



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA, INOVAÇÕES E COMUNICAÇÕES
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

sid.inpe.br/mtc-m21c/2019/02.13.18.47-TDI

INSTABILIDADE CENTRÍFUGA EM CAMADA LIMITE COM GRADIENTE DE PRESSÃO

Leandro Marochio Fernandes

Tese de Doutorado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Combustão e Propulsão, orientada pelo Dr. Márcio Teixeira de Mendonça, aprovada em 25 de fevereiro de 2019.

URL do documento original:

<<http://urlib.net/8JMKD3MGP3W34R/3SNPJEE>>

INPE
São José dos Campos
2019

PUBLICADO POR:

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE

Gabinete do Diretor (GBDIR)

Serviço de Informação e Documentação (SESID)

CEP 12.227-010

São José dos Campos - SP - Brasil

Tel.:(012) 3208-6923/7348

E-mail: pubtc@inpe.br

CONSELHO DE EDITORAÇÃO E PRESERVAÇÃO DA PRODUÇÃO INTELECTUAL DO INPE - CEPPII (PORTARIA Nº 176/2018/SEI-INPE):

Presidente:

Dr. Marley Cavalcante de Lima Moscati - Centro de Previsão de Tempo e Estudos Climáticos (CGCPT)

Membros:

Dra. Carina Barros Mello - Coordenação de Laboratórios Associados (COCTE)

Dr. Alisson Dal Lago - Coordenação-Geral de Ciências Espaciais e Atmosféricas (CGCEA)

Dr. Evandro Albiach Branco - Centro de Ciência do Sistema Terrestre (COCST)

Dr. Evandro Marconi Rocco - Coordenação-Geral de Engenharia e Tecnologia Espacial (CGETE)

Dr. Hermann Johann Heinrich Kux - Coordenação-Geral de Observação da Terra (CGOBT)

Dra. Ieda Del Arco Sanches - Conselho de Pós-Graduação - (CPG)

Silvia Castro Marcelino - Serviço de Informação e Documentação (SESID)

BIBLIOTECA DIGITAL:

Dr. Gerald Jean Francis Banon

Clayton Martins Pereira - Serviço de Informação e Documentação (SESID)

REVISÃO E NORMALIZAÇÃO DOCUMENTÁRIA:

Simone Angélica Del Ducca Barbedo - Serviço de Informação e Documentação (SESID)

André Luis Dias Fernandes - Serviço de Informação e Documentação (SESID)

EDITORAÇÃO ELETRÔNICA:

Ivone Martins - Serviço de Informação e Documentação (SESID)

Murilo Luiz Silva Gino - Serviço de Informação e Documentação (SESID)



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA, INOVAÇÕES E COMUNICAÇÕES
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

sid.inpe.br/mtc-m21c/2019/02.13.18.47-TDI

INSTABILIDADE CENTRÍFUGA EM CAMADA LIMITE COM GRADIENTE DE PRESSÃO

Leandro Marochio Fernandes

Tese de Doutorado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Combustão e Propulsão, orientada pelo Dr. Márcio Teixeira de Mendonça, aprovada em 25 de fevereiro de 2019.

URL do documento original:

<<http://urlib.net/8JMKD3MGP3W34R/3SNPJEE>>

INPE
São José dos Campos
2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Fernandes, Leandro Marochio.

F391i Instabilidade centrífuga em camada limite com gradiente de pressão / Leandro Marochio Fernandes. – São José dos Campos : INPE, 2019.

xxvi + 101 p. ; (sid.inpe.br/mtc-m21c/2019/02.13.18.47-TDI)

Tese (Doutorado em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Combustão e Propulsão) – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2019.

Orientador : Dr. Márcio Teixeira de Mendonça.

1. Vórtices de Görtler. 2. Camada limite. 3. Gradiente de pressão. 4. Simulação numérica. I.Título.

CDU 544.272:51987



Esta obra foi licenciada sob uma Licença [Creative Commons Atribuição-NãoComercial 3.0 Não Adaptada](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/).

This work is licensed under a [Creative Commons Attribution-NonCommercial 3.0 Unported License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/).

Aluno (a): **Leandro Marochlo Fernandes**

Título: "INSTABILIDADE CENTRÍFUGA EM CAMADA LIMITE COM GRADIENTE DE PRESSÃO"

Aprovado (a) pela Banca Examinadora em cumprimento ao requisito exigido para obtenção do Título de **Doutor(a)** em

**Engenharia e Tecnologia
Espaciais/Combustão e Propulsão**

Dr. Márcio Teixeira de Mendonça



Presidente / Orientador(a) / IAE/DCTA / SJCampos - SP

() Participação por Video - Conferência

Aprovado () Reprovado

Dr. Roman Ivanovitch Savonov



Membro da Banca / INPE / Cachoeira Paulista - SP

() Participação por Video - Conferência

Aprovado () Reprovado

Dr. Wladimir Mattos da Costa Dourado

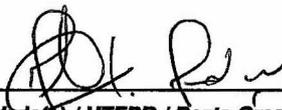


Membro da Banca / IAE/APA / São José dos Campos - SP

() Participação por Video - Conferência

Aprovado () Reprovado

Dr. Josuel Kruppa Rogenski



Convidado(a) / UTFPR / Ponta Grossa - PR

Participação por Video - Conferência

Aprovado () Reprovado

Este trabalho foi aprovado por:

() maioria simples

unanimidade

Aprovado (a) pela Banca Examinadora
em cumprimento ao requisito exigido para
obtenção do Título de **Doutor(a)** em

**Engenharia e Tecnologia
Espaciais/Combustão e Propulsão**

Dr. Vinicius Malatesta

VINICIUS MALATESTA

Convidado(a) / ITA / São José dos Campos - SP

Participação por Vídeo - Conferência

Aprovado Reprovado

Este trabalho foi aprovado por:

maioria simples

unanimidade

São José dos Campos, 25 de fevereiro de 2019

“Let me tell you something you already know. The world ain’t all sunshine and rainbows. It’s a very mean and nasty place, and I don’t care how tough you are, it will beat you to your knees and keep you there permanently if you let it. You, me, or nobody is gonna hit as hard as life. But it ain’t about how hard you hit. It’s about how hard you can get hit and keep moving forward; how much you can take and keep moving forward. That’s how winning is done!”

ROCKY
em “Rocky Balboa”, 2006

Dedicado a todos aqueles que, presentes nesta vida ou chamados à outra,
apostaram comigo contra as possibilidades.

AGRADECIMENTOS

Desafiadora é a tarefa de lembrar-me dos inúmeros personagens que participaram da construção deste documento no decorrer desses anos.

Inevitavelmente injustiças serão cometidas, seja pela ausência de alguns importantes nomes ou seja pela dificuldade de encontrar palavras que possam traduzir na íntegra minha gratidão e respeito. Na certeza de que antemão gozo de alguma dose de tolerância e piedade por essa minha falha de memória, gostaria de iniciar meus agradecimentos àqueles que incansavelmente se esforçaram para que eu e meus irmãos entendêssemos a importância e o poder transformador do conhecimento. À meus pais, Celso e Lucila, minha eterna devoção.

Aos meus irmãos de sangue Gabriel e Rafael, que sempre me fizeram acreditar no improvável, no impossível. Pelas vossas palavras e crenças, explorei novos caminhos e encontrei novas possibilidades.

Aos meus tutores acadêmicos que além dos muitos bons conselhos proferidos, dividiram gentilmente comigo uma boa dose de suas valorosas bagagens. Em especial aos meus amigos Dr. Wladimir Dourado, Dr. Fernando Fachini e Dr. Jerônimo Travelho.

Ao melhor e mais virtuoso mestre que um pupilo poderia conhecer, Dr. Márcio Teixeira. Caríssimo mestre, pelos vossos olhos enxerguei um universo inexplorado. Pelo vosso empenho, caminhei em direção à luz do conhecimento. Pelo vosso exemplo, fui conduzindo no progresso do saber. O senhor foi e sempre será uma fonte de esmero, honradez e entusiasmo tão necessários as batalhas vindouras.

Não poderia deixar de lembrar-me de minha amada esposa Larissa que todas as vezes abençoava-me antes de minhas partidas e pacientemente rezava pelo meu retorno. Que tantas vezes compadeceu-se e amou-me incondicionalmente. Obrigado por você existir e fazer parte da minha vida.

Aos meus irmãos de alma, aos meus familiares e demais grato pela imprescindível força, apoio e estímulo. Não importa onde estejam, nossos sentimentos serão sempre mútuos e fidedignos.

E por fim e nunca menos importante, reforço a presença firme e calorosa do Pai celestial. Sua mão forte conduziu-me nas horas mais escuras. Sua presença ao meu lado nesta caminhada foi tão real e concreta quanto estas linhas que agora escrevo e, por ser verdade, aqui testemunho. À todos vós, meus sinceros agradecimentos.

RESUMO

Camadas limite sobre superfícies côncavas podem se tornar instáveis devido à instabilidade centrífuga que se manifesta como vórtices contra-rotativos estacionários na direção do escoamento. O mecanismo de instabilidade centrífuga em camadas limite foi extensivamente estudado e há um grande número de publicações abordando diferentes aspectos deste problema. Os resultados sobre o efeito do gradiente de pressão mostram que gradientes favoráveis são estabilizantes e por sua vez os adversos aumentam a instabilidade. O objetivo da presente investigação é complementar esses trabalhos, olhando particularmente para o efeito do gradiente de pressão no diagrama de estabilidade e na determinação do comprimento de onda transversal que corresponde ao crescimento mais rápido de um vórtice. O presente estudo baseia-se na teoria de estabilidade linear clássica, onde a aproximação da camada limite paralela é assumida. Assim sendo, os resultados são válidos para os números de Görtler acima de 7, o limite inferior onde o modo de análise de estabilidade linear local foi identificado na literatura como válida. Para o escoamento baseado pela solução de Falkner-Skan, as equações de estabilidade linear são resolvidas por um método de chute inicial onde os autovalores são o número de Görtler, o número de onda transversal e a taxa de amplificação. Os resultados mostram estabilização devido ao gradiente de pressão favorável com as curvas de taxas de amplificação constantes deslocadas para números de Görtler mais altos e o efeito oposto para gradiente de pressão adverso. Além disso, também é apresentado o modo de crescimento mais rápido de um vórtice dado um comprimento de onda transversal para uma gama de parâmetros de aceleração de Falkner-Skan.

Palavras-chave: Vórtices de Görtler. Camada limite. Gradiente de pressão. Simulação numérica.

BOUNDARY LAYER CENTRIFUGAL INSTABILITY WITH PRESSURE GRADIENT

ABSTRACT

Boundary layers over concave surfaces may become unstable due to centrifugal instability that manifests itself as stationary streamwise counter rotating vortices. The centrifugal instability mechanism in boundary layers have been extensively studied and there is a large number of publications addressing different aspects of this problem. The results on the effect of pressure gradient show that favorable pressure gradients are stabilizing and adverse pressure gradient enhances the instability. The objective of the present investigation is to complement those works, looking particularly at the effect of pressure gradient on the stability diagram and on the determination of the spanwise wave number corresponding to the fastest growth. The present study is based on the classic linear stability theory, where the parallel boundary layer approximation is assumed. Therefore, results are valid for Görtler numbers above 7, the lower limit where local mode linear stability analysis was identified in the literature as valid. For the base flow given by the Falkner-Skan solution, the linear stability equations are solved by a shooting method where the eigenvalues are the Görtler number, the spanwise wavenumber and the growth rate. The results show stabilization due to favorable pressure gradient as the constant amplification rate curves are displaced to higher Görtler numbers and the opposite effect for adverse pressure gradient. Results previously unavailable in the literature identifying the fastest growing mode spanwise wavelength for a range of Falkner-Skan acceleration parameters are presented.

Keywords: Görtler vortices. Boundary layer. Pressure gradient. Numerical simulation.

LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>	
1.1	Esquema de uma partícula perturbada e deslocada da sua posição original.	3
1.2	Escoamento sobre superfícies curvas sob diferentes configurações.	4
1.3	Escoamento de Taylor-Couette.	4
1.4	Escoamento sob superfícies curvilíneas com presença dos vórtices de Dean.	5
1.5	Esquema do desenvolvimento dos vórtices de Görtler.	6
1.6	Efeitos da presença dos vórtices sobre o escoamento.	6
1.7	Diagrama de estabilidade para camada limite de Blasius.	8
1.8	Evidência numérica da forma de um par de vórtices (corte no plano zy).	9
1.9	Captura experimental da estrutura dos vórtices (corte no plano xz).	9
4.1	Perfil de velocidades em função da coordenada normal para o escoamento base de Falkner-Skan.	41
5.1	Curvas neutras utilizadas para verificação do código para o parâmetro de aceleração de Falkner-Skan $m = 0$	54
5.2	Curvas neutras utilizadas para verificação do código para o parâmetro de aceleração de Falkner-Skan $m = 0, 3$	55
5.3	Comportamento das curvas neutras sob diferentes condições do gradiente de pressão.	56
5.4	Região particular onde as curvas neutras se cruzam.	57
5.5	Variação de Λ ao longo da trajetória correspondendo ao comprimento de onda que incorre no crescimento mais rápido para gradientes de pressão favoráveis e adversos.	61
5.6	Variação da taxa de amplificação α ao longo da trajetória correspondendo ao comprimento de onda que incorre no crescimento mais rápido para gradientes de pressão favoráveis e adversos.	61
5.7	Diagrama de estabilidade para vórtices de Görtler em camada limite de Falkner-Skan com $m = 0$	62
5.8	Diagrama de estabilidade para vórtices de Görtler em camada limite de Falkner-Skan com $m = 0, 1$	62
5.9	Diagrama de estabilidade para vórtices de Görtler em camada limite de Falkner-Skan com $m = 0, 2$	63
5.10	Diagrama de estabilidade para vórtices de Görtler em camada limite de Falkner-Skan com $m = 0, 3$	63

5.11	Diagrama de estabilidade para vórtices de Görtler em camada limite de Falkner-Skan com $m = 0,4$	64
5.12	Diagrama de estabilidade para vórtices de Görtler em camada limite de Falkner-Skan com $m = 0,5$	64
5.13	Diagrama de estabilidade para vórtices de Görtler em camada limite de Falkner-Skan com $m = -0,02$	65
5.14	Diagrama de estabilidade para vórtices de Görtler em camada limite de Falkner-Skan com $m = -0,04$	65
5.15	Diagrama de estabilidade para vórtices de Görtler em camada limite de Falkner-Skan com $m = -0,06$	66
5.16	Diagrama de estabilidade para vórtices de Görtler em camada limite de Falkner-Skan com $m = -0,08$	66
5.17	Diagrama de estabilidade para vórtices de Görtler em camada limite de Falkner-Skan com $m = -0,09$	67
5.18	Distribuição da velocidade longitudinal em função da coordenada normal para $m = 0$	72
5.19	Distribuição da velocidade longitudinal em função da coordenada normal para $m = 0,9$	73
5.20	Distribuição da velocidade longitudinal em função da coordenada normal para $m = -0,09$	73
5.21	Perfis de velocidade no plano transversal e normal com $m = 0$ para diferentes comprimentos de onda. À direita $\Lambda = 411$, à esquerda $\Lambda = 95$ e no centro $\Lambda_{m\acute{a}x} = 212$	75
5.22	Perfis de velocidade no plano transversal e normal com $m = 0,9$ para diferentes comprimentos de onda. À direita $\Lambda = 227$, à esquerda $\Lambda = 63$ e no centro $\Lambda_{m\acute{a}x} = 112$	76
5.23	Perfis de velocidade no plano transversal e normal com $m = -0,09$ para diferentes comprimentos de onda. À direita $\Lambda = 487$, à esquerda $\Lambda = 110$ e no centro $\Lambda_{m\acute{a}x} = 275$	77
5.24	Isolinhas de velocidade no plano yz para um gradiente de pressão neutro. (A) e (B) comprimentos de onda posicionados à esquerda do comprimento de onda de maior crescimento. (C) e (D) comprimentos de onda posicionados à direita. (E) comprimento de onda de maior crescimento.	78
5.25	Isolinhas de velocidade no plano yz para o gradiente de pressão favorável $m = 0,9$. (A) e (B) comprimentos de onda posicionados à esquerda do comprimento de onda de maior crescimento. (C) e (D) comprimentos de onda posicionados à direita. (E) comprimento de onda de maior crescimento.	79

5.26 Isolinhas de velocidade no plano yz para o gradiente de pressão adverso $m = -0,09$. (A) e (B) comprimentos de onda posicionados à esquerda do comprimento de onda de maior crescimento. (C) e (D) comprimentos de onda posicionados à direita. (E) comprimento de onda de maior crescimento. 80

LISTA DE TABELAS

	<u>Pág.</u>	
5.1	Estudo de independência de malha efetuado. Na segunda coluna o número de elementos empregados. Na terceira coluna a variação do número de Görtler para gradiente neutro, na quarta para gradiente favorável igual a 0,3 e na última para um gradiente adverso igual a $-0,04$	53
5.2	Comprimento de onda transversal do modo de crescimento mais rápido Λ para diferentes gradientes de pressão favoráveis (m). A segunda e a terceira coluna ilustram o critério de integração da amplitude. Na quarta coluna o critério da taxa de amplificação máxima em $Go = 7$	59
5.3	Comprimento de onda transversal do modo de crescimento mais rápido Λ para diferentes gradientes de pressão adversos (m). A segunda e a terceira coluna ilustram o critério de integração da amplitude. Na quarta coluna o critério da taxa de amplificação máxima em $Go = 7$	60
5.4	Comparativo entre os resultados obtidos por Matsson (2008) e o presente trabalho. Na primeira coluna os gradientes de pressão estudados. Na segunda e terceira colunas os valores de β e Λ do estudo de Matsson em $Go = 2$ e $\beta = 0,22$ transportados para a condição $Go = 7$. Na quarta e quinta colunas os valores de β e Λ em $Go = 2$ e $\beta = 0,52$ transportados para a condição $Go = 7$. Na sexta coluna, os comprimentos de onda $\Lambda_{m\acute{a}x}$ obtidos neste estudo para os correspondentes valores de parâmetro de aceleração m em $Go = 7$	68
5.5	Comparativo entre os resultados obtidos por Rogenski et al. (2016a) e o presente trabalho. Na primeira coluna os valores do parâmetro de Hartree investigados. Na segunda os gradientes de pressão correlatos. Na terceira os valores de Λ do estudo de Rogenski em $Go = 2,5$ e $\Lambda = 100$ transportados para a condição $Go = 7$, bem como na quarta e quinta colunas os valores de $\Lambda = 250$ e $\Lambda = 450$ em $Go = 2,5$ respectivamente transportados para a condição $Go = 7$. Na última coluna os comprimentos de onda Λ_{max} obtidos neste estudo para os correspondentes valores de parâmetro de aceleração m em $Go = 7$	70
5.6	Variação da espessura de uma perturbação $\delta(u^*)$ para $m = 0$ em $Go = 7$ para diversos comprimentos de onda.	74

5.7	Varição da espessura de uma perturbação $\delta(u^*)$ para um gradiente de pressão favorável ($m = 0,9$) em $Go = 7$ para diversos comprimentos de onda.	74
5.8	Varição da espessura de uma perturbação $\delta(u^*)$ para um gradiente de pressão adverso ($m = -0,09$) em $Go = 7$ para diversos comprimentos de onda.	74

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CL	–	Camada Limite
DNS	–	Simulação Numérica Direta
EDO	–	Equação Diferencial Ordinária
EDP	–	Equação Diferencial Parcial
ENS	–	Equações de Navier-Stokes
FS	–	Falkner-Skan
GV	–	Vórtices de Görtler
LI	–	Linearmente Independente
LST	–	Teoria de Estabilidade Linear
OGS	–	Ortonormalização de Gram-Schmidt
PSE	–	Equações de Estabilidade Parabolizadas

LISTA DE SÍMBOLOS

A	–	Amplitude complexa
A_{ik}	–	Constante associada ao autovetor e autovalor i
B_i	–	Constante associada ao autovetor
C	–	Constante
f	–	Variável similar para velocidade
Go	–	Número de Görtler
i	–	Unidade imaginária
I	–	Matriz identidade
m	–	Parâmetro de aceleração da camada limite
M	–	Matriz do sistema de EDO's
p	–	Pressão instantânea
r	–	Coordenada radial
R	–	Raio de curvatura
Re	–	Número de Reynolds
u	–	Velocidade instantânea na direção x
U	–	Velocidade do escoamento base na direção x
U_e	–	Velocidade do escoamento externo
U_0	–	Velocidade do escoamento não perturbado
v	–	Velocidade instantânea na direção y
V	–	Velocidade do escoamento base na direção y
V_r	–	Velocidade radial
V_θ	–	Velocidade azimutal
V_z	–	Velocidade longitudinal
x	–	Coordenada longitudinal
x_0	–	Comprimento característico de referência na direção longitudinal
y	–	Coordenada normal
Y_i	–	Autovetor solução
Y_i'	–	Vetor de derivadas
w	–	Velocidade instantânea na direção z
z	–	Coordenada transversal
Z	–	Velocidade do escoamento base na direção z
Z_i	–	Autovetor solução normalizado
α	–	Taxa de amplificação espacial
β_{fs}	–	Parâmetro de aceleração da camada limite
β	–	Número de onda transversal
δ_0	–	Comprimento característico na direção normal proporcional a espessura da camada limite
$\delta(^*)$	–	Espessura da camada de perturbação
η	–	Coordenada vertical de similaridade
$\eta_{máx}$	–	Tamanho da camada limite

