha verde representa a região onde reconexões são proibidas ($\Delta\beta > 2 \tan(\theta_{shear}/2)$).

Figura 5.27 - Aplicação da condição diamagnética de (SWISDAK et al., 2010) para a série declusterizada da volatilidade do dia 24 de fevereiro de 2009. A linha verde é obtida da condição diamagnética em 5.8 e separa as regiões onde as reconexões magnéticas são possíveis (acima da linha verde) e a região onde as reconexões não são permitidas (abaixo da linha verde). Círculos sólidos vermelhos (DK) e azuis (não DK) são exatamente os mesmos da Figura 5.24.



Fonte: Produção do autor.

Portanto, obtivemos não somente um resultado surpreendente, mas sim dois. Em primeiro lugar, conseguimos, pela primeira vez, aplicar a estatística de *Dragon Kings* aos dados do vento solar. Neste caso, podemos verificar que regiões de prováveis reconexões magnéticas são *Dragon Kings*. Isto traz um grande avanço na análise de eventos extremos em clima espacial, visto que reconexões estão envolvidas na maioria dos eventos extremos em plasmas espaciais. Além disto, abrimos a possibilidade de se fazer previsões acerca destes eventos, já que os identificamos como prováveis candidatos a uma classe especial de eventos extremos. Além disto, em segundo lugar, abrimos a possibilidade da técnica de volatilidade ser não somente um possível método alternativo para detecção de lâminas de corrente, mas também de reconexões magnéticas. Isto porque, conforme a figura 5.24, valores da volatilidade declusterizada acima do limiar pré-determinado pelo teste-DK, indicam com bastante eficiência quais lâminas de correntes estão envolvidas em processos de reconexão.

Em resumo, encontramos indícios de que a volatilidade, além de identificar lâminas de correntes, também é capaz de identificar quais delas estão provavelmente envolvidas em reconexões magnéticas. Outros testes deverão ser conduzidos no futuro para confirmar esses resultados.

6 SIMULAÇÃO MHD-3D: MODELO SIMPLIFICADO DE VENTO SOLAR

6.1 Simulação MHD-3D

A simulação de ambientes de plasma interplanetário turbulento possuindo estruturas coerentes magnéticas será feita com base nas equações Magneto-Hidrodinâmicas (MHD) compressíveis em três dimensões. As simulações foram feitas usando o código PENCIL, que pode ser facilmente obtido em <http://pencil-code.nordita.org/>. Este código aplica diferenças finitas de sexta ordem no espaço e Runge-Kutta de terceira ordem com passo variável no tempo. As equações MHD para o caso compressível, adiabático e isotérmico, são dadas pela a equações de momento, indução e continuidade, as quais são escritas, respectivamente, por

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = -c_s^2 \nabla \ln \rho + \frac{\vec{J} \times \vec{B}}{\rho} + \frac{\mu}{\rho} \left(\nabla^2 u + \frac{1}{3} \nabla \nabla \cdot \vec{u} \right) + f, \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{u} \times \vec{B} - \eta \mu_o \vec{J}, \quad (6.2)$$

e

$$\frac{D \ln \rho}{Dt} = -\nabla \cdot \vec{u}, \quad (6.3)$$

onde $D/Dt = \partial/\partial t + u \cdot \nabla$ é a derivada convectiva, \vec{u} é a velocidade, \vec{A} é o potencial vetor magnético, $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ é o campo magnético, $\vec{J} = \nabla \times \vec{B}/\mu_o$ é a densidade de corrente, ρ é a densidade, c_s é a velocidade do som. Vale salientar que a implementação das equações MHD podem incorrer em erros numéricos devido ao termo $\nabla \cdot \vec{B}$ acumular erros a cada passo da implementação, acarretando em $\nabla \cdot \vec{B} \neq 0$. Para contornar esta situação, o código PENCIL escreve a equação 6.2 em termos do potencial vetor \vec{A} . Já a grandeza \vec{f} é um forçante externo não-helicoidal, dado por

$$\vec{f}(x, t) = \text{Re} \left\{ N \vec{f}_{k(t)} \exp \left[i \vec{k}(t) \cdot \vec{x} + i \phi(t) \right] \right\}, \quad (6.4)$$

onde $\vec{k}(t) = (k_x, k_y, k_z)$ é o vetor de onda dependente do tempo, $\vec{x} = (x, y, z)$ é o vetor posição, $|\phi| < \pi$ é uma fase randômica e \vec{f}_k , dado por

$$\vec{f}_k = \frac{\vec{k} \times (\vec{k} \times \hat{e}) - i |\vec{k}| (\vec{k} \times \hat{e})}{2k^2 \sqrt{1 - (\vec{k} \cdot \hat{e})^2 / k^2}} \quad (6.5)$$

são autofunções que forçam o sistema e \hat{e} é um vetor unitário arbitrário necessário para gerar $\vec{k} \times \hat{e}$, que é perpendicular a \vec{k} . Note que $|\vec{f}_k|^2 = 1$ e, em particular, $i\vec{k} \times \vec{f} = |\vec{k}| \vec{f}$, logo a densidade de helicidade deste forçante deve satisfazer

$$\vec{f} \cdot \nabla \times \vec{f} = |\vec{k}| f^2 > 0 \quad (6.6)$$

em cada ponto do espaço.

Nesta simulação buscamos reproduzir de maneira bastante simplificada o ambiente de plasma interplanetário turbulento possuindo estruturas coerentes magnéticas. Para isto, idealizamos um ambiente de escala espacial grande o bastante para que sua superfície seja muito maior que seu volume, tornando assim desprezível a troca de calor deste sistema com o meio exterior (processo adiabático). Diante disto, consideramos a energia constante, justificando assim sua ausência nas equações MHD para este caso. Além disto, considerando grandes escalas espaciais, a escala de tempo acaba sendo também considerada grande o que torna o processo lento o suficiente de modo que a temperatura do sistema não varie (processo isotérmico).

Para a simulação, as dimensões do domínio são das por $L_x = L_y = 2\pi$, com condições de contorno periódicas, para uma malha $nx = ny = 4096$ e $nz = 1$. As condições iniciais para o campo de velocidades foram dadas por flutuações gaussianas e o campo magnético inicial era nulo. O forçante, conforme já mencionado, é não helicoidal e o número de onda foi dado por $k = 20$

Vale salientar que as unidades (dimensões) das grandezas geradas pela simulação, e portanto analisadas neste capítulo, estão todas normalizadas, de modo que se escolhermos o tamanho do domínio $L = 2\pi$, então para uma velocidade $v = 0.5$ e para um tempo $t = 1$, devemos interpretar isto como $L = 2\pi$ metros e $v = \pi$ m/s

6.2 Obtenção de Séries Espaciais de Campo Magnético e Densidades de Corrente em Simulação MHD-3D

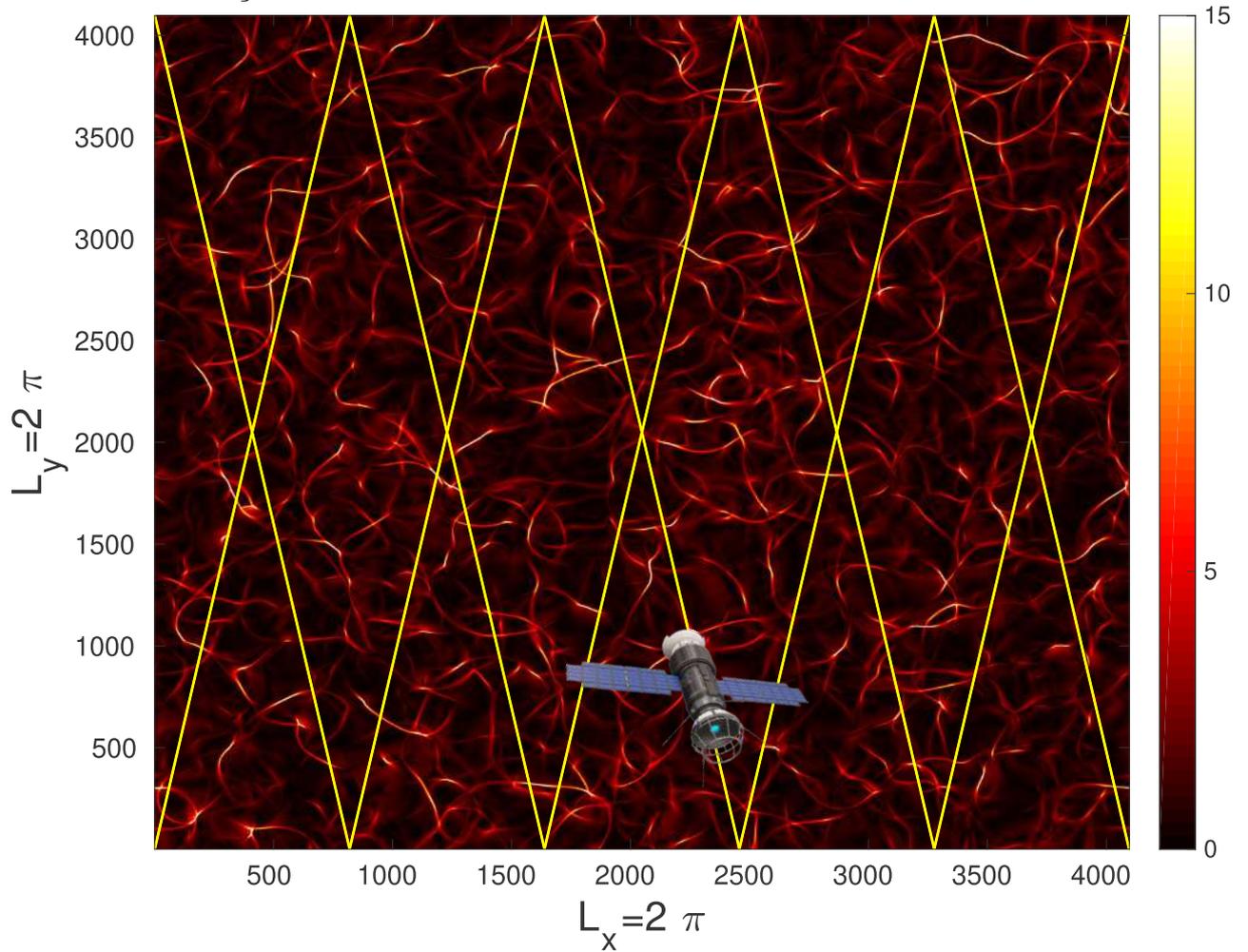
Para esta etapa nos apoiamos na hipótese de Taylor (TAYLOR, 1935), que diz que se assumirmos que os vórtices em um regime turbulento estão congelados no plasma e

que sua velocidade de rotação é bem menor que sua velocidade de advecção, então podemos considerar os efeitos observados por um sensor parado em relação a um fluxo como sendo os mesmos se o fluxo estivesse estacionário e o sensor estivesse em movimento. Nesse caso, podemos, por meio de uma simulação MHD e com base na hipótese de Taylor, gerar um modelo bem simplificado de vento solar estacionário, que juntamente às técnicas de obtenção de séries espaciais descritas anteriormente, gerar séries de campo magnético e de densidades de correntes por meio de uma hipotética espaçonave viajando por um ambiente permeado de densidades de correntes e campos magnéticos, com uma trajetória sujeita a condições de contorno, conforme indicados nas Figuras 6.1 e 6.2. Isto seria completamente análogo e com os mesmos efeitos de uma espaçonave situada no meio interplanetário, sendo atravessada por um fluxo de vento solar permeado de estruturas magnéticas.

Baseado nisso, obteremos de forma artificial séries espaciais de densidades de correntes e campo magnético de modo que sejamos capazes de realizar as mesmas análises feitas para o caso de dados observacionais. Todas as séries espaciais presentes neste capítulo foram obtidas utilizando a técnica por nós desenvolvida, conforme explicado na seção 6.3, que é uma alternativa à técnica de interpolação empregada inicialmente por Greco et al. (2009), Greco et al. (2017). Conforme pode-se observar nas Figuras 6.1 e 6.2, as trajetórias hipotéticas das espaçonaves são representadas por linhas amarelas diagonais com duas inclinações diferentes. Isso é devido à condição de contorno periódica imposta no sistema. Neste caso, a espaçonave ao completar sua trajetória através das 5 primeiras linhas diagonais, inverte sua trajetória e retorna por meio de mais 5 linhas diagonais com inclinações invertidas em relação às primeiras. Isso foi feito com o intuito de aumentar o tamanho das séries espaciais, já que pretendemos aplicar técnicas estatísticas de eventos extremos, que exigem uma quantidade razoável de dados para uma boa modelagem.

Inicialmente, obtemos as séries espaciais do módulo do campo magnético e da densidade de corrente detectada pela hipotética espaçonave em suas trajetórias (linha amarela) para uma configuração obtida pela simulação em um tempo $t = t_1$ e para um tempo posterior $t = t_2$, dadas respectivamente pelas Figuras 6.1 e 6.2. Nas Figuras 6.3 e 6.4 estão sendo exibidas as séries espaciais do campo magnético (linha azul) e da densidade de corrente (linha preta) para os tempos de simulação $t = t_1$ e $t = t_2$, respectivamente. Analisando isoladamente as séries de campo magnético, não conseguimos identificar com clareza nenhum tipo de descontinuidade que pudesse vir a originar lâminas de correntes ou reconexões magnéticas. Entretanto, uma rápida observação das séries de densidade de corrente nos faz perceber que existem

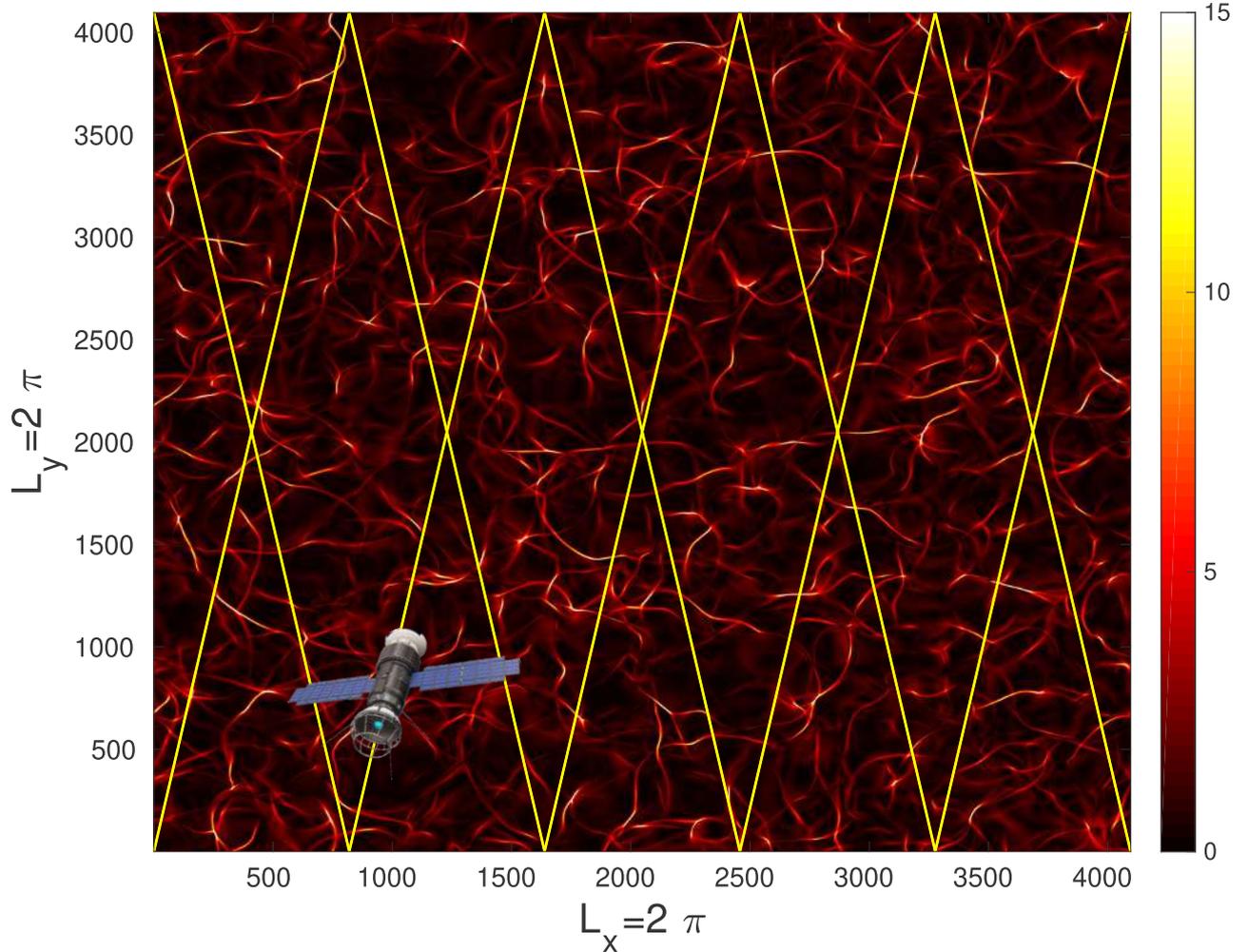
Figura 6.1 - Densidade de corrente obtida de simulação MHD-3D realizada no código Pencil para um instante de tempo de simulação $t = t_1$. Linhas amarelas representam, hipoteticamente, uma trajetória com condições de contorno periódico de uma espaçonave viajando sobre uma região permeada por lâminas de correntes. Para esta idealização foi utilizada a hipótese de Taylor. A barra de cores representa as intensidades das densidades de correntes obtidas nesta simulação.



Fonte: Produção do autor.

regiões de fortes densidades de correntes, fortes candidatas a lâminas de corrente ou até mesmo sítios reconectantes (GRECO et al., 2009).

Figura 6.2 - O mesmo que Fig. (6.1), porém para um instante de tempo de simulação posterior $t = t_2$.

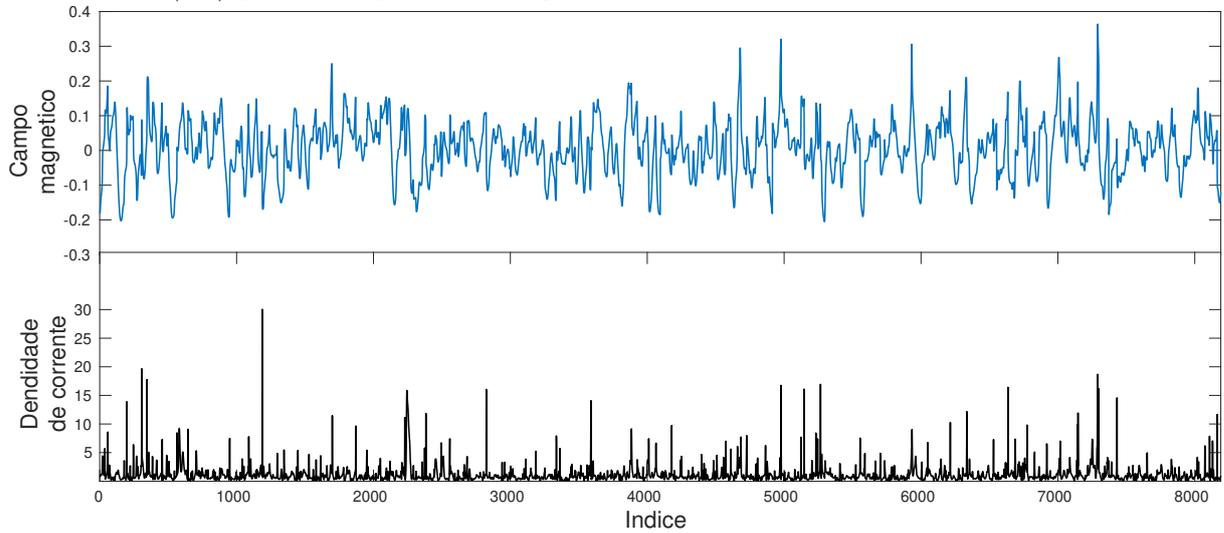


Fonte: Produção do autor.

6.3 Técnica para Obtenção de Série Espacial em Malhas-2D com Condições de Contorno Periódicas

Nos trabalhos desenvolvidos por Greco et al. (2009), Greco et al. (2017), as hipotéticas trajetórias da espaçonave não passavam exatamente sobre os pontos da malha 2D. Em vez disso, as inclinações das trajetórias eram convenientemente escolhidas e pontos da trajetória que não caíssem sobre pontos da malha, eram interpolados. Esta é a maneira mais prática de se obter as séries espaciais, porém não é a mais indicada. Isto porque, dependendo da resolução da malha ou até mesmo da inclinação da trajetória escolhida, a série espacial obtida pode não ser uma réplica fiel do

Figura 6.3 - Séries espaciais do campo magnético (azul) e da densidade de corrente (preto) medidas pela hipotética trajetória da espaçonave (linhas amarelas em Fig. (6.1) para o tempo de simulação $t = t_1$.



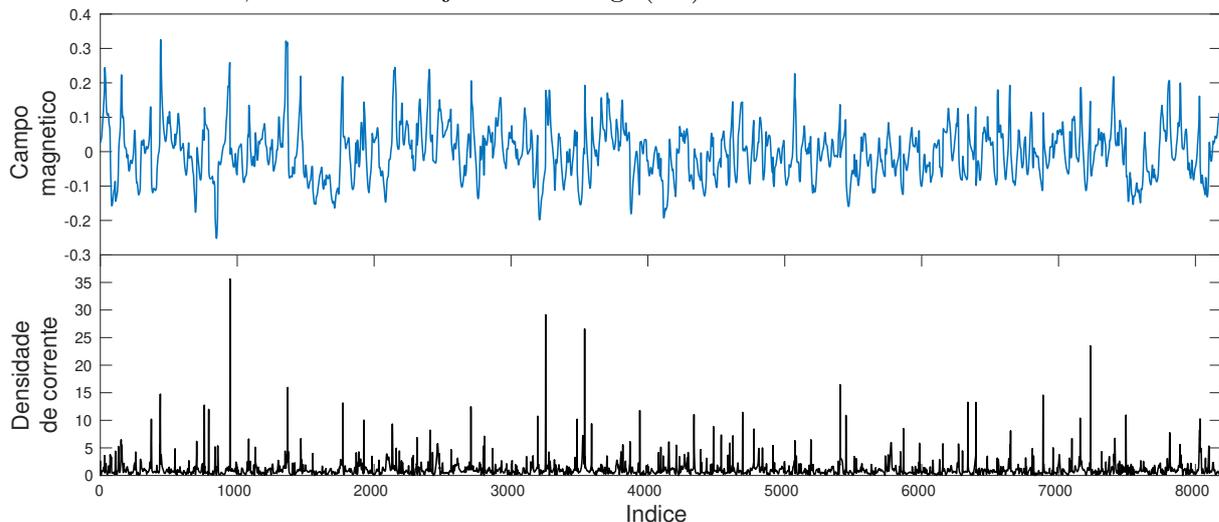
Fonte: Produção do autor.

fenômeno físico analisado. Por exemplo, se estamos analisando uma malha referente à componente-z do campo magnético, séries interpoladas podem camuflar regiões de descontinuidades. Nesse caso, detecções de fenômenos tais quais presenças de lâminas de correntes e reconexões magnéticas estariam comprometidas.

Diante disso, nesta tese propomos uma técnica alternativa simples de se obter séries espaciais a partir de uma malha 2D sem a necessidade de interpolações. A generalização para o caso 3D, apesar de não ser apresentado aqui, é obtido de forma completamente análoga. Apesar da grande vantagem de não exigir o uso de interpolação, esta técnica, a exemplo de qualquer outra, possui também suas limitações, conforme será mencionado mais adiante.

Seja uma malha 2D quadrada e homogênea com resolução n^2 , onde n é o número de pontos na aresta da malha. Seja n_l o número desejado de retas diagonais dispostas sobre a malha com condição de contorno periódica, ou seja, se a reta diagonal chega ao fim de uma das arestas, então ela continua sua trajetória exatamente sobre o ponto antípoda (aresta oposta), conforme a Figura 6.5. Para que todos os pontos das n_l retas diagonais passem exatamente sobre os pontos da malha, as coordenadas dos pontos das retas devem ser dados por

Figura 6.4 - O mesmo que em Fig. (6.3), porém para o tempo de simulação posterior $t = t_2$, referente à trajetória em Fig. (6.2)



Fonte: Produtor do autor.

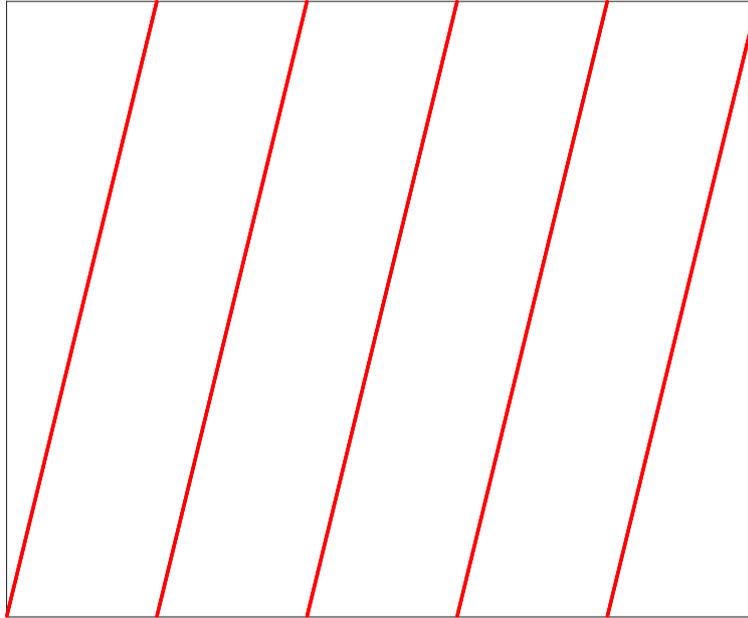
$$\begin{cases} x[i + (j - 1) \cdot n_f] = n_l \cdot i, \\ y[i + (j - 1) \cdot n_f] = i + (j - 1) \cdot n_f, \end{cases} \quad (6.7)$$

onde $i = 1, \dots, n_l$, $j = 1, \dots, n_f$, $n_f = \text{floor}(n/n_l)$, x e y são as coordenadas das n_l retas diagonais passando exatamente sobre os pontos da malha.

Note que o tamanho da série espacial é dado por um número fixo, ou seja, $n_f \cdot n_l$. Além disso, é fácil ver que o ângulo das retas diagonais pode ser obtido por $\text{tg}\theta = 1/n_l$, ou seja, se por exemplo queremos uma reta diagonal com ângulo de 45° , então neste caso $n_l = 1$ e, portanto, teremos apenas uma reta diagonal passando por todos os pontos da malha.

Pode-se também obter facilmente as distâncias entre os pontos das retas diagonais. Nesse caso temos que a distância é dada por $d = \sqrt{1 + n_l^2}$. Esta relação é muito importante, principalmente para este trabalho, porque a distância entre os pontos das retas diagonais depende exclusivamente do número de diagonais que você deseja. Por exemplo, se escolhermos trabalhar com 20 diagonais, nossos pontos estariam muito mais afastados do que se escolhêssemos 5, embora tenhamos no dois casos o mesmo número total de pontos ($n_f \cdot n_l$). Assim, o pesquisador deverá escolher o que será mais conveniente em sua análise: mais retas diagonais e pontos mais distantes,

Figura 6.5 - Trajetória sobre uma malha 2D com condição de contorno periódica



Fonte: Produção do autor.

ou menos diagonais, porém pontos mais próximos.

Para o caso das nossas análises neste capítulo, a escolha de muitas diagonais seria desastroso, visto que a grande distância entre os pontos poderia camuflar descontinuidades no campo magnético, como pode ocorrer no caso de interpolação.

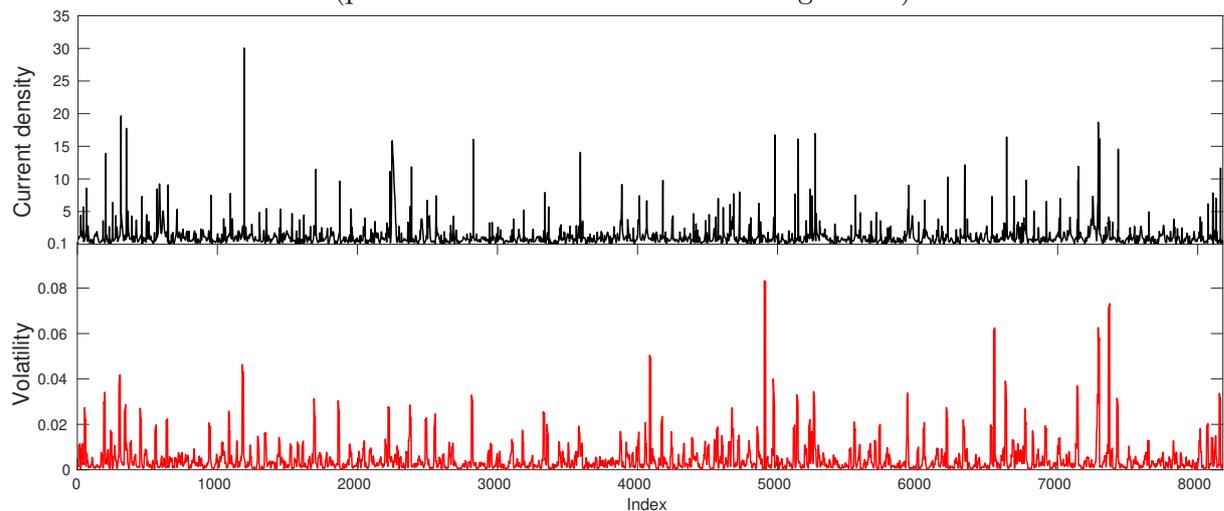
Diante disto, considerando nossa malha com $n = 4096$, consideramos o uso de 5 diagonais uma escolha adequada. Nesse caso teríamos uma distância entre os pontos da reta dada por $d = \sqrt{1 + n_l^2} \approx 5$, já que $n_l = 5$. Logo, a distância entre os pontos da reta diagonal é de 5 pontos da malha, que é justamente a mesma escala de tamanhos das estruturas que iremos analisar. Neste caso, não corremos o risco de perder um número muito grande das estruturas desejadas na série espacial obtida.

6.4 DETECÇÃO DE POSSÍVEIS LÂMINAS DE CORRENTES EM SIMULAÇÃO MHD-3D

Conforme visto no capítulo de análise de dados observacionais, a volatilidade é uma técnica que parece, em princípio, ser capaz de detectar regiões de lâminas de correntes. Aplicaremos a relação 5.1 para as séries espaciais do campo magnético obtidas artificialmente na seção anterior.

As Figuras 6.6 e 6.7 mostram as séries de volatilidade (linhas vermelhas) obtidas pela aplicação da relação 5.1 nas séries espaciais do campo magnético das Figuras 6.3 e 6.3, para os tempos $t = t_1$ e $t = t_2$, respectivamente. Fica evidente a correlação existente entre as séries espaciais da volatilidade e de densidade de corrente, principalmente para os valores extremos de densidade de corrente, que conforme já dito, são possíveis lâminas de correntes ou sítios reconectantes. Este resultado é muito interessante, porque embora as séries espaciais de campo magnéticos não aparentem apresentar descontinuidades, a volatilidade foi capaz de identificá-las de uma forma bastante precisa. Diante disso, a volatilidade vem cada vez mais se firmando como uma técnica eficiente em detectar estruturas coerentes.

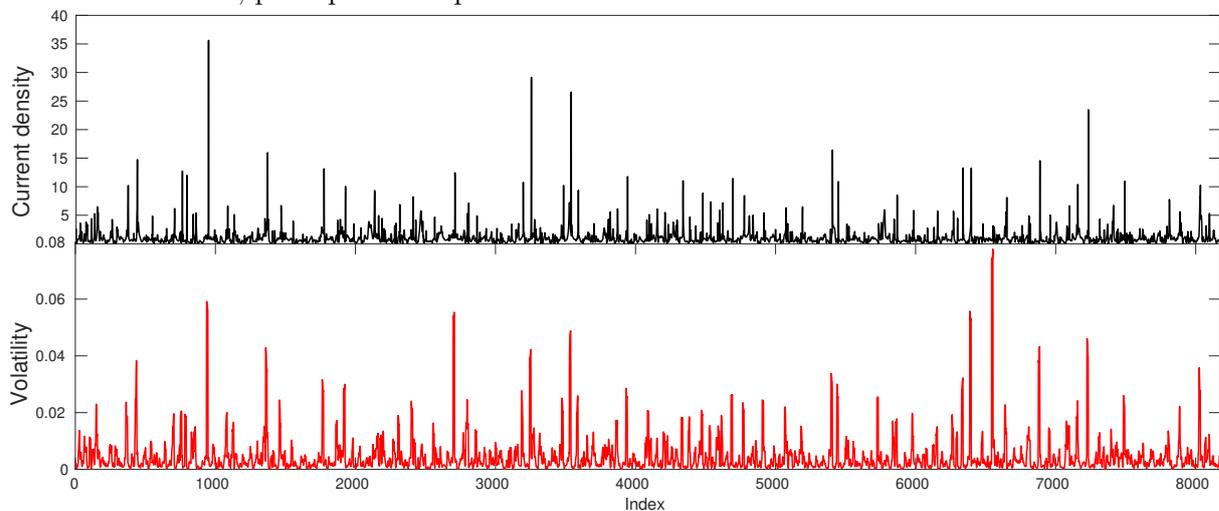
Figura 6.6 - Séries espaciais da densidade de corrente (preto) e sua respectiva série de volatilidade (vermelho) calculada por meio da relação 5.1, para um tempo de simulação $t = t_1$. Vale a pena notar a grande correlação existente entre as duas séries, principalmente para os valores extremos, sugerindo assim a volatilidade como um bom parâmetro para identificação de intensas densidades de correntes (possíveis lâminas ou reconexões magnéticas).



Fonte: Produção de autor.

A título de comparação, apresentamos aqui um outro método simples proposto por Greco et al. (2009), que também vem se mostrando eficiente em detectar lâminas de correntes (GRECO et al., 2017). Este método é chamado *Partial Variance Increments* (PVI), definido por

Figura 6.7 - O mesmo que Fig. (6.6), porém agora para um tempo de simulação posterior $t = t_2$. A exemplo de Fig. (6.6), existe uma grande correlação entre as duas séries, principalmente para valores extremos.



Fonte: Produção do autor.