Γ	–	Circulação
κ	–	Curvatura da superfície
Λ	–	Comprimento de onda transversal adimensional
$\Lambda_{máx}$	–	Comprimento de onda transversal adimensional que implica no crescimento mais rápido de uma perturbação
λ	–	Comprimento de onda transversal
λ_k	–	Autovalores da matriz M
ν	–	Viscosidade cinemática
π	–	Proporção numérica definida pela relação entre o perímetro de uma circunferência e seu diâmetro
θ	–	Coordenada azimutal
ψ	–	Função corrente
ρ	–	Massa específica do fluido
d	–	Subscrito indicando que a variável é dimensional
i	–	Subscrito indicando posição inicial
x	–	Subscrito indicando a derivada em relação a x
y	–	Subscrito indicando a derivada em relação a y
0	–	Subscrito indicando uma posição de referência inicial
$*$	–	Sobrescrito indicando que a amplificação da perturbação
$-$	–	Sobrescrito indicando a amplitude complexa da perturbação
$'$	–	Representa a derivação em relação a direção normal
∞	–	Posição fora da camada limite

SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
1 INTRODUÇÃO	1
1.1 Instabilidade centrífuga e seu mecanismo não viscoso	1
1.2 Instabilidade de Görtler, sua física e experimentos correlatos	5
1.3 Efeitos do gradiente de pressão nos vórtices de Görtler	10
1.4 Escopo da presente pesquisa	15
2 EQUAÇÕES GOVERNANTES	19
2.1 Sistema de coordenadas adotado	19
2.2 Equações governantes	19
2.2.1 Adimensionalização	21
2.2.2 Escoamento base	23
2.2.3 Abordagem para perturbações	28
3 ANÁLISE POR MODOS NORMAIS	31
3.1 Formulação local	31
4 METODOLOGIA	37
4.1 Abordagem para solução das equações de conservação para o escoamento base	37
4.2 Abordagem para solução das equações de conservação para as perturbações	39
4.3 Amplificação a montante ao longo de uma linha de comprimento de onda λ constante	47
4.3.1 Adimensionalização dos autovalores	48
4.3.2 Amplificação das perturbações	49
4.3.3 Relação entre o comprimento de onda e o número de onda transversal	52
5 RESULTADOS	53
5.1 Estudo de independência de malha	53
5.2 Verificação do código	54
5.3 As curvas neutras	55
5.4 Os diagramas de estabilidade	56
5.5 Análises adicionais	68
5.6 O campo de velocidades	71

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS FUTURAS	81
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	83
ANEXO A - OBTENÇÃO DOS AUTOVALORES E AUTOVETORES NA REGIÃO EXTERNA DA CAMADA LIMITE.	89
A.1 Autovalores do operador $M : Y \rightarrow Y$ tal que $My = \lambda y$	89
A.2 Raízes do polinômio característico	91
A.3 Autovetores associados	92

1 INTRODUÇÃO

Via de regra, escoamentos de interesse de engenharia são turbulentos. Não obstante, em aplicações aeroespaciais existem diversos casos onde a camada limite (CL) é inicialmente laminar e a transição para regime turbulento ocorre numa região não desprezível do domínio. Em perfis aerodinâmicos, tais como em asas e em palhetas de turbinas, a região laminar e de transição chega a ocupar até 30% da corda do perfil. Em aerodinâmica existe atualmente um grande interesse em otimização de perfis de asas visando a redução de arrasto viscoso através do retardo da transição laminar/turbulento (ABBAS et al., 2013), já que o arrasto em camada limite turbulenta é muito maior do que o arrasto laminar.

De forma análoga, em turbinas a gás a transferência de calor dos gases de combustão para a superfície das palhetas da turbina é muito mais intensa em regime turbulento. A temperatura da superfície das pás limita a temperatura máxima do ciclo termodinâmico que, por sua vez, limita a eficiência termodinâmica, o empuxo específico e o consumo específico de combustível (HAN et al., 2013).

Muitos outros exemplos podem ainda ser citados como o controle da intensificação da mistura ar/combustível em câmaras de combustão, dispersão de poluentes ou da vorticidade de grande escala em cilindros de motores a pistão. Para cada uma dessas situações, existem diversas ferramentas para a análise do processo de transição laminar/turbulento que, em geral, dependem do problema que está sendo estudado.

Os modelos matemáticos existentes, sejam eles mais complexos (escalas múltiplas, análise assintótica) ou não (análise local por modos normais, equações de estabilidade parabolizadas), tentam representar a física do problema e podem nos dar uma boa margem de entendimento do problema real. Seja qual for a ferramenta de análise escolhida é necessário que a equipe de engenheiros envolvidos no projeto tenha um grande conhecimento sobre o processo de transição e em particular sobre os fenômenos de instabilidade hidrodinâmica que levam à transição (SCHMID; HENNINGSON, 2001).

1.1 Instabilidade centrífuga e seu mecanismo não viscoso

Um caminho para compreender os fenômenos relacionados à instabilidade hidrodinâmica é começar com a extensão da ideia por trás de estabilidade mecânica, através do estudo da posição ocupada por uma esfera em repouso sobre uma determinada superfície após uma pequena perturbação. Através da perturbação em seu estado de

equilíbrio a esfera pode ter algumas possíveis respostas: ocupar uma nova posição no espaço, ser indiferente ou retornar a posição original.

Um escoamento responde de maneira análoga à apresentada anteriormente. Perturbações mínimas como ruídos, rugosidade do canal ou a presença de turbulência externa num escoamento laminar por exemplo, se não amortecidas, transicionam o escoamento a um outro estado de equilíbrio que não necessariamente será turbulento (SILVEIRA NETO; MANSUR, 2000).

Buscando um entendimento maior deste processo, avanços significativos foram obtidos por grandes nomes da ciência como Reynolds, Helmholtz, Lord Kelvin e Lord Rayleigh no século XIX. Ao olhar o problema da transição entre regimes observada no experimento de Reynolds é possível identificar dentre outras coisas, a presença de forças que, mediante uma perturbação, podem estabilizar ou desestabilizar o escoamento, atrasando ou adiantando o processo de transição a turbulência deste problema.

A definição de um critério matemático que identificasse a condição para que o escoamento fosse instável foi inicialmente derivada por Lord Rayleigh em seus estudos sobre escoamentos não viscosos e paralelos (RAYLEIGH, 1880; RAYLEIGH, 1916; RAYLEIGH, 1917). Contemporâneo a Reynolds, ele introduziu na discussão a necessidade de se existir um ponto de inflexão no campo do escoamento e posteriormente Fjørtoft (1950) e Howard (1961) trouxeram contribuições importantes a esta questão.

Em se tratando de problemas de transição em camada limite em um ambiente de baixa turbulência externa destacam-se as ondas de Tollmien-Schlichting, os vórtices de escoamento cruzado em CL tridimensional, a instabilidade de Rayleigh em CL com separação e os vórtices de Görtler (do inglês *Görtler vortices* - GV) em camada limite sobre superfícies côncavas (CHARRU, 2011; BOIKO et al., 2012).

Em escoamentos com linhas de corrente curvilíneas, forças centrífugas podem desestabilizá-lo. A esta categoria de problemas entende-se por instabilidade centrífuga. Dado um escoamento ideal, não viscoso, axissimétrico, em coordenadas cilíndricas, a componente azimutal da equação da quantidade de movimento simplificada para escoamento circular mostra como deve ser o equilíbrio entre a força centrífuga e o gradiente de pressão, na forma

$$\frac{dp}{dr} = \rho \frac{V_\theta^2}{R} \quad . \quad (1.1)$$

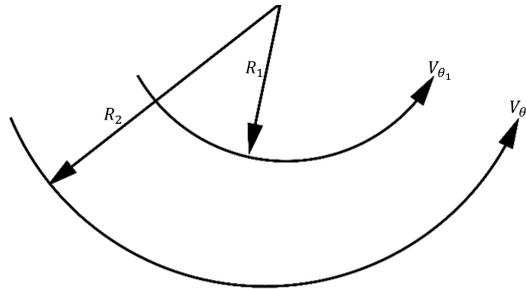
Da Equação (1.1) temos que em uma dada linha de corrente de raio R , a velocidade tangencial V_θ do fluido de massa específica ρ deve ser suficiente para manter o movimento circular sujeito a um gradiente de pressão dp/dr . Se isso não ocorrer, se o gradiente de pressão não for capaz de amortecer uma pequena perturbação, são formados vórtices paralelos às linhas de corrente.

O critério para instabilidade centrífuga versa que, para uma perturbação ser estável é necessário que a circulação ($\Gamma = RV_\theta$) aumente com raio crescente (R), de modo que

$$\frac{d\Gamma^2}{dr} > 0 \quad . \quad (1.2)$$

Na expressão acima, conhecida por critério de circulação de Rayleigh, uma partícula se perturbada e deslocada para uma posição $R_2 > R_1$ deverá ter velocidade consistente com a conservação da quantidade de movimento angular (Fig. 1.1).

Figura 1.1 - Esquema de uma partícula perturbada e deslocada da sua posição original.



Fonte: Produção do autor.

Se a força centrífuga atuando sobre a partícula é maior do que a força centrífuga predominante na posição radial R_2 , o deslocamento da partícula será reforçado na forma

$$\frac{\bar{V}_{\theta_2}^2}{R_2} = \rho \frac{1}{R_2} \left(\frac{r_1 V_{\theta_1}}{R_2} \right)^2 > \rho \frac{V_{\theta_2}^2}{R_2} \quad . \quad (1.3)$$

O escoamento será estável então, somente se, $(R_2 V_{\theta_2})^2 > (R_1 V_{\theta_1})^2$. Os subscritos numéricos correspondem as posições ocupadas pelas partículas (CURRIE, 2003).

Problemas relacionados a instabilidade centrífuga, segundo [Drazin e Reid \(1981\)](#), se diferem pela forma de confinamento com que o escoamento se encontra (vide Fig. 1.2), tendo suas particularidades exploradas por diversos pesquisadores a começar por Taylor em 1923.

Figura 1.2 - Escoamento sobre superfícies curvas sob diferentes configurações.

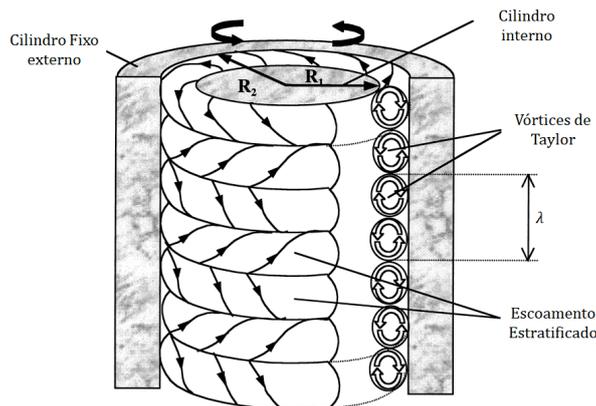


À esquerda escoamento confinado entre dois cilindros concêntricos, no centro escoamento num canal curvilíneo e à direita escoamento de camada limite sobre superfície curva.

Fonte: Produção do autor.

Estudando um fluido confinado entre dois cilindros concêntricos, Taylor observou a formação de vórtices toroidais contra-rotativos entre os cilindros (Fig. 1.3). Conhecidos posteriormente por vórtices de Taylor, estes se dão a partir de um determinado valor de rotação do cilindro de menor raio ([CHOSSAT; IOOSS, 1994](#)).

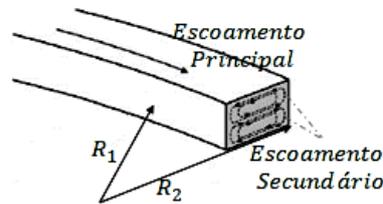
Figura 1.3 - Escoamento de Taylor-Couette.



Fonte: [Moser et al. \(2000\)](#).

Em 1928, Dean mostrou que, em canais curvilíneos abertos instabilidades na forma de vórtices longitudinais também estão presentes assim como no trabalho de Taylor. A este arranjo tem-se os vórtices de Dean (Fig. 1.4).

Figura 1.4 - escoamento sob superfícies curvilíneas com presença dos vórtices de Dean.



Fonte: Adaptado de Dutz et al. (2012).

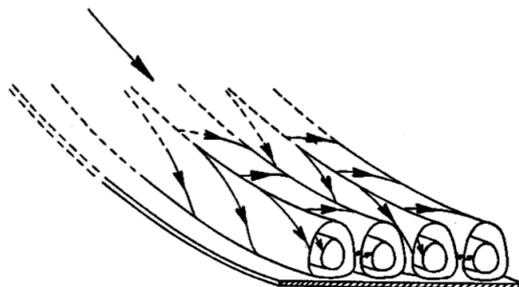
Os dois trabalhos anteriores se assemelham no que tange a hipótese empregada de escoamento localmente paralelo. Contudo, se o problema em estudo envolver um escoamento não confinado e não paralelo em uma camada limite, tem-se a formação de vórtices que recebem o nome de vórtices de Görtler em homenagem ao primeiro pesquisador que estudou teoricamente esta configuração particular e os mecanismos de ocorrência dos mesmos.

1.2 Instabilidade de Görtler, sua física e experimentos correlatos

Dos mecanismos indicados na Seção 1.1, a formação de vórtices de Görtler sobre superfícies côncavas é encontrada tanto no intradorso de perfis aerodinâmicos para alta sustentação quanto no lado de pressão de palhetas de turbinas. Em se tratando de técnicas avançadas de resfriamento dessas palhetas, a presença dos vórtices alteram o coeficiente de convecção em regiões específicas da superfície do metal, varrem o filme de resfriamento para longe da parede e transportam fluido mais quente do escoamento principal para as regiões mais frias da placa, diminuindo a vida útil do componente. Eles contribuem ainda nas perdas de pressão total responsáveis pela redução de 3% da eficiência da turbina (THOLE, 2006).

Perturbações na camada limite em superfícies curvilíneas se manifestam como pares de vórtices contra-rotativos de espaçamento constante, conhecidos como vórtices de Görtler, como mostrado na Fig. 1.5. Os vórtices são resultantes do desequilíbrio entre as forças centrífugas devido à curvatura das linhas de corrente e o gradiente de pressão na direção radial, normal às linhas de corrente (KOSCHMIEDER, 1993).

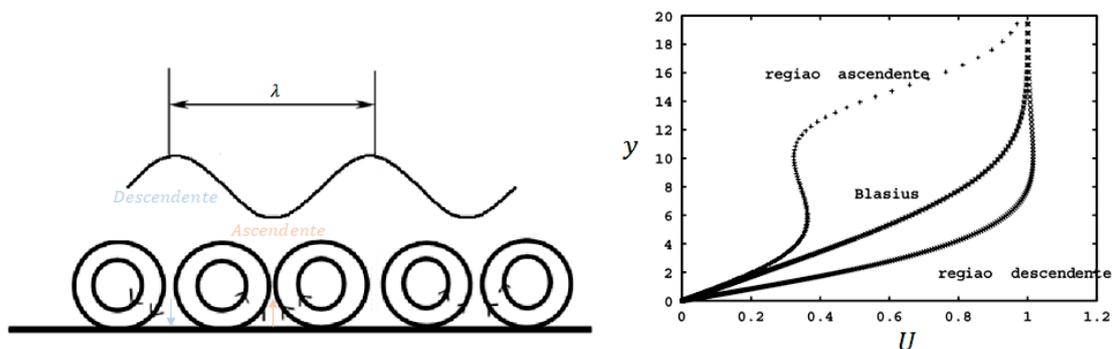
Figura 1.5 - Esquema do desenvolvimento dos vórtices de Görtler.



Fonte: Görtler (1941).

As perturbações não amortecidas pelo desequilíbrio dessas forças desenvolvem as estruturas vorticiais longitudinais contra-rotativas alinhadas com a direção do escoamento. Estas estruturas são responsáveis por modificar o escoamento base. Mesmo vórtices de baixa intensidade provocam variações consideráveis na distribuição de velocidade longitudinal (Figura 1.6).

Figura 1.6 - Efeitos da presença dos vórtices sobre o escoamento.



À esquerda o comportamento do par de vórtices contra-rotativos de espaçamento constante (λ) e à direita as distorções observadas no perfil de velocidade média $U(y)$. Observa-se que a presença dos vórtices criam regiões de escoamento ascendente e descendente e o transporte advectivo gerado tende a distorcer o campo de velocidades.

Fonte: Silveira Neto e Mansur (2000).

Os parâmetros que governam este problema de instabilidade são a velocidade e a viscosidade do escoamento, o raio de curvatura da superfície e uma constante proporcional a espessura da camada limite. Estes parâmetros definem o número de Görtler (Go), uma relação entre os efeitos das forças centrífugas e das forças viscosas (GÖRTLER, 1941).

A literatura sobre vórtices de Görtler é bastante extensa, mas três revisões importantes servem de ponto de partida para o estudo desta instabilidade, os artigos de Floryan (1991), Saric (1994) e Hall (1990). Apesar de mostrarem o conhecimento do assunto existente até a década de 1990, estes trabalhos apresentam uma descrição bastante detalhada do problema.

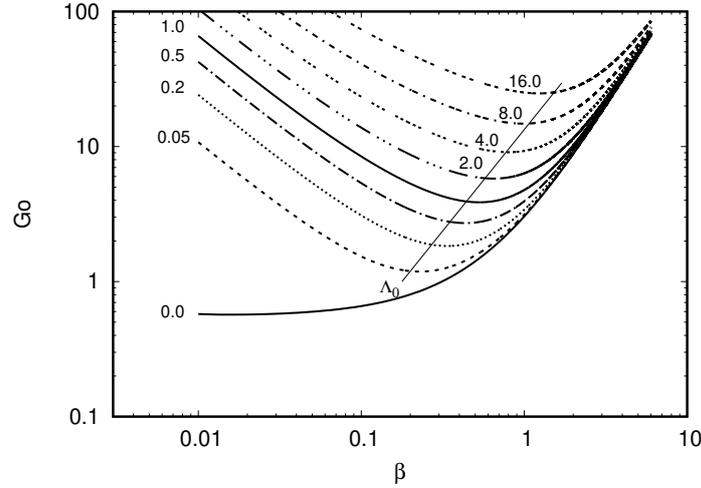
Floryan (1991) reuniu diversos trabalhos com evidências experimentais e numéricas do mecanismo de transição a turbulência em superfícies côncavas. Uma revisão da modelagem teórica e de alguns parâmetros importantes do problema como não linearidade e efeitos de transferência de calor também são discutidos (FLORYAN; SARIC, 1982).

Analogamente ao proposto para solução do problema estabilidade de escoamentos parietais, Görtler buscou uma solução por modos normais utilizando-se de separação de variáveis, cujo o resultado constitui um problema de autovalor onde só existe solução para certas combinações específicas de parâmetros. No caso em questão o número de Görtler (Go), a taxa de amplificação (α) e o número de onda transversal (β).

A maneira com que os parâmetros acima se relacionam formam a relação de dispersão, cuja solução é apresentada na forma de um diagrama de estabilidade, como ilustrado na Figura 1.7.

Observa-se no diagrama de estabilidade (apresentado no plano Go, β) uma reta interceptando as curvas de taxas de amplificação constantes (α). Para camada limite sujeita ou não à gradientes de pressão, a reta mostrada em especial corresponde ao comprimento de onda que passa pelos pontos de mínimo de cada uma das curvas e indica a rota para que uma determinada propagação caminhe sobre a placa côncava e encontre as maiores taxas de amplificação espacial, i.e., corresponde ao comprimento de onda da perturbação que tem maior amplificação.

Figura 1.7 - Diagrama de estabilidade para camada limite de Blasius.



Fonte: Produção do autor.

Defini-se um comprimento de onda adimensional de um par de vórtices (Λ) por

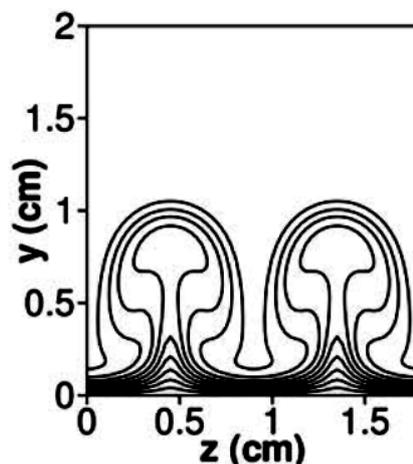
$$\Lambda = \frac{U_0 \lambda}{\nu} \sqrt{\kappa \lambda} \quad (1.4)$$

sendo λ o comprimento de onda dimensional, κ a curvatura da superfície e U_0 e ν representam, respectivamente, a velocidade do escoamento externo à camada limite e a viscosidade cinemática do mesmo.

Evidências numéricas e experimentais da forma dos vórtices reforçam os detalhes e a forma dos vórtices longitudinais contra-rotativos que, ao bombearem fluido da região da parede para longe desta e fluido da região distante para próximo a ela, apresentam uma estrutura análoga a um cogumelo (vide visualização dos planos apresentados nas Figs. 1.8 e 1.9).