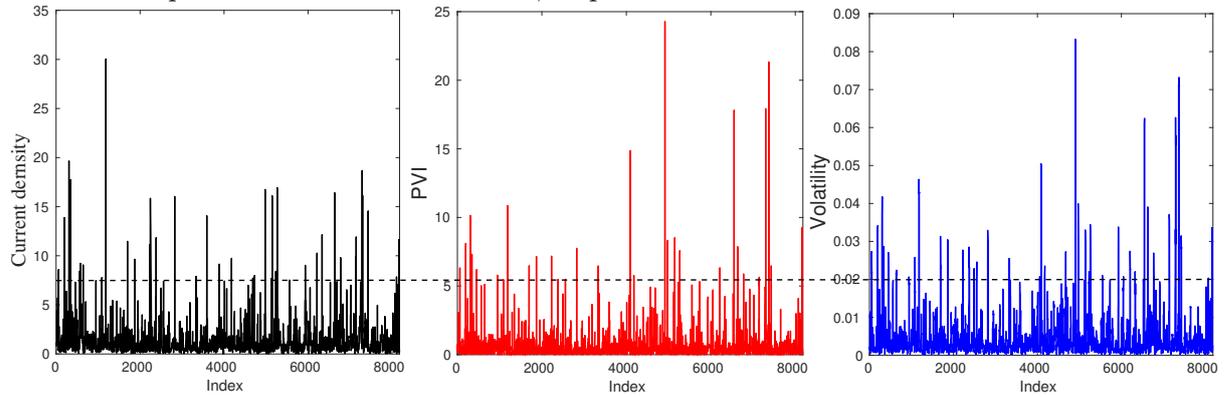
$$PVI = \frac{|\Delta \vec{B}|}{\sqrt{\langle |\Delta \vec{B}|^2 \rangle}}, \quad (6.8)$$

onde $\Delta \vec{B} = \vec{B}(s + \Delta s) - \vec{B}(s)$, sendo \vec{B} o vetor campo magnético e s uma posição espacial.

Após a aplicação das relações 5.1 e 6.8 nas séries espaciais de campo magnético das Figuras 6.3 e 6.3, obtemos as séries de PVI (linhas vermelhas) e volatilidade (linhas azuis), presentes nas Figuras 6.8 e 6.8. Ambas as técnicas parecem ser muito boas em detectar intensas densidades de correntes, de modo que, visualmente, não somos capazes de identificar qual das técnicas teve um melhor desempenho. Diante disso, elaboraremos um teste alternativo. Para isto, escolhemos um limiar acima do qual consideramos as densidades de correntes como fortes candidatas a lâminas de correntes. Neste caso, foram escolhidos os limiares $l = 7.5$ e $l = 10$ para as séries de densidades de correntes obtidas, respectivamente, pelas trajetórias das Figuras 6.1 e 6.2.

Após isso, selecionamos todos os valores de PVI e volatilidade acima desses limiares. Para compararmos a eficácia dos dois métodos, pegamos todos esses pontos selecio-

Figura 6.8 - Séries espaciais da densidade de corrente (preto) e dos métodos PVI (vermelho) e volatilidade (azul) para o tempo de simulação MHD ($t = t_1$), obtidas a partir da hipotética trajetória indicada pela linha amarela em Fig.(6.1). Linha tracejada representa o limiar acima do qual se encontram as densidades de correntes mais intensas > 7.5 (regiões brancas em Fig.(6.10)). Valores de PVI e volatilidade acima deste limiar são marcados sobre a trajetória em Fig.(6.10) por círculos amarelos e azuis, respectivamente.



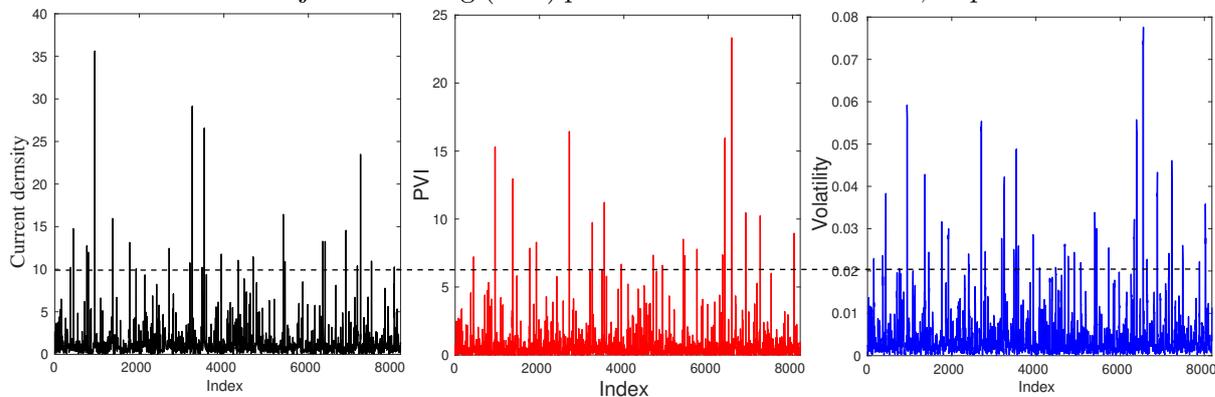
Fonte: Produção do autor.

nados e os inserimos em suas respectivas posições sobre as trajetórias representadas pelas linhas amarelas nas Figuras 6.1 e 6.2. Os valores do PVI e da volatilidade são indicados, respectivamente, por círculos amarelos e azuis sobre as trajetórias. Adicionalmente, todas as densidades de correntes acima dos limiares nas Figuras 6.8 e 6.9, são pintadas de branco para que sejamos capazes de localizar regiões com possíveis presenças de lâminas de correntes.

Conforme as Figuras 6.10 e 6.11, podemos notar claramente que de fato ambas as técnicas foram capazes de detectar possíveis lâminas de correntes sobre a trajetória da espaçonave. Entretanto, se fizermos uma análise mais detalhada, podemos notar que a volatilidade (círculos azuis) foi capaz de detectar mais lâminas de correntes do que o PVI, já que existem várias regiões sobre a trajetória com a presença destas estruturas, que o método PVI não foi capaz de identificar, mas que a volatilidade detectou. Além da eficiência, a volatilidade também demonstrou precisão, visto que poucos alarmes falsos ocorreram para esta técnica.

Apesar de a volatilidade ter se mostrado superior perante ao método PVI neste exemplo, devemos enfatizar que a precisão e eficiência de detecção para ambos os métodos são sensíveis à escolha do limiar. Portanto, um valor de limiar considerado adequado para a volatilidade poderá não ser para o PVI e vice-versa. Neste caso,

Figura 6.9 - O mesmo que em Fig. (6.8), porém para um tempo de simulação posterior $t = t_2$. Desta vez, a linha tracejada representa o limiar acima do qual se encontram as densidades de correntes mais intensas > 10 (regiões brancas em Fig.(6.11). Valores de PVI e volatilidade acima deste limiar são marcados sobre a trajetória em Fig.(6.11) por círculos amarelos e azuis, respectivamente.



Fonte: Produção do autor.

não podemos cravar qual dos dois métodos é mais eficiente e preciso, mesmo que tenhamos feito as análises utilizando o mesmo limiar para ambos. Logo, análises mais detalhadas deverão ser feitas futuramente.

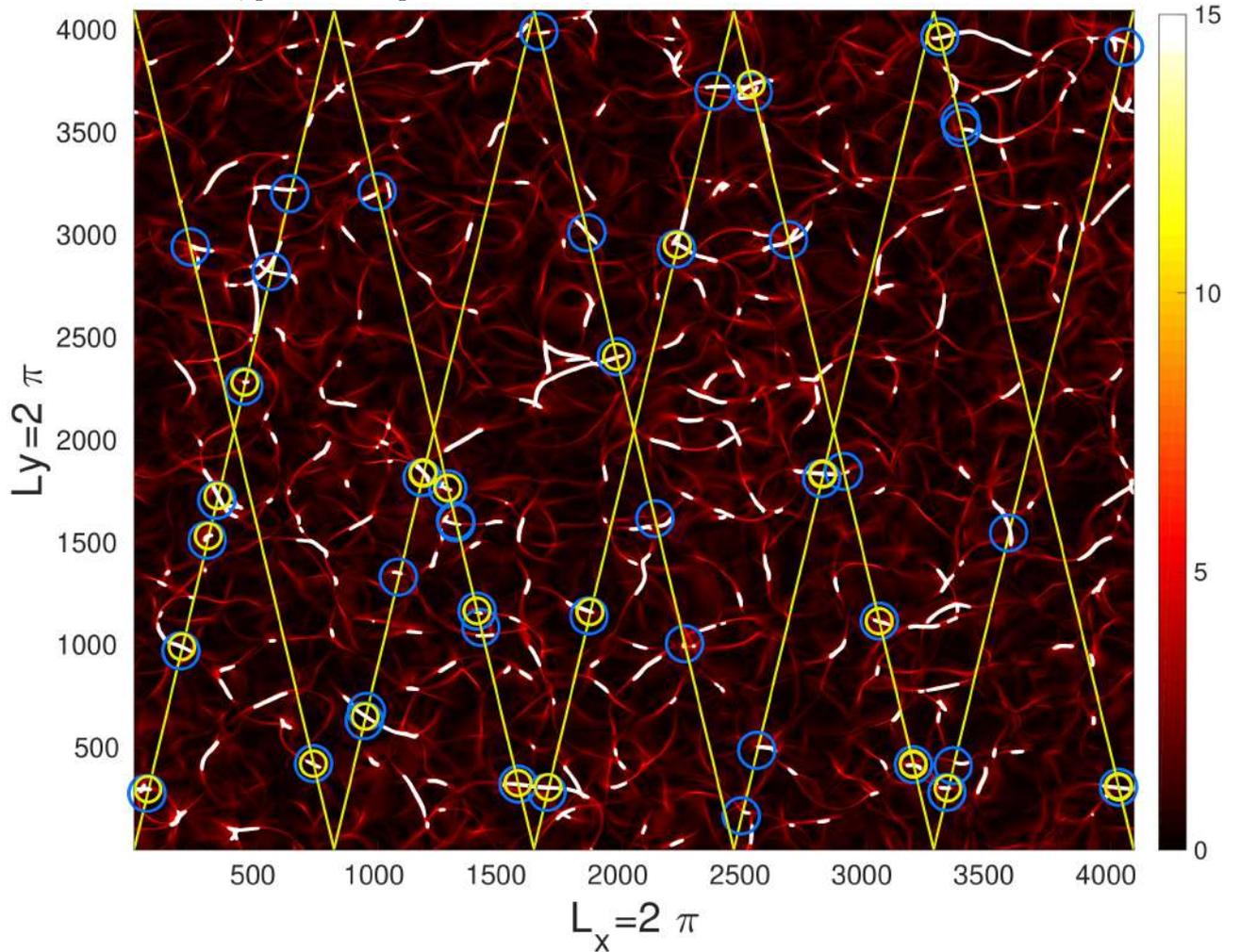
Independente de qual método seja mais eficiente, o interessante é que a volatilidade vem cada vez mais se mostrando uma técnica simples e eficiente na detecção de estruturas coerentes no vento solar. Conforme veremos mais adiante, a volatilidade apresenta outras vantagens.

6.5 TEORIA DE VALORES EXTREMOS EM SIMULAÇÃO MHD-3D: MODELAGEM DA GPD

Nesta seção faremos basicamente a mesma análise feita no capítulo anterior, para o caso de dados observacionais do vento solar. No entanto, reservaremos esta seção somente para a modelagem da distribuição GPD, visto que esta possui certas vantagens perante a GEV, conforme já mencionado.

Embora no caso dos dados observacionais nós tenhamos feito as análises da estatística de eventos extremos para as séries da volatilidade, desta vez faremos as análises diretamente das séries de densidade de corrente. Na verdade, no capítulo anterior utilizamos a séries de volatilidade para análise basicamente por dois motivos: primeiro porque não tínhamos disponíveis séries observacionais de densidade de corrente e

Figura 6.10 - O mesmo que Fig. 6.1, porém com os valores de PVI > 7.5 (círculos amarelos) e volatilidade > 7.5 (círculos azuis), inseridos em suas respectivas posições sobre a hipotética trajetória da espaçonave de Fig (6.1). Embora ambos os métodos tenham identificado com sucesso as possíveis lâminas de correntes (regiões brancas) que estão sobre a trajetória, a volatilidade se mostrou mais eficaz, pelo menos para o limiar utilizado.



Fonte: Produção do autor.

segundo, porque os picos de volatilidade apresentam uma correlação muito grande com as regiões contendo lâminas de corrente. Neste caso, o uso da volatilidade para o estudo do papel de tais estruturas na ocorrência de valores extremos no vento solar, parece adequado.

Seguindo o exemplo do que foi feito nas análises observacionais, obtivemos mais duas séries temporais pela remoção das prováveis lâminas de correntes das séries

das Figuras 6.8 e 6.9, ou seja, densidades de correntes com valores maiores que os limiares foram removidas. Esta é uma maneira de verificarmos o papel das lâminas de corrente na modelagem de eventos extremos para o caso de simulação MHD. As séries com as respectivas lâminas de correntes removidas são mostradas nas Figuras 6.12 e 6.13

Portanto, temos em mãos para análise 4 séries espaciais de densidade de corrente: 2 com presenças de lâminas de correntes, referentes as séries das Figuras 6.3 e 6.4 e 2 obtidas a partir destas, após a remoção das densidades de correntes com valores acima de limiares.

Antes de iniciarmos a modelagem GPD, precisamos selecionar os limiares adequados para tal. De acordo com as Figuras 6.14 e 6.15 e baseados nos menores valores dentro dos intervalos (região sombreada em cinza) para os quais o *mean excess* é aproximadamente linear e os parâmetros de forma e de escala reparametrizados são aproximadamente constantes em relação aos limiares, obtemos como limiares adequados para as séries espaciais de densidade de corrente referentes as séries das Figuras 6.3 e 6.4, respectivamente os valores $u = 2.2$ e $u = 2$. Por outro lado, para as mesmas séries e na mesma ordem, porém com as lâminas de correntes removidas, encontramos, respectivamente, $u = 2.8$ e $u = 3$.

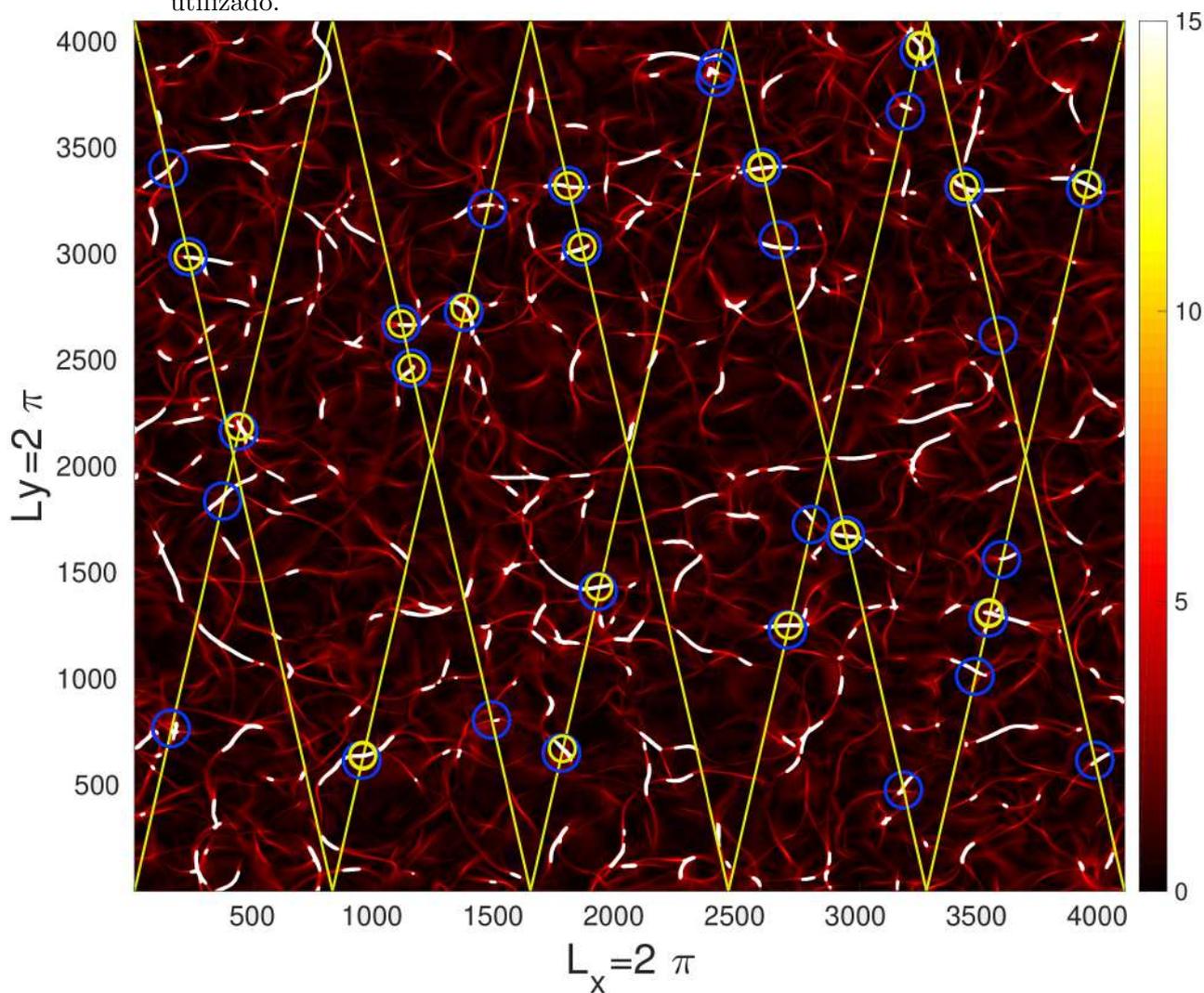
Após uma análise do grau de dependência dos dados, vimos a necessidade de efetuarmos o processo de declusterização para as séries com a presença de lâminas de correntes. Isso porque os valores dos *extremal indexes* de ambas estavam próximos de zero. Após o processo de declusterização, os valores dos *extremal indexes* convergiram para 1, o que seria o ideal. Por outro lado, Não encontramos necessidade de declusterizar as séries espaciais com lâminas removidas, já que os *extremal indexes* neste caso eram dados por $\theta \approx 1$. O processo de declusterização das séries com lâminas de correntes é mostrado pela figura 6.16.

As Figuras 6.17, 6.18, 6.19 e 6.20 mostram os *diagnostic plots* dos modelos GPD's fitados para as séries temporais com e sem a presença de lâminas de corrente. Baseado nos QQ-plots, PDF's e níveis de retornos, podemos verificar que houve um bom ajuste para a distribuição GPD para todos os casos. A exemplo do caso observacional, os ajustes dos QQ-plots das séries com presença de lâminas de correntes não são tão bons quanto ao caso das séries sem tais estruturas. Isso indica que os dados analisados possuem caudas um pouco mais pesadas do que a distribuição teórica espera. Apesar disso, as modelagens neste caso não foram insatisfatórias, conforme pode ser confirmado pelos ajustes dos níveis de retornos das PDF's.

As curvas dos níveis de retorno de todas as modelagens dispensam as inferências paramétricas porque, conforme já explicado, a convexidade dessas curvas informa sobre o sinal do parâmetro de forma, que é o nosso foco. Diante disso, podemos verificar que para as duas séries espaciais da densidade de corrente com a presença de lâminas de correntes, as curvas dos níveis de retornos se mostram convexas e, portanto, sem um limite assintótico, sugerindo que as distribuições destas séries possuem suporte infinito (*unbounded distribution*) (COLES, 2001). Neste caso, o parâmetro de forma é positivo ($\xi > 0$). Em contrapartida, as séries espaciais, cujas lâminas foram removidas, apresentam as curvas dos níveis de retorno côncavas, e portanto, estas curvas apresentam um limite superior assintótico, sugerindo assim, que as distribuições para este caso possuem um suporte finito (*bounded distribution*) (COLES, 2001). Neste caso, o parâmetro de forma é negativo ($\xi < 0$). Além disto, para todos os casos dos níveis de retorno estudados, os pontos representativos das amostras não extrapolam seus respectivos intervalos de confiança, dando mais evidências de que os ajustes pela GPD das séries analisadas foram satisfatórios.

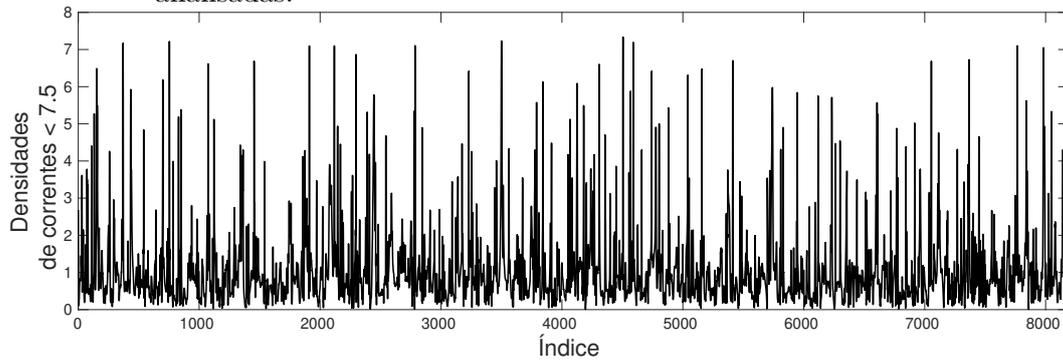
Portanto, neste capítulo pudemos confirmar, por meio de simulação MHD-3D, todos os resultados obtidos para o caso observacional. Assim, reunimos mais evidências de que, de fato, as lâminas de correntes são estruturas coerentes presentes no vento solar que têm papel fundamental na ocorrência de eventos extremos neste ambiente. Além disto, fortalecemos a hipótese de que a volatilidade é, de fato, uma ferramenta simples e eficiente na detecção de estruturas coerentes em plasmas interplanetários, encorajando sua utilização na Geofísica Espacial.

Figura 6.11 - O mesmo que Fig. 6.2, porém com os valores de PVI > 10 (círculos amarelos) e volatilidade > 10 (círculos azuis) obtidos em Fig (6.9), inseridos em suas respectivas posições sobre a hipotética trajetória da espaçonave de Fig (6.2). Embora ambos os métodos tenham identificado com sucesso as possíveis lâminas de correntes (regiões brancas) que estão sobre a trajetória, a volatilidade novamente se mostrou superior, pelo menos para o limiar utilizado.



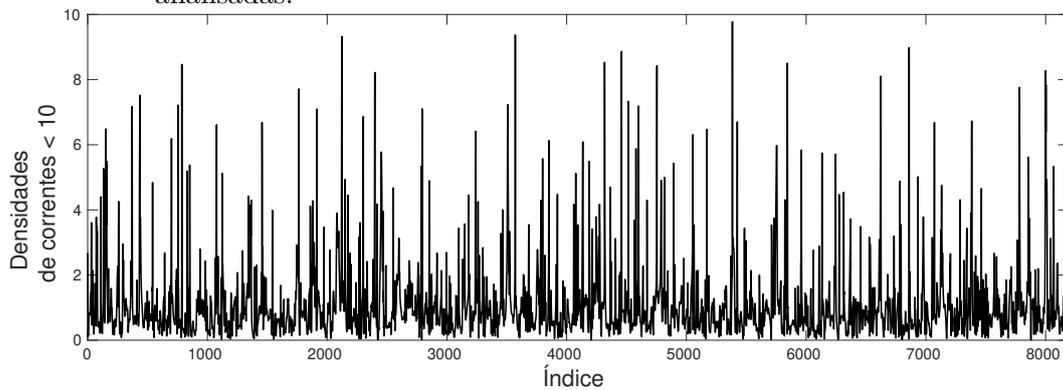
Fonte: Produção do autor.

Figura 6.12 - Série espacial da densidade de corrente de Fig. (6.6-painel superior), porém com as densidade de corrente mais intensas (prováveis lâminas de correntes) removidas. Somente densidades de correntes com valores inferiores a 7.5 são analisadas.



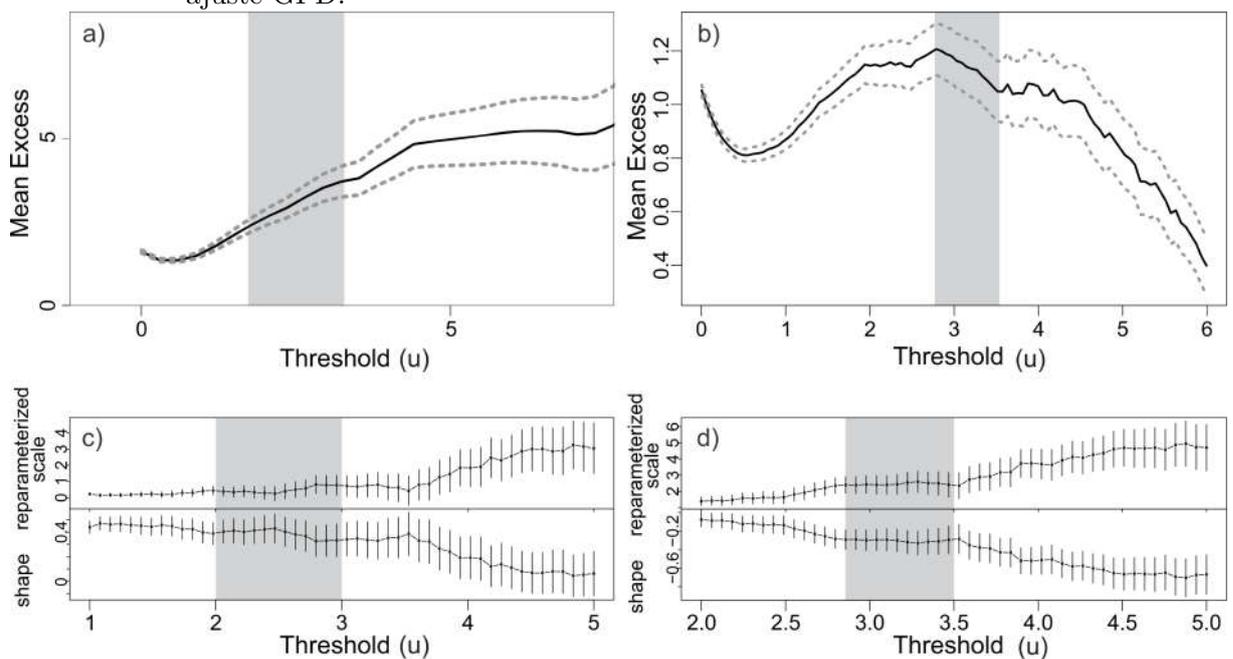
Fonte: Produção do autor.

Figura 6.13 - Série espacial da densidade de corrente de Fig. (6.7-painel superior), porém com as densidade de corrente mais intensas (prováveis lâminas de correntes) removidas. Somente densidades de correntes com valores inferiores a 10 são analisadas.



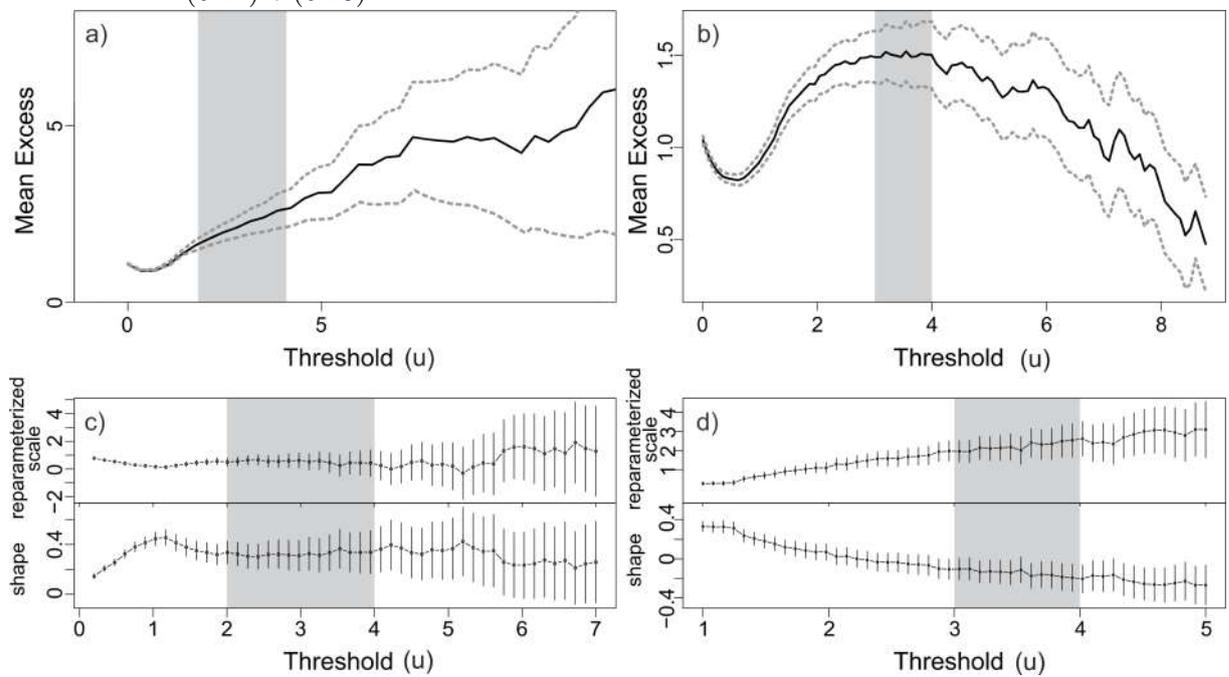
Fonte: Produção do autor.

Figura 6.14 - Em (a) e (c), *mean residual life*, escala reparametrizada e parâmetros de forma em função dos limiares calculados para a série espacial da densidade de corrente obtida pela trajetória em Fig. (6.1). Em (b) e (d) o mesmo que em (a) e (c), porém desta vez para série espacial da densidade de corrente obtida pela trajetória em Fig. (6.2). Áreas sombreadas em cinza delimitam intervalos para os quais o *mean residual life* é aproximadamente linear dentro de um intervalo de confiança de 95% (linhas cinzas tracejadas) e o parâmetro de forma é aproximadamente constante, consideradas as barras de erro. O menor valor de limiar dentro desta região é dado como adequado para o ajuste GPD.



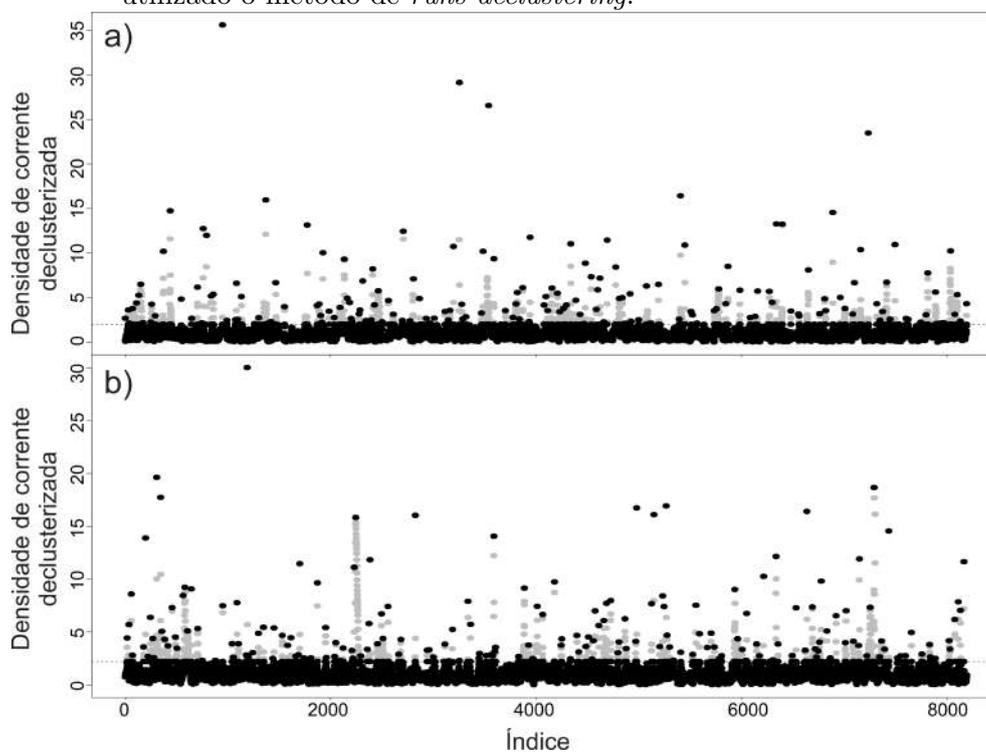
Fonte: Produção do autor.

Figura 6.15 - O mesmo que Fig. (6.14), porém desta vez, para as séries espaciais de Fig. (6.12) e (6.13).



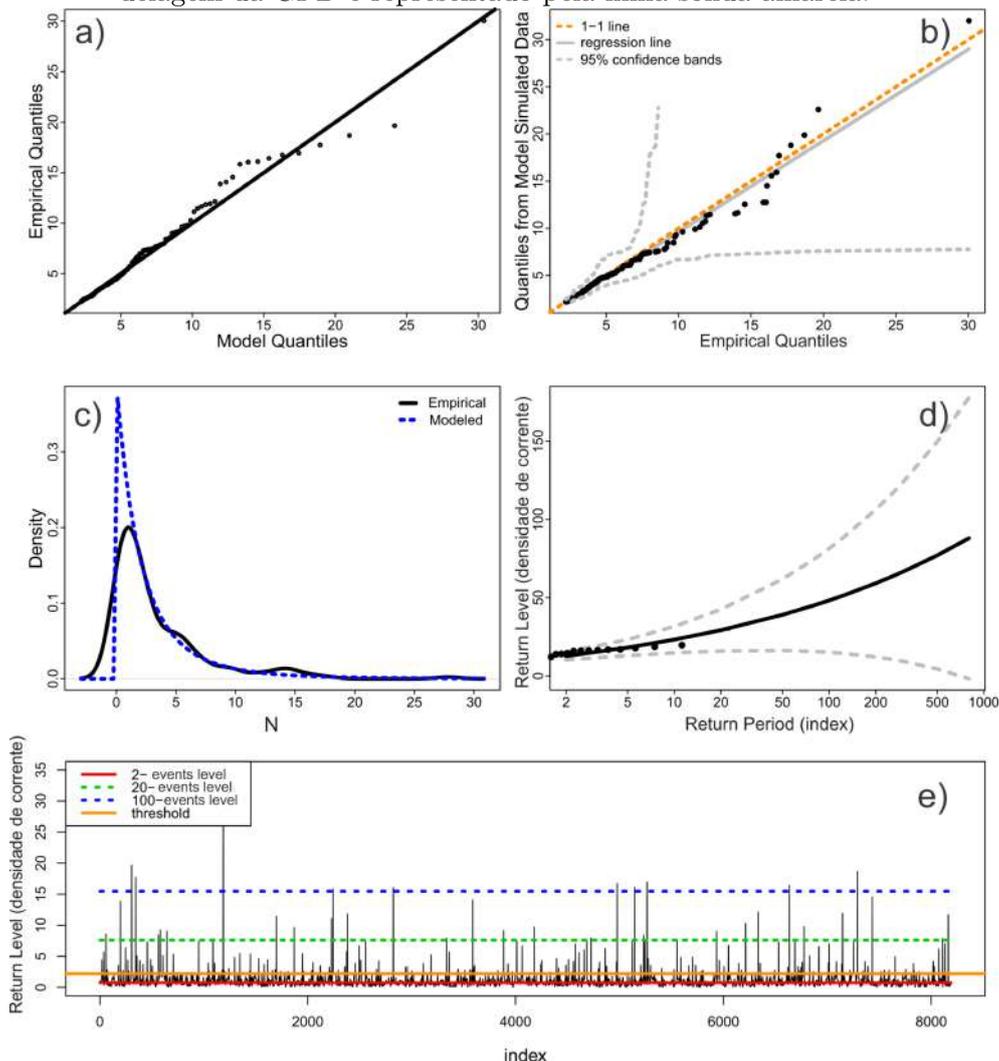
Fonte: Produção do autor.

Figura 6.16 - Séries espaciais declusterizadas das densidades de corrente são representadas pelos pontos acima do limiar, que estão pintados em preto. Em (a), série espacial declusterizada da densidade de corrente obtida pela trajetória em Fig. (6.1). Em (b), série espacial declusterizada da densidade de corrente obtida pela trajetória em Fig. (6.2). Para o processo de declusterização foi utilizado o método de *runs declustering*.



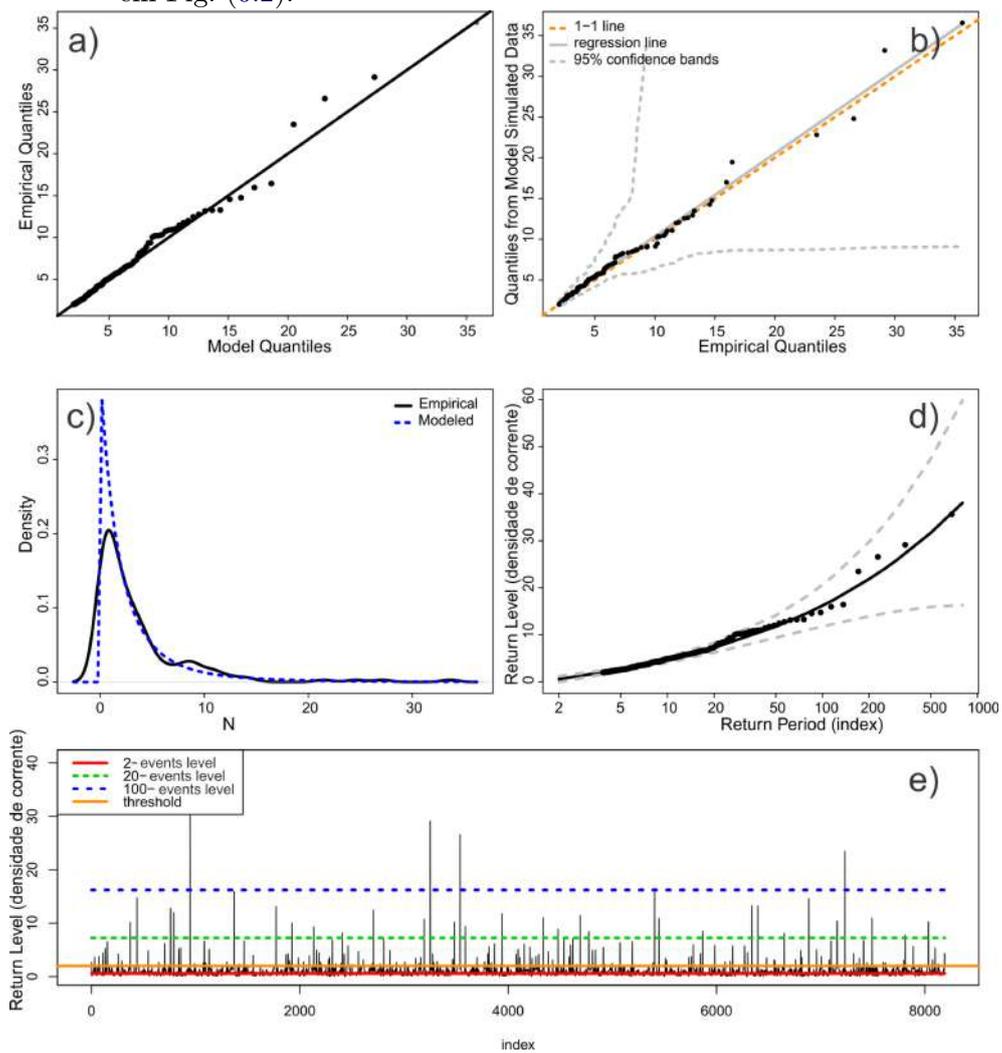
Fonte: Produção do autor.

Figura 6.17 - Figura expondo o diagnóstico do ajuste para a modelagem da distribuição GPD para série espacial declusterizada das densidades de correntes obtidas em Fig. (6.1). Em (a), é mostrado o QQ-plot, onde o eixo-y representa os quantis dos dados observacionais e o eixo-x, os quantis dos dados teóricos. Para um perfeito ajuste, os pontos devem estar sobre a linha sólida preta diagonal (1-1 line). Em (b), o mesmo de (a), porém desta vez os quantis dos dados empíricos são comparados com os quantis dos dados gerados randomicamente pela distribuição GPD, dentro de um intervalo de confiança de 95% (linhas tracejadas em cinza). A linha sólida preta representa a regressão linear dos pontos e a linha tracejada laranja representa a linha diagonal (1-1 line). Em (c), são mostradas as funções de densidade de probabilidade dos dados empíricos (linha sólida) e dos dados teóricos (linha tracejada azul). Em (d), encontram-se os níveis de retorno da densidade de corrente declusterizada (linha sólida preta) em termos dos períodos de retornos dos índices. Linhas tracejadas cinzas representam o intervalo de confiança ponto a ponto (*pointwise*) de 95%. Em (e) são mostrados a série temporal da série de densidade de corrente declusterizada e seus níveis de retorno previstos a cada ocorrência de 2 eventos (linha sólida vermelha), 20 eventos (linha tracejada verde) e 100 eventos (linha pontilhada azul). O limiar utilizado para a modelagem da GPD é representado pela linha sólida amarela.



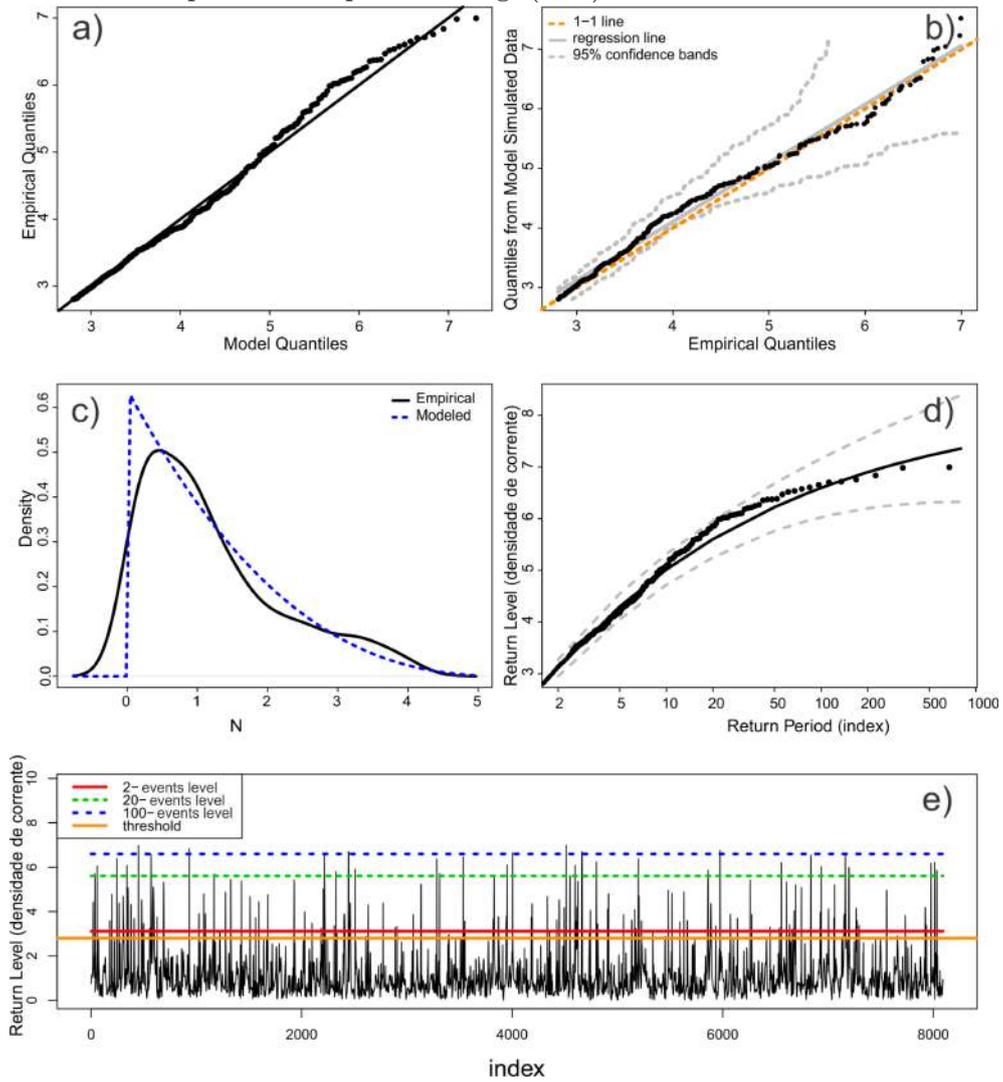
Fonte: Produção do autor.

Figura 6.18 - O mesmo que em Fig. (6.17), porém desta vez, com o ajuste da GPD realizado para série espacial declusterizada das densidades de correntes obtidas em Fig. (6.2).



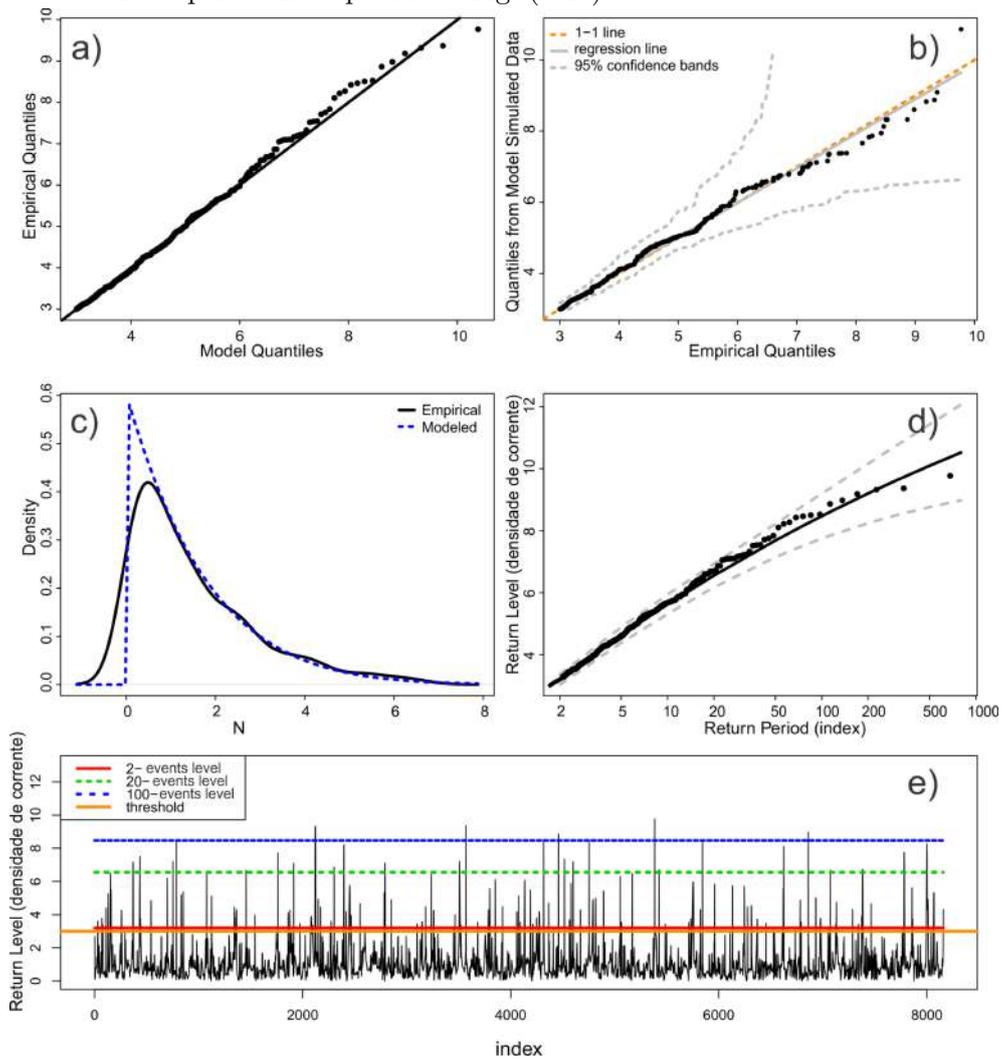
Fonte: Produção do autor.

Figura 6.19 - O mesmo que em Fig. (6.17), porém desta vez, com o ajuste da GPD realizado para série espacial de Fig. (6.12).



Fonte: Produção do autor.

Figura 6.20 - O mesmo que em Fig. (6.17), porém desta vez, com o ajuste da GPD realizado para série espacial de Fig. (6.13).



Fonte: Produção do autor.

7 DETECÇÃO OBJETIVA DE ESTRUTURAS COERENTES VORTICAIS

Conforme visto, as estruturas coerentes vorticais constituem o “esqueleto” da turbulência bem desenvolvida (FRISCH, 1995). Além disto, a multifractalidade do escoamento turbulento indica que essas estruturas coerentes preenchem não uniformemente o espaço. Esta não uniformidade gera flutuações bem localizadas no espaço, dando origem às intermitências (FRISCH, 1995), que por sua vez, estão relacionadas com a não gaussianidade e ocorrência de eventos extremos. Além da turbulência, estruturas coerentes vorticais também estão presentes em uma vasta quantidade de fenômenos na natureza, em grandes e pequenas escalas. Portanto, surge assim a necessidade de uma teoria mais completa que se dedique ao estudo dessas estruturas.

Dentro do contexto de estruturas coerentes em fluidos, em geral são utilizados dois tipos de referenciais: o euleriano e o lagrangiano. Na descrição Euleriana, a análise do fluido é feita tomando um ponto fixo no espaço. Diante disso, técnicas Eulerianas de detecção de estruturas coerentes se mostram bastante eficientes na detecção de regiões de deformações e de vórtices, porém não revelam muitos detalhes dos limites envolvendo tais regiões, não sendo capazes de separar com precisão regiões com diferentes características dentro do fluido, tais quais barreiras de transportes. Por outro lado, a descrição lagrangiana utiliza um sistema de referência que segue o movimento da partícula na corrente do fluido, tornando-se mais apropriada para a obtenção de informações mais precisas acerca do fluido, como por exemplo, as fronteiras de vórtices e de regiões de deformação. Portanto, as técnicas lagrangianas para a detecção de estruturas coerentes são consideradas mais completas e precisas do que as técnicas Euleriana (ver Peacock e Haller (2013) e referências internas).

Em geral, estruturas coerentes dividem regiões dinamicamente distintas no escoamento, as quais revelam muitas características do sistema e auxiliam no entendimento dos fenômenos de transporte. Com ajuda da teoria de sistemas dinâmicos (dinâmica não linear e caos) e seus conceitos aplicados nas perspectivas lagrangiana e euleriana, a descrição dos fenômenos presentes nos fluidos em geral tem sido cada vez mais bem elaborada. Por exemplo, uma das técnicas lagrangianas mais difundidas para a detecção de estruturas coerentes é conhecida como o expoente de Lyapunov de tempo finito (REMPEL et al., 2013), que nada mais é do que a medição da taxa de separação média entre trajetórias inicialmente próximas no fluido. No entanto, esta técnica apresentou algumas fraquezas, como por exemplo o fato de não ser invariante por uma mudança de referencial (HALLER et al., 2016), motivando

assim o desenvolvimento de técnicas alternativas.

7.1 Detecção Objetiva de Estruturas Vorticais Lagrangianas - LAVD

Nesta seção faremos uma breve introdução ao método desenvolvido por [Haller et al. \(2016\)](#), que tem por objetivo detectar vórtices lagrangianos de forma invariante a mudanças de referenciais.

Seja o tensor dinâmico de rotação $O_{t_0}^t$, que pode ser fatorizado em dois gradientes de deformação da seguinte forma ([HALLER et al., 2016](#)):

$$O_{t_0}^t = \Phi_{t_0}^t \Theta_{t_0}^t, \quad (7.1)$$

onde $\Phi_{t_0}^t$ é um apropriado tensor de rotação relativa, dado por $\Phi_{t_0}^t = \partial_{\alpha_0} \alpha(t)$, onde ([HALLER et al., 2016](#))

$$\dot{\alpha} = [W(x(t; x_0), t) - \bar{W}(t)] \alpha. \quad (7.2)$$

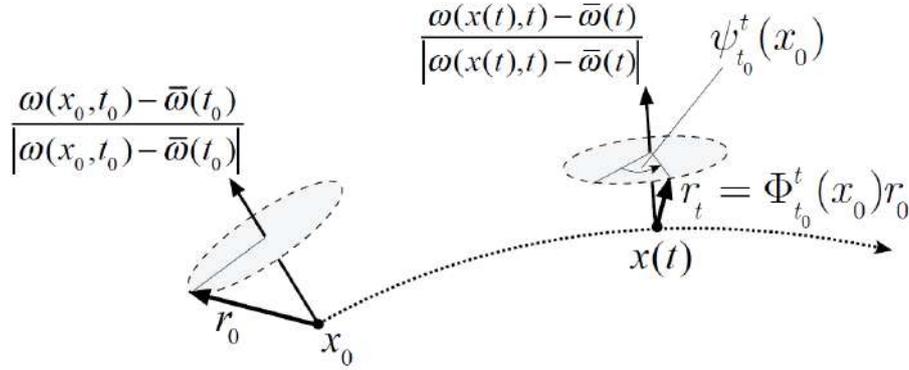
Por outro lado, um apropriado tensor ortogonal de rotação relativa pode ser escrito como $\Theta_{t_0}^t = D_{\beta_0} \beta(t)$ ([HALLER et al., 2016](#)), que desta vez é o gradiente de deformação da rotação média do fluxo, ou seja,

$$\dot{\beta} = \Phi_t^{t_0} \bar{W}(t) \Phi_{t_0}^t \beta \quad (7.3)$$

A consistência dinâmica de $\Phi_{t_0}^t$ implica que o ângulo total varrido por este tensor em torno do seu próprio eixo de rotação é dinamicamente consistente. Este ângulo $\psi_{t_0}^t(x_0)$, chamado *ângulo de rotação intrínseca*, mostrado na Figura 7.1, satisfaz

$$\psi_{t_0}^t(x_0) = \psi_s^t(x_0) + \psi_{t_0}^s(x_0), \quad s, t \in [t_0, t_1]. \quad (7.4)$$

Figura 7.1 - Geometria de um ângulo de rotação intrínseco $\psi_{t_0}^t(x_0)$ ao longo de uma trajetória material $x(t)$.



Fonte: Haller et al. (2016).

Além disto, pode-se mostrar que $\psi_{t_0}^t(x_0)$ é invariante sob uma mudança de referencial (HALLER et al., 2016), tanto para duas ou três dimensões. Utilizando resultados de Haller et al. (2016), pode-se mostrar que

$$\psi_{t_0}^t(x_0) = \frac{1}{2}LAVD_{t_0}^t(x_0), \quad (7.5)$$

com o *Lagrangian Averaged Vorticity Deviation* (LAVD) dado por

$$LAVD_{t_0}^t(x_0) := \int_{t_0}^t |w(x(s; x_0), s) - \bar{w}(s)| ds \quad (7.6)$$

onde o termo $|w(x(s; x_0), s) - \bar{w}(s)|$ é invariante sob uma mudança de referencial. Neste caso ele é dito ser objetivo (HALLER et al., 2016). Diante disso, Haller et al. (2016) propõe o seguinte teorema:

Teorema 1: *Para um volume infinitesimal de fluido inicialmente no ponto x_0 , o campo $LAVD_{t_0}^t(x_0)$ é dinamicamente consistente. Especificamente, o $LAVD_{t_0}^t(x_0)$ é duas vezes maior que o ângulo de rotação intrínseco $\psi_{t_0}^t(x_0)$ gerado pelo tensor de rotação relativa $\Phi_{t_0}^t$. O último tensor é obtido da seguinte decomposição dinamicamente consistente*

$$F_{t_0}^t = \Phi_{t_0}^t \Theta_{t_0}^t M_{t_0}^t, \quad (7.7)$$

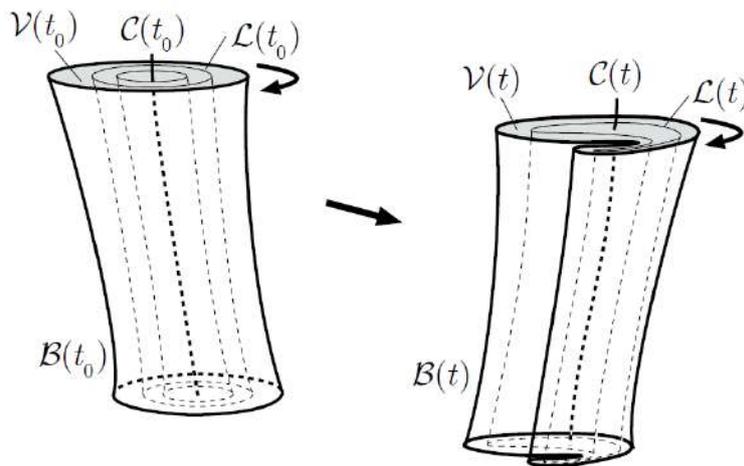
com o gradiente de deformação $\Theta_{t_0}^t$ de uma pura rotação de corpo rígido, e com o gradiente de deformação $M_{t_0}^t$ de um único fluxo puramente tensionável.

A grande importância do Teorema 1 é que ele permite extrair uma componente rotacional dinamicamente consistente e invariante sob mudanças de referenciais, a partir de um gradiente de deformação (HALLER et al., 2016), sem exigir uma diferenciação com respeito às suas condições iniciais.

7.1.1 Rotacionalidade de Vórtices Lagrangianos Coerentes

Nesta seção descreveremos como utilizar o LAVD para identificar tubos materiais ao longo dos quais pequenos volumes de fluido experimentam a mesma rotação média. Pelo teorema 1, a posição inicial de um dado tubo são superfícies de níveis tubulares da função escalar $LAVD_{t_0}^t(x_0)$ (HALLER et al., 2016). Se o gradiente $\partial_{x_0} LAVD_{t_0}^t(x_0)$ é não nulo ao longo de uma superfície de nível tubular $LAVD_{t_0}^t(x_0)$, então esta superfície de nível é rodeada por uma família de superfícies de nível tubulares enroladas entre si, como um ninho de passarinho. O centro deste “ninho”, com valores de $LAVD_{t_0}^t(x_0)$ crescendo em direção ao seu interior, dá uma definição de um centro vortical lagrangiano (HALLER et al., 2016). Similarmente, a camada mais externa deste “ninho”, define a fronteira de vórtice lagrangiano. Estes conceitos estão expostos na figura 7.2

Figura 7.2 - Figura ilustrando vórtices lagrangianos coerentes $\mathcal{V}(t)$ evoluindo no tempo.



Rotationally coherent Lagrangian vortex

Fonte: Haller et al. (2016).

Seja agora a seguinte definição dada por [Haller et al. \(2016\)](#):

Definição 1: *Sob um intervalo de tempo finito (t_0, t_1) , temos o seguinte:*

- a) *O vórtice lagrangiano coerente é um domínio de material envolvente $\mathcal{V}(t)$, tal que $\mathcal{V}(t_0)$ é preenchido com uma família de superfícies de nível $LAVD_{t_0}^t(x_0)$ tubular, enroladas entre si como um ninho, de tal forma que o valor de $LADV$ decresce à medida em que se afasta do centro deste ninho.*
- b) *A fronteira $\mathcal{B}(t)$ de $\nu(t)$ é uma superfície material tal que $\mathcal{B}(t_0)$ é um tubo correspondendo à superfície de nível de $LAVD_{t_0}^t(x_0)$ mais externa em $\mathcal{V}(t_0)$.*
- c) *O centro $\mathcal{C}(t)$ de $\nu(t)$ é um conjunto material $\mathcal{C}(t)$ tal que $\mathcal{C}(t_0)$ é o membro mais interno ($LADV$ máximo) das superfícies de nível de $LAVD_{t_0}^t(x_0)$ em $\mathcal{V}(t_0)$.*

Portanto, a superfície de nível tubular pode ser definida como ([HALLER et al., 2016](#))

$$\mathcal{L}(t_0) = \{x_0 \in U(t_0) : LAVD_{t_0}^{t_1}(x_0) = const\}, \quad (7.8)$$

sendo assim uma estrutura coerente rotacional, conforme indicado na Figura 7.2. Estas estruturas fornecem a foliação dos vórtices lagrangianos envolventes $\mathcal{V}(t)$ nos tubos ao longo dos quais elementos materiais completam a mesma dinâmica intrínseca de rotação $\psi_{t_0}^t(x_0)$.

Fronteiras e centros de vórtices lagrangianos, são objetos materiais por definição ([HALLER et al., 2016](#)). Portanto, suas posições no tempo t são unicamente determinadas pela advecção lagrangiana de suas posições iniciais, a saber

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t) &= F_{t_0}^t(\mathcal{L}(t_0)) \\ \mathcal{B}(t) &= F_{t_0}^t(\mathcal{B}(t_0)) \\ \mathcal{C}(t) &= F_{t_0}^t(\mathcal{C}(t_0)) \\ t &\in [t_0, t_1] \end{aligned}$$

7.2 Rotacionalidade de Vórtices Eulerianos Coerentes - IVD

Nesta seção, adaptaremos o LAVD para detectarmos vórtices eulerianos, ou seja, vórtices detectados em um dado instante de tempo.

Para isto, seja um curto intervalo de tempo $(t_0, t + s)$ com $|s| \ll 1$. Então, nós podemos expandir o LAVD como:

$$LAVD_{t_0}^{t+s}(x_0) = LAVD_{t_0}^t(x_0) + \frac{d}{ds}LAVD_{t_0}^t(x_0)s + O(s^2), \quad (7.9)$$

ou, equivalentemente

$$LAVD_{t_0}^{t+s}(x_0) = LAVD_{t_0}^t(x_0) + IVD_{t_0}^t(x(t; x_0), t)s + O(s^2), \quad (7.10)$$

onde o desvio de vorticidade instantâneo é dado por

$$IVD_{t_0}^t(x, t) = |w(x, t) - \bar{w}(t)|. \quad (7.11)$$

Pela equação 7.10, o termo $IVD_{t_0}^t(x(t; x_0), t)$ descreve a taxa de mudança do campo LAVD para uma condição inicial x_0 , sob a evolução do tempo de integração.

Usando o IVD, [Haller et al. \(2016\)](#) introduz uma noção de vórtices coerentes eulerianos instantânea, simplesmente tomando o limite $t_0, t_1 \rightarrow t$ na Definição 1. Desta forma, em $t \in [t_0, t_1]$, um vórtice euleriano é composto por uma superfície tubular ao longo da qual as taxas de rotação intrínseca $\dot{\psi}_t^t$ dos elementos de fluido são iguais ([HALLER et al., 2016](#)). De fato, pela equação 7.5, temos que

$$\dot{\psi}_{t_0}^t(x_0) = \frac{1}{2}LAVD_{t_0}^t(x_0), \quad (7.12)$$

e portanto,

$$\dot{\psi}_t^t = (1/2)IVD(x, t) = const \quad (7.13)$$

ao longo destas superfícies tubulares.

Haller et al. (2016) sugere a seguinte definição para o conceito de vórtice euleriano:

Definição 2:

- a) *Um vórtice coerente euleriano é um conjunto $V(t)$ preenchido com uma família de superfícies de nível de $IVD(x, t)$, completamente enroladas como um ninho de passáreo, com valores de IVD decrescendo à medida que se caminha do centro dos tubos para fora;*

- b) *A fronteira $B(t)$ de $V(t)$ é a superfície de nível de $IVD(x, t)$ mais externa em $V(t)$;*

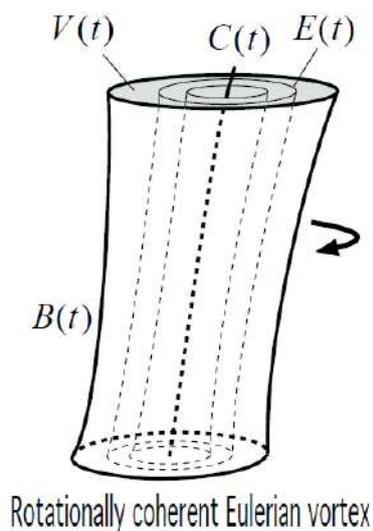
- c) *O centro $C(t)$ de $V(t)$ é a superfícies de nível de $IVD(x, t)$ mais interna em $V(t)$, ou seja, com valor máximo de IVD .*

Uma estrutura coerente euleriana rotacional é, portanto, uma superfície de nível, tal que (HALLER et al., 2016)

$$E(t) = \{x_0 \in U(t) : IVD(x, t) = C_0(t)\}, \quad (7.14)$$

ao longo do qual elementos de materiais experimentam a mesma rotação dinâmica $\dot{\psi}_i^t = C_0(t)/2$. Ao contrário do caso de estruturas coerentes lagrangianas rotacionais, as estruturas coerentes eulerianas rotacionais são quantidades instantâneas, sem uma evolução bem definida. A geometria referente à Definição 2 é dada na figura 7.3.

Figura 7.3 - Figura ilustrando vórtices eulerianos coerentes $V(t)$ evoluindo no tempo.



Fonte: Haller et al. (2016)

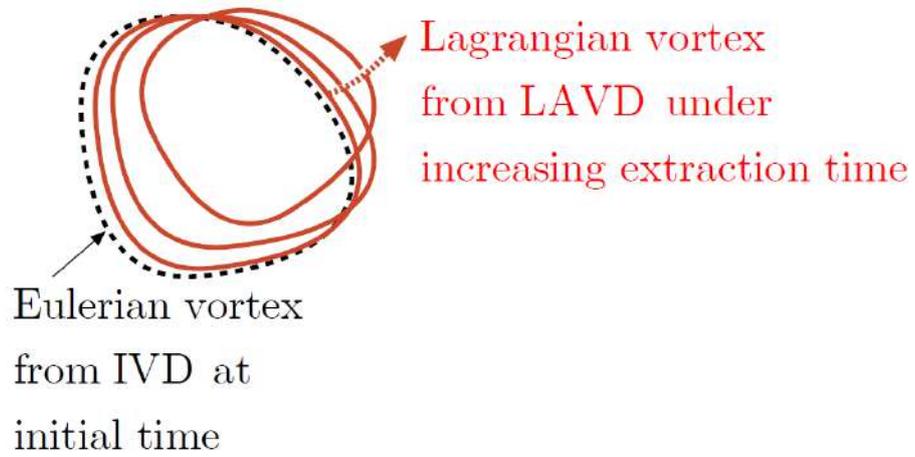
Portanto, dado que (HALLER et al., 2016)

$$\frac{d}{dt}LAVD_{t_0}^t(x_0) = IVD(x(t; x_0), t), \quad (7.15)$$

então os vórtices coerentes eulerianos são na verdade a derivada de vórtices coerentes lagrangianos com respeito a duração de tempo de extração deste último. Tomando $t = t_0$ em 7.9 e observando que $LAVD_{t_0}^{t_0}(x_0) = 0$, podemos concluir que a posição inicial da fronteira $\mathcal{B}(t_0)$ de um vórtice coerente lagrangiano evolui precisamente da fronteira $B(t_0)$ de um vórtice coerente euleriano, a medida que $t_1 - t_0$ cresce, conforme a figura 7.4.

Fisicamente, estas estruturas vorticais eulerianas são na verdade a construção de superfícies tubulares, as quais apresentam uma coerência instantânea na taxa de rotação de um volume material.

Figura 7.4 - Um vórtice coerente euleriano é o limite de um vórtice coerente lagrangiano sob um tempo de integração nulo.



Fonte: Haller et al. (2016)

7.3 Detecção objetiva de vórtices magnéticos

Rempel et al. (2017) adaptou a técnica LAVD para o caso magnético, dando origem ao método de detecção de vórtices magnéticos, IACD ou *Integrated Averaged Current Deviation*. O método IACD é obtido de forma completamente análoga ao LAVD, conforme será visto mais adiante. Entretanto, a objetividade do IACD, até então, ainda não havia sido provada. Neste caso, embora a técnica IACD tenha fornecido resultados promissores para o caso de simulações de modelos de dínamos (REMPEL et al., 2017), a principal característica da metodologia, a partir da qual ela nasceu, ainda não havia sido comprovada. Tal característica se refere à objetividade (TRUESDALL; NOLL, 2004).

A comprovação da objetividade do IACD é de importância para a Geofísica Espacial. Isso porque plasmas espaciais são repletos de estruturas coerentes vorticais e, além disto, grande parte de dados observacionais analisados nesta área do conhecimento são coletados por instrumentos que não são considerados referenciais inerciais. Assim, análises fornecidas por esses instrumentos podem gerar falsos achados, caso os devidos cuidados não sejam tomados. Diante disso, a prova da objetividade do IACD habilita esta técnica a ser incorporada ao estudo observacional de plasmas espaciais, como uma importante ferramenta de detecção de vórtices magnéticos. Aqui reside uma grande contribuição desta tese para a ciência espacial, visto que apresentamos de uma forma detalhada a comprovação da objetividade do IACD, validando assim a aplicação desta técnica.

Antes de demonstrarmos a prova da objetividade do método IACD, faremos uma breve introdução ao importante conceito de objetividade (intencionalmente não apresentada na parte metodológica) e apresentaremos também, baseado em Rempel et al. (2017), as ideias por trás da técnica IACD.

7.3.1 Objetividade Temporal

Dentro do contexto da mecânica clássica, um referencial é basicamente definido como um corpo rígido munido de um relógio. Já no contexto de mecânica do contínuo, um referencial é simplesmente definido como um *frame* (TRUESDALL; NOLL, 2004).