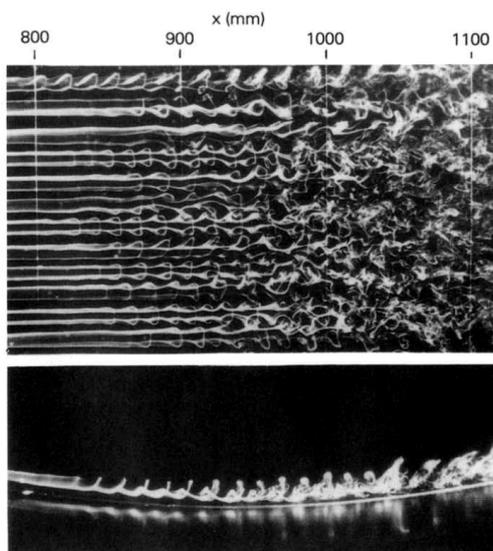
As isolinhas de velocidade deslocadas para cima, capturadas numericamente e apresentadas no trabalho de Souza (Fig. 1.8), indicam que partículas de baixa quantidade de movimento linear são transportadas para longe da parede, assim como mostra o experimento que ilustra o desenvolvimento da estrutura tipo cogumelo (Fig. 1.9). Observa-se também os estágios não lineares de desenvolvimento dos vórtices longitudinais. Pares de vórtices longitudinais, seguidos de instabilidades de Kelvin-Helmholtz e de pares de vórtices do tipo ferradura se desenvolvem resultando em um outro estado de equilíbrio.

Figura 1.8 - Evidência numérica da forma de um par de vórtices (corte no plano zy).



Fonte: Souza et al. (2004).

Figura 1.9 - Captura experimental da estrutura dos vórtices (corte no plano xz).



Fonte: Floryan (1991).

Saric (1994) além de uma profunda revisão teórica do problema, também apresenta uma revisão dos experimentos que ilustram os efeitos citados. Ele também discute outros mecanismos de influência como efeitos de compressibilidade e de instabilidade secundária do escoamento. Outros parâmetros de influência merecem destaque como o gradiente de pressão que o escoamento é exposto e o perfil base utilizado para

análise de estabilidade do escoamento.

As características espaciais e não paralelas dos escoamentos em CL sobre superfícies côncavas também são destacadas por Saric e por Hall. Porém, vale frisar que somente a partir da década de 80 outras alternativas foram testadas à abordagem de modos normais (onde assumia-se a hipótese de escoamento quase paralelo), tradicional para o estudo de problemas de instabilidade centrífuga em camada limite até então.

1.3 Efeitos do gradiente de pressão nos vórtices de Görtler

Com o interesse crescente em instabilidade e transição, diversos efeitos que afetam o desenvolvimento de vórtices de Görtler vem sendo estudados (GOULPIÉ et al., 1996; ZHANG; FASEL, 1999; SOUZA, 2003; MITSUDHARMADI et al., 1993; SCHRADER et al., 2011; SESCOU; THOMPSON, 2015). Estes estudos abordam desde efeitos de compressibilidade, rugosidade da parede e não linearidade, até efeitos de instabilidade secundária, dentre outros.

O estudo apresentado por Ragab e Nayfeh (1981) foi um dos primeiros a considerar o efeito do gradiente de pressão no desenvolvimento dos vórtices de Görtler. Além do efeito do gradiente de pressão, eles também estudaram o efeito da espessura de deslocamento no escoamento base. Utilizando expansão assintótica no estudo de camada limite de 1ª ordem, mostraram que o escoamento base muda significativamente os resultados de estabilidade, mesmo para o perfil da camada limite de Blasius. Eles também apresentam em seu trabalho, curvas de estabilidade neutra para camada limite do tipo Falkner-Skan (FS) com gradiente de pressão. As curvas neutras foram obtidas utilizando análise local e resultados similares de outros autores serviram de comparação (FLORYAN; SARIC, 1979; SMITH; GAMBERONI, 1956).

Os resultados de Ragab e Nayfeh mostram que gradientes de pressão favoráveis possuem um efeito estabilizador enquanto gradientes de pressão adversos tendem a ser desestabilizadores, especialmente para baixos números de onda. Quando os valores do parâmetro de aceleração se tornam muito altos, todos os números de onda abaixo de um determinado limite parecem ser instáveis.

Ragab e Nayfeh (1981) também estudaram a estabilidade da camada limite em superfícies com curvatura variável. Utilizando perfis de velocidade de camada limite com um esquema de marcha, mostraram que os resultados são diferentes dos resultados obtidos utilizando-se uma solução por similaridade local devido as condições iniciais, especialmente em regiões onde os gradientes de pressão são favoráveis.

Os poucos resultados apresentados por Ragab e Nayfeh para camadas limite sobre superfícies com curvaturas variáveis são importantes para o entendimento de escoamentos sobre aerofólios, como mostra o trabalho de Mangalam e demais colaboradores (MANGALAM et al., 1985). Eles realizaram medições experimentais na superfície côncava de um aerofólio, mas nenhum detalhe da distribuição do gradiente de pressão foi apresentado. Seus resultados mostram que, assim como para camada limite com gradiente nulo, na presença de gradientes de pressão uma vez que o número de onda transversal está estabelecido, os vórtices permanecem fixos a jusante até as regiões de saturação e não-linear.

Em 1994, Finnis e Brown (1994) apresentaram outro estudo experimental do efeito de gradiente de pressão no desenvolvimento dos vórtices de Görtler. Considerando apenas gradientes de pressão favoráveis, eles mostraram o seu efeito estabilizador, bem como o fato de que o número de onda transversal não muda devido à aceleração do escoamento. Comparações entre os resultados experimentais e os resultados obtidos via teoria de estabilidade linear para o componente longitudinal do vetor velocidade foram apresentadas mostrando que, para o envelope de parâmetros considerados, os resultados da teoria da estabilidade linear fornecem uma boa aproximação.

Uma comparação entre a teoria da estabilidade linear local e uma técnica de marcha foi apresentado por Goulpié et al. (1996). Eles consideraram escoamentos base dados pela solução de Falkner-Skan e confirmaram resultados anteriores, onde gradientes de pressão favorável estabilizam o escoamento e gradientes de pressão adversos são desestabilizadores. Motivado pelo trabalho de Otto e Denier (1993), que relataram um efeito estabilizador do gradiente de pressão adverso no desenvolvimento dos vórtices de Görtler computados com uma análise de marcha (modelo parabólico), Goulpié concluiu que técnicas computacionais de marcha dependem da posição inicial de partida do modelo a jusante do bordo de ataque da placa e da própria escolha adequada das condições iniciais que, só podem ser corretamente especificadas após uma análise de receptividade. Além do fato de que os resultados de uma análise de marcha dependem também do critério usado para definir o ponto neutro e, portanto, o conceito de uma única curva neutra não é sustentável. Com base na validade questionável da teoria de estabilidade linear para baixos números de onda transversais, eles questionam a conclusão de que os vórtices de Görtler que estão abaixo de um certo valor são sempre instáveis, como inferido por Ragab e Nayfeh (1981).

Os efeitos não paralelos podem ser contabilizados usando expansão em série em termos de potência do inverso do quadrado do número Reynolds para certos casos específicos, como feito por [Itoh \(2001\)](#) para escoamentos próximo a um ponto de estagnação. A formulação resulta em um número de Görtler crítico para um valor finito do número de onda transversal que tem boa precisão para a solução da expansão de ordem mais baixa, mesmo para números relativamente baixos de Reynolds.

Com interesse no controle de escoamento, o efeito combinado do gradiente de pressão e sucção/injeção na parede foi estudado por [Matsson \(2008\)](#) usando um modelo de marcha não linear e não local. Em seu trabalho, ele utilizou a amplitude de saturação como uma indicação de estabilização por sucção e gradiente de pressão favorável. Tanto paredes côncavas quanto convexas podem ser instáveis para gradientes de pressão adversos se o escoamento base tiver um pico de sobrevelocidade junto à parede.

O escoamento base considerado por Matsson foi uma família de soluções do tipo Falkner-Skan, incluindo casos com sobrevelocidade similares aos escoamentos de jatos de parede. Mudanças na injeção, na sucção e no gradiente de pressão mudam não apenas a espessura da camada limite, mas também o espalhamento lateral das estruturas características de cogumelos dos vórtices de Görtler. Estas mudanças na topologia são acompanhadas por mudanças na amplitude de saturação e nas taxas de crescimento e, após a saturação, a amplitude decai para um nível constante mais baixo seguido por instabilidade secundária.

Os resultados de [Matsson \(2008\)](#) também mostram que gradientes de pressão favoráveis resultam em vórtices mais fortes na região não linear. Os vórtices crescem mais fortes com maior energia cinética na região não linear, e mantêm sua estrutura mais a jusante antes da saturação. Em outras palavras, a força dos vórtices aumenta, mas não a sua instabilidade, pois permanecem ainda coerentes a jusante. Matsson associou essa energia cinética mais alta à instabilidade, mas na realidade, a manutenção da estrutura vortical sem saturação ou quebra por um longo comprimento transversal está realmente associada com maior estabilidade da estrutura do cogumelo, ou seja, menor efeito de instabilidade secundária.

Os resultados obtidos para gradientes de pressão adversos mostram que o escoamento é mais instável na região linear, saturando mais cedo e em menor amplitude em comparação com os resultados para camada limite de Blasius. Estes resultados dependem também do número de onda transversal, mas apenas dois números de onda foram testados por Matsson. Tomando a solução da camada limite de Blasius

como referência, o menor número de onda escolhido pelo autor ($\beta = 0,22$) é mais instável do que seu maior número de onda ($\beta = 0,52$), mostrando que o primeiro está mais perto do número de onda associado à amplificação máxima. Esse padrão foi o mesmo para sucção/injeção e gradiente de pressão, no sentido de que a sucção e gradiente de pressão possuem um efeito estabilizador. A maior estabilização foi obtida com sucção e gradiente de pressão favorável.

Os resultados para o desenvolvimento não linear e saturação dos vórtices de Görtler obtidos por Matsson (2008) podem ser comparados com os resultados obtidos por Souza e seu grupo (ROGENSKI et al., 2013; ROGENSKI, 2015; ROGENSKI et al., 2016a; ROGENSKI et al., 2016b), que têm utilizado simulação numérica direta (do inglês *direct numerical simulation* - DNS) para estudar o desenvolvimento de GV em camadas limite com gradiente de pressão.

Em um primeiro artigo, Rogenski et al. (2013) estudam o efeito da variação da curvatura no desenvolvimento não linear dos vórtices de Görtler como forma de controlar seu crescimento e conseqüentemente a transição a turbulência. Eles mostram o efeito estabilizador de uma superfície convexa a jusante da superfície côncava que gera os vórtices contra-rotativos primários. Para uma superfície côncava seguida de uma parede plana, os resultados mostram uma lenta taxa de decaimento dos vórtices na região da parede plana.

Em um segundo artigo, Rogenski et al. (2016a) abordam a questão do gradiente de pressão variável, com mais detalhes sobre a condição de escoamento livre do que aquela dada por Mangalam et al. (1985). Uma camada limite com gradiente de pressão zero foi usada como condição de referência e três condições foram estudadas: gradiente de pressão constante, parâmetro de Hartree constante e variação linear do gradiente de pressão. Tanto gradientes de pressão favorável quanto adverso foram considerados. Os resultados mostram que o gradiente de pressão adverso desestabiliza o escoamento. A taxa de crescimento para gradiente de pressão adverso constante é maior do que a taxa de crescimento para o parâmetro de Hartree constante, que pode ser explicado pelo fato de que um parâmetro constante de Hartree corresponde a um decaimento do gradiente de pressão adverso a jusante. Para gradiente de pressão constante, quanto maior o gradiente de pressão maior a taxa de crescimento, mas o maior parâmetro de Hartree com gradiente de pressão adverso não resulta na maior amplificação.

Segundo Rogenski et al. (2016a) o efeito do gradiente de pressão depende dos números de onda transversais dos vórtices. Considerando três valores diferentes de número

de onda transversal, eles observaram que maiores números de onda são mais instáveis quando o gradiente de pressão é favorável. Para gradiente de pressão adverso, o oposto é verdadeiro, pequenos números de onda são mais instáveis. Estes resultados sugerem que o número de onda que corresponde ao vórtice que tem maior crescimento muda com o gradiente de pressão. Esta é uma das investigações propostas no presente trabalho. A corrente pesquisa tenta esclarecer o efeito do gradiente de pressão no modo de crescimento mais rápido a fim de justificar a instabilidade mais forte dos vórtices de maior número de onda em um gradiente de pressão favorável e confirmar a explicação oferecida por Rogenski com base no tamanho dos vórtices, espessura da camada cisalhante e dos gradientes de velocidade.

No trabalho de Rogenski et al. (2016a) também foi considerado casos em que o gradiente de pressão passou de adverso para favorável e de favorável para adverso. Mais uma vez, considerando os mesmos três valores de números de onda transversal, eles mostram que vórtices com diferentes comprimentos de onda transversal respondem diferentemente ao gradiente de pressão. Mas, independentemente do comprimento de onda, ir do gradiente de pressão favorável ao adverso resulta em uma maior instabilidade do que gradiente de pressão indo do adverso ao favorável.

Em outro artigo, o regime não linear foi investigado por Rogenski e co-autores (ROGENSKI et al., 2016b). Eles estudaram o desenvolvimento dos vórtices de Görtler até a transição no estágio não linear em camadas limite com gradiente de pressão. Eles usaram a energia do modo fundamental de Fourier e da distorção do escoamento médio como uma indicação de saturação para mostrar que o gradiente de pressão adverso antecipa a saturação, enquanto o gradiente de pressão favorável a atrasa. A energia no ponto de saturação também é maior para gradiente de pressão adverso. Três diferentes comprimentos de onda foram testados: $\Lambda = 160, 305$ e 450 . Eles mostraram que o ponto de saturação também depende do comprimento de onda. Para todos os comprimentos de onda transversais testados, gradientes de pressão adversos promoveram saturação precoce dos vórtices de Görtler, enquanto gradientes de pressão favoráveis resultaram numa saturação tardia e com um nível de energia cinética mais baixa. A saturação ocorreu mais cedo para o menor comprimento de onda transversal. A energia cinética no ponto de saturação é maior para o comprimento de onda maior, exceto para $\Lambda = 450$, onde a energia cinética é menor do que para $\Lambda = 305$. Os resultados também indicam uma possível correlação entre gradiente de pressão adverso e desenvolvimento de instabilidade secundária do tipo varicoso.

Em Méndez et al. (2018) simulações numéricas diretas também foram empregadas

para analisar a transição em escoamentos de camada limite com gradiente de pressão nulo sob o efeito da instabilidade de Görtler. Os resultados apresentados incluem uma análise dos efeitos da curvatura da parede, mostrando que o aumento do raio de curvatura reduz o crescimento dos vórtices como esperado, mas o número de Görtler crítico permanece o mesmo. A altura e o posicionamento da rugosidade superficial foram investigados e a relação entre o número de Görtler de transição e o número de Reynolds baseado na rugosidade da parede foi definido. O desenvolvimento dos vórtices de Görtler excitados pela rugosidade da parede são apresentados mostrando o estágio linear inicial ($Go < 8$), o desenvolvimento não linear da estrutura característica do cogumelo ($Go \approx 12$) e os estágios finais de instabilidade secundária e de destruição dos vórtices ($Go \approx 18$). A distorção do escoamento base na camada limite devido à instabilidade foi caracterizado pelo resultado da distribuição de velocidade e da evolução da espessura do coeficiente de atrito. O modo de crescimento mais rápido e a característica do tipo de instabilidade secundária (sinuoso e varicoso) foram identificados na faixa do parâmetro do comprimento de onda Λ de 162 a 250, consistente com os resultados apresentados na literatura. Eles finalmente apresentam resultados para a região totalmente turbulenta resultante do colapso dos vórtices de Görtler.

As simulações numéricas diretas realizadas por Rogenski (ROGENSKI et al., 2013; ROGENSKI, 2015; ROGENSKI et al., 2016a; ROGENSKI et al., 2016b) e por Méndez (MÉNDEZ et al., 2018) tem a vantagem de permitir a análise dos estágios mais adiantados do processo de transição. Elas incluem a região de instabilidade secundária, onde os vórtices são rapidamente destruídos por perturbações de alta frequência que levam o escoamento à turbulência desenvolvida. Não obstante, o custo computacional destas simulações é muito elevado, restringindo o número de condições de escoamento que podem ser analisados.

1.4 Escopo da presente pesquisa

O objetivo da presente investigação é ampliar os resultados apresentados previamente na literatura, realizando uma análise mais detalhada do efeito do gradiente de pressão no diagrama de estabilidade e do comprimento de onda transversal que resulta na perturbação que tem o crescimento mais rápido. Estudos anteriores consideraram apenas um número limitado de comprimentos de onda. A localização de um dado comprimento de onda em relação ao comprimento de onda que corresponde ao crescimento mais rápido de uma perturbação é um aspecto importante que não foi considerado em trabalhos anteriores. Mesmo os resultados de Goulpié et al. (1996)

consideram um número limitado de comprimentos de onda, e $\Lambda = 210$ é mostrado como sendo o modo de crescimento mais rápido entre os comprimentos de onda transversal testados, mas nenhuma conclusão do modo de crescimento mais rápido pode ser obtida. Deseja-se criar um mapa da taxa de amplificação *versus* gradiente de pressão que forneça uma imagem mais completa da condição de estabilidade.

O presente trabalho investiga numericamente a localização dos comprimentos de onda que mais crescem para diferentes condições do gradiente de pressão através do uso da teoria de estabilidade linear (do inglês *linear stability theory* - LST). A localização da curva neutra e os níveis de taxa de amplificação são usados como referências para estabilização ou desestabilização devido ao gradiente de pressão, quando comparado ao escoamento base sem gradiente de pressão.

A tese está organizada de tal forma que no Capítulo 1 uma introdução ao tema é apresentada, começando pelo conceito de instabilidade centrífuga e seu mecanismo físico, seguido de uma discussão sobre instabilidade de Görtler e uma revisão sobre o estado da arte do assunto. No Capítulo 2 as equações governantes do problema de estabilidade centrífuga em camada limite, o sistema de coordenadas adotados e as hipóteses empregadas são apresentadas. São discutidos também os detalhes da proposta de solução de decomposição do escoamento instantâneo em duas componentes, obtendo-se primeiramente as equações de conservação para o escoamento base de Falkner-Skan e na sequência as equações de conservação para as perturbações. A teoria clássica de análise local por modos normais, incluindo uma discussão sobre a extensão da validade da teoria, e os detalhes da derivação da formulação do problema de estabilidade centrífuga por LST é exposta no Capítulo 3. O Capítulo 4 apresenta as particularidades da metodologia empregada para obtenção da solução dividida em duas abordagens: uma abordagem para solução das equações de conservação para o escoamento base (Seção 4.1) posteriormente utilizada na segunda abordagem (solução das equações para perturbação, Seção 4.2). Por fim, ao final do Capítulo 4 as derivações das variáveis de interesse, resultado da solução final, incluindo suas adimensionalizações e relações são discutidas na Seção 4.3. O estudo de independência de malha, a verificação dos códigos e os resultados obtidos são detalhados no Capítulo 5. Neste capítulo, comparações entre as curvas neutras para diferentes condições do gradiente de pressão na forma de diagramas de estabilidade, mostram o deslocamento das curvas de taxas de amplificação constantes devido ao gradiente de pressão. Na sequência, a localização do comprimento de onda que implica no crescimento mais rápido dos vórtices é discutida para cada condição do gradiente e na seção final, uma análise do comportamento do campo de velocidades

é descrita. Um resumo das descobertas e conclusões é apresentado no último capítulo juntamente com algumas sugestões para continuidade da pesquisa.

2 EQUAÇÕES GOVERNANTES

Como visto anteriormente no Capítulo 1, a solução do problema de estabilidade passa, dentre outras etapas, pelo fornecimento de um escoamento base conhecido. O escoamento base será dado pela solução de similaridade de camada limite com gradiente de pressão para diferentes valores do parâmetro de aceleração da camada limite m . A escolha pelo perfil de camada limite de Falkner-Skan segue a formulação proposta por Floryan (1991) que, para uma aproximação de primeira ordem, elimina os efeitos de curvatura nas equações de camada limite. Esses efeitos se fazem presentes somente nas equações de estabilidade, como será apresentado no Capítulo 3. A seguir serão apresentados em detalhes o sistema de coordenadas, as equações governantes gerais e as que regem o escoamento base, uma proposta para as perturbações, bem como a adimensionalização adotada.

2.1 Sistema de coordenadas adotado

Floryan (1991) mostrou através do estudo da ordem de magnitude dos diversos termos da equação de camada limite em coordenadas cilíndricas que, para superfícies com raio de curvatura muito maior do que a espessura da camada limite, os termos de curvatura são da mesma ordem dos termos de difusão viscosa na direção do escoamento, os quais são desprezados dentro da hipótese de camada limite. Através desta hipótese, é possível manipular o sistema de coordenadas do problema transformando-o em um sistema de coordenadas generalizadas que elimina do escoamento base qualquer efeito das forças centrífugas, como será mostrado nas seções que se seguem.

2.2 Equações governantes

As equações de Navier-Stokes (ENS) para escoamento incompressível em coordenadas cilíndricas (r, θ, z) , em regime permanente para um escoamento com componentes de velocidade radial, azimutal e longitudinal (V_r, V_θ, V_z) são dadas por:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial(RV_r)}{\partial r} + \frac{1}{R} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \quad , \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} & V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{R} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{V_\theta^2}{R} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} = \\ & - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left[\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left(R \frac{\partial V_r}{\partial r} \right) - \frac{V_r}{R^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 V_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} - \frac{2}{R^2} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} \right] \quad , \quad (2.2) \end{aligned}$$

$$V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{R} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_r V_\theta}{R} + V_z \frac{\partial V_\theta}{\partial z} = -\frac{1}{\rho R} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left[\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left(R \frac{\partial V_\theta}{\partial r} \right) - \frac{V_\theta}{R^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial z^2} + \frac{2}{R^2} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right] , \quad (2.3)$$

$$V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{V_\theta}{R} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left[\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left(R \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 V_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right] . \quad (2.4)$$

onde p é a pressão e ν a viscosidade cinemática. Fazendo uma análise de ordem de magnitude nos termos das equações acima devido ao raio de curvatura (R) ser muito maior que a espessura da camada limite, tem-se:

para conservação da massa (Eq. 2.1)

$$\frac{\partial V_\theta}{\partial x} + \frac{\partial V_r}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 , \quad (2.5)$$

de onde se tem para um arco de círculo infinitesimal, a direção azimutal igual a $dx = R d\theta$ e a direção normal dada por $dr = dy$.

Analogamente para a equação de conservação da quantidade de movimento,

$$V_\theta \frac{\partial V_r}{\partial x} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial y} - \frac{V_\theta^2}{R} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} \right) , \quad (2.6)$$

$$V_\theta \frac{\partial V_\theta}{\partial x} + V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial y} + \frac{V_r V_\theta}{R} + V_z \frac{\partial V_\theta}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial z^2} \right) , \quad (2.7)$$

$$V_\theta \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right) . \quad (2.8)$$

Fazendo $V_\theta = u$, $V_r = v$, $V_z = w$, as ENS tomam a forma,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad , \quad (2.9)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad , \quad (2.10)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} - \kappa u^2 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad , \quad (2.11)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad . \quad (2.12)$$

Observa-se que nesta aproximação de primeira ordem, um único termo de curvatura aparece na equação de quantidade de movimento na direção normal (κu^2), sendo $\kappa = 1/R$ a curvatura da superfície.

2.2.1 Adimensionalização

Nesta seção, as Equações (2.9), (2.10), (2.11) e (2.12) são adimensionalizadas assumindo-se x_0 como o comprimento característico na direção longitudinal e $\delta_0 = x_0/Re$ como comprimento característico na direção normal e este proporcional à espessura da camada limite. Esta escolha leva em conta que as variações das propriedades dependentes na direção longitudinal são muito mais lentas do que as variações na direção normal (FLORYAN, 1991; MENDONÇA, 1997). Assim,

$$x = \frac{x}{x_0} \quad , \quad y = \frac{y}{x_0} Re = \frac{y}{\delta_0} \quad , \quad z = \frac{z}{x_0} Re = \frac{z}{\delta_0} \quad , \quad (2.13)$$

onde

$$\delta_0 = \sqrt{\frac{\nu x_0}{U_0}} \quad , \quad (2.14)$$

sendo U_0 a velocidade do escoamento não perturbado e Re o número de Reynolds, definido como

$$Re = \frac{U_0 \delta_0}{\nu} . \quad (2.15)$$

Aplicando a proposta de adimensionalização para o princípio da continuidade (Eq. 2.9), resulta

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 . \quad (2.16)$$

Lembrando que o termo temporal é nulo para o escoamento base e vórtices de Görtler estacionários, para conservação da quantidade de movimento na direção x (Eq. 2.10),

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{Re^2} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\nu}{U_0 x_0} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Re^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + Re^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) ,$$

Note que

$$Re(\delta) = \frac{U_0 \delta}{\nu} = \frac{U_0}{\nu} \sqrt{\frac{\nu x_0}{U_0}} = \sqrt{\frac{U_0 x_0}{\nu}} = \sqrt{Re(x_0)} ,$$

então

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{Re^2} \frac{\partial p}{\partial x} + \left(\frac{1}{Re^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) . \quad (2.17)$$

Já para conservação da quantidade de movimento na direção y (Eq. 2.11),

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \kappa x_0 Re u^2 = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\nu}{U_0 x_0} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + Re^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + Re^2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) ,$$

resultando

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \kappa x_0 Re u^2 = -\frac{\partial p}{\partial y} + \left(\frac{1}{Re^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) .$$

Note que

$$\delta = \sqrt{\frac{\nu x_0}{U_0}} \Rightarrow \frac{\delta}{x_0} = \sqrt{\frac{\nu}{U_0 x_0}} = \sqrt{\frac{1}{Re(x_0)}} = \frac{1}{Re(\delta)} \Rightarrow x_0 = \delta Re \quad ,$$

assim

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + Go^2 u^2 = -\frac{\partial p}{\partial y} + \left(\frac{1}{Re^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad , \quad (2.18)$$

Constata-se que do processo de adimensionalização obtêm-se o parâmetro que relaciona os efeitos centrífugos e viscosos na camada limite, o número de Görtler, cuja definição é $Go^2 = \kappa \delta Re^2$.

Finalmente, para conservação da quantidade de movimento na direção z (Eq. 2.12),

$$u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \left(\frac{1}{Re^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad . \quad (2.19)$$

2.2.2 escoamento base

O escoamento base para o presente estudo corresponde à camada limite laminar sobre uma superfície curva de raio de curvatura constante. Considerando-se que o termo de curvatura não afeta o desenvolvimento do escoamento base, ele é calculado como sendo aquele sobre uma superfície plana. No presente estudo o escoamento base será dado pela solução similar de Falkner-Skan. A seguir são apresentadas as formulações do problema de camada limite com gradiente de pressão.

Dos princípios de conservação aplicados a um fluido newtoniano, incompressível, em regime permanente e adimensionalizadas como apresentado na seção anterior:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad , \quad (2.20)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{Re^2} \frac{\partial p}{\partial x} + \left(\frac{1}{Re^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad , \quad (2.21)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \left(\frac{1}{Re^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad , \quad (2.22)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \left(\frac{1}{Re^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) . \quad (2.23)$$

Assumindo adicionalmente que o escoamento é bidimensional, ao fazer uma análise de ordem de grandeza nos termos das equações de Navier-Stokes para a camada limite, como em [White \(1974\)](#), tem-se

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad , \quad (2.24)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad , \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad . \quad (2.26)$$

O termo de gradiente de pressão pode ser expresso em função da variação de velocidade no escoamento livre $U(x)$ na forma:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -U(x) \frac{dU(x)}{dx} \quad . \quad (2.27)$$

A formulação de camada limite similar de Falkner-Skan pode ser encontrada em vários livros de mecânica dos fluidos, e.g., [Schlichting \(1979\)](#), [White \(1974\)](#), [Currie \(2003\)](#). Pode-se reduzir as equações diferenciais parciais (EDP's) de camada limite (Eqs. 2.24, 2.25 e 2.26) a uma forma similar através da seguinte transformação de variáveis, como proposto por [Goulpié et al. \(1996\)](#),

$$\eta = \frac{y}{g(x)} \quad , \quad (2.28)$$

sendo η a coordenada vertical de similaridade. Já a distribuição de velocidade de acordo com a proposta de solução similar de Falkner-Skan é dada por

$$u(x, y) = U(x) f'(\eta) \quad , \quad (2.29)$$

de tal forma que a função corrente ψ respeite a conservação da massa (Eq. 2.24)

$$\psi(x, y) = U(x)g(x)f(\eta) \quad , \quad (2.30)$$

onde

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad , \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad ,$$

e

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = U(x)g(x)f'(\eta)\frac{\partial \eta}{\partial y} = U(x)g(x)f'(\eta)\frac{1}{g(x)} \quad ,$$

tal que

$$\frac{u}{U(x)} = f'(\eta) \quad . \quad (2.31)$$

Assim, a equação de camada limite (Eqs. 2.25 e 2.27) escrita em termos da função corrente fica

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = U(x) \frac{dU(x)}{dx} + \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \quad . \quad (2.32)$$

Podemos obter as derivadas parciais de ψ na forma:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{dU}{dx}gf + U\frac{dg}{dx}f - Uf'\eta\frac{dg}{dx} \quad ,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = Uf'(\eta) \quad ,$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{U}{g}f''(\eta) \quad ,$$

$$\frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} = \frac{U}{g^2}f'''(\eta) \quad ,$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = \frac{dU}{dx} f'(\eta) - \frac{U}{g} \frac{dg}{dx} \eta f''(\eta) \quad ,$$

que substituídas na Eq. (2.32), resulta na equação de camada limite similar

$$f''' + \alpha_{fs} f f'' + \beta_{fs} (1 - (f')^2) = 0 \quad , \quad (2.33)$$

sendo

$$\alpha_{fs} = \frac{g}{\nu} \frac{dU}{dx} \quad , \quad (2.34)$$

e o parâmetro de aceleração da camada limite (β_{fs}) dado por:

$$\beta_{fs} = \frac{g^2}{\nu} \frac{dU}{dx} \quad . \quad (2.35)$$

Os parâmetros α_{fs} e β_{fs} podem ser relacionados na forma

$$\frac{dU}{dx} g^2 = \nu (2\alpha_{fs} - \beta_{fs}) \quad . \quad (2.36)$$

Para o escoamento livre $U(x)$, externo à camada limite tem-se,

$$U(x) = U_0 x^m \quad . \quad (2.37)$$

Tomando $\alpha_{fs} = (m + 1)/2$ na Equação (2.36),

$$\frac{dU}{dx} g^2 = \nu [(m + 1) - \beta_{fs}] \quad .$$

Integrando esta última equação,

$$g^2 U = \nu [(m + 1) - \beta_{fs}] x \quad \Rightarrow \quad \frac{g^2}{\nu} = \frac{[(m + 1) - \beta_{fs}] x}{U} \quad .$$

Dividindo a Equação (2.35) por esta última, resulta

$$\frac{1}{U} \frac{dU}{dx} = \frac{\beta_{fs}}{[(m+1) - \beta_{fs}] x} ,$$

Integrando-a

$$\ln U = \frac{\beta_{fs}}{[(m+1) - \beta_{fs}]} \ln x + \ln c , \quad (2.38)$$

tal que

$$U(x) = cx^{\beta_{fs}/[(m+1)-\beta_{fs}]} ,$$

e

$$m = \frac{\beta_{fs}}{[(m+1) - \beta_{fs}]} \Rightarrow \beta_{fs} = m ,$$

$$\frac{dU}{dx} = cmx^{(m-1)} .$$

Da Equação (2.35) para β_{fs} podemos determinar g na forma,

$$\beta_{fs} = \frac{g^2}{\nu} \frac{dU}{dx} = \frac{g^2}{\nu} mx^{m-1} \Rightarrow \beta_{fs} = \frac{g^2}{\nu} \beta_{fs} \frac{x^{\beta_{fs}}}{x} , \quad (2.39)$$

de modo que

$$g^2 = \frac{\nu x}{U} \Rightarrow g = \sqrt{\frac{\nu x}{U}} ,$$

e

$$U(x) = U_0 x^m \Rightarrow m = \beta_{fs} .$$

A priori, todas as informações sobre o escoamento base fora da camada limite são conhecidas, pois a velocidade fora da camada limite é a velocidade do próprio escoamento livre. Adicionalmente, sobre a placa, reconhece-se a condição do não escorregamento na camada de fluido imediatamente superior a parede. Tem-se então, já adimensionalizadas, as condições de contorno para o escoamento base na forma

$$\begin{aligned} f(0) = f'(0) = 0 & \quad \text{em} \quad \eta = 0 \quad , \\ f'(\infty) = 1 & \quad \text{para} \quad \eta \rightarrow 0 \quad . \end{aligned} \quad (2.40)$$

Observa-se que a transformação proposta reduziu a equação de camada limite a uma equação diferencial ordinária (EDO) que pode ser resolvida numericamente para um escoamento com gradiente de pressão, desde que este gradiente não provoque o descolamento da camada limite. O escoamento base resultante da solução da equação de camada limite será então utilizado para a análise de estabilidade centrífuga, onde serão considerados gradientes de pressão adversos e favoráveis.

2.2.3 Abordagem para perturbações

Partindo-se do pressuposto que o escoamento instantâneo possa ser decomposto em uma componente de escoamento base e uma componente de perturbação, como proposto em Floryan e Saric (1982) e Mendonça et al. (2000), temos

$$j = J + j^* \quad , \quad (2.41)$$

onde j é uma variável arbitrária representando uma propriedade instantânea do escoamento, com o termo em maiúsculo indicando a contribuição relativa ao comportamento do escoamento base e o termo com sobrescrito * adicionando informações sobre as perturbações.

Ao substituir essa proposição nas equações de Navier-Stokes (Eqs. 2.9, 2.10, 2.11 e 2.12), as equações para as perturbações são obtidas na forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial(U + u^*)}{\partial x} + \frac{\partial(V + v^*)}{\partial y} + \frac{\partial(W + w^*)}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \\ \frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{\partial v^*}{\partial y} + \frac{\partial w^*}{\partial z} = 0 \quad , \end{aligned} \quad (2.42)$$

onde o escoamento base bidimensional é dado pela solução de Falkner-Skan para a camada limite sobre uma placa plana, ou seja, $U = (U, V, 0)$.

Analogamente para o princípio da conservação da quantidade de movimento,

$$U \frac{\partial u^*}{\partial x} + u^* \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial u^*}{\partial y} + v^* \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{Re^2} \frac{\partial p^*}{\partial x} + \left(\frac{1}{Re^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^2} \right) \quad , \quad (2.43)$$

$$U \frac{\partial v^*}{\partial x} + u^* \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial v^*}{\partial y} + v^* \frac{\partial V}{\partial y} + 2Go^2 U u^* = -\frac{\partial p^*}{\partial y} + \left(\frac{1}{Re^2} \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial z^2} \right) \quad , \quad (2.44)$$

$$U \frac{\partial w^*}{\partial x} + V \frac{\partial w^*}{\partial y} = -\frac{\partial p^*}{\partial z} + \left(\frac{1}{Re^2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w^*}{\partial z^2} \right) \quad . \quad (2.45)$$

Os termos não lineares foram negligenciados uma vez que as amplitudes das perturbações são pequenas. Os termos de tensões viscosas e o termo do gradiente de pressão na direção longitudinal são de ordem $O(1/Re^2)$ e também podem ser desprezados (FLORYAN, 1991; SILVEIRA NETO; MANSUR, 2000). De acordo com resultados experimentais, sabe-se que os vórtices de Görtler são perturbações estacionárias, de modo que as derivadas temporais são igualmente nulas.

As equações para perturbação obtidas (Eqs. 2.42, 2.43, 2.44 e 2.45) foram adimensionalizadas seguindo a mesma proposição discutida na Seção 2.2.1. Analogamente, a velocidade característica na direção longitudinal é a velocidade externa longe da placa U_0 e a velocidade característica na direção normal é U_0/Re , já que as velocidades v^* e w^* no plano transversal à direção do escoamento são de ordem $1/Re$ menores do que a velocidade longitudinal. Assim,

$$u^* = \frac{u^*}{U_0} \quad , \quad v^* = \frac{v^*}{U_0} Re \quad , \quad w^* = \frac{w^*}{U_0} Re \quad , \quad p^* = \frac{p^*}{\rho_0 U_0^2} Re^2 \quad , \quad (2.46)$$

onde δ_0 é da ordem da espessura da camada limite.

Para as condições de contorno do problema de estabilidade são impostas à condição de impermeabilidade e não deslizamento na região próxima a parede e na borda da camada limite as perturbações tendem a diminuir e decair exponencialmente. Em outras palavras,

$$\begin{aligned} u^* = v^* = \frac{\partial v^*}{\partial y} = 0 \quad \text{em } y = 0 \quad , \\ u^*, v^* \rightarrow 0 \quad \text{para } y \rightarrow \infty \quad . \end{aligned} \tag{2.47}$$

3 ANÁLISE POR MODOS NORMAIS

O estudo de instabilidade centrífuga de camada limite sobre superfícies côncavas pode ser realizado utilizando a abordagem clássica de análise local por modos normais. Porém, esta abordagem não se aplica a toda faixa de parâmetros do problema pois, em certas condições, a instabilidade centrífuga de camada limite é um problema de valor inicial regido por equações parabólicas. Isto se dá porque o crescimento da perturbação é da mesma ordem de grandeza do crescimento da camada limite e o escoamento é não paralelo. Desta forma, o histórico ou origem das perturbações são relevantes para a determinação da evolução destas e a análise local despreza o que acontece antes e depois de uma determinada posição do perfil (HALL, 1983). No entanto, a determinação das faixas de aplicabilidade da solução local por modos normais foi finalmente estabelecida por Bottaro e Luchini (1999). Para números de Görtler > 7 , a formulação local por modos normais fornece uma solução hidrodinamicamente válida e pode ser utilizada como condição inicial em uma formulação parabólica de marcha como as equações de estabilidade parabolizadas (do inglês *parabolized stability equations* - PSE) ou para realizar um estudo paramétrico como será mostrado nos capítulos subsequentes.

A seguir, são apresentadas em detalhes a derivação da formulação do problema de estabilidade centrífuga por modos normais.

3.1 Formulação local

No Capítulo 2, foi apresentada a proposição de decomposição do escoamento instantâneo em uma soma de dois termos, cuja implicação foi o surgimento de um conjunto de equações para as perturbações (FLORYAN, 1991). Como este conjunto de equações resultantes é homogêneo e de coeficientes constantes pode-se propor uma solução por separação de variáveis na forma de modos normais, i.e., assumindo-se que as perturbações propagam-se como uma onda representada pelo produto de uma amplitude e uma oscilação, na forma

$$h^*(x, y, z) = \bar{h}(y) \exp(\alpha x + i\beta z) \quad , \quad (3.1)$$

onde $i = \sqrt{-1}$ e h uma variável genérica representando uma perturbação, com o termo sobrescrito com uma barra indicando a amplitude complexa da perturbação e o termo exponencial sua taxa de amplificação na direção x e sua oscilação na direção z .

A proposta de solução apresentada não contempla um termo temporal pois sabe-se de resultados experimentais que os vórtices de Görtler são estacionários (SWEARINGEN; BLACKWELDER, 1987). As variáveis são números reais pois α corresponde à taxa de amplificação na direção longitudinal representando um crescimento ou decréscimo exponencial da perturbação na direção do escoamento base e $\beta = 2\pi/\lambda$ o número de onda na direção transversal, periódico na direção z , sendo λ o comprimento de onda.

Substituindo-se esta proposta de solução nas equações de conservação para as perturbações tem-se, para continuidade (Eq. 2.42),

$$\frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{\partial v^*}{\partial y} + \frac{\partial w^*}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial [\bar{u}(y)e^{(\alpha x + i\beta z)}]}{\partial x} + \frac{\partial [\bar{v}(y)e^{(\alpha x + i\beta z)}]}{\partial y} + \frac{\partial [\bar{w}(y)e^{(\alpha x + i\beta z)}]}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\alpha \bar{u}(y) + \frac{d\bar{v}(y)}{dy} + i\beta \bar{w}(y) = 0 \quad . \quad (3.2)$$

Repetindo o processo para as equações de conservação da quantidade de movimento nas direções x , y e z para as perturbações (Eqs. 2.43, 2.44 e 2.45) e indicando o apóstrofo ' para representar as autofunções derivadas em relação a direção normal, após alguns passos,

$$U_x u + U \alpha u + U_y v + V u' = u'' - \beta^2 u \quad , \quad (3.3)$$

$$V_x u + U \alpha v + V_y v + V v' + 2G\sigma^2 U u = -p' + v'' - \beta^2 v \quad , \quad (3.4)$$

$$U \alpha w + V w' = -i\beta p + w'' - \beta^2 w \quad . \quad (3.5)$$

Os subscritos y e x representam a derivação do escoamento base em relação as suas respectivas direções. As barras sobre as variáveis também foram eliminadas para simplificar a notação.