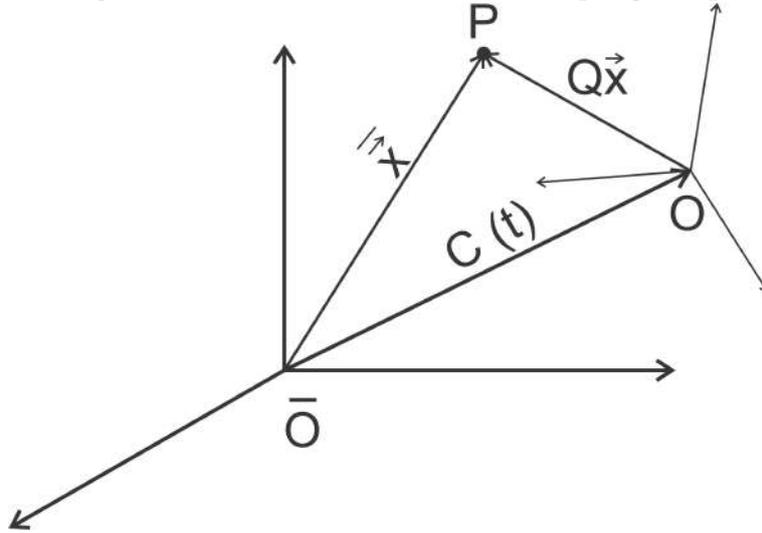
Uma quantidade é chamada objetiva ou invariante ao referencial se esta permanece invariante sob uma mudança de coordenadas euclidianas da seguinte forma (TRUESDALL; NOLL, 2004):

$$\vec{\bar{x}} = \mathbf{Q}(t) \vec{x} + \vec{c}(t), \quad (7.16)$$

onde $\mathbf{Q}(t) \in SO(3)$ é uma matriz de rotação arbitrária dependente do tempo e $\vec{c}(t) \in \mathbb{R}^3$ é um vetor de translação também dependente do tempo (TRUEDELL; NOLL, 2004)

Uma maneira simples de enxergar 7.16 é considerando dois referenciais (frames) $\bar{\mathcal{O}}$ e \mathcal{O} , conforme mostrado na Figura 7.5. Considere que o *frame* \mathcal{O} é fixado ao corpo rígido e se move com ele, ao passo que outro observador $\bar{\mathcal{O}}$ está estacionário¹. Nesse caso, os dois observadores diferem um do outro apenas por uma translação e uma rotação. Considere agora uma partícula “P”, situada no corpo rígido. Neste caso, o vetor posição da partícula em relação ao *frame* $\bar{\mathcal{O}}$ no tempo t é $\vec{\bar{x}}$, ao passo que, a mesma partícula em relação ao *frame* \mathcal{O} em t , é \vec{x} . Logo, o vetor $\vec{\bar{x}}$ é visto pelo *frame* \mathcal{O} como uma rotação de \vec{x} , ou seja, $\mathbf{Q}(t) \vec{x}$, adicionado a uma translação $\vec{c}(t)$.

Figura 7.5 - Ilustração de dois frames $\bar{\mathcal{O}}$ e \mathcal{O} e um vetor posição $\vec{\bar{x}}$ para um ponto P .



Fonte: Produção do autor.

A distância entre quaisquer dois pontos é sempre uma quantidade objetiva. Para ver isso, sejam dois pontos materiais D_1 e D_2 com vetores posição dados respectivamente por \vec{x}_1 ($\vec{\bar{x}}_1$) e \vec{x}_2 ($\vec{\bar{x}}_2$) em um *frame* \mathcal{O} ($\bar{\mathcal{O}}$). Então,

¹Em geral, ambos os observadores podem ser não estacionários.

$$\begin{aligned}\bar{\vec{x}}_1 &= \mathbf{Q}(t) \vec{x}_1 + \vec{c}(t), \\ \bar{\vec{x}}_2 &= \mathbf{Q}(t) \vec{x}_2 + \vec{c}(t).\end{aligned}\tag{7.17}$$

Da equação 7.16, temos que a distância entre D_1 e D_2 é transformada como

$$\begin{aligned}|\bar{\vec{x}}_1 - \bar{\vec{x}}_2| &= |\mathbf{Q}(t) (\vec{x}_1 - \vec{x}_2)| \\ &= |\vec{x}_1 - \vec{x}_2|,\end{aligned}$$

já que $|\mathbf{Q}| = 1$, desde que \mathbf{Q} é uma matriz de rotação.

Um vetor \vec{v} é definido objetivo, se ele se transforma como (TRUESDELL; NOLL, 2004):

$$\bar{\vec{v}} = \mathbf{Q}(t) \vec{v}.\tag{7.18}$$

Agora seja um tensor “ \mathbf{T} ” que transforma um vetor objetivo \vec{v} em outro vetor também objetivo \vec{u} e $\bar{\mathbf{T}}$ o mesmo tensor, porém em relação a outro *frame*, ou seja,

$$\mathbf{T}\vec{v} = \vec{u},\tag{7.19}$$

$$\bar{\mathbf{T}}\bar{\vec{v}} = \bar{\vec{u}},\tag{7.20}$$

$$\bar{\vec{v}} = \mathbf{Q}(t) \vec{v},\tag{7.21}$$

$$\bar{\vec{u}} = \mathbf{Q}(t) \vec{u}.\tag{7.22}$$

Portanto, substituindo 7.19 e 7.18 em 7.22, obtemos

$$\bar{\vec{u}} = \mathbf{Q}(t) \mathbf{T}\vec{v} = \mathbf{Q}(t) \mathbf{T}\mathbf{Q}(t)^\top \bar{\vec{v}}.\tag{7.23}$$

Substituindo agora (7.23) em (7.20), obtemos

$$\bar{\mathbf{T}}\bar{\vec{v}} = \mathbf{Q}(t) \mathbf{TQ}(t)^\top \bar{\vec{v}} \Rightarrow \boxed{\bar{\mathbf{T}} = \mathbf{Q}(t) \mathbf{TQ}(t)^\top}. \quad (7.24)$$

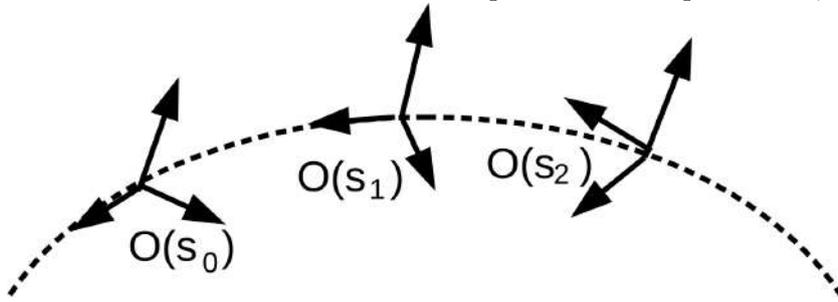
Portanto, um tensor é objetivo se ele é transformado pela equação (7.24).

7.3.2 Objetividade Espacial

De maneira análoga ao caso da objetividade temporal, nesta seção da tese propomos uma nova definição de objetividade, porém neste caso, em relação ao espaço. Por isso, a chamaremos de objetividade espacial. A definição de objetividade espacial dada nesta seção, é de suma importância para o desenvolvimento da técnica IACD, bem como a comprovação de sua objetividade, principal objetivo deste capítulo.

A invariância de uma quantidade física é também importante quando não há uma evolução temporal. Até o momento, a descrição de estruturas coerentes em um dado problema estacionário deve ser dependente do *frame* utilizado. Quando este *frame* segue uma linha parametrizada por s , conforme a Figura 7.6, um diferente *frame* \mathcal{O} pode ser definido em função deste parâmetro.

Figura 7.6 - Frames ao longo de uma linha parametrizada por $s = s_0, s_1, s_2, \dots$



Fonte: Produção do autor.

Portanto, de forma completamente análoga ao que foi feito na seção anterior, podemos definir uma quantidade como espacialmente objetiva, se ela permanece invariante sob uma mudança de coordenadas, ou seja,

$$\bar{\vec{x}} = \mathbf{Q}(s) \vec{x} + \vec{c}(s), \quad (7.25)$$

onde s é a parametrização utilizada para descrever a posição do vetor \vec{x} ao longo da linha parametrizada. Nesse caso, a equação (7.25) descreve a relação entre quaisquer dois diferentes *frames* \mathcal{O} e $\bar{\mathcal{O}}$. Note que, neste caso, a matriz de rotação e o vetor de translação são ambos função de um parâmetro espacial s , utilizado na construção da linha da Figura 7.6.

A exemplo do que foi feito na seção anterior, nós podemos computar a distância entre dois pontos materiais D_1 e D_2 com vetores posição dados respectivamente por \vec{x}_1 ($\bar{\vec{x}}_1$) e \vec{x}_2 ($\bar{\vec{x}}_2$) em um dado *frame* \mathcal{O} ($\bar{\mathcal{O}}$). Da equação 7.25, podemos escrever

$$\begin{aligned}\bar{\vec{x}}_1 &= \mathbf{Q}(s) \vec{x}_1 + \vec{c}(s), \\ \bar{\vec{x}}_2 &= \mathbf{Q}(s) \vec{x}_2 + \vec{c}(s).\end{aligned}$$

Portanto, a distância entre D_1 and D_2 em diferentes *frames* é dada por

$$|\bar{\vec{x}}_2 - \bar{\vec{x}}_1| = |\mathbf{Q}(s)(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)|. \quad (7.26)$$

Conforme justificado na seção anterior, o vetor \vec{v} em 7.26 é dito objetivo se possui a seguinte transformação:

$$\bar{\vec{v}} = \mathbf{Q}(s)\vec{v}. \quad (7.27)$$

Um tensor será invariante se seus autovalores são os mesmos para quaisquer *frames*. Desta forma, seguindo o que foi feito na seção anterior, para uma transformação de coordenadas descrita em 7.25, um tensor espacial é dito objetivo se,

$$\bar{\mathbf{T}} = \mathbf{Q}(s) \mathbf{T} \mathbf{Q}(s)^\top. \quad (7.28)$$

Embora ambas as objetividades espacial (sugerida nesta tese) e clássica (em função do tempo), pareçam ser a mesma coisa, diferindo apenas pelos parâmetros t e s , elas guardam significados físicos diferentes. A objetividade clássica é uma importante ferramenta quando se quer investigar propriedades do fluxo em uma descrição lagrangiana (intervalo de tempo). Já a objetividade espacial pode ser aplicada quando se quer descrever propriedades de um fluxo estacionário ou traçar uma linha de uma determinada grandeza fixa, para um dado tempo, como por exemplo, construir li-

nhas de campo magnético no espaço, em um determinado instante de tempo. Além disto, a invariância de uma quantidade física também é importante quando não há evolução temporal, como em um fluxo estacionário, por exemplo. Para este caso, a descrição das estruturas coerentes formadas pelas linhas de campo magnético em um dado instante de tempo dependerá do referencial, já que observadores diferentes poderão enxergar diferentes topologias para as linhas de campo magnético. Como um exemplo, suponha que um observador \mathcal{O} observe o seguinte campo magnético

$$\vec{B}(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{x}, \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^3$$

Neste caso, as linhas de campo magnético vistas pelo observador \mathcal{O} em $t = t_0$ possuem uma topologia de sela, conforme pode ser visto em Fig.7.7(a). As linhas de campo, neste caso, são soluções do problema de valores iniciais

$$\vec{B}(\vec{x}(s)) = \frac{d\vec{x}}{ds}, \quad \vec{x}(s_0) = \vec{x}_0, \quad (7.29)$$

onde $x(s)$ é o vetor posição e s é um parâmetro espacial, que está relacionado com a distância ao longo das linhas de campo por

$$d\vec{l} = |\vec{B}| ds. \quad (7.30)$$

Agora, suponha que um observador $\bar{\mathcal{O}}$ está rotacionado e transladado em relação à \mathcal{O} , de tal maneira que os vetores posição obedecem à transformação euclidiana, ou seja,

$$\bar{\vec{x}} = \vec{c}(s) + \mathbf{Q}(s)\vec{x}, \quad \bar{s} = s + a, \quad (7.31)$$

onde \mathbf{Q} é uma matriz de rotação, $\vec{c}(s)$ um vetor de rotação e a um número real constante. Substituindo a Equação 7.31 na Equação 7.29, obtemos

$$\bar{\vec{B}} = \dot{\vec{c}} + \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T(\bar{\vec{x}} - \vec{c}) + \mathbf{Q}\vec{B}, \quad (7.32)$$

onde $(^T)$ denota a transposta e $(\dot{})$ representa a derivada em relação a s . Seja um caso particular onde \mathbf{Q} e \vec{c} são dados por

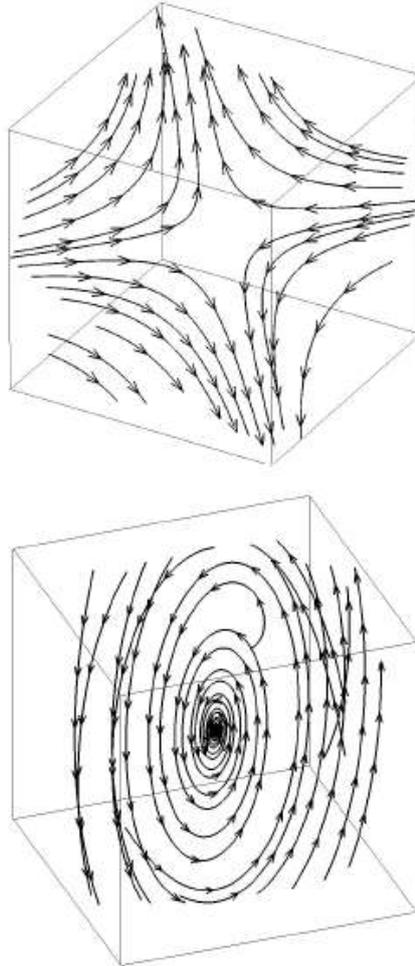
$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \cos(s) & 0 & \sin(s) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(s) & 0 & \cos(s) \end{bmatrix}, \quad \vec{c} = \vec{0}.$$

Neste caso, para $s = 2.1$, as linhas de campo magnético \vec{B} observadas por $\bar{\mathcal{O}}$ pode ser visto na Figura 7.7(b), ou seja, neste referencial um vórtice é identificado, gerando assim um desacordo com a topologia das linhas de campo observadas por \mathcal{O} . Isso comprova que linhas de campo magnético não são grandezas físicas objetivas (frame invariante).

Uma situação prática que pode envolver problemas deste tipo é o estudo de estruturas magnéticas em plasmas espaciais e solar, cujos dados podem ser coletados por diferentes espaçonaves, cada uma fazendo o papel de um referencial. Logo, o conceito de objetividade neste tipo de estudo é crucial. Na próxima seção, introduziremos uma técnica objetiva (frame invariante) e robusta para detecção de estruturas coerentes magnéticas.

Magnetic field lines computed from a vector field measured by two different observers. (a) An observer \mathcal{O} detects a saddle point structure; (b) another observer $\bar{\mathcal{O}}$ rotated and translated in relation to \mathcal{O} detects a magnetic vortex.

Figura 7.7 - Figura ilustrando linhas de campo magnético medidas para dois diferentes observadores. Em (a) uma sela é identificada pelo referencial \mathcal{O} , enquanto que em (b), um vórtice é identificado para um outro referencial $\bar{\mathcal{O}}$ transladado e rotacionado em relação à \mathcal{O} .



Fonte: Trabalho submetido.

7.3.3 Introdução à Técnica IACD

A grande maioria dos métodos para definir/detectar vórtices não são objetivos. Isso pode trazer interpretações incorretas acerca de uma análise de uma estrutura coerente, tal qual o vórtice. Diante disso, conforme já apresentado na parte metodológica deste trabalho, [Haller et al. \(2016\)](#) desenvolveu um método que define e identifica vórtices lagrangianos objetivamente, a saber, o LAVD, que é definido como

$$\text{LAVD}_{t_0}^{t_0+\tau}(\vec{x}_0) = \int_{t_0}^{t_0+\tau} |\vec{\omega}(\vec{x}(t), t) - \langle \vec{\omega}(t) \rangle| dt, \quad (7.33)$$

onde $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v}$ é a vorticidade, $\vec{x}_0 = \vec{x}(t_0)$, τ é um dado intervalo de tempo e $\langle \cdot \rangle$ denota a média espacial instantânea. [Haller et al. \(2016\)](#) demonstrou que o tensor de spin ea vorticidade não são quantidades objetivas, ao passo que o desvio da vorticidade da média (o integrando na Eq. (7.33) é uma quantidade objetiva.

[Rempel et al. \(2017\)](#) construiu uma ponte do LAVD para casos de fluidos magnetizados. Nesse caso, o parâmetro tempo t é substituído pelo parâmetro espacial s e a velocidade \vec{v} é substituída pelo vetor campo magnético \vec{B} . Diante disso, surge a substituição natural da vorticidade $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v}$ pela lei de Ampère, ou seja,

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}, \quad (7.34)$$

onde \vec{J} é a densidade de corrente.

Em seguida, [Rempel et al. \(2017\)](#) apenas substituiu os análogos magnéticos do LAVD na equação 7.33 para definir o *integrated averaged current deviation* (IACD), obtendo assim

$$\text{IACD}_{s_0}^{s_0+\xi}(\vec{r}_0) = \int_{s_0}^{s_0+\xi} |\vec{J}(\vec{r}(s), t_0) - \langle \vec{J}(t_0) \rangle| ds, \quad (7.35)$$

onde $\vec{r}(s)$ é a solução da equação de linha magnética, dada por ([SONSRETTEE et al., 2015](#))

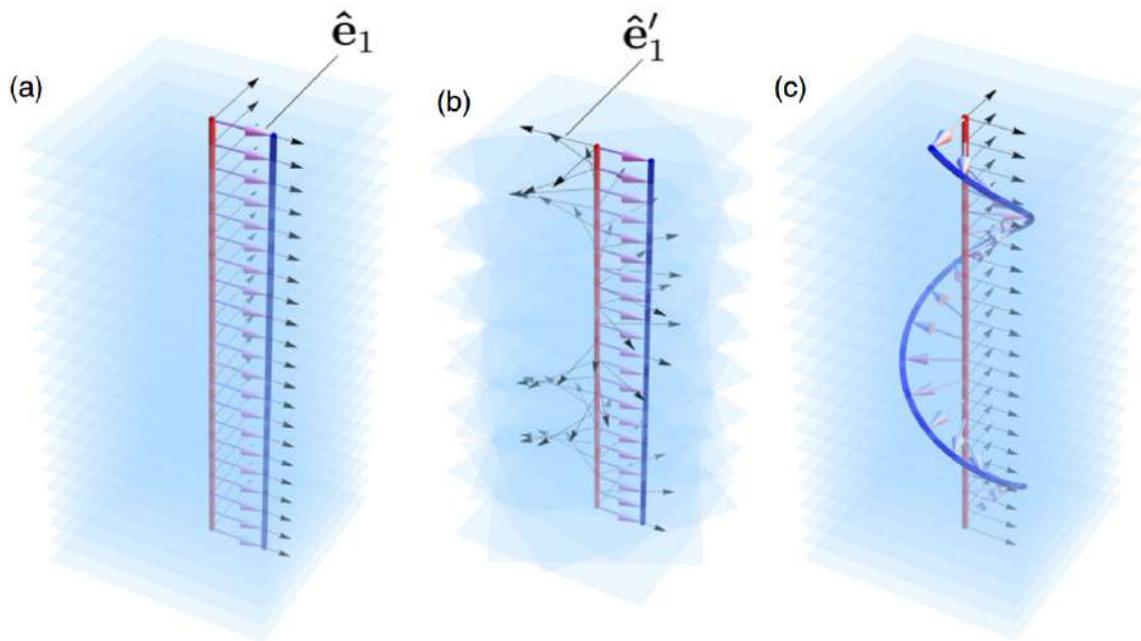
$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial s} = \vec{B}(\vec{r}(s), t_0), \quad \vec{r}(s_0) = \vec{r}_0, \quad (7.36)$$

e $\langle \vec{J}(t_0) \rangle$ é a densidade de corrente. Note que, diferentemente do LAVD, o cálculo do IACD é realizado para um tempo fixo t_0 . Isso é devido ao fato de que as linhas de campo magnético dadas por (7.36), são definidas para um tempo fixo, mas para um parâmetro espacial s variável.

Mesmo quando o tempo é fixado, o conceito de objetividade é ainda muito importante. Conforme já mencionado, as linhas parametrizadas de campo magnético dependem do observador. Em outras palavras, para uma mudança do parâmetro s , observadores em diferentes referenciais poderão ver diferentes linhas de campo magnético. Por exemplo, um referencial \hat{e}_1 parado em relação à Terra poderá enxergar uma parcela de plasma contendo linhas de campo magnético paralelas e distribuídas

uniformemente no espaço. Neste caso, este observador não enxergará densidades de correntes fluindo, já que para ele $\nabla \times \vec{B} = 0$. Por outro lado, para um observador em um referencial rotacionando \hat{e}'_1 , curvaturas nas linhas de campo magnético serão observadas, conforme a Figura 7.8. Isto trará um sério problema de interpretação física, visto que para este último observador, densidades de correntes deveriam ser vistas, já que para ele, $\nabla \times \vec{B} \neq 0$.

Figura 7.8 - Figura ilustrando a geometria de uma linha de campo magnética vista por observadores situados em referenciais distintos. Em (a), o observador (linha vermelha) está em um referencial (\hat{e}_1) em repouso com relação ao referencial de uma linha de campo magnético (linha azul) irrotacional. Para este observador $\nabla \times \vec{B} = 0$, e portanto, densidades de correntes não deveriam ser vistas. Em (b), o referencial do observador passa a rotacionar (\hat{e}'_1) em relação à linha de campo, de modo que o efeito observado é de uma torção da linha, conforme (c). Neste caso $\nabla \times \vec{B} \neq 0$ e densidades de correntes deveriam ser vistas, surgindo assim uma inconsistência física.



Fonte: Prior e Yeates (2014).

7.3.4 Prova da Objetividade do IACD

Aqui estão descritos em detalhe os passos para se provar que a técnica IACD é objetiva. Com isto, validamos o seu uso. Neste caso, damos uma importante contri-

buição para a física de plasmas espaciais, visto que esta passa a ganhar uma nova ferramenta de análise robusta e criteriosa.

No caso do LAVD, a sua objetividade é demonstrada utilizando a definição de tensor de gradiente de velocidades (HALLER et al., 2016). De maneira similar, para o caso do IACD, consideraremos o tensor de gradiente magnético e tensor de correntes, sendo o primeiro definido como (KOTSIAROS; OLSEN, 2012):

$$\nabla \vec{B} = \begin{pmatrix} \partial_x B_x & \partial_y B_x & \partial_z B_x \\ \partial_x B_y & \partial_y B_y & \partial_z B_y \\ \partial_x B_z & \partial_y B_z & \partial_z B_z \end{pmatrix}$$

Neste caso, a matriz $\nabla \vec{B}$ é chamada de tensor de gradiente magnético (KOTSIAROS; OLSEN, 2012), sendo este o análogo magnético do tensor de gradiente de velocidades.

Sabe-se que todo tensor pode ser separado entre suas partes simétrica (**S**) e anti-simétrica (**A**) (ARFKEN; WEBER, 2012). Neste caso, podemos escrever o tensor de gradiente magnético como

$$\nabla \vec{B} = \mathbf{S} + \mathbf{A}, \quad (7.37)$$

onde as partes simétrica e antissimétrica podem ser escritas como

$$\mathbf{S} = \frac{\nabla \vec{B} + \nabla \vec{B}^\top}{2}, \quad (7.38)$$

$$\mathbf{A} = \frac{\nabla \vec{B} - \nabla \vec{B}^\top}{2}. \quad (7.39)$$

Substituindo as componentes de $\nabla \vec{B}$ em **A**, obtemos a seguinte matriz:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & (\partial_y B_x - \partial_x B_y) & (\partial_z B_x - \partial_x B_z) \\ (\partial_x B_y - \partial_y B_x) & 0 & (\partial_z B_y - \partial_y B_z) \\ (\partial_x B_z - \partial_z B_x) & (\partial_y B_z - \partial_z B_y) & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.40)$$

Note que rotacional do campo magnético pode ser escrito da seguinte forma:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = (\partial_y B_z - \partial_z B_y) \hat{x} + (\partial_z B_x - \partial_x B_z) \hat{y} + (\partial_x B_y - \partial_y B_x) \hat{z}. \quad (7.41)$$

Considerando as componentes do vetor de densidade de corrente, a lei de Ampère pode ser escrita como:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 (J_x \hat{x} + J_y \hat{y} + J_z \hat{z}). \quad (7.42)$$

Assim, comparando (7.41) and (7.42), obtemos

$$\partial_y B_z - \partial_z B_y = \mu_0 J_x, \quad (7.43)$$

$$\partial_z B_x - \partial_x B_z = \mu_0 J_y, \quad (7.44)$$

$$\partial_x B_y - \partial_y B_x = \mu_0 J_z. \quad (7.45)$$

Comparando agora os elementos da parte antissimétrica do tensor de gradiente magnético \mathbf{A} em (7.40), com as equações (7.43)-(7.45), podemos perceber que

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{2} \begin{pmatrix} 0 & -J_z & J_y \\ J_z & 0 & -J_x \\ -J_y & J_x & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{2} \mathbf{J}, \quad (7.46)$$

onde \mathbf{J} é definido como tensor de densidade de corrente (KOTSIAROS; OLSEN, 2012), que possui a propriedade $\mathbf{J} = -\mathbf{J}^\top$.

Seja agora o vetor $\vec{r} = \vec{r}(\vec{R}, s)$, definido aqui como o vetor de posição espacial e $\vec{R} = \vec{R}(\vec{r}, s)$ definido como vetor de posição material, que podem ser escritos como

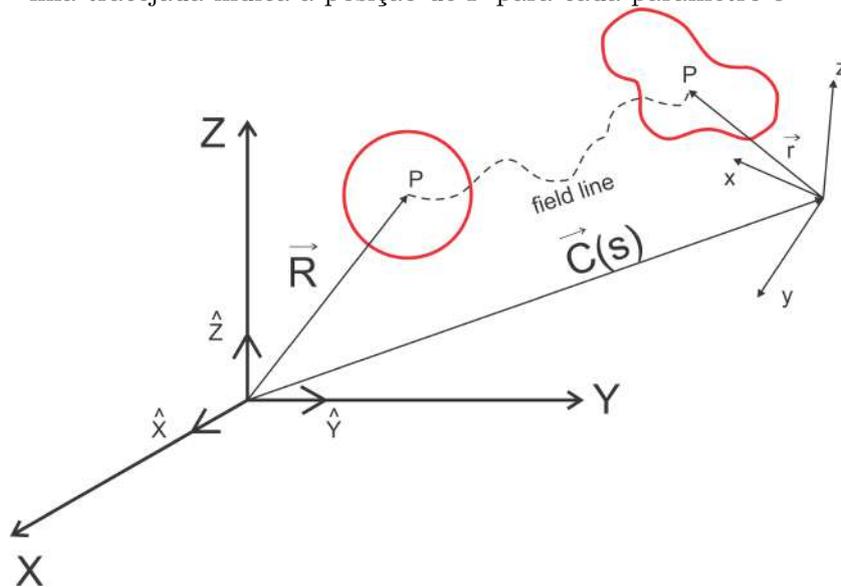
$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}(\vec{R}, s) \rightarrow \text{descrição lagrangiana;} \\ \vec{R} = \vec{R}(\vec{r}, s) \rightarrow \text{descrição euleriana,} \end{cases} \quad (7.47)$$

onde \vec{r} e \vec{R} são, respectivamente, as coordenadas material e espacial e s é o parâ-

metro espacial. As componentes de \vec{r} and \vec{R} fornecem as coordenadas espaciais e lagrangianas, respectivamente.

A figura 7.9 ilustra os vetores posição euleriano e lagrangiano de um dado ponto P em um corpo deformável (fluido), representado pelas linhas vermelhas.

Figura 7.9 - Coordenadas lagrangianas e espaciais para um corpo deformável (fluido). Linha tracejada indica a posição de P para cada parâmetro s



Fonte: Produção do autor.

Para o referencial lagrangiano andando sobre a linha parametrizada por s em 7.9 (linha tracejada), as coordenadas materiais são fixas para um dado s .

Em mecânica do contínuo, coordenadas materiais são usadas para definir um referencial com configuração indeformável (TRUESDELL; NOLL, 2004), ao passo que as deformações são definidas pelas coordenadas espaciais \vec{r} and \vec{R} . Diante disso, a descrição lagrangiana do tensor gradiente de deformação é dada por:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial X} & \frac{\partial x}{\partial Y} & \frac{\partial x}{\partial Z} \\ \frac{\partial y}{\partial X} & \frac{\partial y}{\partial Y} & \frac{\partial y}{\partial Z} \\ \frac{\partial z}{\partial X} & \frac{\partial z}{\partial Y} & \frac{\partial z}{\partial Z} \end{pmatrix}. \quad (7.48)$$

Neste caso, podemos mostrar que o tensor de gradiente de deformação se comporta

como um vetor objetivo. De fato,

$$\bar{\mathbf{F}} = \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial \bar{\mathbf{R}}} = \frac{\partial (\mathbf{Q}\mathbf{r} + \vec{b})}{\partial \bar{\mathbf{R}}} = \mathbf{Q} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \bar{\mathbf{R}}} \Rightarrow \boxed{\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{Q}\mathbf{F}}, \quad (7.49)$$

onde foi utilizada a Eq.(7.16).

A derivada tensor de gradiente de deformação com respeito ao parâmetro s é dada por

$$\mathbf{F}' = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial s}. \quad (7.50)$$

Utilizando Eq. (7.48), podemos reescrever Eq. (7.50) como

$$\mathbf{F}' = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial \bar{\mathbf{R}}} \right) = \frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{R}}} \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial s} \right) \Rightarrow \mathbf{F}' = \frac{\partial \vec{B}}{\partial \bar{\mathbf{R}}}, \quad (7.51)$$

onde foi usada Eq. (7.36) e também o fato de que coordenadas materiais $\bar{\mathbf{R}}$ não dependem de s .

Aplicando agora a regra da cadeia em (10.11), podemos escrever o tensor de gradiente magnético em termos de tensor de gradiente de deformação, a saber

$$\mathbf{F}' = \frac{\partial \vec{B}}{\partial \bar{\mathbf{R}}} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \bar{\mathbf{R}}} \Rightarrow \mathbf{F}' = \nabla \vec{B} \mathbf{F} \Rightarrow \boxed{\nabla \vec{B} = \mathbf{F}' \mathbf{F}^{-1}}. \quad (7.52)$$

Utilizando Eqs. (7.49) e (7.52), podemos mostrar que o tensor de gradiente magnético NÃO é objetivo. De fato,

$$\begin{aligned} \bar{\nabla} \bar{\vec{B}} &= \bar{\mathbf{F}}' \bar{\mathbf{F}}^{-1} = (\mathbf{Q}\mathbf{F})' (\mathbf{Q}\mathbf{F})^{-1} \\ &= (\mathbf{Q}'\mathbf{F} + \mathbf{Q}\mathbf{F}') (\mathbf{F}^{-1}\mathbf{Q}^{-1}) \\ &= \mathbf{Q}'\mathbf{F}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{Q}^\top + \mathbf{Q}\mathbf{F}'\mathbf{F}^{-1}\mathbf{Q}^\top \\ &= \mathbf{Q}'\mathbf{Q}^\top + \mathbf{Q}\nabla \vec{B}\mathbf{Q}^\top, \end{aligned} \quad (7.53)$$

onde foi usado o fato de que \mathbf{Q} é uma matriz ortogonal, ou seja, $\mathbf{Q}^\top = \mathbf{Q}^{-1}$.

Nós ainda podemos usar os resultados de Eq. (7.53) para provar que a parte antissimétrica de $\nabla\mathbf{B}$ (Eq. (7.39)), também NÃO é objetivo. De fato,

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{A}} &= \frac{\bar{\nabla}\bar{\vec{B}} - \bar{\nabla}\bar{\vec{B}}^\top}{2} \\
&= \frac{1}{2} \left[\mathbf{Q}'\mathbf{Q}^\top + \mathbf{Q}\nabla\vec{B}\mathbf{Q}^\top - (\mathbf{Q}'\mathbf{Q}^\top + \mathbf{Q}\nabla\vec{B}\mathbf{Q}^\top)^\top \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\mathbf{Q}'\mathbf{Q}^\top + \mathbf{Q}\nabla\vec{B}\mathbf{Q}^\top - \mathbf{Q}\mathbf{Q}'^\top - \mathbf{Q}\nabla\vec{B}^\top\mathbf{Q}^\top \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\mathbf{Q}(\nabla\vec{B} - \nabla\vec{B}^\top)\mathbf{Q}^\top + 2\mathbf{Q}'\mathbf{Q}^\top \right] \\
\bar{\mathbf{A}} &= \mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^\top + \mathbf{Q}'\mathbf{Q}^\top, \tag{7.54}
\end{aligned}$$

onde a relação $\mathbf{Q}'\mathbf{Q}^\top = -\mathbf{Q}\mathbf{Q}'^\top$ foi usada². Portanto, o tensor de densidade de corrente \mathbf{J} , sendo proporcional ao tensor não objetivo \mathbf{A} (Eq. (7.46)), também NÃO é objetivo.

Embora a parte antissimétrica do tensor \mathbf{A} não seja objetiva, o desvio da sua média é uma quantidade objetiva. De fato,

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{A}} - \langle \bar{\mathbf{A}} \rangle &= \mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^\top + \mathbf{Q}'\mathbf{Q}^\top - \langle \mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^\top + \mathbf{Q}'\mathbf{Q}^\top \rangle \\
&= \mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^\top + \mathbf{Q}'\mathbf{Q}^\top - \mathbf{Q}\langle \mathbf{A} \rangle\mathbf{Q}^\top - \mathbf{Q}'\mathbf{Q}^\top \\
&= \mathbf{Q}(\mathbf{A} - \langle \mathbf{A} \rangle)\mathbf{Q}^\top. \tag{7.55}
\end{aligned}$$

onde foi usado o fato de $\langle . \rangle$ representar uma média espacial e que a matriz de rotação \mathbf{Q} é espacialmente constante, para valores fixos de s . Por isso pudemos retirar \mathbf{Q} de dentro da média $\langle . \rangle$.

Embora tenha sido mostrado que a quantidade $\bar{\mathbf{A}} - \langle \bar{\mathbf{A}} \rangle$ é objetiva, o foco desta seção é mostrar a objetividade do integrando de 7.35, ou seja, do desvio da média do tensor densidade de corrente.

Para este propósito, escrevemos o tensor \mathbf{A} na Eq.(7.46) em notação indicial, ou

$$\overline{{}^2\mathbf{Q}\mathbf{Q}^\top = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^{-1} = 1} \Rightarrow (\mathbf{Q}\mathbf{Q}^\top)' = \mathbf{Q}'\mathbf{Q}^\top + \mathbf{Q}\mathbf{Q}'^\top = 0 \Rightarrow \mathbf{Q}'\mathbf{Q}^\top = -\mathbf{Q}\mathbf{Q}'^\top$$

seja,

$$\begin{aligned}
A_{ij} &= -\frac{\mu_0}{2}\varepsilon_{ijk}J_k \\
A_{ij}e_j &= -\frac{\mu_0}{2}\varepsilon_{ijk}J_ke_j = \frac{\mu_0}{2}\varepsilon_{ijk}e_jJ_k \\
\mathbf{A}\vec{e} &= \frac{\mu_0}{2}\left(\vec{J}\times\vec{e}\right), \quad \forall\vec{e}\in\mathbb{R}^3,
\end{aligned} \tag{7.56}$$

onde ε_{ijk} é o tensor de Levi-Civita³ e \vec{J} é o vetor dual (FANG, 2019) associado ao tensor anti-simétrico \mathbf{A} .

Reescrevendo Eq. (7.54) em termos de \mathbf{A} e multiplicando-o por um vetor arbitrário e objetivo \vec{e} , obtemos

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \mathbf{Q}^\top\bar{\mathbf{A}}\mathbf{Q} - \mathbf{Q}^\top\mathbf{Q}' \\
\mathbf{A}\vec{e} &= \mathbf{Q}^\top\bar{\mathbf{A}}\mathbf{Q}\vec{e} - \mathbf{Q}^\top\mathbf{Q}'\vec{e}.
\end{aligned} \tag{7.57}$$

Agora, usando a transformação objetiva $\vec{e} = \mathbf{Q}\vec{e}$, podemos reescrever Eq. (7.57) como

$$\mathbf{A}\vec{e} = \mathbf{Q}^\top\bar{\mathbf{A}}\vec{e} - \mathbf{Q}^\top\mathbf{Q}'\mathbf{Q}^\top\vec{e}. \tag{7.58}$$

Neste caso, de forma completamente análoga ao que foi feito em Eq. (7.56), podemos definir um vetor arbitrário $\vec{\alpha}$ associado ao tensor $\mathbf{Q}'\mathbf{Q}^\top$. Desde que $\mathbf{Q}'\mathbf{Q}^\top$ é um tensor anti-simétrico, seu vetor dual $\vec{\alpha}$ deverá ser um vetor não nulo, unicamente definido por (FANG, 2019)

$$\mathbf{Q}'\mathbf{Q}^\top\vec{e} = \frac{\mu_0}{2}\left(\vec{\alpha}\times\vec{e}\right). \tag{7.59}$$

onde, de acordo com (7.56), $\vec{\alpha}$ é o vetor associado ao tensor $\mathbf{Q}'\mathbf{Q}^\top$.

Substituindo agora Eqs. (7.56) e (7.59) em Eq. (7.58), obtemos

³ $\varepsilon_{123} = \varepsilon_{312} = \varepsilon_{231} = 1$, $\varepsilon_{213} = \varepsilon_{321} = \varepsilon_{132} = -1$ and $\varepsilon_{ijk} = 0$ para índices repetidos

$$\begin{aligned}
\frac{\mu_0}{2} (\vec{J} \times \vec{e}) &= \mathbf{Q}^\top \frac{\mu_0}{2} (\vec{\bar{J}} \times \vec{\bar{e}}) - \left[\mathbf{Q}^\top \frac{\mu_0}{2} (\vec{\alpha} \times \vec{\bar{e}}) \right] \\
\vec{J} \times \vec{e} &= \mathbf{Q}^\top (\vec{\bar{J}} \times \vec{\bar{e}}) - \mathbf{Q}^\top (\vec{\alpha} \times \vec{\bar{e}}) \\
\vec{J} \times \vec{e} &= \left[(\mathbf{Q}^\top \vec{\bar{J}}) \times (\mathbf{Q}^\top \vec{\bar{e}}) \right] - \left[(\mathbf{Q}^\top \vec{\alpha}) \times (\mathbf{Q}^\top \vec{\bar{e}}) \right] \\
\vec{J} \times \vec{e} &= (\mathbf{Q}^\top \vec{\bar{J}}) \times \vec{\bar{e}} - (\mathbf{Q}^\top \vec{\alpha}) \times \vec{\bar{e}} \\
\vec{J} \times \vec{e} &= \left[\mathbf{Q}^\top \vec{\bar{J}} - \mathbf{Q}^\top \vec{\alpha} \right] \times \vec{\bar{e}} \\
\vec{J} &= \mathbf{Q}^\top \vec{\bar{J}} - \mathbf{Q}^\top \vec{\alpha}. \tag{7.60}
\end{aligned}$$

A transformação descrita em Eq. (7.60), demonstra que o vetor densidade de corrente NÃO é uma quantidade objetiva. Porém, usando Eq. (7.60), nós obtemos que o desvio da média do vetor de corrente é uma quantidade objetiva. De fato,

$$\begin{aligned}
\vec{J} - \langle \vec{J} \rangle &= \mathbf{Q}^\top \vec{\bar{J}} - \mathbf{Q}^\top \vec{\alpha} - \langle \mathbf{Q}^\top \vec{\bar{J}} - \mathbf{Q}^\top \vec{\alpha} \rangle \\
&= \mathbf{Q}^\top \vec{\bar{J}} - \mathbf{Q}^\top \vec{\alpha} - \mathbf{Q}^\top \langle \vec{\bar{J}} \rangle + \mathbf{Q}^\top \vec{\alpha} \\
&= \mathbf{Q}^\top (\vec{\bar{J}} - \langle \vec{\bar{J}} \rangle) \\
\Rightarrow \boxed{\vec{\bar{J}} - \langle \vec{\bar{J}} \rangle} &= \mathbf{Q} (\vec{J} - \langle \vec{J} \rangle). \tag{7.61}
\end{aligned}$$

Embora nossa tarefa esteja quase concluída, ainda resta um último passo. Isso porque a grandeza para a qual estamos tentando provar a objetividade é o integrando de Eq. (7.35). Neste caso, precisamos analisar o valor absoluto de 7.61, ou seja, de $|\vec{J} - \langle \vec{J} \rangle|$. Portanto, façamos

$$\left| \vec{\bar{J}} - \langle \vec{\bar{J}} \rangle \right| = \left| \mathbf{Q} (\vec{J} - \langle \vec{J} \rangle) \right| = \left| \vec{J} - \langle \vec{J} \rangle \right| \tag{7.62}$$

onde foi utilizado o fato de que, sendo \mathbf{Q} uma matriz de rotação, então ela deverá preservar o comprimento do vetor. Portanto, o método IACD é capaz de detectar objetivamente vórtices magnéticos coerentes. Neste caso, seus resultados não deverão gerar ambiguidades.

Para finalizarmos este capítulo, vale a pena fazer uma observação. Isto porque devemos nos atentar que $\langle \vec{J} \rangle$ é uma grandeza não objetiva, já que tomando o valor médio de 7.60, obtemos

$$\langle \vec{J} \rangle = \mathbf{Q}^T \langle \vec{\bar{J}} \rangle - \mathbf{Q}^T \vec{\alpha}. \quad (7.63)$$

Logo, no caso particular em que $\langle \vec{J} \rangle = 0$, então $\langle \vec{\bar{J}} \rangle = \alpha$, sendo α um vetor arbitrário não nulo e unicamente definido por 7.59.

Com isto, concluímos o principal objetivo deste capítulo e uma das principais contribuições desta tese.

8 APLICAÇÕES 2-D E 3-D DA TÉCNICA IACD

No capítulo anterior foi proposto o modelo IACD, potencialmente eficaz para detecção de vórtices magnéticos e densidades de correntes, o qual foi cuidadosamente demonstrado ser objetivo e não sofrer dos mesmos problemas que técnica LAVD apresenta. Neste capítulo, desenvolveremos alguns exemplos práticos 2D e 3D, que confirmam a eficácia desta metodologia.

8.1 Problemas MHD 2-D incompressível

Para esta seção, aplicaremos o método IACD em problemas bidimensionais. Para isto, faremos uso das equações MHD 2-D em sua forma adimensional e conservativa para um fluido incompressível, ou seja,

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\nabla p - \nabla \cdot (\vec{u}\vec{u} - \vec{B}\vec{B}), \quad (8.1)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \cdot (\vec{u}\vec{B} - \vec{B}\vec{u}), \quad (8.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad (8.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (8.4)$$

onde \vec{u} é a velocidade, \vec{B} é o campo magnético e p é a pressão total sobre o fluido.

Neste caso, Equações (8.1)-(8.4) são resolvidas dentro de um domínio quadrado, cujo lado é dado por $L = 2\pi$ e com condições de contorno periódicos em ambas as direções. A integração numérica espacial é realizada com o uso do método de diferenças finitas e a integração temporal é resolvida com o método de Runge-Kutta de quarta ordem. A resolução numérica utilizada é 512×512 . Nas próximas duas subseções, as equações (8.1)-(8.4) serão resolvidas utilizando dois conjuntos diferentes de condições iniciais: condições iniciais vorticiais de Orszag-Tang e Condições iniciais baseado no modelo de *magnetotail* de Wu-Chang

8.1.1 Condições iniciais vorticiais de Orszag-Tang

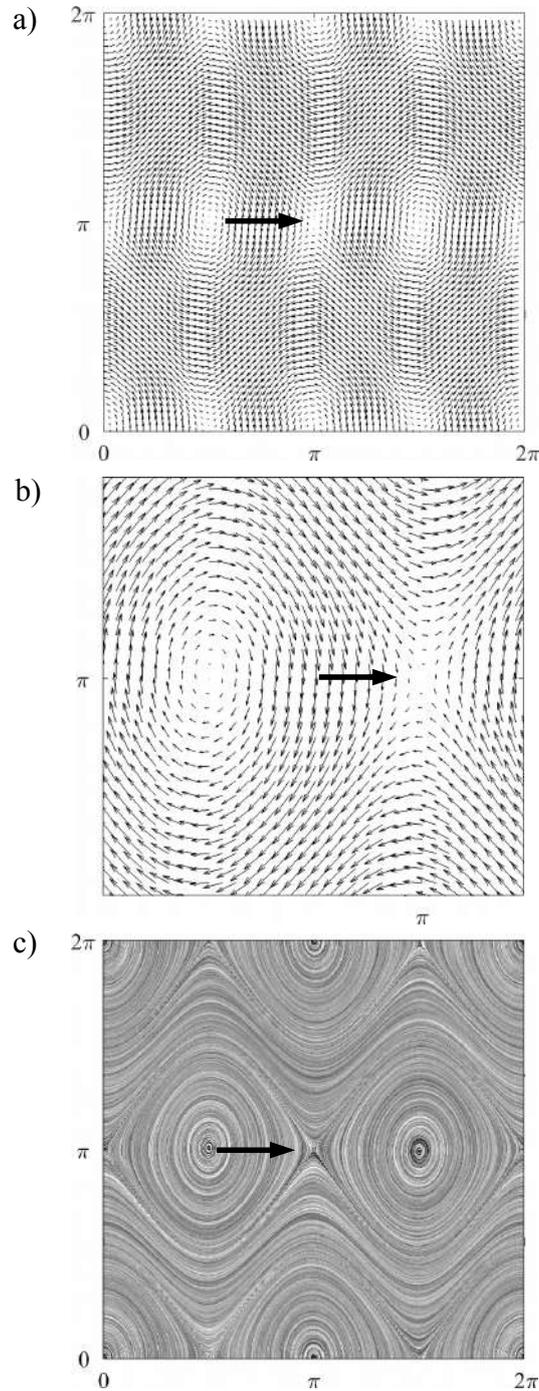
Vórtices de Orszag-Tang são definidos pela seguinte *streamfunction* ψ e potencial magnético a

$$\psi(x, y) = 2(\cos x + \cos y), \quad (8.5)$$

$$a(x, y) = \cos 2x + 2 \cos y. \quad (8.6)$$

Em Fig.8.1(a) apresenta o campo vetorial do campo magnético para o instante de tempo $t_0 = 0.01$ e em Fig.8.1(b) é mostrado a região central aumentada de Fig.8.1(a), onde existe uma região de *X-point*, provavelmente devido uma reconexão magnética. Já em Fig.8.1(c) são apresentadas as linhas magnéticas integradas a partir do campo vetorial magnético (B_x, B_y) .

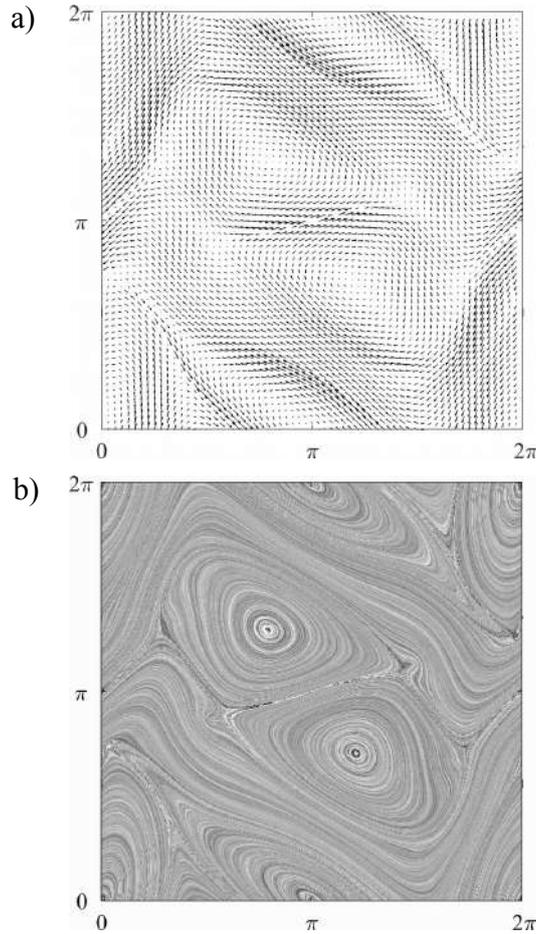
Figura 8.1 - Figura ilustrando o campo de velocidades contendo vórtices de Orszag-Tang. Em (b), um zoom da região central de (a). Em (c), as linhas de campo magnético integradas a partir do campo de velocidades. As setas indicam a localização de X -point.



Fonte: Trabalho submetido ao Physical Review E.

Após a integração de uma unidade de tempo ($t = 1$), o campo vetorial magnético é distorcido, conforme pode ser visto na Figura 8.2.

Figura 8.2 - O mesmo da Figura 8.1, porém após a integração de uma unidade de tempo ($t = 1$).



Fonte: Trabalho submetido ao Physical Review E.

Com o objetivo de medir a eficiência do método IACD, compararemos a sua eficiência mediante a detecção dos vórtices com a técnica usual utilizando a densidade de correntes \mathbf{J} . Neste caso, aplicaremos as duas técnicas nas condições iniciais dadas pelo campo vetorial de Fig.8.1. A Figura 8.3 ilustra os vórtices detectados pela densidade de corrente \mathbf{J} em t_0 . Em Fig.8.3(a) se encontra o *colour plot* da densidade de corrente normalizada pelo seu valor máximo ($\max(|\mathbf{J}|)$). Neste caso, são detectados dois vórtices, representados pelas linhas pretas. Para a detecção destes vórtices são selecionados os locais de máxima magnitude da densidade de corrente normalizada,

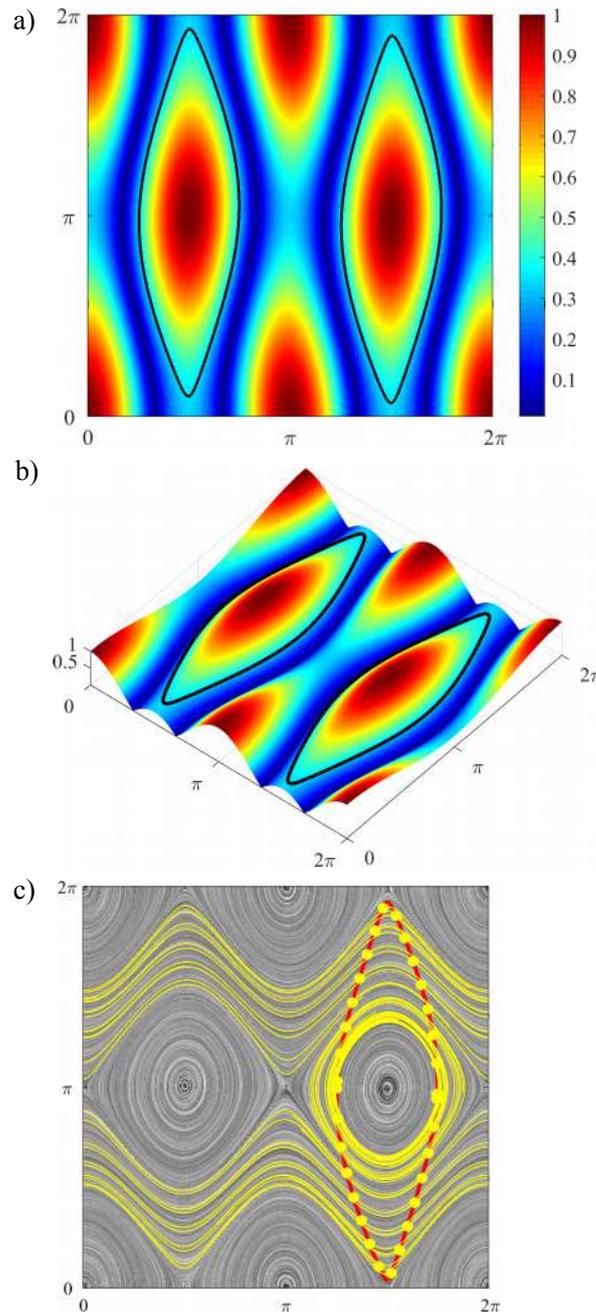
em seguida, linhas vorticais convexas mais externas em torno destes pontos são extraídas utilizando a função *contourc* do MATLAB. A Figura 8.3(b) é a mesma que Fig.8.3(a), porém mostrada em um plot de superfície. Já a Figura 8.3(c) mostra as linhas de campo magnético superposta por um dos dois vórtices detectados pela técnica usual de densidade de corrente, o qual é destacado por uma linha vermelha. Sobre este vórtice (linha vermelha), são colocadas condições iniciais representadas por pontos amarelos, os quais são integrados pela relação 7.29, ou seja,

$$\vec{B}(\vec{x}(s)) = \frac{d\vec{x}}{ds}, \quad \vec{x}(s_0) = \vec{x}_0, \quad (8.7)$$

Analisando a Figura 8.3(c), podemos perceber que as condições iniciais (pontos amarelos) após serem integrados se espalham para fora do vórtice (linhas amarelas), indicando que o vórtice detectado pela técnica usual de densidade de correntes não é coerente, ou seja, condições iniciais integradas sobre tal estrutura não são mantidas sobre a mesma.

(a) The normalized magnitude of the current density and the vortices detected as convex closed curves (black) from the contour plot of $|J|$; (b) the line integral convolution plot of the magnetic field lines (gray) and the field lines starting from initial conditions (yellow circles) on the J vortex boundary shown in (a) (red).

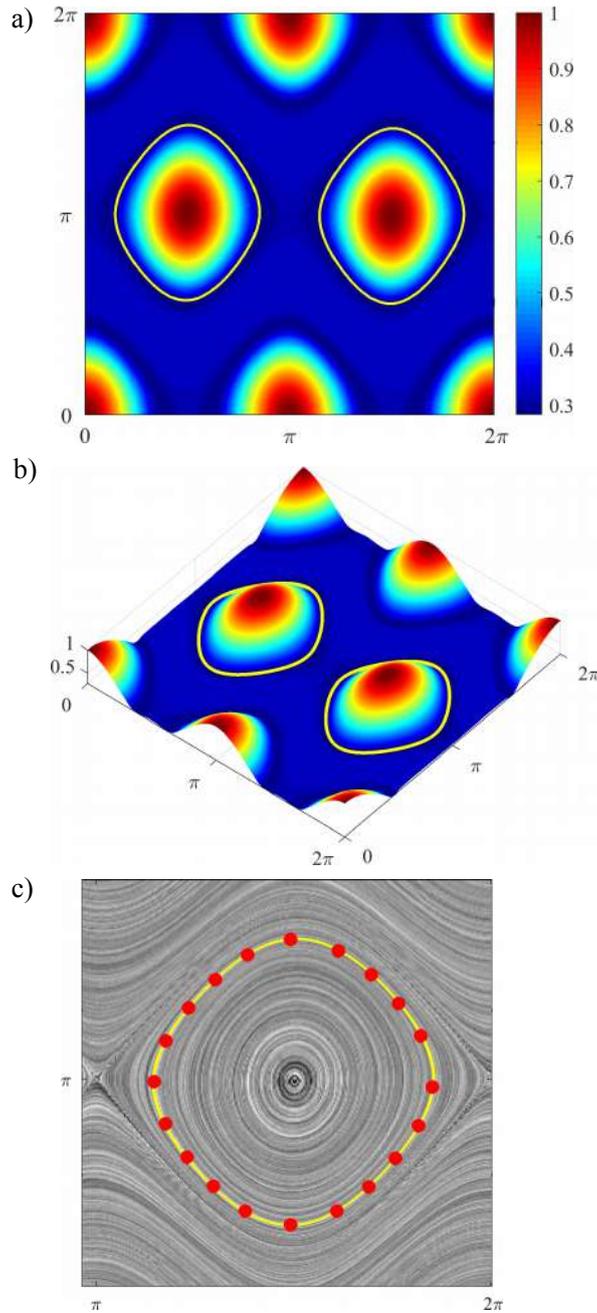
Figura 8.3 - Figura ilustrando a detecção de estruturas vorticais de um campo de Orszag-Tang em t_0 utilizando a técnica de densidade de correntes. Em (a), está ilustrada as magnitudes das densidades de correntes normalizadas e as estruturas vorticais (linhas pretas) detectadas pelo *contour plot*, onde são escolhidas as curvas de nível centradas nos valores máximos das densidades de corrente normalizada, de modo que estas sejam convexas e mais externas. Em (b), o mesmo de (a), porém com plot de superfície. Em (c), são destacadas linhas de campo magnético superposta por um dos dois vórtices detectados pela técnica usual de densidade de corrente, o qual é destacado por uma linha vermelha. Sobre este vórtice, são colocadas condições iniciais representadas por pontos amarelos, os quais são integrados, formando as linhas amarelas, cujas trajetórias se afastam da linha vortical.



Fonte: Trabalho submetido ao Physical Review E.

Por outro lado, utilizando a técnica IACD em t_0 obtemos os resultados ilustrados pela Figura 8.4. Em Fig.8.4(a) é mostrada o campo IACD normalizado pelo seu valor máximo e os dois vórtices, representados pelas linhas amarelas, detectados por esta técnica. Quando condições iniciais, representadas por pontos vermelhos, são colocadas sobre um dos vórtices e integradas, pode-se verificar em Fig.8.4(c) que as trajetórias integradas permanecem sobre o vórtice. Portanto, a técnica IACD parece detectar com bastante precisão os vórtices que de fato são coerentes, ao contrário da primeira técnica testada. Em Fig.8.4(b), temos o mesmo que em Fig.8.4(a), porém plotada em superfície.

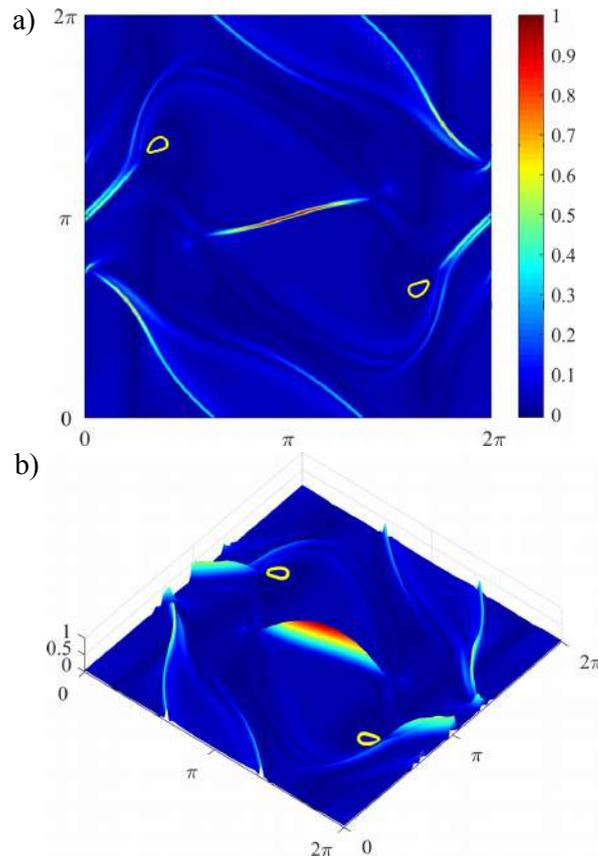
Figura 8.4 - Figura ilustrando a detecção de estruturas vorticais de um campo de Orszag-Tang em t_0 utilizando a técnica IACD. Em (a), está ilustrado o campo IACD normalizado e as estruturas vorticais (linhas vermelhas) detectadas. Em (b), o mesmo de (a), porém com plot de superfície. Em (c), são destacadas linhas de campo magnético superposta por um dos dois vórtices detectados pela técnica IACD, o qual é destacado por uma linha amarela. Sobre este vórtice, são colocadas condições iniciais representadas por pontos vermelhos, os quais são integrados, formando as linhas vermelhas, cujas trajetórias permanecem sobre a linha vortical.



Fonte: Trabalho submetido ao Physical Review E.

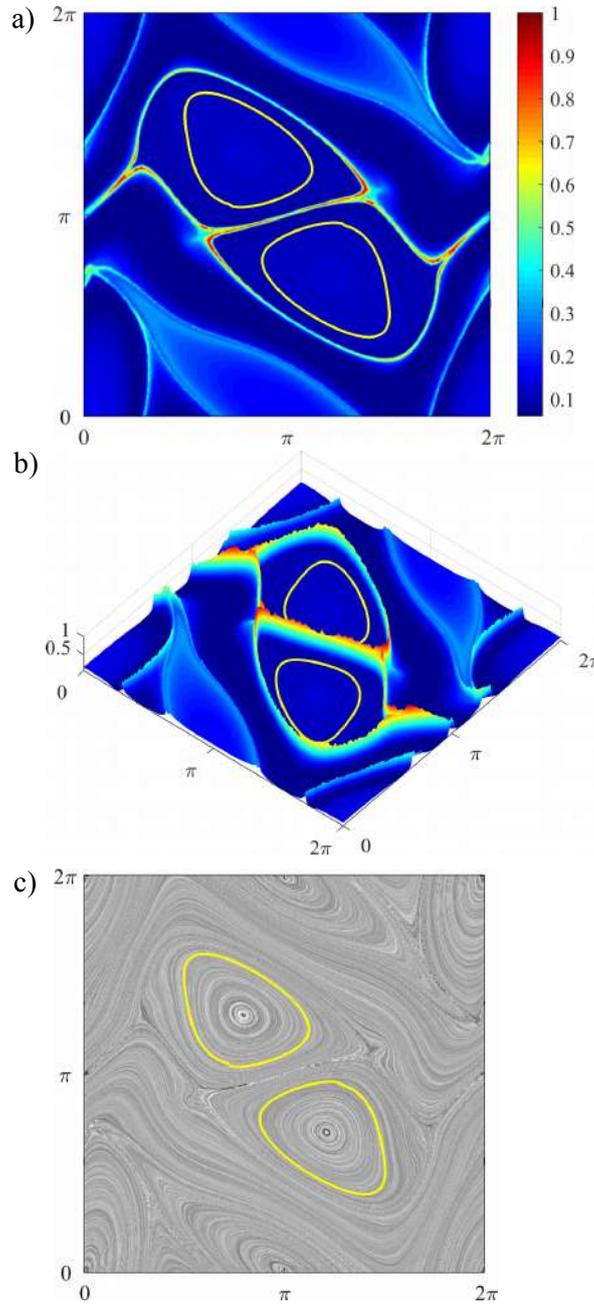
Para um outro dado instante de tempo $t = 1$, as técnicas IACD e densidade de correntes são novamente utilizadas para detecção de estruturas vorticais coerentes. Na Figura 8.5(a) está ilustrada a densidade de correntes e as estruturas vorticais detectadas por esta grandeza, ao passo que na Figura 8.6(a) se encontra o campo IACD e suas respectivas estruturas vorticais detectadas. Comparando estas duas figuras, podemos notar claramente que a metodologia utilizando a densidade de correntes não consegue detectar com precisão as estruturas vorticais, ao contrário da técnica IACD, que consegue resultados muito mais satisfatórios. Em Fig.8.5(b) e Fig.8.6(b), os mesmos que Em Fig.8.5(a) e Em Fig.8.6(a), respectivamente, porém plotados em superfície. Em Fig.8.6(c) se encontram as linhas de campo magnético superpostas pelas trajetórias (linha amarela) de condições iniciais colocadas sobre as estruturas vorticais detectadas pela técnica IACD.

Figura 8.5 - Figura ilustrando a densidade de corrente para o campo de Orszag-Tang em $t = 1$. Em (a), a magnitude da densidade de corrente normalizada e os pequenos vórtices (linhas amarelas) detectados por esta metodologia. Em (b), o mesmo de (a), porém plotado em superfície.



Fonte: Trabalho submetido ao Physical Review E.

Figura 8.6 - Figura ilustrando em $t = 1$. Em (a), o campo IACD normalizado e os vórtices (linhas amarelas) detectados por esta metodologia. Em (b), o mesmo de (a), porém plotado em superfície. Em (c), as linhas de campo magnético superpostas pelas trajetórias (linha amarela) de condições iniciais colocadas sobre as estruturas vorticais detectadas pela técnica IACD.



Fonte: Trabalho submetido ao Physical Review E.

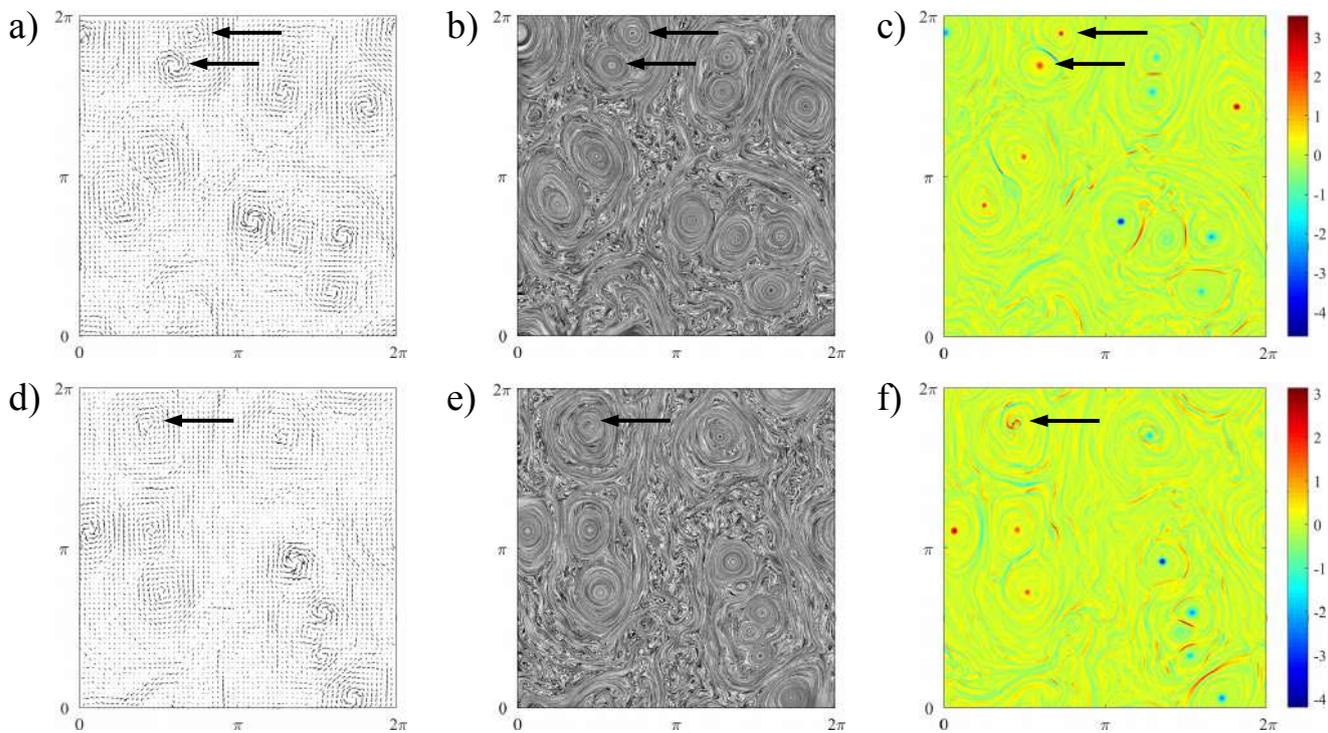
Portanto, nesta seção pudemos demonstrar a eficácia da técnica IACD em detectar

estruturas vorticais coerentes. Além disto, comparamos tal técnica com a técnica usual de detecção de vórtices magnéticos utilizando a densidade de correntes. Neste caso, pudemos comprovar a superioridade da técnica IACD.

8.1.2 Condições iniciais randômicas: modelo de magnetotail de Wu-Chang

Nesta subseção, utilizamos o modelo MHD de interações vorticais apresentado por Wu e Chang (2001) para novamente testarmos o método IACD. Neste caso, as condições iniciais são dadas por velocidade e campo magnético aleatórios, onde o campo magnético é especificado por uma função de fluxo. No espaço de Fourier, as duas componentes da velocidade e a função de fluxo são proporcionais à $k^2 \exp(-\alpha k^2)$, onde é utilizado $\alpha = 0.01$ e o pico inicial de espectro de energia cinética é dado por $k = 10$. As condições iniciais são tais que a amplitude máxima do campo de velocidade é 0.2 e do campo magnético é 0.3. Nos painéis superiores da Figura 8.7 se encontra o sistema para um tempo $t = 300$ e nos painéis inferiores um tempo $t = 386$. Neste caso, as Figuras 8.7(a),(d) mostram os vetores de campo magnético, Fig.8.7(b),(e) mostram as linhas de campo magnético e Fig8.7(c),(f) mostram as densidades de corrente. Nas partes superiores dos painéis da Figura 8.7 pode ser observado uma região (indicada pela seta) contendo um par de estruturas vorticais em $t = 300$ que acabam coalescendo em $t = 386$.

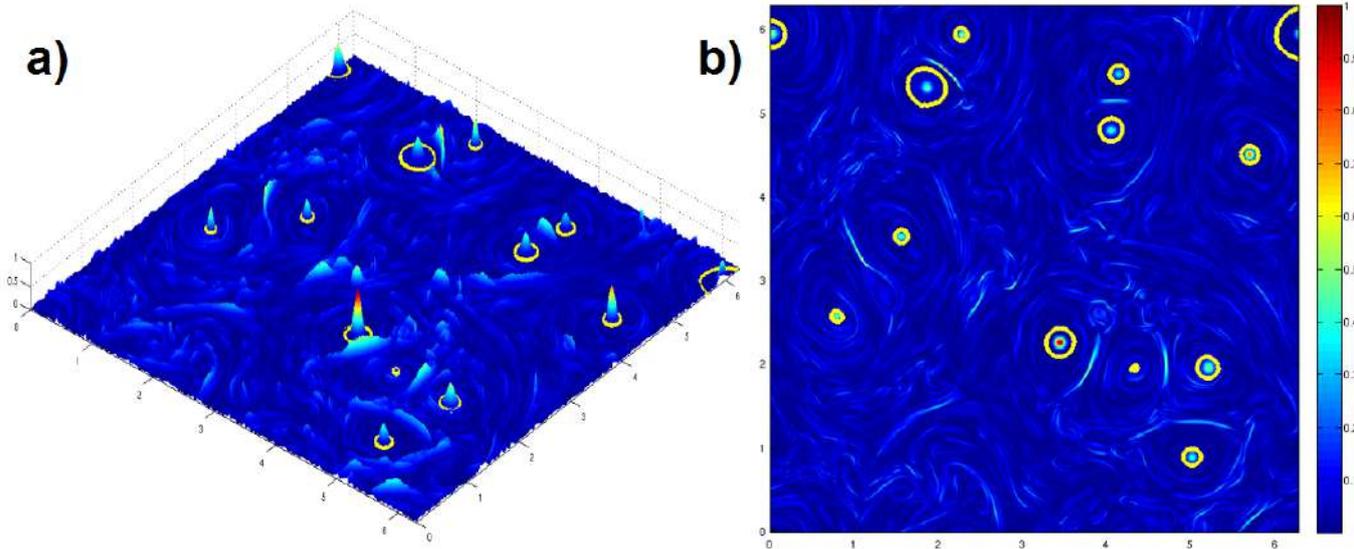
Figura 8.7 - Campos vorticais de Wu-Chang em $t = 300$ (painéis superiores) e em $t = 386$ (painéis inferiores). Em (a) e (d) são mostrados vetores de campo magnético. Em (b) e (e) são mostradas linhas de campo magnético. Em (c) and (f) são mostradas as densidades de correntes.