Tomando-se w da equação da continuidade (Eq. 3.2),

$$-i\beta w = (\alpha u + v') \quad . \quad (3.6)$$

Multiplicando a equação de quantidade de movimento na direção transversal z por $-i\beta$ e substituindo $-i\beta w$ da Eq. (3.6),

$$\begin{aligned} -U\alpha i\beta w - Vi\beta w' &= -\beta^2 p - i\beta w'' + \beta^2 i\beta w \quad \Rightarrow \\ U\alpha (\alpha u + v') + V (\alpha u' + v'') &= -\beta^2 p + (\alpha u'' + v''') - \beta^2 (\alpha u + v') \quad . \end{aligned}$$

Derivando-se a equação anterior em relação a y ,

$$\begin{aligned} U_y \alpha (\alpha u + v') + V_y (\alpha u' + v'') + U \alpha (\alpha u' + v'') + V (\alpha u'' + v''') &= \\ -\beta^2 p' + (\alpha u''' + v^{IV}) - \beta^2 (\alpha u' + v'') \quad . \end{aligned}$$

Multiplicando a equação da quantidade de movimento normal y por β^2 e subtraindo da equação anterior para eliminar p ,

$$\beta^2 V_x u + \beta^2 U \alpha v + \beta^2 V_y v + \beta^2 V v' + 2\beta^2 G \sigma^2 U u = -\beta^2 p' + \beta^2 v'' - \beta^4 v \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} U_y \alpha (\alpha u + v') + V_y (\alpha u' + v'') + U \alpha (\alpha u' + v'') + V (\alpha u'' + v''') &= \\ -\beta^2 V_x u - \beta^2 U \alpha v - \beta^2 V_y v - \beta^2 V v' - 2\beta^2 G \sigma^2 U u = & \\ (\alpha u''' + v^{IV}) - \beta^2 (\alpha u' + v'') - \beta^2 v'' + \beta^4 v \quad , \end{aligned}$$

resultando

$$\begin{aligned} v^{IV} + (\beta^2 V_x - U_y \alpha^2 + 2\beta^2 G \sigma^2 U) u + (\beta^2 U \alpha + \beta^2 V_y + \beta^4) v + (\beta^2 V - U_y \alpha) v' &= \\ - (V_y + 2\beta^2 + U \alpha) v'' - V v''' - (U \alpha^2 + V_y \alpha + \beta^2 \alpha) u' - V \alpha u'' + \alpha u''' = 0 \quad . \end{aligned}$$

Sabendo que $U_x = -V_y$, temos ainda

$$v^{IV} + (\beta^2 V_x - U_y \alpha^2 + 2\beta^2 Go^2 U) u + (\beta^2 U \alpha + \beta^2 V_y + \beta^4) v + (\beta^2 V - U_y \alpha) v' - (V_y + 2\beta^2 + U \alpha) v'' - V v''' - (U \alpha^2 - U_x \alpha + \beta^2 \alpha) u' - V \alpha u'' + \alpha u''' = 0 \quad (3.7)$$

Da quantidade de movimento na direção longitudinal x , temos

$$u'' - (U \alpha + \beta^2 + U_x) u - U_y v - V u' = 0 \quad (3.8)$$

As Eqs. (3.7) e (3.8) formam o sistema de equações apresentado usualmente na literatura especializada. Este sistema pode ser ainda mais simplificado, derivando a Eq. (3.8) em relação a y e multiplicando-a por α ,

$$\alpha u''' = (U_y \alpha^2 + U_{xy} \alpha) u + (U \alpha^2 + \alpha \beta^2 + \alpha U_x) u' + \alpha U_{yy} v + \alpha V_y u' + \alpha U_y v' + \alpha V u'' \quad .$$

Substituindo $\alpha u'''$ obtido anteriormente na Equação (3.7),

$$v^{IV} + (\beta^2 V_x - U_y \alpha^2 + 2\beta^2 Go^2 U) u + (\beta^2 U \alpha + \beta^2 V_y + \beta^4) v + (\beta^2 V - U_y \alpha) v' - (V_y + 2\beta^2 + U \alpha) v'' - V v''' - (U \alpha^2 - U_x \alpha + \beta^2 \alpha) u' - V \alpha u'' + (U_y \alpha^2 + \alpha U_{xy}) u + (U \alpha^2 + \alpha \beta^2 + \alpha U_x) u' + \alpha U_{yy} v + \alpha V_y u' + \alpha U_y v' + \alpha V u'' = 0 \quad .$$

Reagrupando os termos, temos a forma final da equação

$$v^{IV} + (\beta^2 V_x + \alpha U_{xy} + 2\beta^2 Go^2 U) u - 2\alpha V_y u' + (\beta^2 U \alpha + \alpha U_{yy} + \beta^2 V_y + \beta^4) v + \beta^2 V v' - (V_y + 2\beta^2 + U \alpha) v'' - V v''' = 0 \quad (3.9)$$

Lembrando que $Go = Re\sqrt{\kappa\delta}$ representa o parâmetro associado à curvatura κ da superfície sobre a qual a camada limite com espessura δ se desenvolve.

O problema posto pela equação de estabilidade (Eq. 3.9) e pelas condições de con-

torno (Eqs. 2.47), representam um problema de autovalor onde a relação de dispersão é dada por $f(\alpha, \beta, Go) = 0$ e a solução da equação diferencial só existe para certas combinações desses parâmetros.

Observa-se que no desenvolvimento da derivação das equações do problema de estabilidade linear, os termos não-paralelos U_x, U_{xy}, V, V_x e V_y foram desprezados. Para escoamentos acelerando ou desacelerando devido ao gradiente de pressão, o componente V da velocidade normal da solução de camada limite de primeira ordem cresce ou decresce continuamente fora da camada limite. Isso é inconsistente com a hipótese de que a perturbação decairia exponencialmente longe da parede quando os componentes da velocidade do escoamento base são constantes. Para evitar esse problema, Ragab e Nayfeh (1981) propuseram um sistema de coordenadas ótimo baseado nas linhas de corrente do escoamento potencial que, para valores grandes da coordenada normal, a velocidade normal tende para uma constante.

4 METODOLOGIA

Das discussões anteriores, ficou evidenciado a necessidade de se resolver duas situações físicas para busca da solução do problema de estabilidade centrífuga por teoria linear. No Capítulo 2 foram discutidos os pormenores referentes ao problema do escoamento base sujeito a um gradiente de pressão e obtidas as equações que regem este fenômeno. Já na Seção 2.2.3 e posteriormente no transcorrer do Capítulo 3 os detalhes da abordagem por modos normais foram apresentados e seu equacionamento exposto. Em ambos, as equações de conservação obtidas e suas respectivas soluções existentes podem ser obtidas via abordagem numérica. Neste capítulo discutiremos os passos necessários a serem percorridos para obtenção dessas soluções e *a posteriori*, do entendimento completo do problema de estabilidade.

4.1 Abordagem para solução das equações de conservação para o escoamento base

O primeiro passo na solução do problema objeto deste trabalho é resolver a questão da camada limite de Falkner-Skan mediante a variações do gradiente de pressão, uma vez que o campo de velocidades do escoamento base compõe o equacionamento para perturbação.

A proposição de solução por similaridade apresentada na Seção 2.2.2 resultou numa equação diferencial ordinária (Eq. 2.33) que apesar de simplificada, não possui solução analítica. Logo, a metodologia numérica de solução passa por transformar a EDO de terceira ordem em um sistema acoplado de EDO's de primeira ordem e utilizar um método de integração numérica para marchar com a solução partindo do contorno. Para tal, uma rotina em linguagem Fortran foi adaptada do código de Mendonça et al. (2000) já estabelecido para escoamentos em camada limite sem influência do gradiente de pressão cujos detalhes são apresentados a seguir.

Fazendo $f = y_1$, $f' = y_2$ e $f'' = y_3$ podemos reescrever a Equação (2.33) como um sistema acoplado de três equações na forma

$$\begin{aligned} Y'(1) &= y_2 \quad , \\ Y'(2) &= y_3 \quad , \\ Y'(3) &= -\left(\frac{m+1}{2}\right)y_1y_3 - m(1-y_2^2) \quad , \end{aligned} \quad (4.1)$$

sendo m o parâmetro de aceleração ou desaceleração da camada limite de Falkner-Skan.

O sistema acima é integrado numericamente utilizando o método clássico de Runge-Kutta de 4ª ordem, marchando com este problema de valor inicial num domínio computacional que vai variar em tamanho dependendo do gradiente de pressão estudado. Os resultados apresentados em detalhes no Cap. 5 mostraram que gradientes de pressão adversos exigem uma malha computacional mais refinada, quando comparada a gradientes de pressão favoráveis.

Devido as características assintóticas das condições de contorno, a direção de integração se dá a partir da extremidade do domínio similar em cima da placa curva ($\eta = 0$), até a outra extremidade fora da camada limite ($\eta \rightarrow \infty$) uma vez que, as condições de contorno estão estabelecidas e devem convergir para as expressões (2.40). Contudo, desconhece-se o valor inicial da terceira condição (f'' em $\eta = 0$) para iniciar a rotina de integração.

Para contornar esta dificuldade aparente, busca-se o valor para $f''(0)$ iterativamente. Assumido um valor inicial, ao final do processo de integração verifica-se se este valor adotado produz uma solução compatível com $f'(\infty) = 1$. Caso isto não ocorra, outro valor deve ser assumido para $f''(0)$ e o processo é repetido até que as condições de contorno fora da camada limite sejam satisfeitas. Ao invés de se iniciar por um valor arbitrário assumiu-se como um primeiro chute $f''(0) = 0,3321$ pois sabe-se da literatura (SCHLICHTING, 1979) que, este é o valor para o caso clássico da camada limite de Blasius (assumindo $m = 0$ na formulação). Para acelerar este processo de busca da condição de contorno ideal implementou-se o método da secante incrementando os valores dos chutes e assumindo diferentes valores de m até a convergência da solução.

Em suma, o procedimento numérico de solução para o escoamento base consiste em:

- a) Informar valores iniciais para f , f' e chutar o valor de f'' em $\eta = 0$ para o m desejado;
- b) Integrar a EDO similar (Eq. 2.33) de 0 a $\eta_{m\acute{a}x}$;
- c) Checar se a condição de contorno em $\eta \rightarrow \infty$ (Eq. 2.40) é respeitada;
- d) Senão, alterar o valor do chute tomando-se um valor próximo ao anterior e integrar novamente a equação de Falkner-Skan;

- e) Verificar se agora a condição de contorno fora da camada limite é satisfeita;
- f) Se a condição de contorno ainda não for satisfeita, interpolar f'' entre os dois chutes iniciais anteriores;
- g) Utilizar o novo valor obtido como condição inicial, integrar novamente a Eq. (2.33) no domínio e
- h) repetir todo o procedimento até a convergência.

Ao final deste processo, tem-se a solução do escoamento base para camada limite para um determinado gradiente de pressão imposto, incluindo os perfis das variáveis dependentes em função da coordenada similar η e da coordenada física y necessárias na busca da solução das equações de conservação para perturbação. Para uma outra situação física a ser estudada, um outro gradiente de pressão deve ser informado via parâmetro m e todo o procedimento explicado acima é repetido, obtendo-se a solução particular desejada.

4.2 Abordagem para solução das equações de conservação para as perturbações

Como já discutido, uma vez conhecidas as propriedades relacionadas ao escoamento base, parte-se para a solução local das equações de conservação para as perturbações por modos normais. Como resultado das hipóteses assumidas e da manipulação matemática apresentada em detalhes no Capítulo 3, temos agora um conjunto de duas equações (Eqs. 3.7 e 3.8) para as perturbações.

Analogamente ao apresentado na seção anterior, buscar-se-á solucionar este problema transformando as referidas equações de conservação para as perturbações resultantes em um sistema acoplado de seis EDO's de 1ª ordem, uma vez que a Eq. (3.7) é uma EDO de 4ª ordem em v e a Eq. (3.8) é uma EDO de 2ª ordem em u . Entretanto, o procedimento numérico para a solução, a direção adotada de integração numérica e outras particularidades deste problema, exigem que a metodologia e as decisões tomadas para obtenção da solução sejam diferentes daquelas apresentadas na Seção 4.1. Diversas rotinas foram criadas e um código em linguagem Fortran, originalmente produzido para investigar vórtices de Görtler em camada limite do tipo Blasius, foi adaptado na busca da resolução do problema de instabilidade centrífuga (MENDONÇA et al., 2000). Seus detalhes bem como a metodologia de solução empregada são apresentados no decorrer desta seção.

Ao escrever o sistema de duas equações, dadas pelas Eqs. (3.7) e (3.8), como um sistema de 6 equações de primeira ordem, temos

$$\begin{aligned}
v &= y_4 \quad , \\
v' &= y_5 \quad , \\
v'' &= y_6 \quad , \\
v''' &= y_7 \quad , \\
v^{iv} &= -\left(\beta^2 V_x + \alpha U_{xy} + 2\beta^2 G\sigma^2 U\right) y_8 + (2\alpha V_y) y_9 + (V) y_7 \\
&\quad - \left(\beta^2 U\alpha + \alpha U_{yy} + \beta^2 V_y + \beta^4\right) y_4 - \left(\beta^2 V\right) y_5 + \left(V_y + 2\beta^2 + U\alpha\right) y_6 \quad , \\
u &= y_8 \quad , \\
u' &= y_9 \quad , \\
u'' &= \left(U\alpha + \beta^2 + U_x\right) y_8 + (U_y) y_4 + (V) y_9 \quad , \tag{4.2}
\end{aligned}$$

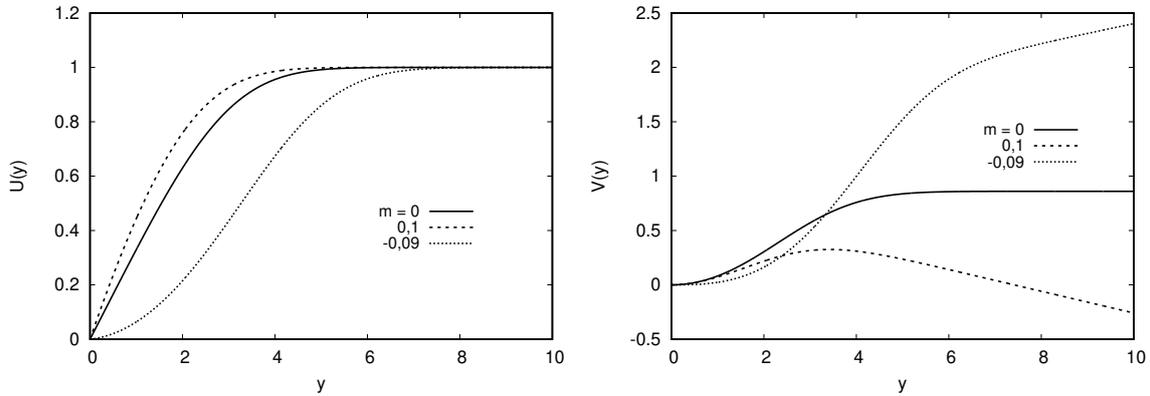
que na forma matricial, fazendo $[Y] = [y_1, \dots, y_9]$, fica

$$[Y'] = [M][Y] \quad . \tag{4.3}$$

O sistema de equações acima, é resolvido por integração numérica seguindo o método de Runge-Kutta de 4ª ordem, cujo tamanho ideal do domínio computacional depende do gradiente de pressão adotado, assim como discutido na abordagem da solução do escoamento base e apresentado em detalhes na Seção 5.1. A rigor, o mesmo tamanho e refinamento de malha computacional foi empregado para ambas. Vale ressaltar que os perfis de velocidades para o escoamento base é conhecido e dado pelo campo de escoamento correspondente à solução de Falkner-Skan (Seção 4.1).

Fica faltando definir as condição de contorno para a solução numérica. Uma condição de contorno é obtida da solução exata das equações de estabilidade em $\eta \rightarrow \infty$ dada pela EDO de coeficientes constantes apresentada na sequência. Fora da camada limite $U_y = U_{xy} = U_{yy} = 0$, $U = U_0 = 1$ e para $m \neq 0$, V, V_x e V_y não são constantes devido aos efeitos não paralelos do escoamento base (Fig. 4.1). Ao desprezar estes termos, o sistema de equações (4.2) se reduz a um sistema de EDO de coeficientes constantes na forma:

Figura 4.1 - Perfil de velocidades em função da coordenada normal para o escoamento base de Falkner-Skan.



À esquerda, comportamento da componente U e à direita o comportamento da componente V do escoamento base sujeito a diferentes gradientes de pressão.

Fonte: Produção do autor.

$$\begin{bmatrix} y'_4 \\ y'_5 \\ y'_6 \\ y'_7 \\ y'_8 \\ y'_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ (-\beta^2\alpha - \beta^4) & -\beta^2V & (2\beta^2 + \alpha) & V & (-\beta^2V_x - 2\beta^2Go^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (\alpha + \beta^2) & V \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \\ y_9 \end{bmatrix},$$

e a solução do sistema de equações diferenciais de coeficientes constantes é do tipo

$$y_i = A_{ik} \exp(\lambda_k \eta), \quad (4.4)$$

onde λ_k são os autovalores da matriz M e A_{ik} são constantes associadas ao autovetor e autovalor i . Ao aplicar esta proposta de solução, requer-se que o determinante seja zero, i.e., $\det [M - \lambda I] = 0$. Assim,

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ (-\beta^2\alpha - \beta^4) & -\beta^2V & (2\beta^2 + \alpha) & V - \lambda & (-\beta^2V_x - 2\beta^2Go^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (\alpha + \beta^2) & V - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad .$$

Aplicando o método dos cofatores, após alguns passos (para maiores detalhes vide anexo A.1), obtêm-se o polinômio característico a saber:

$$\begin{aligned} & +\lambda^6 - 2V\lambda^5 + [V^2 - 3\beta^2 - 2\alpha]\lambda^4 + [3V\beta^2 + 2V\alpha + V\beta^2]\lambda^3 \\ & + [4\beta^2\alpha + \alpha^2 + 3\beta^4 - \beta^2V^2]\lambda^2 + [-2\beta^2\alpha V - 2\beta^4V]\lambda \\ & -\beta^6 - \beta^2\alpha^2 - 2\beta^4\alpha = 0 \quad , \end{aligned} \tag{4.5}$$

cujas raízes obtidas (detalhes no anexo A.2) são

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \beta \quad , \\ \lambda_2 &= -\beta \quad , \\ \lambda_3 &= \frac{1}{2} \left[V + \sqrt{V^2 + 4(\alpha + \beta^2)} \right] \quad , \\ \lambda_4 &= \frac{1}{2} \left[V - \sqrt{V^2 + 4(\alpha + \beta^2)} \right] \quad , \\ \lambda_5 &= \lambda_3 = \lambda \quad , \\ \lambda_6 &= \lambda_4 = -\lambda \quad . \end{aligned}$$

Isto implicaria numa solução geral como uma combinação linear na forma:

$$Y = A_1 Y_I e^{-\beta\eta} + A_1 Y_I e^{\beta\eta} + A_2 Y_{II} e^{-\lambda\eta} + A_2 Y_{II} e^{\lambda\eta} + A_3 Y_{III} e^{-\lambda\eta} + A_3 Y_{III} e^{\lambda\eta} \quad , \tag{4.6}$$

Porém, as soluções devem respeitar as condições de contorno estabelecidas (Eqs. 2.47), uma vez que longe da região cisalhante, sabe-se que as perturbações decaem exponencialmente. Considerando também a existência de raízes repetidas, temos portanto

$$\lambda = -\beta \quad \text{e} \quad \lambda = \frac{1}{2} \left[V - \sqrt{V^2 + 4(\alpha + \beta^2)} \right] , \quad (4.7)$$

sendo que o sinal negativo é escolhido pois, para α e β positivos

$$V < \sqrt{V^2 + 4(\alpha + \beta^2)} .$$

Desta forma, a solução Y então é dada como a soma de três componentes, uma dita não viscosa Y_I e outra duas viscosas (Y_{II} e Y_{III}) que tendem a decair mais rapidamente. Logo,

$$Y = A_1 Y_1 + A_2 Y_2 + A_2 Y_3 , \quad (4.8)$$

sendo,

$$Y_1 = Y_I e^{-\beta\eta} ,$$

$$Y_2 = Y_{II} e^{\lambda\eta} ,$$

$$Y_3 = Y_{II} \eta e^{\lambda\eta} + Y_{III} e^{\lambda\eta} ,$$

onde Y_3 é obtido como a solução linearmente independente (LI) de Y_2 devido à existência de raízes repetidas (detalhes no anexo A.3). As constantes A_i são omitidas pois as soluções são linearmente independentes. Os autovetores associados Y_I , Y_{II} e Y_{III} tomam a forma,

$$Y_I = \begin{pmatrix} 1 \\ -\beta \\ \beta^2 \\ -\beta^3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.9)$$

$$Y_{II} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \lambda^3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.10)$$

e

$$Y_{III} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2\lambda \\ 3\lambda^2 \\ y_8 \\ y_8\lambda \end{pmatrix}, \quad (4.11)$$

com

$$y_8 = \frac{-\beta^2 V + (2\beta^2 + \alpha) 2\lambda + (V - \lambda) 3\lambda^2 - \lambda^3}{\beta^2 (V_x + 2Go^2)}. \quad (4.12)$$

De posse da solução na região de escoamento livre, opta-se por fazer a integração no sentido de fora da camada limite em direção a parede, pois a solução da equação diferencial tem uma componente não física que cresce exponencialmente com η e foi descartada impondo-se a condição de decaimento exponencial das perturbações longe da parede (Eq. 4.6). Vale salientar que na solução numérica, esta solução pode surgir a partir de erros de arredondamento ou truncamento e se isto ocorrer, o erro

é amplificado exponencialmente. Assim, integra-se de $\eta = \infty$ a $\eta = 0$ de modo que a solução desejada seja crescente na direção de integração, enquanto que a solução não desejada torna-se decrescente.

Durante este processo de integração, a solução por modos normais resulta em um sistema de equações rígido, uma vez que os autovalores α , β e Go não possuem a mesma ordem de magnitude. Todavia, é necessário garantir que a independência linear da solução Y seja mantida. Para tal fim, utiliza-se um procedimento conhecido como Ortonormalização de Gram-Schmidt¹(OGS). A medida que o método de integração percorre o domínio, uma solução Y é obtida para aquele ponto da malha computacional e a ortonormalização dos autovetores Y_I , Y_{II} e Y_{III} que compõem a solução LI é efetuada como se segue:

- Normaliza-se $Y_I \Rightarrow Z_I = Y_I/|Y_I|$,
- Obtêm-se a projeção de Y_{II} sobre Z_I fazendo $Z_{II} = Y_{II} - (Y_{II}\dot{Z}_I)Z_I$,
- Normaliza-se agora $Z_{II} \Rightarrow Z_{II} = Z_{II}/|Z_{II}|$,
- Forma-se a projeção de Y_{III} sobre o plano Z_I e Z_{II} obtendo-se $Z_{III} = Y_{III} - (Y_{III}\dot{Z}_I)Z_I - (Y_{III}\dot{Z}_{II})Z_{II}$,
- Por fim, normaliza-se $Z_{III} \Rightarrow Z_{III} = Z_{III}/|Z_{III}|$.