Fonte: Trabalho submetido ao Physical Review E.

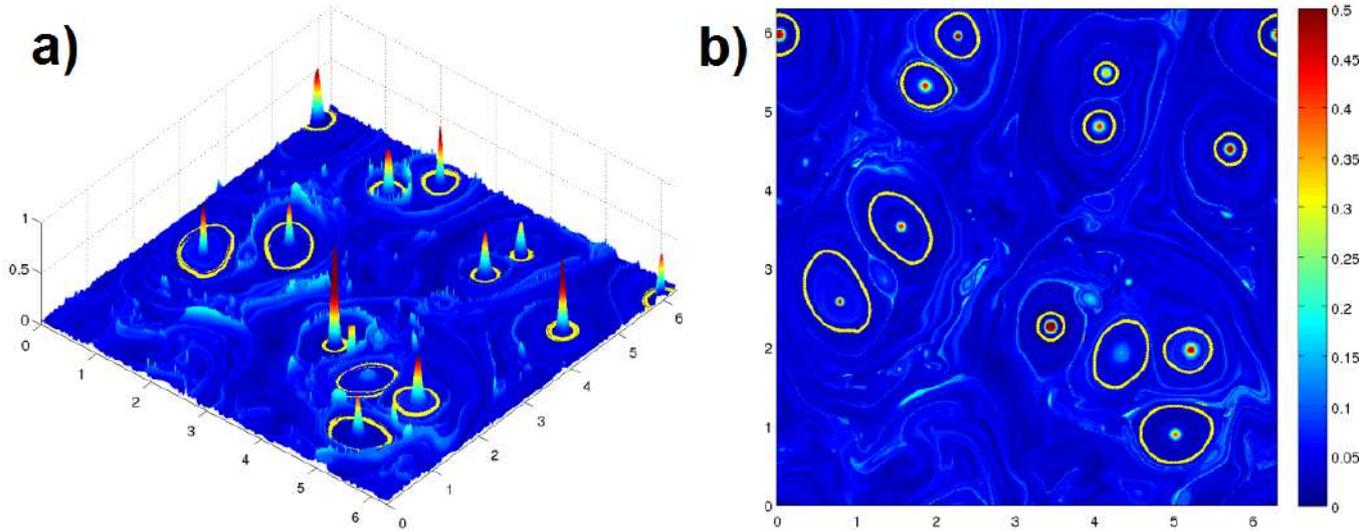
Com intuito de destacar a fusão vortical com mais detalhes aplicaremos novamente as técnicas IACD e de densidade de correntes para a detecção das estruturas vorticais. A Figura 8.8 mostra dois ângulos de visão da magnitude da densidade de correntes em $t = 300$ e o conjunto de vórtices (linhas amarelas) detectados pelos contornos centrados nos pontos de máximo de densidade de corrente, de tal maneira que estes contornos sejam convexos e os mais externos. Uma simples comparação entre as Figuras 8.7(b) e 8.8(b) sugere que os vórtices detectados pelos contornos das densidades de corrente parece subestimar as reais estruturas vorticais, já que esta técnica parece detectar vórtices muito menores dos vórtices reais. Já a Figura 8.9 mostra dois ângulos de visão do campo IACD em $t = 300$ e o conjunto de vórtices (linhas amarelas) detectados pela técnica IACD. Neste caso, uma simples comparação entre as Figuras 8.7(b) e 8.9(b) sugere que os vórtices detectados pela técnica IACD são compatíveis com os vórtices reais.

Figura 8.8 - Campos vorticais de Wu-Chang em $t = 300$ vistos por ângulos diferentes. Os anéis amarelos centrados nos pontos de máxima densidade de corrente representam as curvas de nível convexas e mais externas, representando os vórtices detectados pela técnica de densidade de corrente.



Fonte: Trabalho submetido ao Physical Review E.

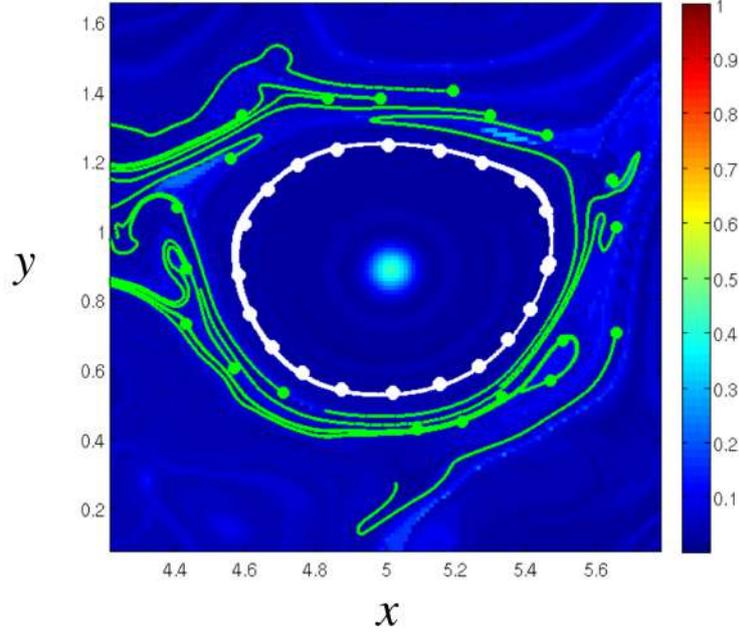
Figura 8.9 - Campos vorticais de Wu-Chang em $t = 300$ vistos por ângulos diferentes. Os anéis amarelos centrados nos pontos de máximo IACD representam os vórtices detectados pela técnica IACD.



Fonte: Trabalho submetido ao Physical Review E.

Para verificar a eficácia do método IACD em detectar vórtices coerentes, selecionamos um dos vórtices de Fig.8.9(b), o qual se encontra aumentado na Figura 8.10. Sobre este vórtice, colocamos algumas condições iniciais (pontos brancos), que são integrados formando as trajetórias dadas pelas linhas brancas. Pode-se notar claramente que tais trajetórias permanecem sobre a região vortical, indicando que o vórtice detectado pela técnica IACD é de fato coerente. A título de curiosidade, colocamos também condições iniciais (pontos verdes) fora da região vortical e as integramos. Como já era de se esperar, as trajetórias (linhas verdes) se afastam do vórtice.

Figura 8.10 - Figura mostrando um dos vórtices de Fig.8.9(b) aumentado. Pontos brancos e verdes representam condições iniciais colocadas sobre e fora do vórtice, respectivamente. Linhas brancas e verdes representam as trajetórias dos pontos brancos e verdes, respectivamente, quando integrados.



Fonte: Trabalho submetido ao Physical Review E.

8.2 Problema MHD 3-D compressível

Nas subseções anteriores mostramos que a técnica IACD é uma ferramenta bastante precisa na detecção de vórtices coerentes para o caso bidimensional. Entretanto, uma das maiores vantagens desta técnica é a sua eficácia também em problemas tridimensionais. Neste caso, dedicaremos esta seção para a aplicação da técnica IACD em um problema de simulação numérica MHD 3-D resistivo para um gás compressível e isotérmico. Neste caso, temos

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{\rho} + \mathbf{F}_{visc}, \quad (8.8)$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{u} \times \mathbf{B} + \eta \nabla^2 \mathbf{A}, \quad (8.9)$$

$$\frac{\partial \ln \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \ln \rho = -\nabla \cdot \mathbf{u}, \quad (8.10)$$

onde \mathbf{u} é o vetor velocidade, \mathbf{B} é o vetor campo magnético, ρ é densidade, c_s é a velocidade do som isotérmico, \mathbf{p} é a pressão, $\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B}/\mu_0$ é a densidade de corrente, μ_0 é constante de permeabilidade magnético no vácuo, \mathbf{A} é o vetor potencial magnético e η é a constante de difusividade magnética. O gradiente de pressão é escrito como $\nabla p/\rho = c_s^2 \nabla \ln \rho$, onde $c_s^2 = p/\rho$ é considerado constante. Já o termo de viscosidade é dado por $\mathbf{F}_{visc} = \nu(\nabla^2 \mathbf{u} + \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}/3 + 2\mathbf{S} \cdot \nabla \ln \rho)$, onde ν é a constante de viscosidade cinemática e \mathbf{S} é o tensor de tensão, dado por

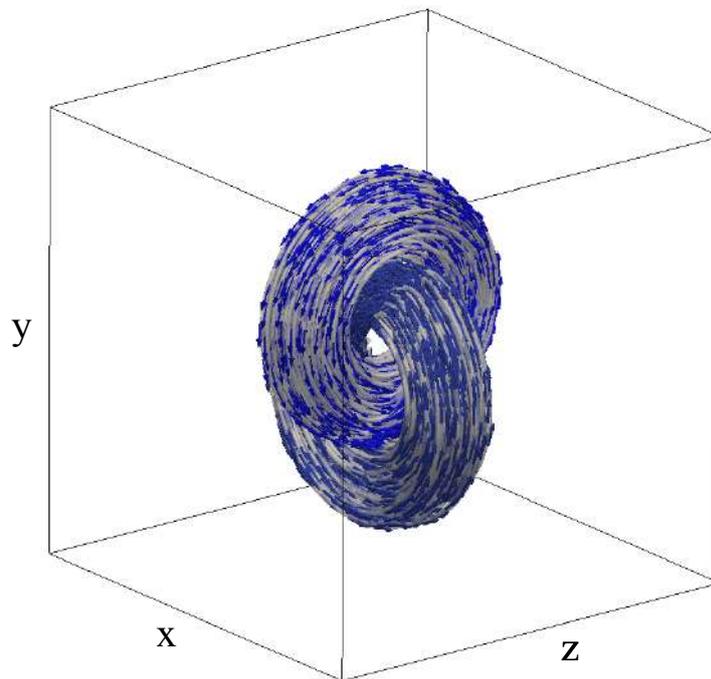
$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \nabla \cdot \mathbf{u} \right), \quad (8.11)$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker. O domínio é uma caixa com lados $L = 2\pi$ com condições periódicas de contorno, o que acarreta na conservação de massa, $\langle \rho \rangle = \rho_0$, onde ρ_0 é uma densidade uniforme inicial e os *brackets* representam média espacial. Quantidades adimensionais são adotadas onde o comprimento está em unidades de $L/2\pi$, \mathbf{u} está em unidades de c_s , ρ está em unidades de ρ_0 e \mathbf{B} está em unidades de $(\mu_0 \rho_0 c_s^2)^{1/2}$.

As equações (8.8)-(8.10) são resolvidas por meio de diferenças finitas centradas no espaço e são resolvidas no tempo por meio do método de Runge-Kutta de terceira ordem com passos variáveis. Para tal, foi utilizado o PENCIL CODE¹ em uma caixa de lados $L = 2\pi$ e com condições de contorno periódica. As condições iniciais são dadas por $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ e $\rho = \rho_0 = 1$. Para as condições iniciais magnéticas são adotados um par de anéis toroidais entrelaçados, ambos com mesmo fluxo e com os mesmos raios internos $R_i = 0.3$ e externos $R_o = 1$, conforme pode ser visto na Figura 8.11.

¹<http://pencil-code.nordita.org/>

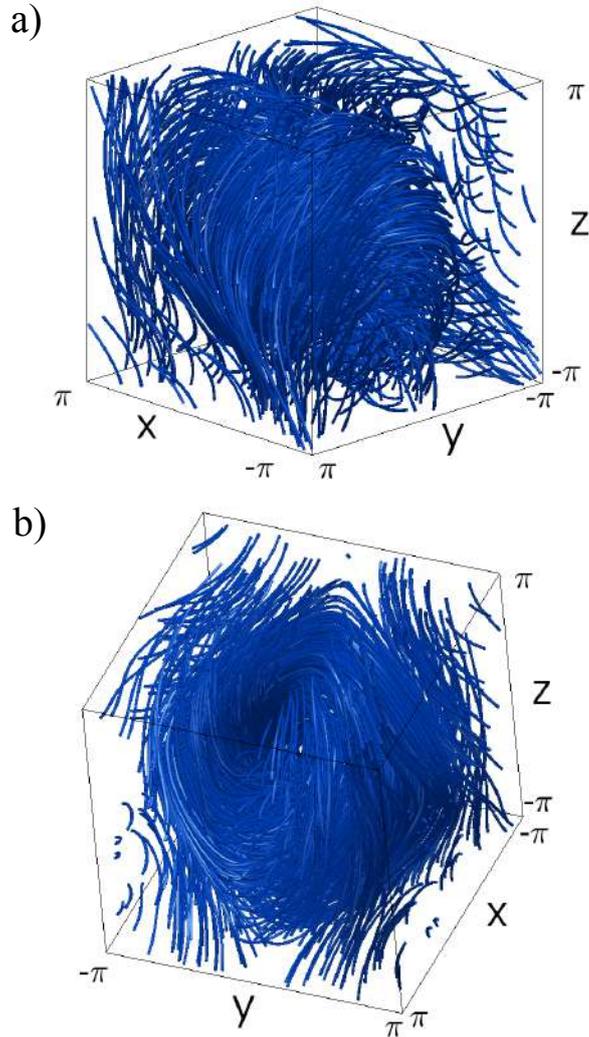
Figura 8.11 - Figura ilustrando dois anéis magnéticos entrelaçados em um tempo inicial t_0 , os quais são utilizados como condições iniciais magnética.



Fonte: Trabalho submetido ao Physical Review E.

No interior dos toros temos $\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$ e o perfil inicial de \mathbf{B} que atravessa cada toro é uma Gaussiana. Conforme pode ser visto em Fig.8.11, um dos toros está sobre o plano $z = 0$, enquanto que o outro está sobre o plano $x = 0$. Para este problema também é imposto $\eta = \nu = 0.003$ e tem sido adotado uma resolução numérica de 128^3 . Após um determinado tempo, a tensão devido a curvatura toma lugar e reconexões magnéticas começam a surgir, fazendo com que a topologia inicial seja perdida e os anéis começam a quebrar. A configuração das linhas de campo magnético após $t = 100$ é mostrada na Figura 8.12.

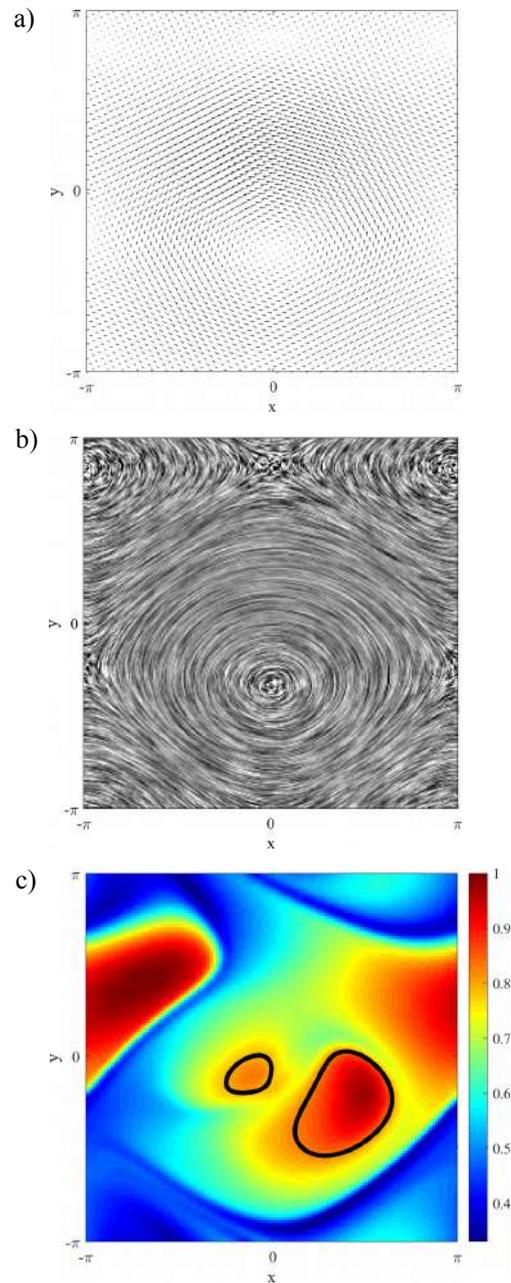
Figura 8.12 - Figura ilustrando os dois anéis magnéticos entrelaçados da Figura 8.12 após um tempo de $t = 100$. Os painéis (a) e (b) são exatamente os mesmos, porém vistos de ângulos diferentes.



Fonte: Trabalho submetido ao Physical Review E.

Neste caso, iniciamos nossas análises considerando as componentes horizontais das estruturas sobre o plano $z = 0$. A Figura 8.13 (a) e (b) mostram as componentes horizontais do vetor campo magnético (B_x, B_y) e suas linhas de campo, respectivamente. Em Fig.8.13(c) é mostrado o campo $IACD_{s_0=0}^{\xi=2000}(\mathbf{x}_0)$, onde \mathbf{x}_0 pertence à grade de pontos sobre o plano $z = 0$ e as linhas fechadas pretas representam dois vórtices magnéticos localizados na região central da caixa. Vale a pena notar que, embora possa ser visto uma grande estrutura em espiral em Fig. 8.13(b), certamente esta estrutura não deve apresentar um elevado grau de coerência.

Figura 8.13 - Figura ilustrando o campo magnético horizontal sobre o plano $z = 0$ em $t = 100$. Em (a), as componentes horizontais (B_x, B_y) dos vetores campo magnético. Em (b), as linhas de campo magnético utilizando apenas componentes horizontais. Em (c), o campo IACD com dois vórtices magnéticos detectados (linhas pretas).

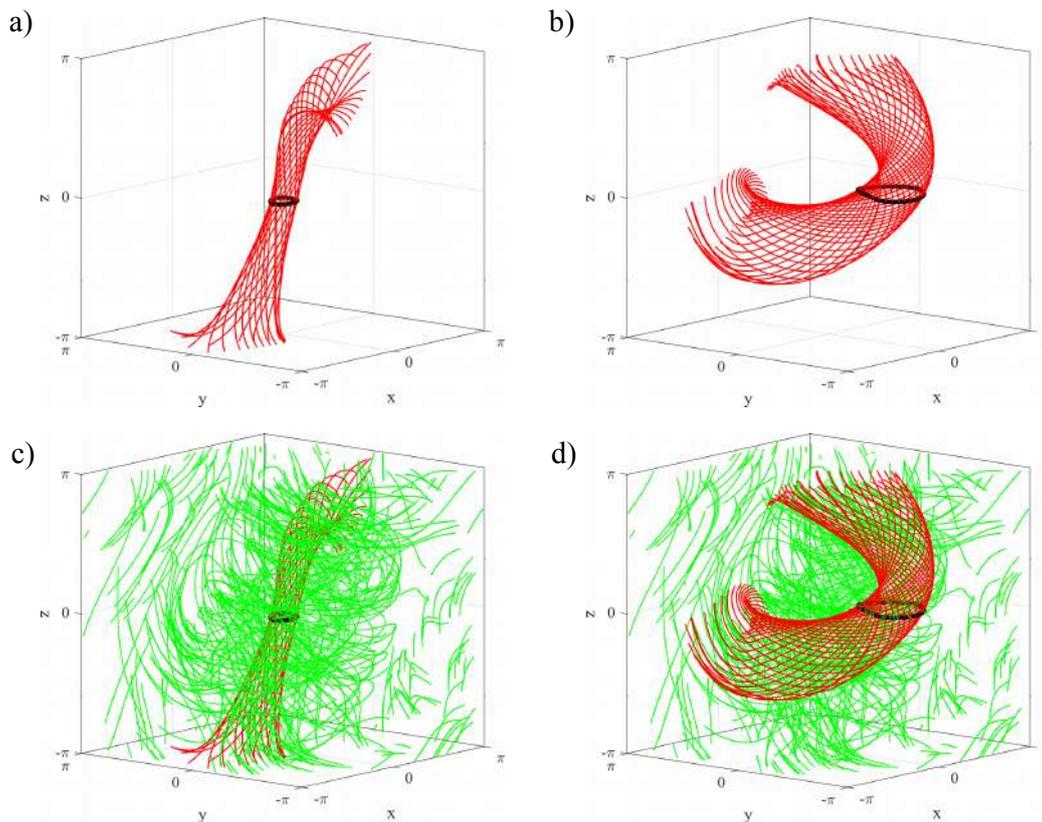


Fonte: Trabalho submetido ao Physical Review E.

Já a coerência das estruturas identificadas pela técnica IACD em Fig.8.13(c) pode ser vista nos painéis superiores de Fig.8.14, onde são plotadas linhas de campo mag-

nético (linhas vermelhas) emanando dos dois vórtices (linhas pretas). Neste caso, pode-se notar que as linhas de campo que saem dos vórtices detectados pelo IACD em Fig.8.13(c) formam uma espécie de tubo magnético, uma estrutura muito comum em Física solar. Os painéis inferiores de Fig.8.14 são os mesmos que os painéis superiores, porém com a inclusão de linhas magnéticas (linhas verdes) construídas a partir de pontos fora dos vórtices. Neste caso, não aparece estrutura tubular nenhuma para as linhas vermelhas, que por sinal, são completamente confusas, confirmando desta vez a eficiência da técnica IACD em detectar tubos magnéticos em casos tridimensionais. Vale a pena ressaltar que tubos magnéticos em diversas escalas no vento solar são um dos principais responsáveis pelo regime turbulento neste ambiente. Além disto, tubos magnéticos são exaustivamente estudados na superfície solar.

Figura 8.14 - Em (a) e (b), são mostrados tubos magnéticos construídos a partir de vórtices coerentes detectados pela técnica IACD. Em (c) e (d), os mesmos de (a) e (b), porém com a inclusão de linhas de campo magnético (linhas verdes) construídas a partir de pontos fora dos vórtices coerentes detectados pelo IACD.



Fonte: Trabalho submetido ao Physical Review E.

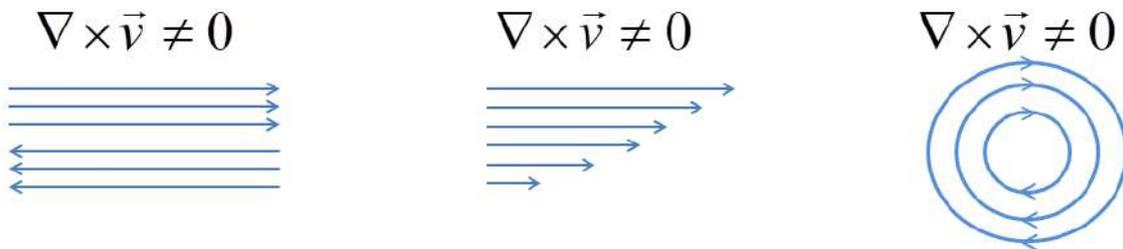
9 FALSAS DETECÇÕES DE VÓRTICES E APLICAÇÃO DO PARÂMETRO-D NA FOTOSFERA SOLAR

Neste capítulo faremos uma breve introdução a uma fraqueza apresentada pelos métodos LAVD e IVD na detecção de vórtices em campos de velocidade com a presença de tensões e cisalhamentos. Diante disto, propomos uma metodologia simples, denominada parâmetro-D (SUZANA et al., 2018), o qual será aplicado em dados da fotosfera solar.

9.1 Falsas detecções de vórtices

Conforme já discutido anteriormente, existem inúmeras técnicas para detecção de vórtices, dentre elas o LAVD e o IVD. Ambas as técnicas são baseadas na vorticidade e possuem a grande vantagem frente as outras por serem objetivas, ou seja, são invariantes diante de mudança de referenciais. Entretanto, o fato de serem baseadas na vorticidade pode trazer certos problemas. Isto porque existem regiões onde podem haver rotacionais diferentes de zero, mas que não são vórtices. A Figura 9.1 ilustra três situações de campos de velocidades nos quais as vorticidades são diferentes de zero, mas que apenas em Fig.9.1(c) há uma estrutura vortical. Em Fig.9.1(a) e (b) a presença da vorticidade é devido ao cisalhamento. Tal situação é muito recorrente em plasmas espaciais, especialmente em plasmas fotosféricos, já que nestes são muito comuns regiões de tensões e cisalhamentos. Neste caso, a aplicação das técnicas LAVD e IVD em plasmas espaciais fica comprometida, visto o alto risco em detectar uma região de cisalhamento como um vórtice, ou seja, existe uma grande chance de falsas detecções.

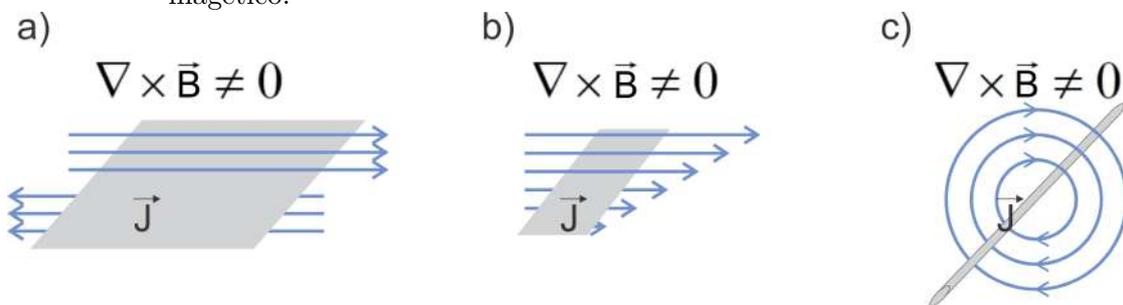
Figura 9.1 - Figura ilustrando três situações distintas em que a vorticidade é diferente de zero.



Fonte: Produção do autor.

Diante desta fraqueza dos métodos LAVD e IVD, surge uma das grandes vantagens do método IACD, cuja objetividade (invariância sob mudanças de referencial) foi provada neste trabalho. Isto porque, regiões de cisalhamento de campos de velocidade que seriam identificados erroneamente como vórtices pelos métodos LAVD e IVD, necessariamente seriam identificados como densidades de correntes (devido à lei de Ampère) pelo IACD para o caso do campo magnético. A Figura 9.2, que é o análogo magnético da Figura 9.1, ilustra bem esta situação. Portanto, o que seria uma fraqueza para os métodos LAVD e IVD, vem a ser uma grande vantagem para o IACD.

Figura 9.2 - O mesmo que a Figura 9.1, porém agora para o caso do rotacional do campo magnético.



Fonte: Produção do autor.

Embora as técnicas LAVD e IVD apresentem este tipo de fraqueza, mesmo assim elas se mostram bastante poderosas e úteis para a Física de fluidos, já que além de serem objetivas, elas estão entre as poucas técnicas que conseguem delimitar o contorno dos vórtices. Pensando nisto, propomos uma metodologia muito simples e invariante sob mudanças de referencial (objetivo), denominada Parâmetro-D (SUZANA et al., 2018), o qual é capaz de filtrar os falsos vórtices detectados pelo LAVD e IVD.

9.2 Parâmetro-D

Diante do que foi dito na seção anterior, apesar dos métodos LAVD e IVD serem bastante precisos e úteis à Física de fluidos, eles sofrem com falsas detecções de vórtices para campos de velocidades com presença de tensões e cisalhamentos. Pensando nisto, propomos uma metodologia lagrangiana bastante simples e eficaz, chamada parâmetro-D, que tem por finalidade filtrar os vórtices detectados pelo LAVD. Na

verdade, o parâmetro-D é baseado no vetor deslocamento das partículas, o qual é objetivo. Seja uma grade cartesiana conforme ilustrada na Figura 9.3, onde as posições iniciais de 5 partículas vizinhas são consideradas. Após um certo tempo, as partículas ocupam novas posições efetuando cada uma um deslocamento D . Neste caso, a partícula cuja posição é (i,j) será considerada centro de um vórtice se as componentes dos vetores deslocamento (D_x, D_y) das quatro partículas vizinhas obedecerem as seguintes condições para vórtices orientados no sentido horário (anti-horário)

$$D_x(i, j+1) - D_x(i, j) > 0 \quad (< 0), \quad (9.1)$$

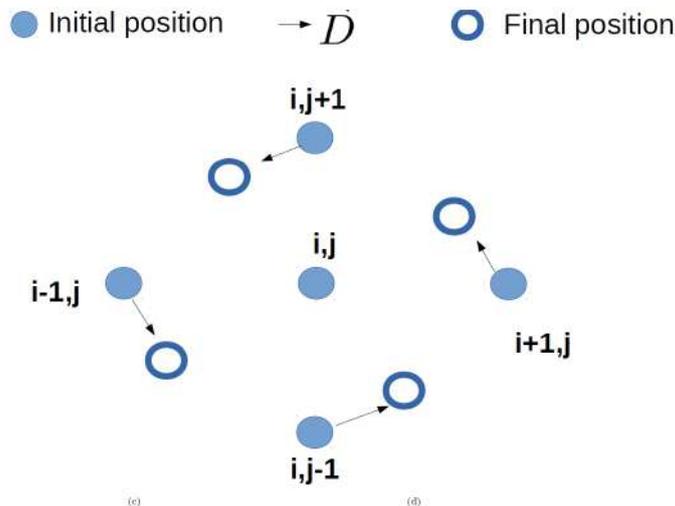
$$D_y(i-1, j) - D_y(i, j) > 0 \quad (< 0), \quad (9.2)$$

$$D_x(i, j-1) - D_x(i, j) < 0 \quad (> 0), \quad (9.3)$$

$$D_y(i+1, j) - D_y(i, j) < 0 \quad (> 0). \quad (9.4)$$

Nós chamamos as condições acima de parâmetro-D (SUZANA et al., 2018).

Figura 9.3 - Figura esquemática do método parâmetro-D. Bolas azuis sólidas representam as posições iniciais de 5 partículas vizinhas, enquanto que os círculos azuis representam suas posições finais.

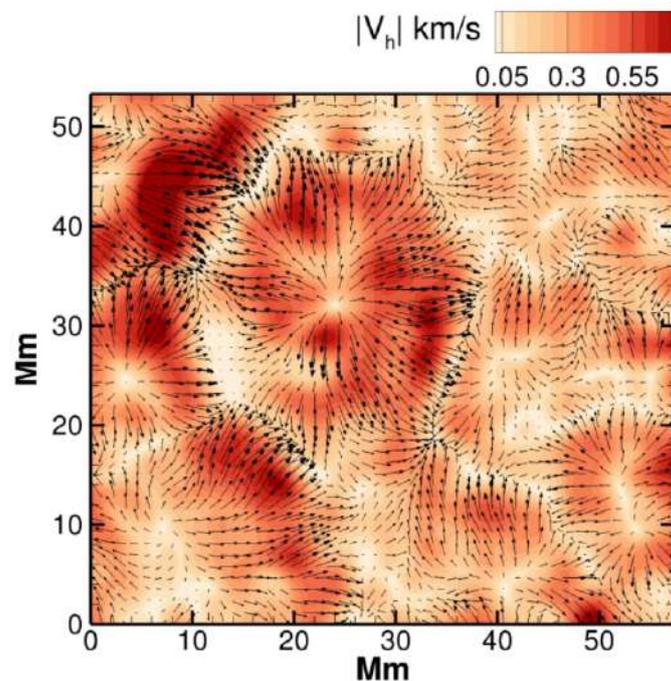


Fonte: (SUZANA et al., 2018).

9.3 Aplicação do Parâmetro-D em dados da fotosfera solar

Dedicaremos a presente seção para a aplicação do método do parâmetro-D aos dados da fotosfera solar. Conforme já mencionado, este tipo de plasma é repleto de regiões de tensões e cisalhamento que provavelmente seriam erroneamente detectadas pelo LAVD como estruturas vorticiais. Neste caso, testaremos a eficácia do parâmetro-D. Para isto, utilizaremos um campo de velocidade fotosférico obtido pela aplicação da técnica *local correlation track* (LCT) para uma série de mapas. As intensidades dos mapas foram obtidas por meio do *Hinode* nos dias 2 e 3 de novembro de 2010. A cadência das observações é de 90 segundos e o tempo total de observação é de 24 horas. A resolução espacial gira em torno de $0''.32$. A Figura 9.4 mostra a área da região fotosférica em análise sobre uma única célula de super-grânulo com tamanho de $50Mm \times 50Mm$ colorida pela intensidade do vetor velocidade horizontal em $t=05:47:34$ UT. Tal região apresenta vórtices coerentes com tempos de vida variando entre poucos minutos a 5 horas.

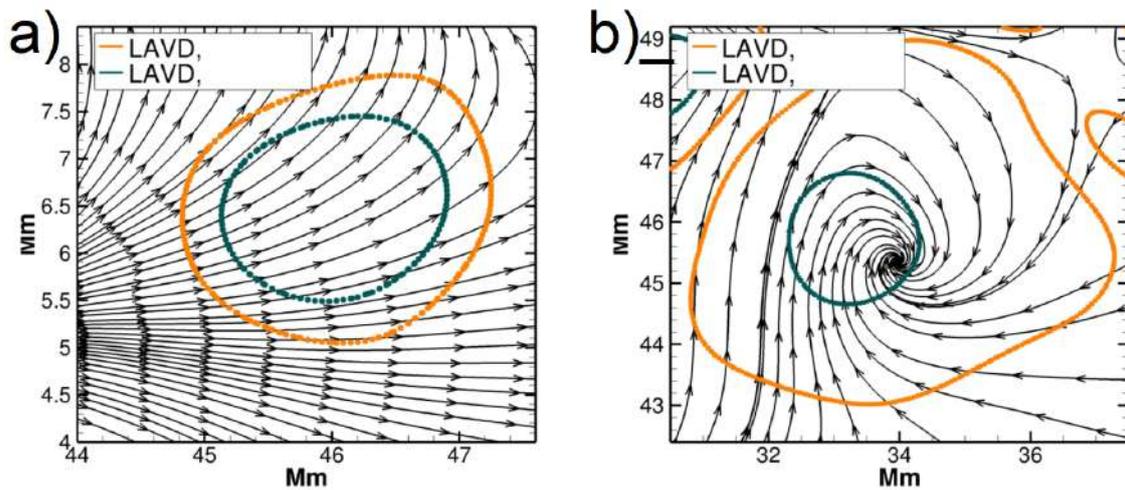
Figura 9.4 - Figura ilustrando a componente horizontal do campo de velocidades fotosférico sobre uma única célula de super-granulação em $t=05:47:34$ UT. O tamanho da região é de $50Mm \times 50Mm$.



Fonte: (SUZANA et al., 2018).

A Figura 9.5 apresenta a detecção de dois vórtices pelo método LAVD em um pedaço da região da Figura 9.4, para um intervalo de tempo de $t=05:47:34$ UT até $t=06:02:34$ UT. Conforme pode-se notar, embora o LAVD tenha obtido êxito em Fig.9.5(b), em Fig.9.5(a) há uma falsa detecção de vórtice devido ao cisalhamento presente na região. Neste caso, pudemos constatar que de fato o método LAVD falha quando utilizado em dados de plasma fotosférico.