A medida que a integração marcha com a solução, fica garantida a independência linear de Y ponto a ponto em direção a parede. Em $\eta = 0$, novamente uma combinação linear deve satisfazer as condições de contorno ($u = v = v' = 0$). Assim, para o vetor solução dado por $Y = [v, v', v'', v''', u, u']$ temos junto a parede, já eliminadas as soluções que não respeitam as condições de contorno,

$$B_1Y_I + B_2Y_{II} + B_3Y_{III} = r \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} ,$$

ou

¹Método de ortogonalização de um conjunto de vetores em um espaço com produto interno (CHENEY; KINCAID, 2009).

$$\begin{bmatrix} v_I & v'_I & v''_I & v'''_I & u_I & u'_I \\ v_{II} & v'_{II} & v''_{II} & v'''_{II} & u_{II} & u'_{II} \\ v_{III} & v'_{III} & v''_{III} & v'''_{III} & u_{III} & u'_{III} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ r \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

cujo determinante precisa ser nulo a fim de se evitar a solução trivial. Na busca pelo determinante implementou-se uma decomposição LU. Se o determinante não for zero, com outro chute para o autovalor próximo ao anterior interpola-se um terceiro via método da secante e o processo acima descrito é repetido até a convergência, i.e., até que a solução respeite as condições de contorno em $\eta = 0$.

O procedimento numérico de solução para as equações de conservação para as perturbações por LST fica:

- a) De posse dos perfis do escoamento base de Falkner-Skan para o m desejado;
- b) Informar 2 valores iniciais para os autovalores e chutar o terceiro, i.e., informar β e Go e chutar um valor para α dado o m ;
- c) Integrar o sistema de equações (Eqs. 4.2) de $\eta = \eta_{m\acute{a}x}$ a $\eta = 0$;
- d) A cada passo do método de Runge-Kutta, verificar se os autovetores obtidos estão linearmente independentes. Senão, aplicar OGS;
- e) Checar se a condição de contorno em $\eta = 0$ (Eq. 2.47) é respeitada calculando o determinante da matriz;
- f) Se o determinante dela for não-nulo, alterar o chute do autovalor; tomando-se um valor próximo ao anterior e integrar novamente o sistema de equações;
- g) Verificar se as condições de contorno junto a placa curva são satisfeitas;
- h) Se as condições de contorno ainda não forem satisfeitas, interpolar o autovalor entre os dois chutes iniciais anteriores;
- i) Utilizar o novo valor para α como condição inicial, integrar novamente as Eqs. (4.2) no domínio e
- j) repetir todo o procedimento até a convergência.

Este procedimento numérico fornece não somente a relação de dispersão $\alpha = f(\beta, Go)$, mas também todas as informações sobre o campo de velocidades tanto do escoamento base quanto das perturbações. A relação de dispersão permite analisar a resposta de um escoamento mediante a uma perturbação na forma de um diagrama. O estudo paramétrico efetuado, incluindo os diagramas de estabilidade para diversas condições do gradiente de pressão é apresentado no Capítulo 5. Todavia, para um melhor entendimento desta pesquisa, antes de se iniciar a discussão acerca dos resultados obtidos se faz necessário abordar alguns detalhes em torno dos parâmetros de interesse do problema de instabilidade centrífuga, incluindo a adimensionalização adotada na presente investigação e como essas variáveis podem ser relacionadas.

4.3 Amplificação a montante ao longo de uma linha de comprimento de onda λ constante

Para vórtices de Görtler é sabido que o número de onda β dimensional é constante a montante, pois o comprimento de onda dimensional λ é constante. É usual adotar-se o comprimento de onda Λ adimensional definido como

$$\Lambda = \frac{U_0 \lambda}{\nu} \sqrt{k \lambda} \quad , \quad (4.13)$$

onde U_0 é a velocidade do escoamento externo à camada limite.

Para a camada limite de Blasius, sendo U_0 constante e λ constante, percorrer a placa curva na direção de x crescente corresponde a andar sobre uma linha Λ constante no diagrama de estabilidade.

Para a camada limite de Falkner-Skan, sendo $U_0 = U_e(x)$ e usando a mesma definição de Λ acima, na direção do escoamento x , Λ varia com $U_e(x) = Cx^m$. Dessa forma, percorrer uma linha de λ constante implica seguir uma linha $\Lambda(x)$.

A seguir são derivadas as equações que permitem calcular a amplificação da perturbação ao longo da direção do escoamento. A amplificação da perturbação u^* por exemplo, é dada pela variação de u^* por unidade de u^* , tal que, dado

$$u^*(x, y, z) = \bar{u}(y) \exp(\alpha x + i\beta z) \quad ,$$

$$\frac{1}{u^*} \frac{du^*}{dx} = \alpha \quad \Rightarrow \quad \ln \frac{A}{A_0} = \int_{x_0}^x \alpha dx \quad . \quad (4.14)$$

sendo α a taxa de amplificação espacial, β o número de onda transversal, A a amplitude de uma perturbação para uma dada posição longitudinal x e A_0 a amplitude inicial para uma posição de referência x_0 . Na forma adimensional a integral acima é feita em termos da variação de Go , ou β , ou Λ , como será visto. Isto é necessário uma vez que a informação de posição longitudinal é perdida na formulação local por modos normais e a variável independente x tem que ser substituída por uma das variáveis adimensionais definidas acima.

Na análise que se segue, a amplificação na direção longitudinal é calculada para uma sucessão de valores de β adimensionais $\beta = \beta_d \delta(x)$ e seus correspondentes valores de $Go(x)$ no diagrama de estabilidade.

4.3.1 Adimensionalização dos autovalores

Para o número de onda transversal adimensional β

$$\beta = \beta_d \delta \quad \Rightarrow \quad \beta_0 = \beta_d \delta_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\beta}{\beta_0} = \frac{\delta}{\delta_0} \quad ,$$

onde o subscrito 0 indica uma dada posição inicial sobre a curva neutra escolhida para o início da marcha, o subscrito d indica a variável dimensional e da definição de $\delta = \sqrt{\frac{\nu x}{U_e}}$ e da aceleração para o escoamento livre no caso de Falkner-Skan $U_e(x) = Cx^m$, tem-se

$$\frac{\delta}{\delta_0} = \sqrt{\frac{\nu x U_0}{U_e \nu x_0}} = \sqrt{\frac{x x_0^m}{x^m x_0}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta}{\delta_0} = \sqrt{\left(\frac{x}{x_0}\right)^{(1-m)}} \quad ,$$

tal que

$$\frac{\beta}{\beta_0} = \left(\frac{x}{x_0}\right)^{(1-m)/2} \quad . \quad (4.15)$$

Da definição de Λ , para λ , κ e ν constantes, temos

$$\Lambda = \frac{U_e \lambda}{\nu} \sqrt{k \lambda} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Lambda}{\Lambda_0} = \frac{U_e}{U_0} = \left(\frac{x}{x_0} \right)^m . \quad (4.16)$$

A partir da definição do número de Görtler $Go = \frac{U_e \delta}{\nu} \sqrt{k \delta}$ aplicada à posição inicial, tem-se

$$Go_0 = \frac{U_0 \delta_0}{\nu} \sqrt{k \delta_0} ,$$

tal que

$$\frac{Go}{Go_0} = \frac{U_e \delta}{U_0 \delta_0} \sqrt{\frac{\delta}{\delta_0}} \quad \Rightarrow \quad \frac{Go}{Go_0} = \frac{U_e}{U_0} \sqrt{\left(\frac{\delta}{\delta_0} \right)^3} = \frac{U_e}{U_0} \sqrt{\left(\frac{\nu x U_0}{U_e \nu x_0} \right)^{3/2}} ,$$

$$\frac{Go}{Go_0} = \left(\frac{x}{x_0} \right)^m \sqrt{\left(\frac{x}{x_0} \right)^{3(1-m)/2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{Go}{Go_0} = \left(\frac{x}{x_0} \right)^{(3+m)/4} .$$

Escrevendo agora Go e λ em função de β , temos

$$\frac{\beta}{\beta_0} = \left(\frac{x}{x_0} \right)^{(1-m)/2} , \quad (4.17)$$

$$\frac{\Lambda}{\Lambda_0} = \left(\frac{\beta}{\beta_0} \right)^{2m/(1-m)} , \quad (4.18)$$

$$\frac{Go}{Go_0} = \left(\frac{\beta}{\beta_0} \right)^{(3+m)/[2(1-m)]} . \quad (4.19)$$

Desta forma, caminhar a jusante ao longo de uma linha de λ constante, exige variar β , Go e Λ de acordo com as Equações (4.17), (4.18) e (4.19) acima.

4.3.2 Amplificação das perturbações

A amplificação de uma perturbação h^* qualquer ao longo da direção longitudinal é obtida integrando-se a taxa de amplificação como se segue. Na forma dimensional, temos

$$h^* = A \exp(\alpha_d x) \quad , \quad (4.20)$$

onde α_d representa a taxa de amplificação dimensional. Já a taxa de amplificação adimensional é definida como sendo

$$\alpha = \alpha_d x_0 \quad .$$

Tomando a derivada

$$\frac{dh^*}{dx} = \alpha_d A \exp(\alpha_d x) \quad \Rightarrow \quad \frac{dh^*}{dx} = \alpha_d h^* \quad . \quad (4.21)$$

Integrando a equação por separação de variáveis

$$\ln \left(\frac{h'(x)}{h'_0(x_0)} \right) = \ln \left(\frac{A}{A_0} \right) = \int_{x_0}^x \alpha_d dx \quad , \quad (4.22)$$

que na forma adimensional assume a forma,

$$\ln \left(\frac{A}{A_0} \right) = \int_1^{x/x_0} \alpha \, d(x/x_0) \quad . \quad (4.23)$$

A equação para amplificação de uma perturbação pode ser escrita também em termos do comprimento de onda Λ ou do número de onda transversal β .

Em termos de Λ

Da Equação (4.16) tem-se

$$\frac{x}{x_0} = \left(\frac{\Lambda}{\Lambda_0} \right)^{1/m} \quad ,$$

diferenciando-se

$$d \left(\frac{x}{x_0} \right) = \frac{1}{m} \left(\frac{\Lambda}{\Lambda_0} \right)^{(1-m)/m} \frac{1}{\Lambda_0} d\Lambda \quad .$$

Substituindo a diferenciação acima na equação da amplificação (Eq. 4.23),

$$\ln \left(\frac{A}{A_0} \right) = \int_1^x \alpha \frac{1}{m} \left(\frac{\Lambda}{\Lambda_0} \right)^{(1-m)/m} \frac{1}{\Lambda_0} d\Lambda \quad . \quad (4.24)$$

Usando a regra do trapézio para integração numérica da Eq. (4.24), temos

$$\ln \left(\frac{A}{A_0} \right) = \frac{1}{m\Lambda_0} \sum \frac{1}{2} \left[(\alpha\xi)_{i+1} + (\alpha\xi)_i \right] (\Lambda_{i+1} - \Lambda_i) \quad , \quad (4.25)$$

onde

$$\xi = \left(\frac{\Lambda}{\Lambda_0} \right)^{(1-m)/m} \quad . \quad (4.26)$$

Em suma, na forma adimensional, deve-se integrar a taxa de amplificação ao longo da coordenada Λ como apresentado.

Em termos de β

Da Eq. (4.15) tem-se

$$\frac{x}{x_0} = \left(\frac{\beta}{\beta_0} \right)^{2/(1-m)} \quad .$$

Diferenciando-se a equação acima

$$d \left(\frac{x}{x_0} \right) = \frac{2}{1-m} \left(\frac{\beta}{\beta_0} \right)^{(1+m)/(1-m)} \frac{1}{\beta_0} d\beta \quad ,$$

substituindo-a na equação da amplificação (Eq. 4.23), obtêm-se

$$\ln \left(\frac{A}{A_0} \right) = \int_1^x \alpha \frac{2}{1-m} \left(\frac{\beta}{\beta_0} \right)^{(1+m)/(1-m)} \frac{1}{\beta_0} d\beta \quad . \quad (4.27)$$

Usando a regra do trapézio para integração numérica da equação anterior, temos

$$\ln \left(\frac{A}{A_0} \right) = \frac{2}{(1-m)\beta_0} \sum \frac{1}{2} \left[(\alpha\xi)_{i+1} + (\alpha\xi)_i \right] (\beta_{i+1} - \beta_i) \quad , \quad (4.28)$$

onde

$$\xi = \left(\frac{\beta}{\beta_0} \right)^{(1+m)/(1-m)} \quad . \quad (4.29)$$

Analogamente ao apresentado anteriormente, na forma adimensional, deve-se integrar a taxa de amplificação ao longo da coordenada β , como mostrado acima.

Destaca-se que na formulação local por modos normais, as variáveis do problema são os autovalores e a informação de posição longitudinal não entram no equacionamento. Daí a necessidade de se integrar ao longo de uma variável conhecida deste equacionamento.

4.3.3 Relação entre o comprimento de onda e o número de onda transversal

Podemos relacionar ainda o comprimento de onda Λ com o número de onda transversal β seguindo a seguinte formulação. Como $\lambda_d = \frac{2\pi}{\beta_d}$, temos

$$\Lambda = \frac{U_e \lambda}{\nu} \sqrt{k\lambda} \quad \Rightarrow \quad \frac{U_e \delta}{\nu} \frac{2\pi}{\beta_d \delta} \sqrt{k\delta \frac{2\pi}{\beta_d \delta}} \quad , \quad (4.30)$$

ou ainda

$$\Lambda = \left(\frac{U_e \delta}{\nu} \sqrt{k\delta} \right) \frac{2\pi}{\beta\delta} \sqrt{\frac{2\pi}{\beta}} \quad \Rightarrow \quad \Lambda = Go \left(\frac{2\pi}{\beta} \right)^{3/2} \quad . \quad (4.31)$$

5 RESULTADOS

Caracterizado o problema objeto deste estudo e apresentada a metodologia empregada para a solução do mesmo, prosseguem-se as discussões acerca dos resultados obtidos. Nas seções que se sucedem, boas práticas afim de garantir a qualidade da solução numérica são mostradas e em ordem as curvas neutras para camadas limite expostas a diferentes gradientes de pressão (favoráveis e adversos) são comparadas ao diagrama de estabilidade para camada limite do tipo Blasius. As curvas de taxas de amplificação constantes também são contrapostas para diferentes valores do parâmetro de aceleração de Falkner-Skan. Posteriormente, uma discussão sobre o valor do comprimento de onda transversal $\Lambda_{m\acute{a}x}$ que implica no crescimento mais rápido de uma perturbação em cada diagrama mostrando a relação entre $\Lambda_{m\acute{a}x}$ e o gradiente de pressão é apresentada. Uma análise voltada ao entendimento do campo de velocidades submetido a diferentes gradientes é explicitada ao final.

5.1 Estudo de independência de malha

A solução numérica de um problema é fortemente dependente da malha utilizada na discretização do domínio uma vez que o número de pontos, dentre outros fatores, está diretamente relacionado à exatidão da simulação e o esforço computacional associado. Para assegurar a independência do resultado obtido em relação à densidade da malha adotada foi conduzido um estudo de independência de malha. Fixando-se β em 0,5 e α em 10^{-5} , cinco malhas foram testadas tomando-se como referência a variação do número de Görtler sob diferentes condições do gradiente de pressão, ou seja, variando-se o valor do parâmetro de Falkner-Skan m . O resultado é apresentado na Tabela 5.1.

Tabela 5.1 - Estudo de independência de malha efetuado. Na segunda coluna o número de elementos empregados. Na terceira coluna a variação do número de Görtler para gradiente neutro, na quarta para gradiente favorável igual a 0,3 e na última para um gradiente adverso igual a $-0,04$.

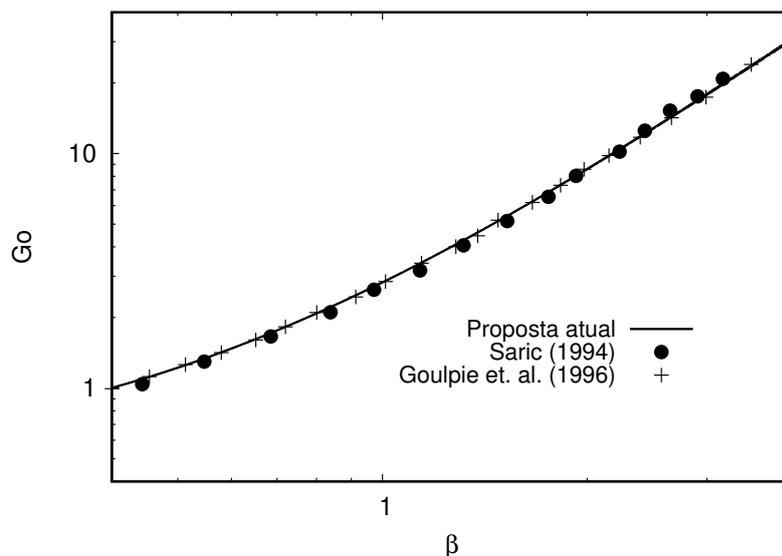
	$n.^o$ de elementos	$m = 0$ Go	$m = 0,3$ Go	$m = -0,04$ Go
Caso 1	500	1,4113	2,0595	1,2616
Caso 2	2500	1,4134	2,0618	1,2642
Caso 3	5000	1,4137	2,0622	1,2632
Caso 4	7500	1,4137	2,0622	1,2637
Caso 5	10000	1,4137	2,0622	1,2633

Pelas simulações realizadas para determinar a independência dos resultados em relação à malha, pode-se garantir que qualquer um dos cinco casos testados e apresentados na Tabela 5.1, será suficientemente eficiente para captura do fenômeno. A diferença quase insignificante observada entre eles mostra como o código se comporta bem quando o gradiente varia de neutro à favorável. Entretanto, o desempenho cai consideravelmente quando o código roda um gradiente muito adverso. Para contornar essa dificuldade, nesta pesquisa adotou-se uma malha com 11000 pontos para os estudos relativos ao gradiente adverso enquanto que uma malha com 5000 pontos foi empregada nos casos envolvendo os gradientes de pressão neutro e favorável.

5.2 Verificação do código

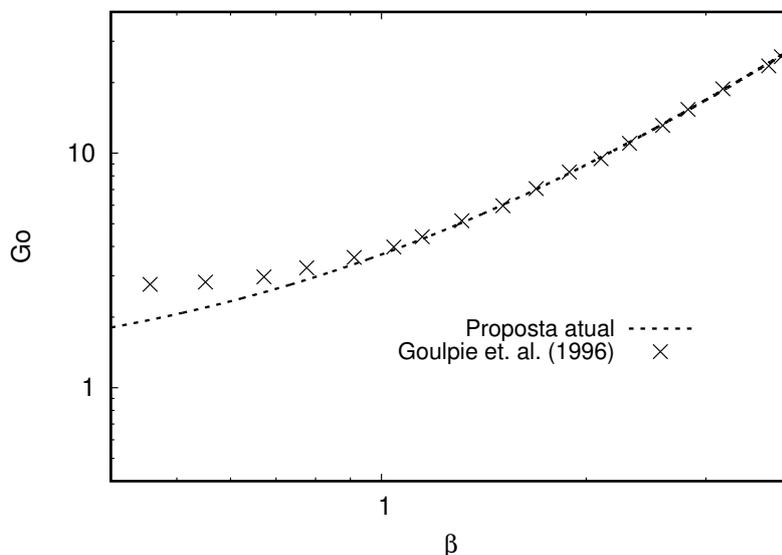
Para certificar-se de que os resultados obtidos estejam em congruência com a literatura, dois casos de verificação foram realizados. Um para avaliar o comportamento das curvas neutras sem a influência do gradiente de pressão (Fig. 5.1), comparando-se aos resultados apresentados por Saric (1994) e Goulpié et al. (1996). Um segundo comparando agora o desempenho da curva neutra para camada limite de Falkner-Skan com $m = 0,3$, confrontando o resultado de Goulpié et al. (1996) (Fig. 5.2). Ambos são baseados na teoria de estabilidade linear.

Figura 5.1 - Curvas neutras utilizadas para verificação do código para o parâmetro de aceleração de Falkner-Skan $m = 0$.



Fonte: Produção do autor.

Figura 5.2 - Curvas neutras utilizadas para verificação do código para o parâmetro de aceleração de Falkner-Skan $m = 0,3$.



Fonte: Produção do autor.