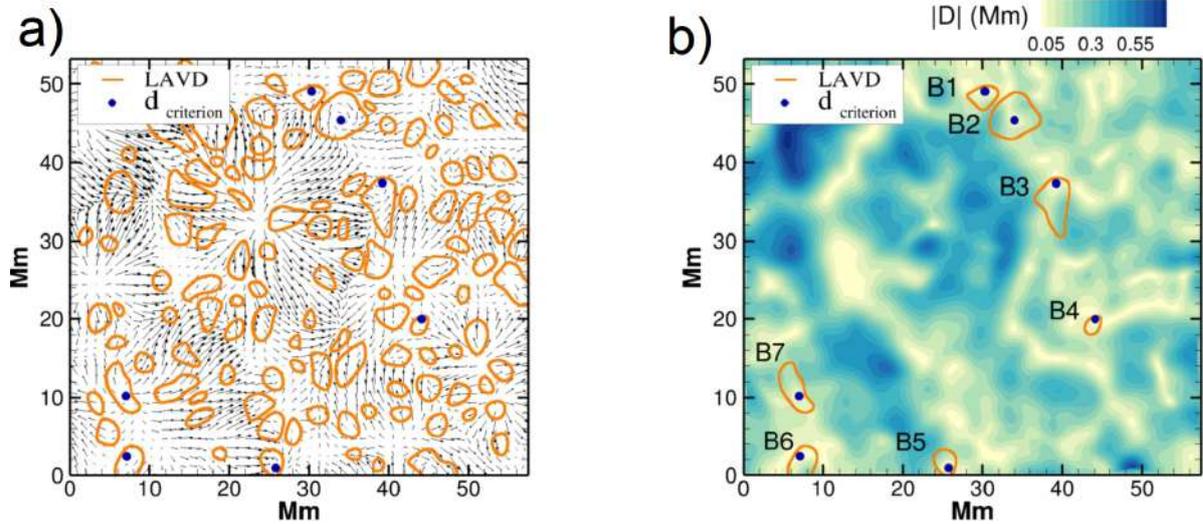
Figura 9.5 - Figura ilustrando vórtices detectado pelo LAVD no intervalo de tempo de $t=05:47:34$ UT até $t=06:02:34$ UT. Note que em (a) foi detectado um falso vórtice. Linhas de correntes do campo de velocidade fotosférico também são mostradas.



Fonte: (SUZANA et al., 2018).

Na Figura 9.6 são aplicados os métodos LAVD e parâmetro-d para a região completa da Figura 9.4 no intervalo de tempo de $t=05:47:34$ UT até $t=06:02:34$ UT. Conforme pode ser observado em Fig.9.6(a), o LAVD detecta inúmeros vórtices, sendo a maioria regiões de cisalhamento não vorticais. Em contrapartida, todos os 7 vórtices detectados pelo parâmetro-D se mostraram verdadeiros.

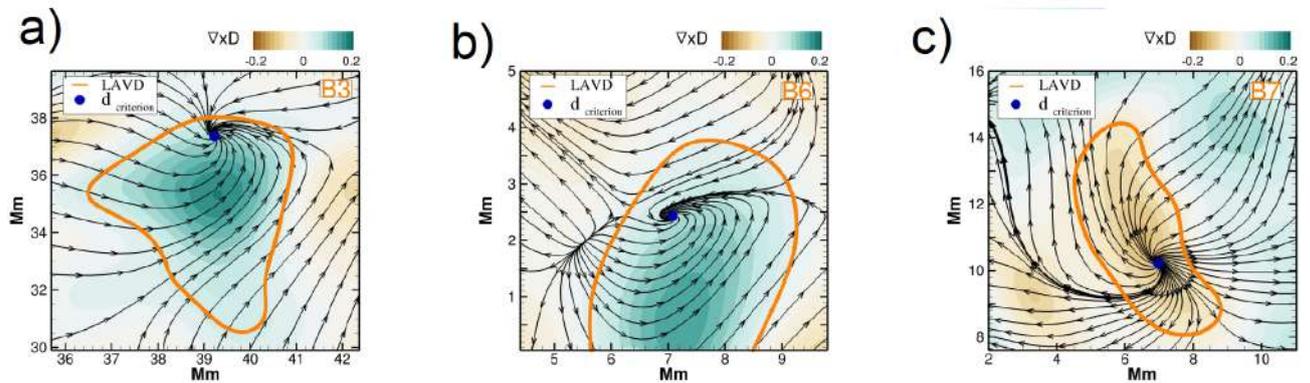
Figura 9.6 - Figura ilustrando a detecção de vórtices na região completa da Figura 9.4 para o intervalo de tempo de $t=05:47:34$ UT até $t=06:02:34$ UT. Em (a), vórtices detectados pelo LAVD e campo de velocidade. Em (b), os vórtices detectados pelo parâmetro-D e fundo colorido pela intensidade do deslocamento.



Fonte: (SUZANA et al., 2018).

A título de conferência, a Figura 9.6 mostra ampliados os vórtices B3, B6 e B7 presentes em Fig.9.6(b). Conforme pode-se notar, as três regiões de fato são vórtices, confirmando a eficiência do parâmetro-D

Figura 9.7 - Figura ilustrando as linhas de correntes e os vórtices B3, B6 e B7, presentes na Figura 9.6. A figura se encontra colorida pela intensidade de $\nabla \times D$



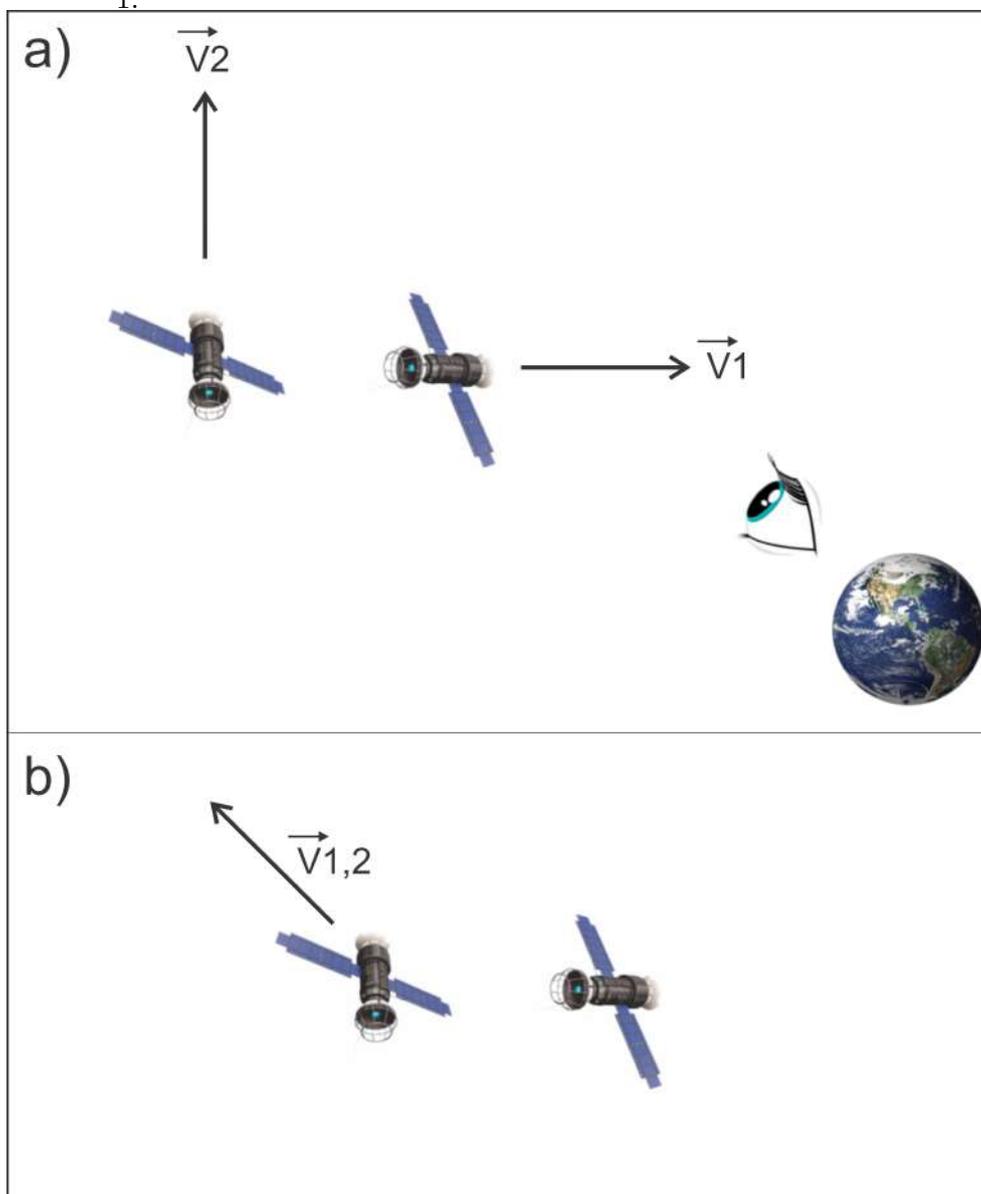
Fonte: (SUZANA et al., 2018).

Conforme pudemos verificar, de fato o método LAVD é bastante frágil quando aplicado em campos de velocidades com presença de cisalhamentos e tensões, tal qual ocorre em plasma fotosférico. Além disto, o método parâmetro-D proposto neste trabalho se mostrou bastante simples e eficaz na detecção de vórtices fotosféricos.

10 DETECÇÃO EULERIANA E OBJETIVA DE CENTROS VORTICAIS ATRAVÉS DE CAMPO DE VELOCIDADES

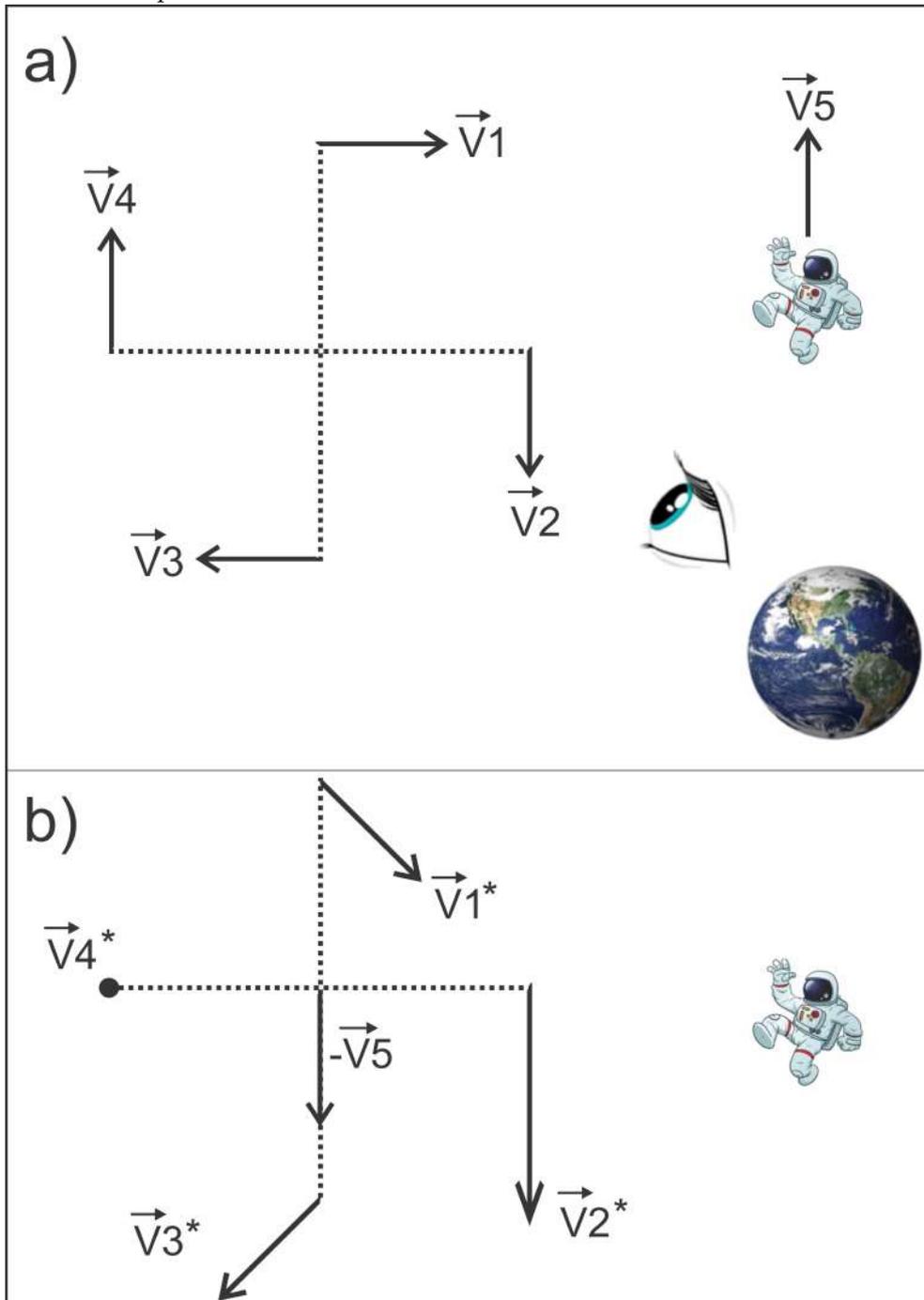
Conforme visto no capítulo passado, a técnica LAVD, apesar de muito boa, ela falha para campos de velocidades com regiões de tensões e cisalhamento. Isto nos motivou a criar uma técnica lagrangiana e objetiva, chamada parâmetro-D, capaz de reparar de detectar com bastante eficiência vórtices em plasmas espaciais. Nos restava agora criar uma técnica análoga ao parâmetro-D, porém euleriana. A maneira mais fácil e intuitiva de fazer isto é utilizando o campo de velocidades. No entanto, como o vetor velocidade não é objetivo, tal tarefa não é tão simples assim. Existem técnicas eulerianas para detecção de vórtices utilizando o campo de velocidades, porém tais técnicas não são objetivas, o que não é muito útil para o nosso caso. Diante disto, propomos uma nova metodologia euleriana e objetiva de detecção de vórtices utilizando o campo de velocidade, o que não havia sido feito até então. No entanto, se prestarmos bem atenção na Figura 10.1, podemos perceber que as velocidades das naves (a) vistas por um observador na terra é diferente da velocidade relativa entre as duas naves (B). Isto já é de se esperar, já que a velocidade não é uma grandeza objetiva. Entretanto, se prestarmos bem a atenção, percebemos que o vetor diferença entre as velocidade das naves é o mesmo para ambos os observadores na Terra e pilotando a espaçonave. Para uma clareza, analisemos agora a Figura 10.2. Neste caso, existem quatro partículas, cada uma com um velocidade formando um padrão de vórtice. Além disto, existe um astronauta que possui também uma velocidade, além de um observador estático na Terra. Neste caso, as velocidades das partículas sob a óptica do astronauta está ilustrada em (b), enquanto que as velocidades das partículas para o observador na Terra se encontram em (a). Conforme pode-se notar, as velocidades das partículas para ambos os observadores são completamente diferentes. Entretanto, se passarmos a analisar a Figura 10.3, onde desta vez estão ilustradas as diferenças de cada velocidade em relação à velocidade do ponto central para o ponto de vista de cada observador. Surpreendentemente, os vetores diferença de velocidade são exatamente os mesmos para os dois referenciais. Além disto, os vetores diferença de velocidade conservaram o caráter vortical das velocidades das partículas, podendo ser uma boa ferramenta para detecção destas estruturas utilizando o parâmetro-D. Neste caso, temos indícios de que o vetor diferença de velocidade é invariante sob mudança de referencial, mesmo o vetor velocidade não sendo. No entanto, não incluímos rotações nos nossos exemplos, portanto, não podemos afirmar nada a priori. Neste caso, faremos a seguir uma demonstração de que, de fato, o vetor diferença de velocidade é objetivo.

Figura 10.1 - Figura ilustrando duas naves com diferentes velocidades. Em (a), estão ilustradas as velocidades das naves em relação a um observador na Terra, enquanto que em (b) está ilustrado a velocidade da nave 2 em relação á nave 1.



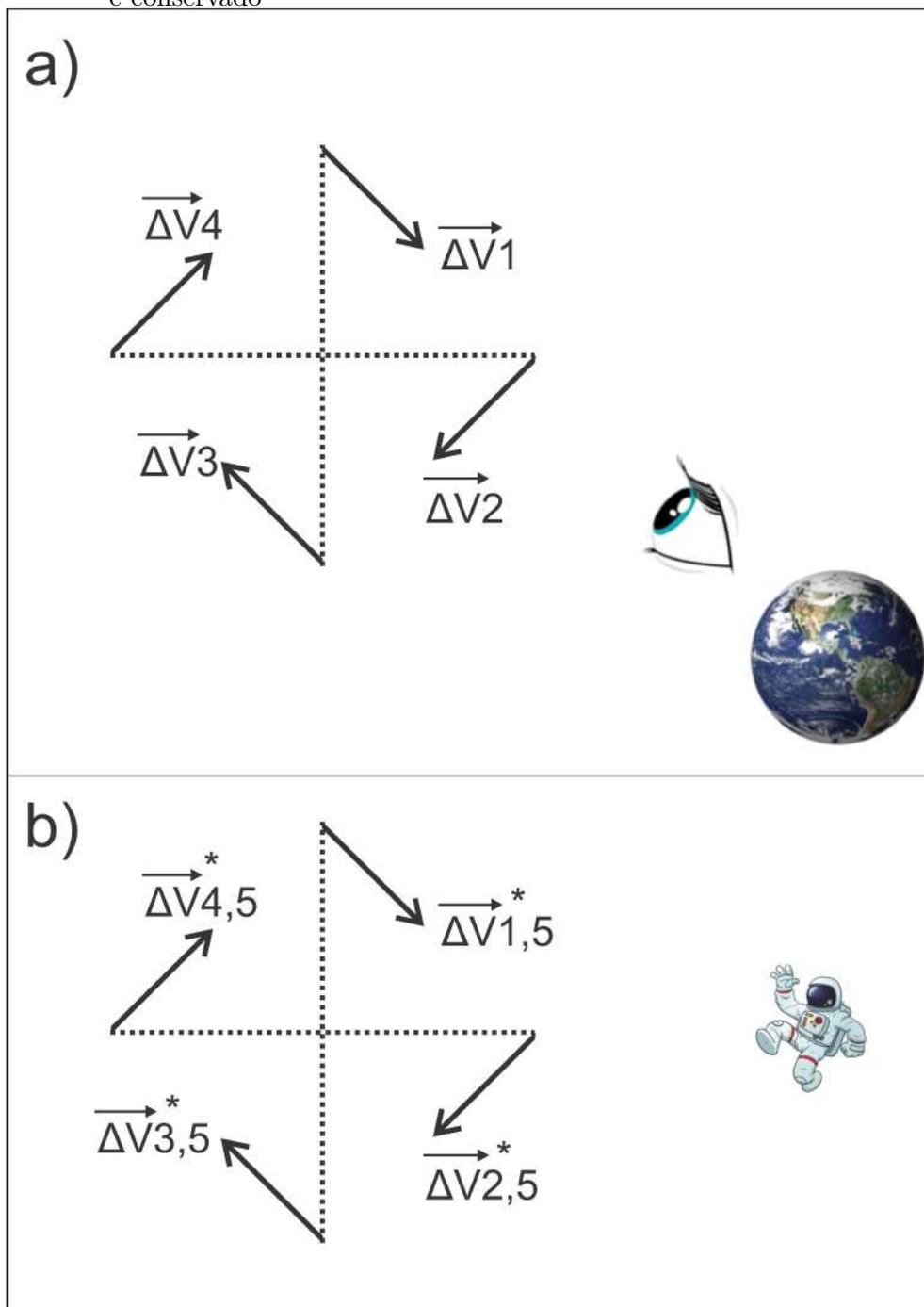
Fonte: Produção do autor.

Figura 10.2 - Figura ilustrando quatro partículas, cada uma com uma velocidade, as quais formam um padrão vortical. Em (a), estão ilustradas as velocidades das partículas e do astronauta em relação a um observador na Terra, enquanto que em (b) estão ilustradas as velocidades das partículas em relação ao astronauta. Note que as velocidades observadas pelos dois referenciais são completamente diferentes



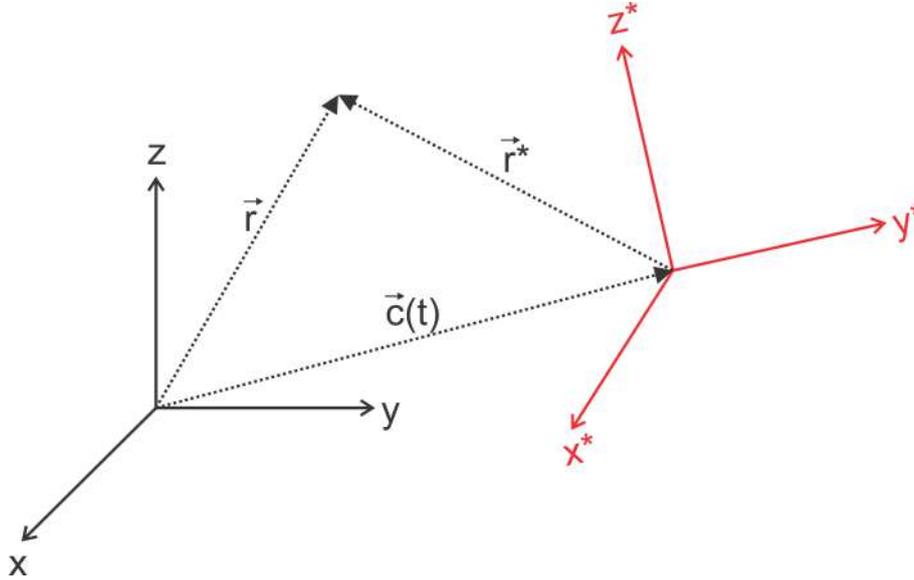
Fonte: Produção do autor.

Figura 10.3 - Figura ilustrando os vetores diferença de velocidade, onde fez-se a diferença entre as velocidades da Figura 10.2 de cada partícula e a velocidade no ponto central das linhas pontilhadas. Neste caso, os vetores diferença de velocidade são exatamente os mesmos nos dois referenciais. Além disto, o padrão vortical é conservado



Fonte: Produção do autor.

Figura 10.4 - Figura ilustrando dois referenciais se movendo um em relação ao outro. Neste caso, um ponto no espaço terá o vetor posição \vec{r} em relação a um referencial e \vec{r}^* em relação ao outro. O vetor distância entre os dois referenciais é dado por \vec{c} .



Fonte: Produção do autor.

Sejam dois referenciais se movendo um em relação ao outro, conforme a Figura 10.4. Neste caso, podemos escrever a seguinte lei de transformação:

$$\vec{r}^* = Q(t)\vec{r} + \vec{c}(t), \quad (10.1)$$

onde $Q(t)$ é uma matriz de rotação e $c(t)$ é um vetor de translação. Considerando um deslocamento ou uma variação de posição dos referenciais, podemos escrever

$$\vec{r}_0^* = Q(t)\vec{r}_0 + \vec{c}(t), \quad (10.2)$$

$$\vec{r}_f^* = Q(t)\vec{r}_f + \vec{c}(t). \quad (10.3)$$

Para encontrarmos o vetor deslocamento, basta subtrairmos 10.2 de 10.3, ou seja,

$$\Delta\vec{r}^* = \vec{r}_f^* - \vec{r}_0^* \Rightarrow \Delta\vec{r}^* = Q(t)\Delta\vec{r}. \quad (10.4)$$

Logo, chegamos ao já conhecido resultado que o deslocamento é um vetor objetivo. De 10.1, podemos escrever

$$\vec{r} = Q^T(t)[\vec{r}^* - \vec{c}(t)]. \quad (10.5)$$

Derivando, obtemos

$$\dot{\vec{r}} = \dot{Q}^T(t)[\dot{\vec{r}}^* - \dot{\vec{c}}(t)] + \dot{Q}^T(t)[\vec{r}^* - \vec{c}(t)] \quad (10.6)$$

$$\vec{v}^* = Q(t)\vec{v} + \dot{\vec{c}}(t) + \Omega(t)[\vec{r}^* - \vec{c}(t)] \quad (10.7)$$

onde $\Omega(t) = \dot{Q}^T(t)Q^T(t)$ é o tensor de spin. Da equação 10.7, temos que

$$\Delta\vec{v}^* = Q(t)\Delta\vec{v} + \Omega(t)\Delta\vec{r}^*. \quad (10.8)$$

Portanto, o vetor $\Delta\vec{v}$ não é objetivo.

Seja agora o tensor gradiente de deformação dado por 7.48, ou seja,

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial X} & \frac{\partial x}{\partial Y} & \frac{\partial x}{\partial Z} \\ \frac{\partial y}{\partial X} & \frac{\partial y}{\partial Y} & \frac{\partial y}{\partial Z} \\ \frac{\partial z}{\partial X} & \frac{\partial z}{\partial Y} & \frac{\partial z}{\partial Z} \end{pmatrix}. \quad (10.9)$$

Neste caso, podemos mostrar que o tensor de gradiente de deformação se comporta como um vetor objetivo (TRUESDELL; NOLL, 2004). De fato,

$$\bar{\mathbf{F}} = \frac{\partial \bar{\vec{r}}}{\partial \bar{\mathbf{R}}} = \frac{\partial (\mathbf{Q}\vec{r} + \vec{b})}{\partial \bar{\mathbf{R}}} = \mathbf{Q} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \bar{\mathbf{R}}} \Rightarrow \boxed{\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{Q}\mathbf{F}}, \quad (10.10)$$

onde foi utilizada a Eq.(7.16).

A derivada tensor de gradiente de deformação com respeito ao tempo t é dada por

$$\mathbf{F}' = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t}. \quad (10.11)$$

Utilizando Eq. (10.9), podemos reescrever Eq. (10.11) como

$$\mathbf{F}' = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{R}} \right) = \frac{\partial}{\partial \vec{R}} \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right) \Rightarrow \mathbf{F}' = \frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{R}}, \quad (10.12)$$

onde

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = \vec{v}(\vec{r}(t), t_0), \quad \vec{r}(t_0) = \vec{r}_0, \quad (10.13)$$

sendo que as coordenadas materiais \vec{R} não dependem do tempo t .

Aplicando agora a regra da cadeia em (10.12), podemos escrever o tensor de gradiente de velocidades em termos do tensor de gradiente de deformação, a saber

$$\mathbf{F}' = \frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{R}} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{r}} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{R}} \Rightarrow \mathbf{F}' = \nabla \vec{v} \mathbf{F} \Rightarrow \boxed{\nabla \vec{v} = \mathbf{F}' \mathbf{F}^{-1}}. \quad (10.14)$$

Utilizando Eqs. (10.10) e (10.14), podemos mostrar que o tensor de gradiente de velocidades NÃO é objetivo. De fato,

$$\begin{aligned} \bar{\nabla} \bar{\vec{v}} &= \bar{\mathbf{F}}' \bar{\mathbf{F}}^{-1} = (\mathbf{Q} \mathbf{F})' (\mathbf{Q} \mathbf{F})^{-1} \\ &= (\mathbf{Q}' \mathbf{F} + \mathbf{Q} \mathbf{F}') (\mathbf{F}^{-1} \mathbf{Q}^{-1}) \\ &= \mathbf{Q}' \mathbf{F} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{Q}^\top + \mathbf{Q} \mathbf{F}' \mathbf{F}^{-1} \mathbf{Q}^\top \\ &= \mathbf{Q}' \mathbf{Q}^\top + \mathbf{Q} \nabla \vec{v} \mathbf{Q}^\top, \end{aligned} \quad (10.15)$$

onde foi usado o fato de que \mathbf{Q} é uma matriz ortogonal, ou seja, $\mathbf{Q}^\top = \mathbf{Q}^{-1}$.

Porém, o seu desvio da média é objetivo, ou seja,

$$\nabla \bar{\vec{v}}^* - \langle \nabla \bar{\vec{v}}^* \rangle = \mathbf{Q} [\nabla \vec{v} - \langle \nabla \vec{v} \rangle] \mathbf{Q}^\top \quad (10.16)$$

Multiplicando 10.16 por $d\vec{r}$, obtemos

$$\nabla \bar{v}^* d\bar{r}^* - \langle \nabla \bar{v}^* \rangle d\bar{r}^* = \mathbf{Q}[\nabla \bar{v} - \langle \nabla \bar{v} \rangle] \mathbf{Q}^\top d\bar{r}^*, \quad (10.17)$$

$$d\bar{v}^* - \langle \nabla \bar{v}^* \rangle d\bar{r}^* = \mathbf{Q}[\nabla \bar{v} - \langle \nabla \bar{v} \rangle] d\bar{r}, \quad (10.18)$$

$$d\bar{v}^* - \langle \nabla \bar{v}^* \rangle d\bar{r}^* = \mathbf{Q}d\bar{v} - \mathbf{Q} \langle \nabla \bar{v} \rangle d\bar{r}, \quad (10.19)$$

onde foi utilizado o fato de $d\bar{r}^*$ ser um vetor objetivo e $\nabla \bar{v} d\bar{r} = d\bar{v}$. Integrando 10.19, obtemos

$$\Delta \bar{v}^* - \int_{v1}^{v2} \langle \nabla \bar{v}^* \rangle d\bar{r}^* = \mathbf{Q} \Delta \bar{v} - \mathbf{Q} \int_{v1}^{v2} \langle \nabla \bar{v} \rangle d\bar{r}. \quad (10.20)$$

Nos resta agora resolver as integrais em 10.20. Para resolvermos estas integrais, primeiramente notemos que as médias espaciais podem ser escritas como

$$\langle \nabla \bar{v} \rangle = \frac{1}{A} \int_A \nabla \bar{v} dA, \quad (10.21)$$

$$\langle \nabla \bar{v}^* \rangle = \frac{1}{A} \int_A \nabla \bar{v}^* dA. \quad (10.22)$$

Substituindo as equações 10.21 e 10.22 em 10.20, obtemos

$$\Delta \bar{v}^* - \frac{1}{A} \int_{v1}^{v2} \left[\int_A \nabla \bar{v}^* dA \right] d\bar{r}^* = \mathbf{Q} \Delta \bar{v} - \mathbf{Q} \frac{1}{A} \int_{v1}^{v2} \left[\int_A \nabla \bar{v} dA \right] d\bar{r} \quad (10.23)$$

$$\Delta \bar{v}^* - \frac{1}{A} \int_A \left[\int_{v1}^{v2} \nabla \bar{v}^* d\bar{r}^* \right] dA = \mathbf{Q} \Delta \bar{v} - \mathbf{Q} \frac{1}{A} \int_A \left[\int_{v1}^{v2} \nabla \bar{v} d\bar{r} \right] dA \quad (10.24)$$

$$\Delta \bar{v}^* - \frac{1}{A} \int_A \Delta \bar{v}^* dA = \mathbf{Q} \Delta \bar{v} - \mathbf{Q} \frac{1}{A} \int_A \Delta \bar{v} dA \quad (10.25)$$

$$\Delta \bar{v}^* - \langle \Delta \bar{v}^* \rangle = \mathbf{Q} \Delta \bar{v} - \mathbf{Q} \langle \Delta \bar{v} \rangle \quad (10.26)$$

$$\Delta \bar{v}^* - \langle \Delta \bar{v}^* \rangle = \mathbf{Q} [\Delta \bar{v}^* - \langle \Delta \bar{v} \rangle] \quad (10.27)$$

Onde foi utilizado o fato das integrais serem contínuas e bem comportadas, ou seja,

as áreas de integração são conexas e o campo de velocidades obedece aos critérios de problema bem posto (TIKHONOV; ARSENIN, 1977).

Portanto, conseguimos mostrar que o desvio da média do vetor $\Delta\vec{v}$ é de fato objetivo. Neste caso, construímos pela primeira vez um método euleriano e objetivo capaz de detectar centros de vórtices utilizando somente o campo de velocidades. A detecção dos vórtices objetivos em campos de velocidades poderia ser facilmente realizada utilizando o parâmetro-D (SUZANA et al., 2018). Neste caso, seria utilizada a mesma metodologia da Figura 9.3 já discutido anteriormente. Futuramente, esta metodologia poderá ser empregada também em problemas lagrangianos.

11 CONCLUSÃO

Neste trabalho, utilizamos a teoria de eventos extremos para fazer um rigoroso estudo do efeito das lâminas de correntes sobre a estatística da turbulência intermitente no vento solar. Para isso, aplicamos a técnica POT aos dados do módulo do campo magnético do vento solar, extraídos pela espaçonave Cluster I quando sua órbita se encontrava próxima à região de bowshock da Terra. Embora tenhamos apresentado aqui a análise de 9 séries temporais, referentes a 6 distintos dias, dos quais 3 dias apresentavam várias lâminas de correntes e 3 dias não apresentava nenhuma, foram analisadas quase todas as séries temporais do campo magnético desde o ano de 2001 até o ano de 2016, para todos os dias em a espaçonave Cluster I se encontrava no ambiente interplanetário, ou seja, em contato com o vento solar. Os resultados estatísticos obtidos por esta grande amostra está em pleno acordo com os resultados obtidos para as 9 séries expostas neste trabalho. Adicionalmente, analisamos 3 séries temporais obtidas pela remoção de todas as lâminas de correntes das 3 séries que continham tais estruturas. Devido ao alto grau de correlação (memória) das séries, foi realizado o processo de declusterização a fim de obtermos séries aproximadamente *iid*, pressuposto básico para a aplicação da teoria de valores extremos (COLES, 2001). Para a detecção das lâminas de correntes utilizamos o método de Li (LI, 2008).

Vários trabalhos têm buscado alguns métodos alternativos para detecção de descon- tinuidades do campo magnético geradas por lâminas de correntes em séries temporais do vento solar. Em (CHIAN; MIRANDA, 2009), por exemplo, foi utilizada a série tem- poral das diferenças normalizadas do módulo do campo magnético, enquanto que em (GRECO et al., 2009), (GRECO et al., 2017) foi utilizado o método *partial variance of increments* (PVI). Neste trabalho, fomos os primeiros a aplicar com sucesso o uso do conceito de volatilidade magnética como método auxiliar para o estudo da estatística de valores extremos em séries do módulo do campo magnético no vento solar. Além de fácil implementação, o método da volatilidade magnética se mostrou bastante eficiente e preciso na detecção de prováveis regiões com lâminas de corren- tes, podendo assim ser utilizado como método alternativo para detecção e estudo estatístico de tais estruturas no vento solar.