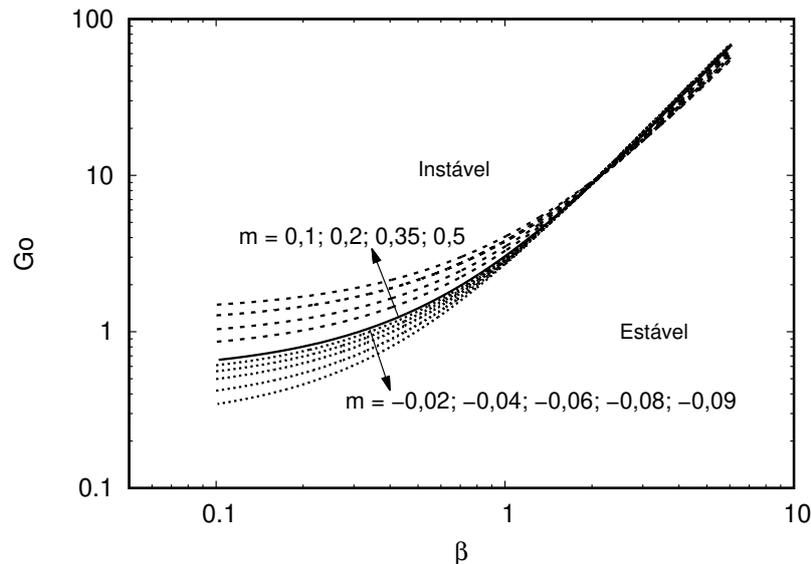
Com a malha computacional empregada no presente estudo o código foi capaz de reproduzir as curvas neutras apresentadas nos trabalhos de Saric (1994) e Goulpié et al. (1996) tanto para camada limite de Blasius quanto para camada limite de Falkner-Skan. Da Figura 5.1 constata-se uma boa concordância de resultados para o primeiro caso teste. Para o segundo caso, a ligeira diferença observada na Fig. 5.2 se dá ao fato de que Goulpié, ao estudar o caso de Falkner-Skan com $m = 0,3$, considerou os termos não-paralelos em sua formulação original, enquanto que nesta pesquisa estes termos são desprezados por hipótese como discutido preliminarmente.

5.3 As curvas neutras

Como discutido no Capítulo 1, é consenso que gradientes de pressão adversos desestabilizam a camada limite e gradientes de pressão favoráveis possuem um efeito estabilizador. A Figura 5.3 mostra um comparativo entre curvas neutras para diferentes valores do parâmetro de aceleração de Falkner-Skan, indo do caso mais adverso ($m = -0,09$) ao mais favorável ($m = 0,5$). Segundo Goulpié et al. (1996), $m = -0,0904$ corresponde ao caso limite para um escoamento desacelerado sem separação da camada limite. Observe que abaixo de $Go \approx 10$ a região instável é reduzida para gradientes de pressão favoráveis e aumentada para gradientes de pressão adversos. Ou melhor, para gradientes de pressão favoráveis o escoamento se

torna instável a números de Görtler maiores e para gradientes de pressão adverso o escoamento se torna instável a números de Görtler menores.

Figura 5.3 - Comportamento das curvas neutras sob diferentes condições do gradiente de pressão.



A linha sólida representa uma camada limite do tipo Blasius. As linhas tracejadas, diferentes gradientes de pressão favoráveis e as linhas pontilhadas, gradientes de pressão adversos. Acima de $Go \approx 10$, a região instável para escoamentos sujeitos a gradientes de pressão favoráveis é maior do que para escoamentos com gradientes de pressão adversos.

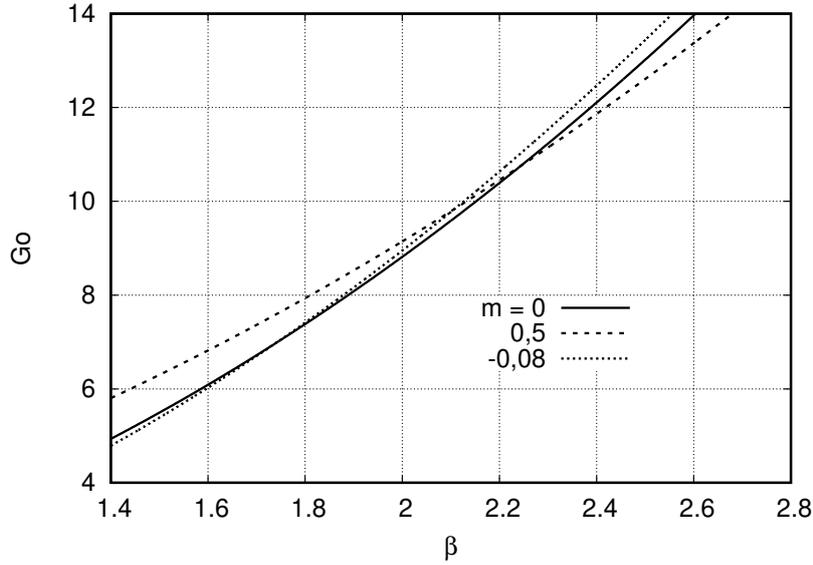
Fonte: Produção do autor.

Acima de $Go \approx 10$ esta tendência é invertida como pode ser observado na Fig. 5.4. Este resultado também foi relatado por Goulpié et al. (1996), mas deve-se levar em consideração que a posição da curva neutra não é o único aspecto que deve ser levado em conta no julgamento da estabilidade de um dado escoamento. É necessário comparar também as taxas de amplificação e o comprimento de onda mais instável.

5.4 Os diagramas de estabilidade

Os resultados a seguir mostram os diagramas de estabilidade com as curvas representando diferentes taxas de amplificação (α) constantes para avaliar os efeitos do gradiente de pressão. Com o intuito de se obter um caso referência, foi produzido um diagrama de estabilidade para camada limite de Blasius como mostra a Fig. 5.7.

Figura 5.4 - Região particular onde as curvas neutras se cruzam.



Detalhes da Fig. 5.3 no intervalo onde o gradiente de pressão favorável tem uma maior faixa de números de onda transversais (β) instáveis comparativamente ao gradiente de pressão adverso.

Fonte: Produção do autor.

Os autovalores presentes nos diagramas de estabilidade (Figs. de 5.7 até 5.17), mostram curvas de taxa de amplificação constante para diferentes valores de α no plano Go, β . Os valores de taxa de amplificação de cada uma das curvas está indicado à esquerda de cada curva. A linha reta que corta as curvas corresponde ao comprimento de onda transversal que implica no crescimento mais rápido de uma perturbação, i.e., no caminho onde a perturbação encontrará as maiores taxas de amplificação. De acordo com o critério aqui adotado, para uma camada limite do tipo Blasius, o comprimento de onda transversal adimensional do modo de crescimento mais rápido é $\Lambda = 212$ onde, segundo a Eq. (4.31),

$$\Lambda = \frac{U_e \lambda}{\nu} \sqrt{k \lambda} = Go \left(\frac{2\pi}{\beta} \right)^{3/2}, \quad (5.1)$$

com o comprimento de onda transversal dimensional igual a $\lambda = 2\pi/\beta$. Este valor é compatível com o valor de $\Lambda = 210$ indicado na literatura.

Uma vez que $U_e = U_e(x)$ para camadas limite com gradiente de pressão, ao contrário

da camada limite de Blasius, Λ varia a jusante mesmo em paredes com curvatura constante κ e comprimento de onda transversal λ também constante. Seguir uma linha constante de λ corresponde a seguir variações de Go, β e Λ a partir de uma dada posição inicial indicada pelo subscrito i , de acordo com as relações propostas na Seção 4.3.1 (Eqs. 4.17, 4.19 e 4.18) a saber:

$$\frac{\beta}{\beta_i} = \left(\frac{x}{x_i} \right)^{(1-m)/2}, \quad (5.2)$$

$$\frac{Go}{Go_i} = \left(\frac{\beta}{\beta_i} \right)^{(3+m)/[2(1-m)]}, \quad (5.3)$$

$$\frac{\Lambda}{\Lambda_i} = \left(\frac{\beta}{\beta_i} \right)^{2m/(1-m)}. \quad (5.4)$$

No presente trabalho, dois critérios foram adotados para identificar o modo de crescimento mais rápido. Um é baseado no comprimento de onda transversal Λ que possui a maior taxa de amplificação em $Go = 7$, limite inferior estabelecido para validade da formulação local (BOTTARO; LUCHINI, 1999). O outro é baseado na maior amplificação, marchando a jusante de $Go = 7$ até $Go = 14$ ao longo de uma trajetória de comprimento de onda transversal constante λ . A amplificação é computada de acordo com a Equação (4.14):

$$\ln \frac{A}{A_0} = \int_{x_0}^x \alpha \, dx \quad . \quad (5.5)$$

Os valores para o comprimento de onda adimensional que provocam o crescimento mais rápido $\Lambda_{m\acute{a}x}$ dependem da escolha da extensão a jusante considerada (neste caso $7 < Go < 14$), porque uma linha de λ constante não segue exatamente uma linha de mínimo de Go para uma dada curva de taxa de amplificação constante.

As Figuras de 5.7 até 5.17 também mostram dois valores para Λ , um em $Go = 7$ e outro para a posição longitudinal em $Go = 14$, ao longo de uma trajetória para λ constante. Para a camada limite de Blasius Λ é constante de acordo com a Eq. (4.31).

Diagramas de estabilidade para gradientes de pressão favoráveis são apresentados nas

Figs. 5.8 a 5.12. As curvas de taxas de amplificação constantes α são deslocadas para cima conforme o parâmetro de aceleração m aumenta. Já o valor de Λ para o modo de crescimento mais rápido decresce com o aumento de m , de acordo com o critério estabelecido de amplificação em $Go = 7$ a $Go = 14$. Este resultado é apresentado na Tabela 5.2. O critério baseado na maior taxa de amplificação em $Go = 7$ mostra que o $\Lambda_{m\acute{a}x}$ nivela em $\Lambda = 161$ após $m = 0,4$, aumentando lentamente depois disso.

A tendência oposta é observada nos diagramas de estabilidade para gradientes de pressão adversos apresentados nas de Figs. 5.13 até 5.17. As linhas de taxas de amplificação constantes α são deslocadas para baixo, indicando que taxas de amplificação mais altas são alcançadas mais cedo, com um Go mais baixo. O comprimento de onda de crescimento mais rápido $\Lambda_{m\acute{a}x}$ aumenta continuamente conforme resumido na Tabela 5.3. Ou seja, quanto maior o parâmetro de aceleração de escoamentos com gradiente de pressão adverso, maior o valor de $\Lambda_{m\acute{a}x}$.

Tabela 5.2 - Comprimento de onda transversal do modo de crescimento mais rápido Λ para diferentes gradientes de pressão favoráveis (m). A segunda e a terceira coluna ilustram o critério de integração da amplitude. Na quarta coluna o critério da taxa de amplificação máxima em $Go = 7$.

m	$\Lambda_i(Go = 7)$	$\Lambda_f(Go = 14)$	Λ
0,0	212	212	185
0,1	183	200	172
0,2	165	197	166
0,3	152	196	163
0,4	141	197	161
0,5	133	199	161
0,6	127	202	161
0,7	121	206	161
0,8	116	210	162
0,9	112	212	164

A Figura 5.5 mostra a variação do comprimento de onda transversal adimensional Λ ao longo do caminho que incorre no modo de crescimento mais rápido para diferentes valores do parâmetro de aceleração de Falkner-Skan m , incluindo a camada limite de Blasius. Quanto mais forte o gradiente de pressão adverso maior é o comprimento de onda transversal correspondente ao modo de crescimento mais rápido. Isto está de acordo com as conclusões de Rogenski et al. (2016a) relacionando o tamanho dos vórtices com o aumento da espessura da camada limite. Para gradientes de pressão favoráveis, quanto mais forte for o gradiente de pressão, menor será a magnitude do

Tabela 5.3 - Comprimento de onda transversal do modo de crescimento mais rápido Λ para diferentes gradientes de pressão adversos (m). A segunda e a terceira coluna ilustram o critério de integração da amplitude. Na quarta coluna o critério da taxa de amplificação máxima em $Go = 7$.

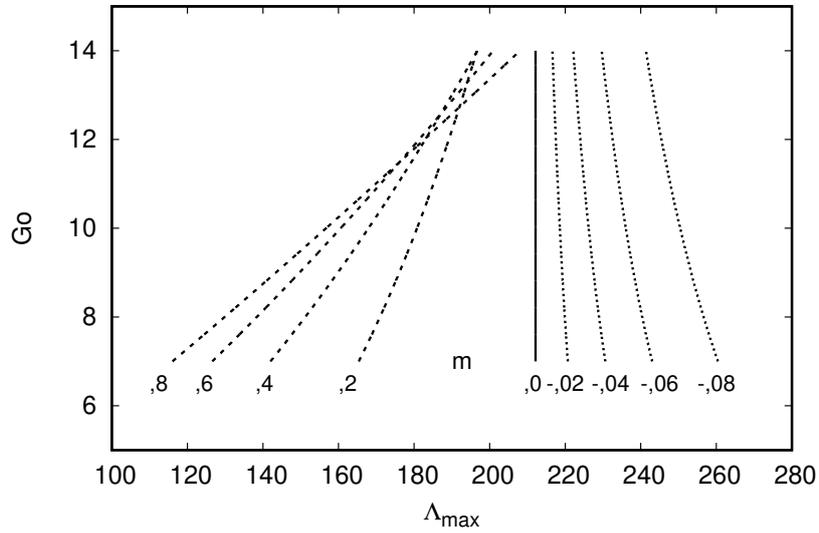
m	$\Lambda_i(Go = 7)$	$\Lambda_f(Go = 14)$	Λ
0,0	212	212	185
-0,01	216	214	187
-0,02	220	216	188
-0,03	225	219	191
-0,04	230	221	194
-0,05	236	225	197
-0,06	243	229	200
-0,07	251	235	205
-0,08	260	241	211
-0,09	275	253	220

comprimento de onda. Isso pode ser explicado como resultado da menor espessura da camada limite. No entanto, ao longo do caminho dos vórtices, mais a jusante em valores mais altos de Go as curvas de $\Lambda_{m\acute{a}x}$ se cruzam.

Já na Figura 5.6 é apresentada a variação da taxa de amplificação α ao longo do caminho do modo de crescimento mais rápido para diferentes valores do parâmetro de aceleração de Falkner-Skan m . Observa-se uma tendência de aumento contínuo da taxa de amplificação com a redução do parâmetro de Falkner-Skan indo de $m = 0,8$ a $m = -0,08$. Este resultado mostra o efeito desestabilizador do gradiente de pressão adverso sobre o comprimento de onda que tem maior amplificação e o efeito estabilizador correspondente de gradiente de pressão favorável. Desta forma, complementasse e resumisse as conclusões retiradas dos diagramas de estabilidade relativos aos valores de $\Lambda_{m\acute{a}x}$ e as características de estabilidade para diferentes condições do gradiente de pressão.

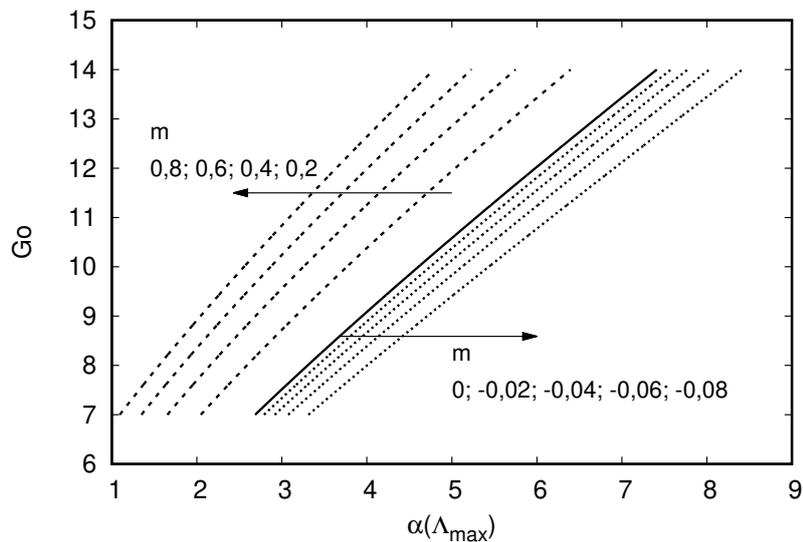
Estes resultados, além de confirmarem conclusões anteriores sobre o efeito do gradiente de pressão na estabilidade dos vórtices de Görtler, cobrem uma gama maior de parâmetros. O comprimento de onda transversal adimensional (Λ) da camada limite de Blasius associada com modo de crescimento mais rápido, reportado em um intervalo em torno de $\Lambda_{m\acute{a}x} = 210$, é frequentemente utilizado como referência para diferentes estudos. Entretanto, a presente investigação mostra que $\Lambda_{m\acute{a}x}$ varia consideravelmente com o gradiente de pressão uma vez que diferentes valores do parâmetro de aceleração foram investigados.

Figura 5.5 - Variação de Λ ao longo da trajetória correspondendo ao comprimento de onda que incorre no crescimento mais rápido para gradientes de pressão favoráveis e adversos.



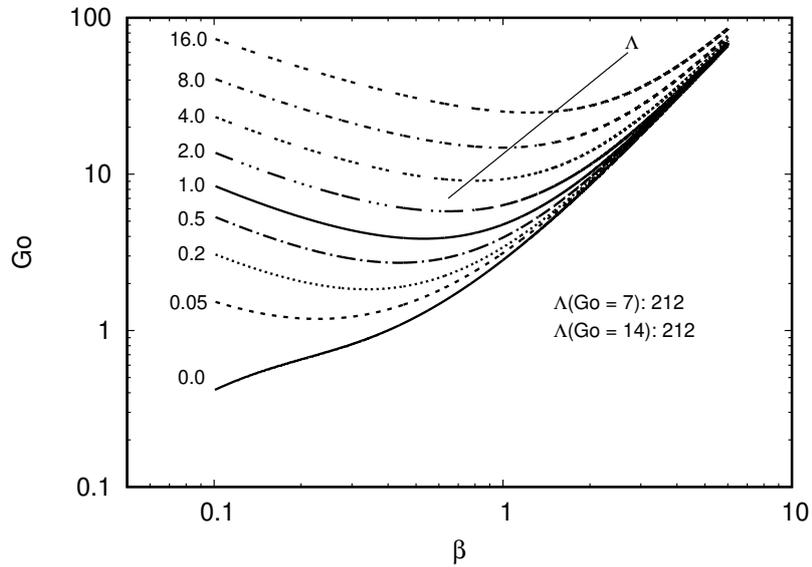
Fonte: Produção do autor.

Figura 5.6 - Variação da taxa de amplificação α ao longo da trajetória correspondendo ao comprimento de onda que incorre no crescimento mais rápido para gradientes de pressão favoráveis e adversos.



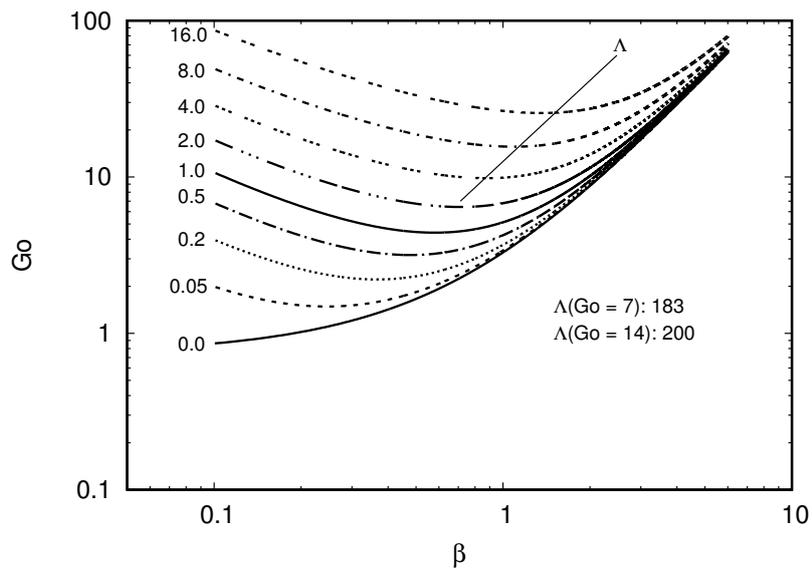
Fonte: Produção do autor.

Figura 5.7 - Diagrama de estabilidade para vórtices de Görtler em camada limite de Falkner-Skan com $m = 0$.



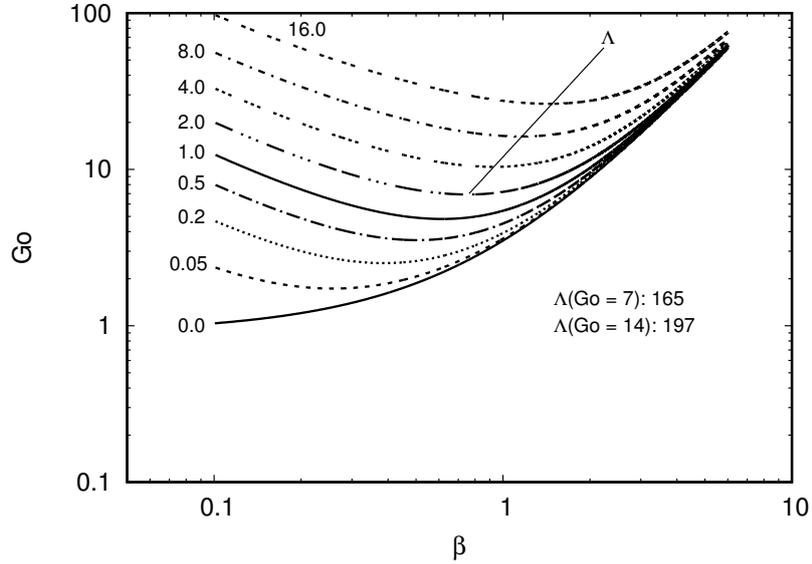
Fonte: Produção do autor.