Nos últimos anos, inúmeros trabalhos têm mostrado, por meio de intermitência (CHIAN; MUNOZ, 2011) ou fuga da gaussianidade (WU et al., 2013; GRECO et al., 2009; GRECO et al., 2017; SERVIDIO et al., 2011; CHIAN; MUNOZ, 2011) a relação entre lâmi- nas de correntes e a ocorrência de eventos extremos em séries temporais do módulo do campo magnético no vento solar. Este trabalho propõe uma forma quantitativa

de mostrar essa relação. Fomos os primeiros a demonstrar, por meio da teoria de valores extremos, que séries da volatilidade magnética possuem um excelente ajuste por uma GPD e GEV. Além disso, mostramos que as lâminas de correntes são as principais estruturas responsáveis pelo sinal do parâmetro e forma ξ , principal parâmetro deste tipo de modelagem. Na presença de tais estruturas, $\xi > 0$, revelando que as séries de volatilidade são modeladas por uma GPD ou por uma GEV pertencendo à família de Fréchet (COLES, 2001), ambas com suporte infinito (COLES, 2001). Por outro lado, na ausência de tais estruturas, $\xi < 0$, sendo as séries de volatilidade, nesse caso, modeladas por uma GPD ou uma GEV pertencendo à família de Weibull (COLES, 2001), ambas com suporte finito (COLES, 2001). Fisicamente falando, isso significa que, em séries contendo lâminas de correntes, não é esperado um limite superior para o valor da volatilidade magnética. Como consequência, grandes rotações do vetor campo magnético ou, equivalentemente, grandes valores de *shear angle* são possíveis. Portanto, reconexões magnéticas são mais prováveis de ocorrer (GOSLING et al., 2007).

Os resultados deste trabalho também fornecem provas observacionais da relação direta das lâminas de correntes com a multifractalidade e turbulência bem desenvolvida no vento solar. Séries de campo magnético do vento solar com e sem a presença de lâminas de corrente apresentam PSD's cujos intervalos inerciais possuem uma inclinação $-5/3$ (K41 law) e $-3/2$ (IK law), respectivamente. Assim, mostramos que existem fortes evidências de que as lâminas de correntes são responsáveis pelo fenômeno de turbulência bem desenvolvida de Kolmogorov no vento solar, confirmando os achados em Li et al. (2011). Além disso, para uma maior confiabilidade estatística, este trabalho foi o primeiro a analisar a influência de não somente uma lâmina de corrente, mas de um conjunto delas sobre multifractalidade. Encontramos que a presença das lâminas de correntes elevam significativamente o grau de multifractalidade das séries de campo magnético do vento solar e que estas são, provavelmente, as principais estruturas responsáveis pelo aumento da autocorrelação (memória) e fuga da gaussianidade neste tipo de série.

Com o intuito de confirmarmos os resultados obtidos pelas análises de dados observacionais do vento solar, recriamos de forma bem simplificada um ambiente com algumas das características encontradas no vento solar. Neste caso, fizemos uso da hipótese de Taylor a fim de simularmos uma hipotética espaçonave munida de sensores, viajando em um ambiente de plasma interplanetário. Para isso, realizamos uma simulação MHD-3D compressível e com um forçante não helicoidal, fazendo uso do código Pencil. Todos os resultados desta etapa corroboraram com os resulta-

dos obtidos pelas análises dos dados observacionais. Além disso, a volatilidade, mais uma vez, se mostrou altamente eficiente e precisa na detecção de lâminas de correntes, possibilitando-nos concluir que esta técnica pode ser inserida como ferramenta auxiliar na detecção de lâminas de correntes e reconexões magnéticas.

Outra contribuição deste trabalho baseia-se na aplicação da teoria de Dragon Kings em plasmas espaciais. Neste caso, obtivemos não somente um resultado, mas sim dois resultados de grande impacto. Em primeiro lugar, conseguimos, pela primeira vez, aplicar a estatística de *Dragon Kings* aos dados do vento solar. Verificamos que regiões de prováveis reconexões magnéticas são *Dragon Kings*. Isso traz um grande avanço na análise de eventos extremos em clima espacial, visto que reconexões estão envolvidas na maioria dos eventos extremos em plasmas espaciais. Além disto, abrimos a possibilidade de se fazer previsões acerca desses eventos, já que os identificamos como prováveis candidatos a uma classe especial de eventos extremos. Em segundo lugar, abrimos a possibilidade da técnica de volatilidade ser não somente um possível método alternativo para detecção de lâminas de corrente, mas também de reconexões magnéticas. Isso porque, conforme a figura 5.24, valores da volatilidade declusterizada acima do limiar pré-determinado pelo teste-DK, indicam com bastante eficiência quais lâminas de correntes estão envolvidas em processos de reconexão.

Conforme citado anteriormente, este trabalho trouxe contribuições significativas nas áreas de observação e simulação, faltando portanto alguma contribuição teórica. Nesse caso, fomos capazes de provar a objetividade da técnica IACD (REMPER et al., 2017), a qual se trata de uma adaptação da técnica LAVD (HALLER et al., 2016), realizada por Rempel et al. (2017), para o caso de fluidos magnetizados. A prova da objetividade da técnica IACD traz grande contribuição para a Física de plasmas espaciais, visto que validamos sua utilização como técnica de detecção de vórtices magnéticos, os quais estão presentes em quase todos os fenômenos espaciais. Além disto, fomos capazes de identificar fraquezas do método LAVD quando aplicado em campos de velocidade com presença de tensões e cisalhamentos, tal qual ocorre em plasmas espaciais. Diante disto, propomos um método lagrangiano e objetivo para retificar tal fraqueza. Finalmente, propomos uma técnica euleriana e objetiva para detectar centros de vórtices utilizando campo de velocidade, o que até então ainda não havia sido feito, visto que a velocidade não é uma grandeza objetiva.

Em suma, nossos resultados mostram que é possível modelar dados observacionais do vento solar por uma distribuição de eventos extremos GPD e pela GEV. Além

disto, conseguimos identificar as lâminas de correntes como principais responsáveis pelo comportamento do principal parâmetro desse tipo de modelagem, responsável pela caracterização da cauda da distribuição. Abrimos caminho para que trabalhos futuros sejam capazes de realizar análises de previsão da ocorrência de lâminas de correntes extremas, que podem estar associadas com o fenômeno de reconexão magnética. Adicionalmente, propusemos uma abordagem alternativa, simples e robusta, não somente para a detecção de lâminas de correntes, mas também para análise de eventos extremos, turbulência intermitente e multifractalidade em dados do vento solar e detecção objetiva de vórtices magnéticos e reconexões magnéticas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ACERO, F. J.; CARRASCO, V. M. S.; GALLEGO, M. C.; GARCÍA, J. A.; VAQUERO, J. M. Extreme value theory and the new sunspot number series. **The Astrophysical Journal**, v. 839, n. 2, p. 98, 2017. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0004-637X/839/i=2/a=98>>. 2, 110

ACERO, F. J.; GALLEGO, M. C.; GARCÍA, J. A.; USOSKIN, I. G.; VAQUERO, J. M. Extreme value theory applied to the millennial sunspot number series. **The Astrophysical Journal**, v. 853, n. 1, p. 80, 2018. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0004-637X/853/i=1/a=80>>. 2, 110

ALFVÉN, H. Existence of electromagnetic-hydrodynamic waves. **Nature**, v. 150, n. 3805, p. 405–406, oct 1942. ISSN 0028-0836. Disponível em: <<http://www.nature.com/doi/10.1038/150405a0>>. 3, 9, 22, 25

ALLIGOOD, K.; SAUER, T.; YORKE, J. **Chaos an introduction to dynamical systems**. [S.l.]: New York: Springer, 1996. 13, 66

ANCEY, C. Are there “dragon-kings” events (i.e. genuine outliers) among extreme avalanches? **The European Physical Journal Special Topics**, v. 205, n. 1, p. 117–129, May 2012. ISSN 1951-6401. Disponível em: <<https://doi.org/10.1140/epjst/e2012-01565-7>>. 6, 67

ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J. **Mathematical methods for physicists: a comprehensive guide**. 7. ed. [S.l.]: Academic Press, 2012. Hardcover. ISBN 0123846544. 170

BALKEMA, A. A.; HAAN, L. Residual life time at great age. **The Annals of Probability**, v. 2, n. 5, p. 792–804, 1974. 2, 41, 57, 84

BATCHELOR, G. K.; TOWNSEND, A. A. The nature of turbulent motion at large wave-numbers. **Royal Society of London**, v. 199, p. 238–255, 1949. 1, 31

BELCHER, J. W.; DAVIS, L. J. Large amplitude alfvén waves in the interplanetary medium. **Journal Geophysics Research.**, v. 76, n. 16, 1971. 25

BENZI, R.; CILIBERTO, S.; TRIPICCIONE, R.; BAUDET, C.; MASSAIOLI, F.; SUCCI, S. Extended self-similarity in turbulent flows. **Physical Review E**, v. 48, p. R29–R32, Jul 1993. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.48.R29>>. 35

BITTENCOURT, J. **Fundamentals of plasma physics**. [S.l.: s.n.], 2004. ISBN 978-0-387-20975-3. 22, 23, 24

BODMANN, B. E. J.; ZANDAL, J. R. S.; SCHUCK, A.; VILHENA, M. T.; QUADROS, R. **On coherent structures from a diffusion alike model**. Brasil: Springer Verlag, 2013. 30

BRUNO, R.; CARBONE, V. The solar wind as a turbulence laboratory. **Living Reviews in Solar Physics**, v. 10, n. 1, p. 2, May 2013. ISSN 1614-4961. Disponível em: <<https://doi.org/10.12942/lrsp-2013-2>>. 3, 104

BURLAGA, L. F. Intermittent turbulence in the solar wind. **jgr**, v. 96, p. 5847–5851, apr 1991. 35

CAMUSSI, R.; GUJ, G. Orthonormal wavelet decomposition of turbulent flows: intermittency and coherent structures. **Journal of Fluids Mechanics**, v. 348, p. 177–199, 1997. 1, 31

CAVALCANTE, H. L. D. de S.; ORIÁ, M.; SORNETTE, D.; OTT, E.; GAUTHIER, D. J. Predictability and suppression of extreme events in a chaotic system. **Physical Review Letters**, v. 111, p. 198701, Nov 2013. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.111.198701>>. 6, 66, 67, 114

CHIAN, A. C.-L.; FENG, H. Q.; HU, Q.; LOEW, M. H.; MIRANDA, R. A.; MUNOZ, P. R.; G.SIBECK, D.; WU, D. J. Genesis of interplanetary intermittent turbulence: a case study of rope-rope magnetic reconnection. **The Astrophysical Journal**, v. 832, n. 2, p. 179, 2016. xv, 3, 5, 38, 41, 114, 124

CHIAN, A. C.-L.; MIRANDA, R. A. Cluster and ace observations of phase synchronization in intermittent magnetic field turbulence: a comparative study of shocked and unshocked solar wind. **Annales Geophysicae**, v. 27, n. 4, p. 1789–1801, 2009. Disponível em: <<https://www.ann-geophys.net/27/1789/2009/>>. 3, 32, 33, 35, 41, 104, 114, 217

CHIAN, A. C.-L.; MUNOZ, P. R. Detection of current sheets and magnetic reconnections at the turbulent leading edge of an interplanetary coronal mass ejection. **The Astrophysical Journal Letters**, v. 733, n. 2, p. L34, 2011. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/2041-8205/733/i=2/a=L34>>. 33, 35, 114, 217

- COLES, S. **An introduction to statistical modeling of extreme values**. London: Springer-Verlag, 2001. (Springer Series in Statistics). ISBN 1-85233-459-2. 2, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 53, 54, 56, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 84, 89, 91, 97, 141, 217, 218
- DAVIDSON, P. A. **Turbulence an introduction for scientists and engineers**. England: Oxford University Press, 2004. 1, 14, 16, 18, 19, 30, 31, 32, 33, 37
- DAVISON, A. C.; SMITH, R. L. Models for exceedances over high thresholds. **Journal of the Royal Statistical Society. Series B Methodological**), v. 52, n. 3, p. 393–442, 1990. 1, 60
- DUBRULLE, B.; GRANER, F.; SORNETTE, D. **Scale invariance and beyond**. [S.l.: s.n.], 1997. 1 p. 65
- EFRON, B. Bootstrap methods: another look at the jackknife. **The Annals of Statistics**, v. 7, n. 1, p. 1–26, 1979. ISSN 00905364. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/2958830>>. 97
- EIGER, S. **Metodos numericos em recursos hidricos**. Brasil: Associação Brasileira de Recursos Hidricos, 1989. 1, 30, 31
- ELSASSER, W. M. The hydromagnetic equations. **Phys. Rev.**, v. 79, p. 183–183, Jul 1950. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.79.183>>. 28, 29
- EMBRECHTS, P.; KLÜPPELBERG, C.; MIKOSCH, T. **Modelling extremal events: for insurance and finance**. Berlin: Springer, 2013. (Stochastic Modelling and Applied Probability). ISBN 9783540609315. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=BX0I2pICfJUC>>. 68
- ENGELAND, K.; HISDAL, H.; FRIGESSI, A. Practical extreme value modelling of hydrological floods and droughts: a case study. **Extremes**, v. 7, n. 1, p. 5–30, Mar 2004. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s10687-004-4727-5>>. 2
- ENGLE, R. Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of united kingdom inflation. **Econometrica**, v. 50, n. 4, p. 987–1007, 1982. Disponível em: <<https://EconPapers.repec.org/RePEc:ecm:emetrp:v:50:y:1982:i:4:p:987-1007>>. 4, 78
- FANG, C. **An Introduction to Fluid Mechanics**. [S.l.]: Springer International Publishing, 2019. 175

- FAWCETT, L.; WALSHAW, D. Markov chain models for extreme wind speeds. **Environmetrics**, v. 17, n. 8, p. 795–809, 2006. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/env.794>>. 2
- FISHER, R. A.; TIPPETT, L. H. C. Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample. **Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society**, Cambridge University Press, v. 24, n. 2, p. 180–190, 1928. 2, 41, 47, 49
- FRISCH, U. **Turbulence: the legacy of Kolmogorov**. Cambridge: Cambridge University Press, 1995. Disponível em: <<https://www.bibsonomy.org/bibtex/28eba895f6cedb74ed02e2c40867fef89/gswelter>>. 1, 2, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 31, 34, 35, 151
- FRISCH, U.; SULEM, P.-L.; NELKIN, M. A simple dynamical model of intermittent fully developed turbulence. **Journal of Fluid Mechanics**, v. 87, n. 4, p. 719–736, 1978. 16
- GALUZIO, P. P.; VIANA, R. L.; LOPES, S. R. Control of extreme events in the bubbling onset of wave turbulence. **Physical Review E**, v. 89, p. 040901, Apr 2014. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.89.040901>>. 6, 11, 66, 67, 114
- GELLER, R. J.; JACKSON, D. D.; KAGAN, Y. Y.; MULARGIA, F. Earthquakes cannot be predicted. **Science**, v. 275, n. 5306, p. 1616–1616, 1997. ISSN 0036-8075. Disponível em: <<http://science.sciencemag.org/content/275/5306/1616>>. 65
- GILLELAND, E.; KATZ, R. W. **in2extRemes: into the R package extRemes - extreme value analysis for weather and climate applications**. [S.l.: s.n.], 2016. 81, 97
- GONZALEZ, W.; PARKER, E. **Magnetic reconnection concepts and applications**. Berlin: Springer, 2016. (Astrophysics and Space Science Library). ISBN 0067-0057. Disponível em: <<https://www.springer.com/la/book/9783319264301>>. 110, 111, 112, 113, 124
- GONZALEZ, W. D.; TSURUTANI, B. T. Interplanetary origin of geomagnetic storms. **Space Science Reviews**, v. 88, n. 529, 1999. 26, 27
- GOSLING, J. T.; PHAN, T. D.; LIN, R. P.; SZABO, A. Prevalence of magnetic reconnection at small field shear angles in the solar wind. **Geophysical Research**

- Letters**, v. 34, n. 15, 2007. Disponível em: <<https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/2007GL030706>>. 218
- GRECO, A.; MATTHAEUS, W. H.; PERRI, S.; OSMAN, K. T.; SERVIDIO, S.; WAN, M.; DMITRUK, P. Partial variance of increments method in solar wind observations and plasma simulations. **Space Science Reviews**, v. 214, n. 1, Nov 2017. ISSN 1572-9672. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s11214-017-0435-8>>. 3, 38, 41, 129, 131, 135, 217
- GRECO, A.; MATTHAEUS, W. H.; SERVIDIO, S.; CHUYCHAI, P.; DMITRUK, P. Statistical analysis of discontinuities in solar wind ace data and comparison with intermittent mhd turbulence. **The Astrophysical Journal Letters**, v. 691, n. 2, p. L111, 2009. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/1538-4357/691/i=2/a=L111>>. 3, 38, 41, 129, 130, 131, 135, 217
- GREEN, E.; HANAN, W.; HEFFERNAN, D. The origins of multifractality in financial time series and the effect of extreme events. **The European Physical Journal B**, v. 87, n. 6, p. 129, Jun 2014. ISSN 1434-6036. Disponível em: <<https://doi.org/10.1140/epjb/e2014-50064-x>>. 3, 78
- HALLER, G.; HADJIGHASEM, A.; FARAZMAND, M.; HUHN, F. Defining coherent vortices objectively from the vorticity. **Journal of Fluid Mechanics**, Cambridge University Press, v. 795, p. 136–173, 2016. 6, 7, 151, 152, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 167, 168, 170, 219
- HALSEY, T. C.; JENSEN, M. H.; KADANOFF, L. P.; PROCACCIA, I.; SHIRAIMAN, B. I. Fractal measures and their singularities: characterization of strange sets. **Physical Review A**, v. 33, n. 2, p. 1141–1151, 1986. 2, 31
- HANSLMEIER, A. **The Sun and space weather**. Berlin: Springer, 2007. (Astrophysics and Space Science Library). ISBN 9781402056048. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=BS70u4h0chUC>>. 2
- HOLYST, J.; ŻEBROWSKA, M.; URBANOWICZ, K. Observations of deterministic chaos in financial time series by recurrence plots, can one control chaotic economy? **The European Physical Journal B - Condensed Matter and Complex Systems**, v. 20, n. 4, p. 531–535, Apr 2001. ISSN 1434-6036. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/PL00011109>>. 3, 78
- HOSKING, J. R. M.; WALLIS, J. F. Parameter and quantile estimation for the generalized pareto distribution. **Technometrics**, Alexandria, Va, USA, v. 29, n. 3,

p. 339–349, set. 1987. ISSN 0040-1706. Disponível em:

<<http://dx.doi.org/10.2307/1269343>>. 63

HUNDHAUSEN, A. J. **Coronal Expansion and Solar Wind**. [s.n.], 1972. 101 p.

Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/abs/1972cesw.book.....H>>. 9

HUSSAIN, A. K. F. On degeneration (decay) of isotropic turbulence in an incompressible viscous liquid. **Doklady Akademii Nauk SSSR**, v. 31, p. 538–540, 1941. 1, 30

IROSHNIKOV, P. Turbulence of a conducting fluid in a strong magnetic field.

Astrophysics Data System, v. 7, p. 566, feb 1964. 3, 22

JACKSON, J. **Classical electrodynamics**. 3. ed. [S.l.: s.n.], 1998. 832 p. 38, 78

JAMES, P. Statistical inference using extreme order statistics. **The Annals of Statistics**, v. 3, n. 1, p. 119–131, 1975. 2, 41, 57, 84

JANCZURA, J.; WERON, R. Black swans or dragon-kings? a simple test for deviations from the power law. **The European Physical Journal Special Topics**, v. 205, n. 1, p. 79–93, May 2012. Disponível em:

<<https://doi.org/10.1140/epjst/e2012-01563-9>>. xxii, 73, 74, 120, 121

JIN, Z. Improving on estimation for the generalized pareto distribution.

Technometrics, v. 52, n. 3, p. 335–339, 2010. Disponível em:

<<https://doi.org/10.1198/TECH.2010.09206>>. 63

JOHANNES, V. **The statistical mechanics of financial markets**. 3. ed.

Berlin: Springer, 2005. (Wiley series in probability and statistics). ISBN

978-3-540-26289-3. Disponível em:

<<https://www.springer.com/la/book/9783540262855>>. 4, 78

KANTZ, H.; SCHREIBER, T. **Nonlinear time series analysis**. New York, NY,

USA: Cambridge University Press, 1997. ISBN 0-521-55144-7. 107

KARMAN, T.; HOWARTH, L. On the statistical theory of isotropic turbulence.

Proceedings of Royal Society of London, p. 192–215, 1938. 18

KARP, D. B. Normalized incomplete beta function: log-concavity in parameters and other properties. **Journal of Mathematical Sciences**, v. 217, n. 1, p.

91–107, Aug 2016. ISSN 1573-8795. 72

KOLMOGOROV, A. The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large reynolds' numbers. **Akademiia Nauk SSSR Doklady**, v. 30, p. 301–305, 1941. 1, 3, 12, 13, 14, 15, 18, 31, 104

KOLMOGOROV, A. N. Dissipation of energy in locally isotropic turbulence. **Doklady Akademii Nauk SSSR**, v. 32, p. 16–18, 1941. 18

_____. A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high reynolds number. **Journal of Fluid Mechanics**, v. 13, n. 1, p. 82–85, 1962. 1, 12, 13, 31, 34

KOTSIAROS, S.; OLSEN, N. The geomagnetic field gradient tensor. **GEM - International Journal on Geomathematics**, v. 3, n. 2, p. 297–314, 2012. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s13137-012-0041-6>>. 170, 171

KRAICHNAN, R. H. Inertial-range spectrum of hydromagnetic turbulence. **The Physics of Fluids**, v. 8, n. 7, p. 1385–1387, 1965. Disponível em: <<https://aip.scitation.org/doi/abs/10.1063/1.1761412>>. 3, 22

LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. **Fluid mechanics**. England: Pergamon Press Oxford, 1959. 1, 12, 13, 31, 34

LEADBETTER, M. R. Extremes and local dependence in stationary sequences. **Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete**, v. 65, n. 2, p. 291–306, Dec 1983. ISSN 1432-2064. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF00532484>>. 87, 89, 116

LI, G. Identifying current-sheet-like structures in the solar wind. **The Astrophysical Journal Letters**, v. 672, n. 1, p. L65, 2008. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/1538-4357/672/i=1/a=L65>>. 3, 38, 39, 40, 77, 81, 115, 122, 123, 217

LI, G.; MIAO, B.; HU, Q.; QIN, G. Effect of current sheets on the solar wind magnetic field power spectrum from the ulysses observation: from kraichnan to kolmogorov scaling. **Physical Review Letters**, v. 106, p. 125001, Mar 2011. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.106.125001>>. 3, 38, 104, 107, 218

LJUNG, G. M.; BOX, G. E. P. On a measure of lack of fit in time series models. **Biometrika**, [Oxford University Press, Biometrika Trust], v. 65, n. 2, p. 297–303,

1978. ISSN 00063444. Disponível em:

<<http://www.jstor.org/stable/2335207>>. 90

LUCENO, A. Fitting the generalized pareto distribution to data using maximum goodness-of-fit estimators. **Computational Statistics and Data Analysis**, v. 51, n. 2, p. 904–917, nov. 2006. ISSN 0167-9473. Disponível em:

<<http://dx.doi.org/10.1016/j.csda.2005.09.011>>. 63

MADELBROT, B. B. **The fractal geometry of nature**. EUA: Freeman, San Francisco, 1982. 36

MATTHAEUS, W. H.; GHOSH, S.; OUGHTON, S.; ROBERTS, D. A.

Anisotropic three-dimensional mhd turbulence. **Journal of Geophysical**

Research: Space Physics, v. 101, n. A4, p. 7619–7629, 1996. Disponível em:

<<https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/95JA03830>>.

22

MENEVEAU, C.; SREENIVASAN, K. R. The multifractal nature of turbulent energy-dissipation. **Journal of Fluids Mechanics**, v. 224, p. 429–484, 1991. 31

MISHRA, A.; SAHA, S.; VIGNESHWARAN, M.; PAL, P.; KAPITANIAK, T.; DANA, S. K. Dragon-king-like extreme events in coupled bursting neurons.

Physical Review E, v. 97, p. 062311, Jun 2018. Disponível em:

<<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.97.062311>>. 6, 67

MOLLER, S.; SILVESTRINE, J. Turbulência. **Associação Brasileira de Engenharia e Ciências Mecânicas**, Rio de Janeiro, 2004. 1, 30

MOLONEY, N. R.; DAVIDSEN, J. Extreme value statistics in the solar wind: an application to correlated lévy processes. **Journal of Geophysical Research: Space Physics**, v. 115, n. A10, 2010. Disponível em: <<https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/2009JA015114>>. 2,

110

110

MONIN, A. S.; YAGLOM, A. M. **Statistical fluid mechanics**. EUA: MIT Press, 1971. 12

MONTGOMERY, D.; MATTHAEUS, W. H. Anisotropic Modal Energy Transfer in Interstellar Turbulence. **Astrophysical Journal**, v. 447, p. 706, jul. 1995. 22

OGATA, Y. Statistical models for earthquake occurrences and residual analysis for point processes. **Journal of the American Statistical Association**, v. 83,

n. 401, p. 9–27, 1988. Disponível em: <<https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/01621459.1988.10478560>>. 2

OPPENHEIM, A.; VERGHESE, G. **Signals, systems and inference, global edition**. [s.n.], 2017. ISBN 9781292156200. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=vVlojwEACAAJ>>. 80, 81

OTT, E. **Chaos in dynamical systems**. 2. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 2002. 66

PARK, M. H.; KIM, J. H. Estimating extreme tail risk measures with generalized pareto distribution. **Computational Statistics and Data Analysis**, v. 98, n. C, p. 91–104, jun 2016. ISSN 0167-9473. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.csda.2015.12.008>>. 63

PASCHMANN, G.; DALY, P. **Analysis methods for multi-spacecraft data**. [s.n.], 1998. (ISSI scientific report). Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=y3mxSgAACAAJ>>. 79, 104

PATRICK, R. Profile likelihood for estimation and confidence intervals. **Stata Journal**, v. 7, n. 3, p. 376–387, Sept. 2007. Disponível em: <<https://ideas.repec.org/a/tsj/stataj/v7y2007i3p376-387.html>>. 97

PEACOCK, T.; HALLER, G. Lagrangian coherent structures: the hidden skeleton of fluid flows. **Physics Today**, v. 66, p. 41–, 02 2013. 151

PISARENKO, V.; SORNETTE, D. Robust statistical tests of dragon-kings beyond power law distributions. **The European Physical Journal Special Topics**, v. 205, n. 1, p. 95–115, May 2012. Disponível em: <<https://doi.org/10.1140/epjst/e2012-01564-8>>. 67, 68, 69, 71, 72, 73, 110

PRIOR, C.; YEATES, A. R. On the helicity of open magnetic fields. **The Astrophysical Journal**, v. 787, n. 2, p. 100, 2014. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0004-637X/787/i=2/a=100>>. 169

REMPEL, E. L.; CHIAN, A. C.-L.; BERON-VERA, F. J.; SZANYI, S.; HALLER, G. Objective vortex detection in an astrophysical dynamo. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters**, v. 466, n. 1, p. L108, 2017. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1093/mnrasl/slw248>>. 6, 160, 168, 219

- REMPEL, E. L.; CHIAN, A. C.-L.; BRANDENBURG, A.; MUÑOZ, P. R.; SHADDEN, S. C. Coherent structures and the saturation of a nonlinear dynamo. **Journal of Fluid Mechanics**, v. 729, p. 309–329, 2013. 6, 66, 151
- RICHARDSON, L. F. Weather prediction by numerical process. **Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society**, v. 48, n. 203, p. 282–284, 1922. Disponível em: <<https://rmets.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/qj.49704820311>>. 1, 14
- RILEY, P. On the probability of occurrence of extreme space weather events. **Space Weather**, v. 10, n. 2, 2012. Disponível em: <<https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/2011SW000734>>. 2, 110
- ROBINSON, S. K. The kinematics of turbulent boundary layer structure. **NASA**, v. 1, 1991. 1, 30
- SALEM, C.; MANGENEY, A.; BALE, S. D.; VELTRI, P. Solar wind magnetohydrodynamics turbulence: anomalous scaling and role of intermittency. **The Astrophysical Journal**, v. 702, n. 1, p. 537, 2009. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0004-637X/702/i=1/a=537>>. 3, 38, 104
- SERVIDIO, S.; GRECO, A.; MATTHAEUS, W. H.; OSMAN, K. T.; DMITRUK, P. Statistical association of discontinuities and reconnection in magnetohydrodynamic turbulence. **Journal of Geophysical Research: Space Physics**, v. 116, n. A9, 2011. Disponível em: <<https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/2011JA016569>>. 217
- SMITH, R. L. Maximum likelihood estimation in a class of nonregular cases. **Biometrika**, v. 72, p. 67–90, 1985. 54
- SONSRETTEE, W.; SUBEDI, P.; RUFFOLO, D.; MATTHAEUS, W. H.; SNODIN, A. P.; WONGPAN, P.; CHUYCHAI, P. Magnetic field line random walk in isotropic turbulence with zero mean field. **The Astrophysical Journal**, v. 798, n. 1, p. 59, 2015. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0004-637X/798/i=1/a=59>>. 168
- SORNETTE, D.; OUILLON, G. Dragon-kings: mechanisms, statistical methods and empirical evidence. **The European Physical Journal Special Topics**, v. 205, n. 1, p. 1–26, May 2012. Disponível em: <<https://doi.org/10.1140/epjst/e2012-01559-5>>. 6, 65, 66, 67, 110, 114

SRIDHAR, S.; GOLDREICH, P. Toward a theory of interstellar turbulence. 1: Weak Alfvénic turbulence. **Astrophysical Journal**, v. 432, p. 612–621, set. 1994. 22

STULL, R. B. **An introduction to Boundary Layer Meteorology**. [S.l.: s.n.], 1988. 2, 31

SUVEGES, M.; DAVISON, A. C. A case study of a “dragon-king”: the 1999 venezuelan catastrophe. **The European Physical Journal Special Topics**, v. 205, n. 1, p. 131–146, May 2012. Disponível em: <<https://doi.org/10.1140/epjst/e2012-01566-6>>. 6, 67

SUZANA, S. S. A.; REMPEL, E. L.; GOMES, T. F. P.; IKER, S. R.; CHIAN, A. C. L. Objective lagrangian vortex detection in the solar photosphere. **The Astrophysical Journal Letters**, v. 863, n. 1, p. L2, 2018. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/2041-8205/863/i=1/a=L2>>. 6, 199, 200, 201, 202, 203, 204, 215

SWISDAK, M.; OPPER, M.; DRAKE, J. F.; BIBI, F. A. The vector direction of the interstellar magnetic field outside the heliosphere. **The Astrophysical Journal**, v. 710, n. 2, p. 1769, 2010. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0004-637X/710/i=2/a=1769>>. xxii, 110, 112, 113, 124, 125

SWISDAK, M.; ROGERS, B. N.; DRAKE, J. F.; SHAY, M. A. Diamagnetic suppression of component magnetic reconnection at the magnetopause. **Journal of Geophysical Research: Space Physics**, 2003. 110, 114

TALEB, N. N. **The black swan. the impact of the highly improbable**. [S.l.]: Random House, 2008. ISBN 0812979184. 65, 67

TAYLOR, G. I. Statistical theory of turbulence. **Proceedings of Royal Society of London**, v. 151, p. 421–478, 1935. 1, 12, 128

THOMAS, M.; LEMAITRE, M.; WILSON, M. L.; VIBOUD, C.; YORDANOV, Y.; WACKERNAGEL, H.; CARRAT, F. Applications of extreme value theory in public health. **PLOS ONE**, v. 11, n. 7, p. 1–7, 07 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.1371/journal.pone.0159312>>. 2

TIKHONOV, A. N.; ARSENIN, V. Y. **Solutions of Ill-posed problems**. [S.l.]: W.H. Winston, 1977. 215

- TIPLER, P. **Física 2**. Brasil: Guanabara Koogan, 1990. 30
- TRUESDELL, C.; NOLL, W. **The nonlinear field theories of mechanics**. 3. ed. Berlin: Springer, 2004. 602 p. 160, 161, 162, 172, 212
- TSAY, R. **Analysis of financial time series**. [s.n.], 2010. (Wiley series in probability and statistics). ISBN 9780470644553. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=N0b8TCwGd90C>>. 4, 42, 44, 47, 49, 51, 63, 78, 80, 98
- TSIFTSI, T.; LUZ, V. De la. extreme value analysis of solar flare events. **ArXiv e-prints**, feb 2018. 2, 110
- TSUBOUCHI, K.; OMURA, Y. Long-term occurrence probabilities of intense geomagnetic storm events. **Space Weather**, v. 5, n. 12, p. 1–12, Dec 2007. ISSN 1542-7390. 2, 110
- WELCH, P. The use of fast fourier transform for the estimation of power spectra: a method based on time averaging over short, modified periodograms. **IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics**, v. 15, p. 70–73, 1967. xx, 79, 104, 106
- WHEATLEY, S.; SORNETTE, D. Multiple outlier detection in samples with exponential and pareto tails: redeeming the inward approach and detecting dragon kings. **Journal of Applied Statistics**, 07 2015. 5, 72
- WU, C.; CHANG, T. Further study of the dynamics of two-dimensional mhd coherent structures - a large-scale simulation. **JASTP**, v. 63, n. 13, p. 1447 – 1453, 2001. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1364682600002467>>. 189
- WU, P.; PERRI, S.; OSMAN, K.; WAN, M.; MATTHAEUS, W. H.; SHAY, M. A.; GOLDSTEIN, M. L.; KARIMABADI, H.; CHAPMAN, S. Intermittent heating in solar wind and kinetic simulations. **The Astrophysical Journal Letters**, v. 763, n. 2, p. L30, 2013. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/2041-8205/763/i=2/a=L30>>. 217
- ZHANG, J. Likelihood moment estimation for the generalized pareto distribution. **Australian and New Zealand Journal of Statistics**, v. 49, n. 1, p. 69–77, 2007. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/j.1467-842X.2006.00464.x>>. 63

PUBLICAÇÕES TÉCNICO-CIENTÍFICAS EDITADAS PELO INPE

Teses e Dissertações (TDI)

Teses e Dissertações apresentadas nos Cursos de Pós-Graduação do INPE.

Manuais Técnicos (MAN)

São publicações de caráter técnico que incluem normas, procedimentos, instruções e orientações.

Notas Técnico-Científicas (NTC)

Incluem resultados preliminares de pesquisa, descrição de equipamentos, descrição e ou documentação de programas de computador, descrição de sistemas e experimentos, apresentação de testes, dados, atlas, e documentação de projetos de engenharia.

Relatórios de Pesquisa (RPQ)

Reportam resultados ou progressos de pesquisas tanto de natureza técnica quanto científica, cujo nível seja compatível com o de uma publicação em periódico nacional ou internacional.

Propostas e Relatórios de Projetos (PRP)

São propostas de projetos técnico-científicos e relatórios de acompanhamento de projetos, atividades e convênios.

Publicações Didáticas (PUD)

Incluem apostilas, notas de aula e manuais didáticos.

Publicações Seriadas

São os seriados técnico-científicos: boletins, periódicos, anuários e anais de eventos (simpósios e congressos). Contam destas publicações o Internacional Standard Serial Number (ISSN), que é um código único e definitivo para identificação de títulos de seriados.

Programas de Computador (PDC)

São a seqüência de instruções ou códigos, expressos em uma linguagem de programação compilada ou interpretada, a ser executada por um computador para alcançar um determinado objetivo. Aceitam-se tanto programas fonte quanto os executáveis.

Pré-publicações (PRE)

Todos os artigos publicados em periódicos, anais e como capítulos de livros.