Figura 5.8 - Diagrama de estabilidade para vórtices de Görtler em camada limite de Falkner-Skan com $m = 0, 1$.



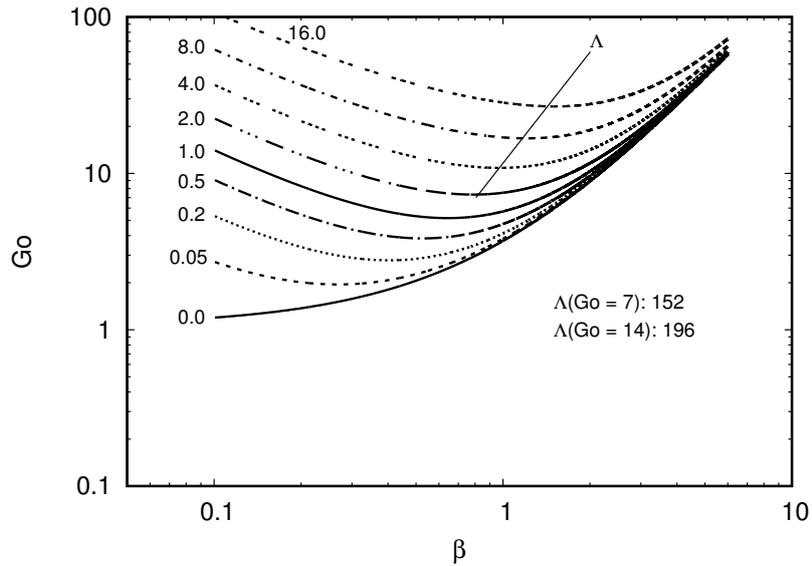
Fonte: Produção do autor.

Figura 5.9 - Diagrama de estabilidade para vórtices de Görtler em camada limite de Falkner-Skan com $m = 0, 2$.



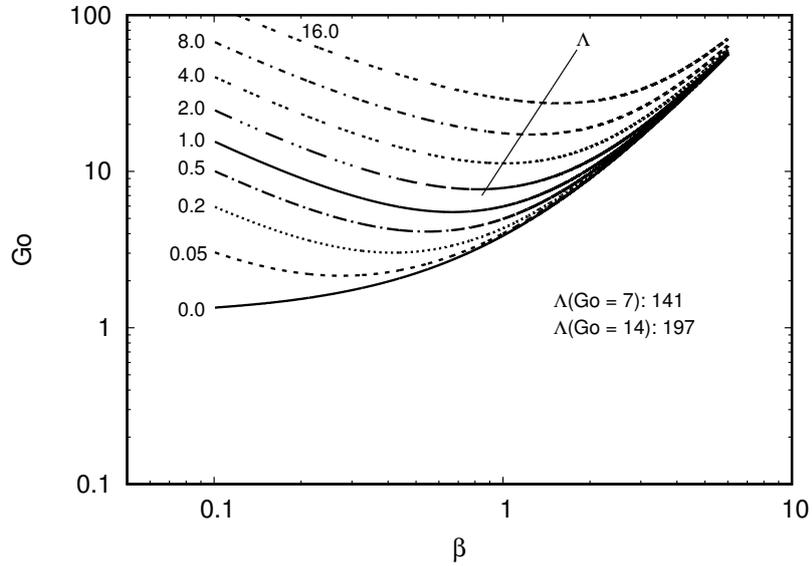
Fonte: Produção do autor.

Figura 5.10 - Diagrama de estabilidade para vórtices de Görtler em camada limite de Falkner-Skan com $m = 0, 3$.



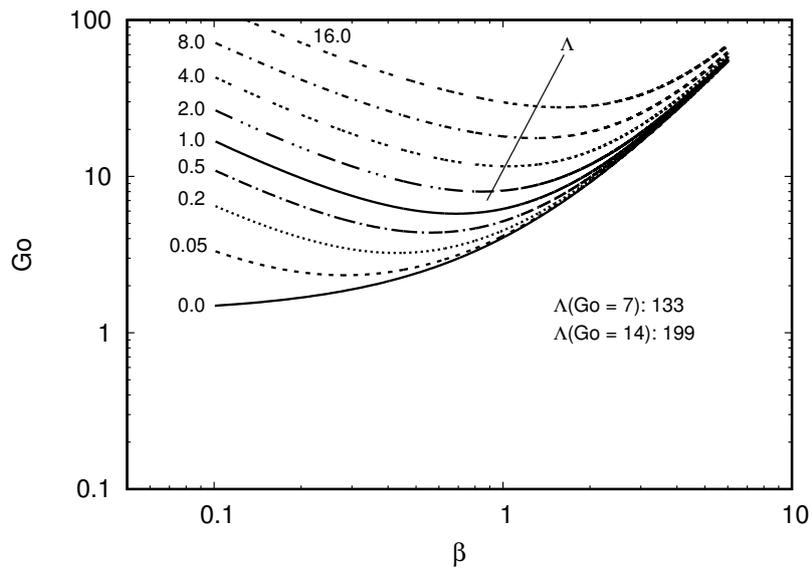
Fonte: Produção do autor.

Figura 5.11 - Diagrama de estabilidade para vórtices de Görtler em camada limite de Falkner-Skan com $m = 0,4$.



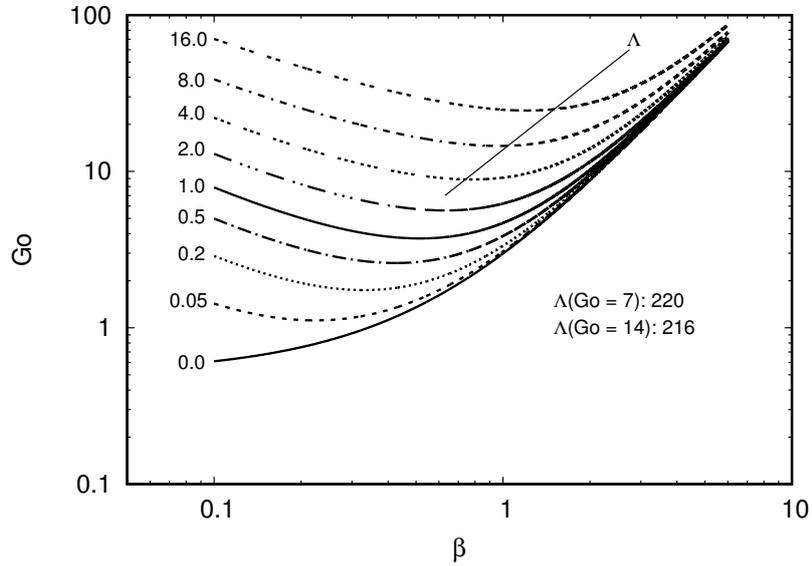
Fonte: Produção do autor.

Figura 5.12 - Diagrama de estabilidade para vórtices de Görtler em camada limite de Falkner-Skan com $m = 0,5$.



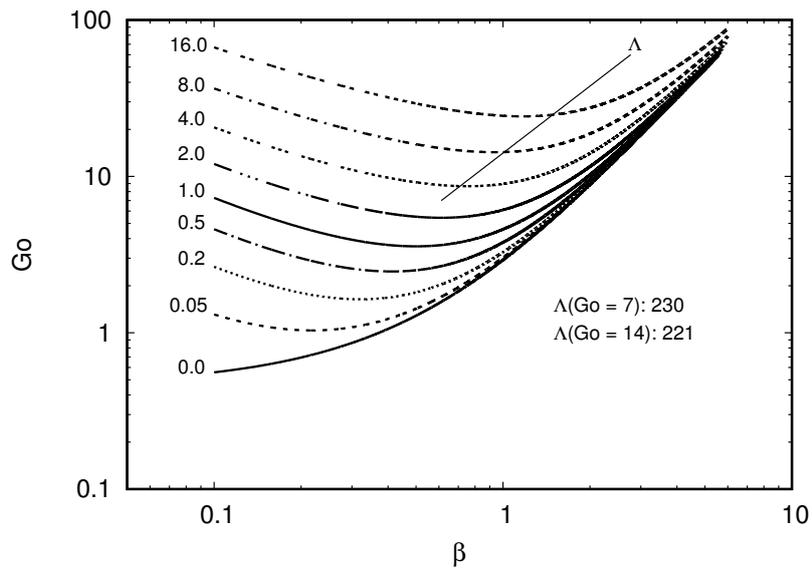
Fonte: Produção do autor.

Figura 5.13 - Diagrama de estabilidade para vórtices de Görtler em camada limite de Falkner-Skan com $m = -0,02$.



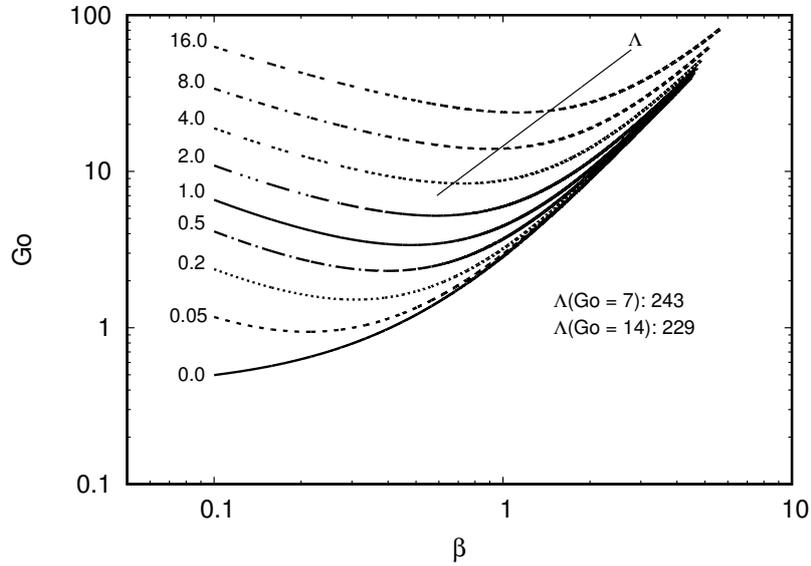
Fonte: Produção do autor.

Figura 5.14 - Diagrama de estabilidade para vórtices de Görtler em camada limite de Falkner-Skan com $m = -0,04$.



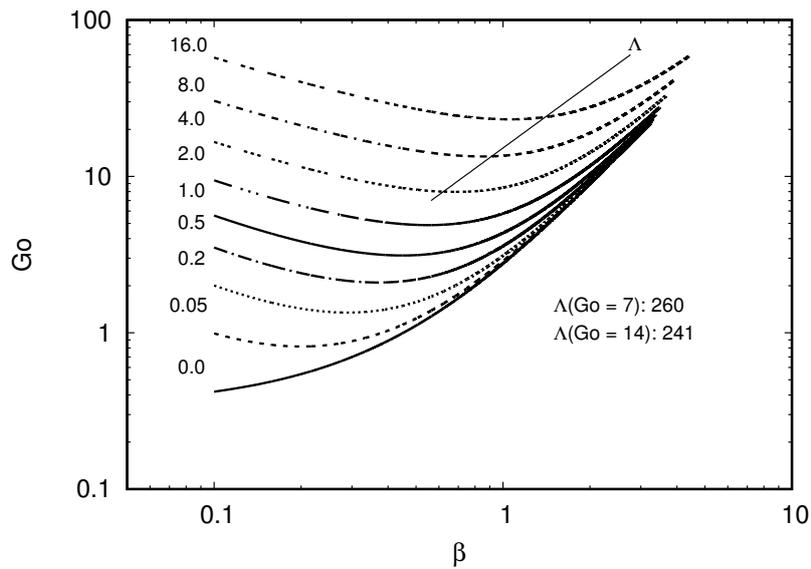
Fonte: Produção do autor.

Figura 5.15 - Diagrama de estabilidade para vórtices de Görtler em camada limite de Falkner-Skan com $m = -0,06$.



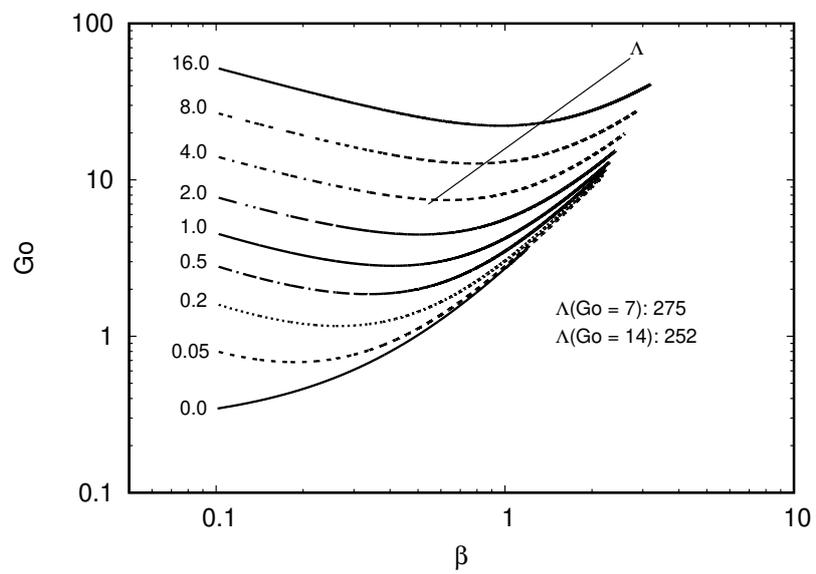
Fonte: Produção do autor.

Figura 5.16 - Diagrama de estabilidade para vórtices de Görtler em camada limite de Falkner-Skan com $m = -0,08$.



Fonte: Produção do autor.

Figura 5.17 - Diagrama de estabilidade para vórtices de Görtler em camada limite de Falkner-Skan com $m = -0,09$.



Fonte: Produção do autor.

5.5 Análises adicionais

Em se tratando do comprimento de onda que corresponde ao crescimento mais rápido de uma dada perturbação $\Lambda_{m\acute{a}x}$, poucas considerações podem ser retiradas da literatura quando se considera o efeito de gradiente de pressão. No trabalho de Goulpié et al. (1996) para $m = 0,075$, dentre os diversos Λ testados, o que apresenta maior taxa de amplificação é $\Lambda = 210$. Como o parâmetro de aceleração da camada limite investigado é pequeno e próximo ao valor correspondente a uma camada limite sem influência do gradiente de pressão, o resultado é compatível com o valor clássico de 210 para Blasius. A conclusão apresentada vai ao encontro do resultado obtido neste trabalho para um gradiente de pressão favorável com $m = 0,1$, conforme mostra a Tabela 5.2.

Já em Matsson (2008) são investigados diferentes valores de m partindo de $Go = 2$ para dois valores distintos de número de onda (β), 0,22 e 0,52. Em seu trabalho não é reportado o comprimento de onda Λ utilizado nem é considerado o comprimento de onda $\Lambda_{m\acute{a}x}$ que implicaria no crescimento mais rápido de uma perturbação. Todavia, utilizando as Eqs. (4.31), (5.3) e (5.4) é possível obter esses valores de Λ em $Go = 2$ e calcular os valores equivalentes em $Go = 7$, convertendo os dados informados por Matsson para as condições estudadas neste trabalho. Um compilado mostrando estes resultados comparativos é apresentado na Tab. 5.4.

Tabela 5.4 - Comparativo entre os resultados obtidos por Matsson (2008) e o presente trabalho. Na primeira coluna os gradientes de pressão estudados. Na segunda e terceira colunas os valores de β e Λ do estudo de Matsson em $Go = 2$ e $\beta = 0,22$ transportados para a condição $Go = 7$. Na quarta e quinta colunas os valores de β e Λ em $Go = 2$ e $\beta = 0,52$ transportados para a condição $Go = 7$. Na sexta coluna, os comprimentos de onda $\Lambda_{m\acute{a}x}$ obtidos neste estudo para os correspondentes valores de parâmetro de aceleração m em $Go = 7$.

m	$\beta(Go = 7)$	$\Lambda(Go = 7)$	$\beta(Go = 7)$	$\Lambda(Go = 7)$	$\Lambda_{m\acute{a}x}$
-0,075	0,553	268	1,306	74	255
0	0,507	305	1,199	84	212
0,075	0,467	345	1,105	95	201
0,15	0,433	388	1,022	107	173
0,3	0,374	481	0,885	132	152

A Tabela 5.4 mostra que os comprimentos de onda (Λ) estudados por Matsson não correspondem aos valores que resultam na maior amplificação obtidos no presente trabalho. Contudo, seus resultados ratificam as conclusões que gradientes de pressão

favoráveis possuem efeitos estabilizantes e os adversos desestabilizantes.

Dos gradientes de pressão apresentados por [Matsson \(2008\)](#) ($m = -0,075; 0,075; 0,15$ e $0,3$) em seu estudo, pela Fig. 5(b) quanto maior o parâmetro de aceleração mais estável é o escoamento. Os valores de Λ do estudo de Matsson (apresentados na Tabela 5.4) são diferentes dos valores correspondentes a $\Lambda_{m\acute{a}x}$ determinados no presente estudo. Para cada valor de m investigado por Matsson, dois valores de Λ são apresentados. Estes dois valores correspondem a $\beta = 0,22$ e $\beta = 0,52$ em $Go = 2$. Os valores resultantes de Λ correspondentes a $\beta = 0,22$ são maiores do que os valores de $\Lambda_{m\acute{a}x}$ determinados no presente estudo, enquanto que os valores de Λ correspondentes a $\beta = 0,52$ são menores do que o valor de $\Lambda_{m\acute{a}x}$. Ainda da Fig. 5(b) de Matsson, os casos para $\beta = 0,52$ tem menor amplificação do que os casos $\beta = 0,22$. No entanto, como os Λ correspondentes estão em lados opostos de $\Lambda_{m\acute{a}x}$ este resultado não poderia ser previsto com antecedência com base apenas no valor de Λ , uma vez que quanto mais afastado para maior ou para menor em relação ao valor de $\Lambda_{m\acute{a}x}$ mais estável é a perturbação e com Λ posicionando-se a direita ou a esquerda de $\Lambda_{m\acute{a}x}$ não é possível fazer tal comparação.

Um número maior de casos investigando o efeito do gradiente de pressão no desenvolvimento dos vórtices de Görtler é apresentado em [Rogenski et al. \(2016a\)](#). São mostrados resultados tanto para gradientes de pressão constantes, quanto para gradientes de pressão variando linearmente e gradientes de pressão associados ao parâmetro de Hartree (γ) da solução de Falkner-Skan. A análise apresentada a seguir corrobora as conclusões oferecidas por Rogenski sobre a relação entre gradiente de pressão e comprimento de onda mais amplificado.

Para camada limite dada pela solução de Falkner-Skan, Rogenski utilizou $\gamma = -0,15; -0,075; 0; 0,125$ e $0,25$ com número de Görtler igual a $Go = 2,5$ e comprimentos de onda Λ iguais a 100, 250 e 450. Aplicando a relação $m = \gamma/(2 - \gamma)$ e as Equações (5.3) e (5.4) é possível transportar os valores de Λ para a posição correspondente em $Go = 7$. Os valores de γ , m e os correspondentes Λ em $Go = 7$ são apresentados na Tabela 5.5, juntamente com os valores de $\Lambda_{m\acute{a}x}$ para cada γ obtidos na presente investigação.

As figuras da investigação de [Rogenski et al. \(2016a\)](#) mostram que quanto maior o gradiente de pressão adverso, maior a amplificação das perturbações e quanto maior o gradiente de pressão favorável, menor a amplificação. Na sua Figura 5(a) os casos $\gamma = -0,15$ e $\gamma = -0,075$ ($m = -0,07$ e $m = -0,036$) para $\Lambda(Go =$

Tabela 5.5 - Comparativo entre os resultados obtidos por Rogenski et al. (2016a) e o presente trabalho. Na primeira coluna os valores do parâmetro de Hartree investigados. Na segunda os gradientes de pressão correlatos. Na terceira os valores de Λ do estudo de Rogenski em $Go = 2,5$ e $\Lambda = 100$ transportados para a condição $Go = 7$, bem como na quarta e quinta colunas os valores de $\Lambda = 250$ e $\Lambda = 450$ em $Go = 2,5$ respectivamente transportados para a condição $Go = 7$. Na última coluna os comprimentos de onda Λ_{max} obtidos neste estudo para os correspondentes valores de parâmetro de aceleração m em $Go = 7$.

γ	m	$\Lambda(Go = 7)$	$\Lambda(Go = 7)$	$\Lambda(Go = 7)$	$\Lambda_{m\acute{a}x}$
0,0	0,0	100	250	450	212
-0,15	-0,07	91	227	408	251
-0,075	-0,036	95	238	428	228
0,125	0,067	109	274	492	197
0,25	0,143	121	301	543	174

2,5) = 250 \rightarrow $\Lambda(Go = 7) = 227$ e 238 possuem taxas de amplificação e crescimento muito semelhantes, sendo que as perturbações que mais crescem identificadas neste trabalho seriam respectivamente $\Lambda_{max} = 251$ e $\Lambda_{max} = 228$. A amplificação de um dado Λ é função tanto do gradiente de pressão quanto da proximidade de Λ_{max} para aquele gradiente e, portanto, o crescimento similar das duas perturbações com gradientes de pressão diferentes é consequência da associação desses dois parâmetros.

Rogenski compara as taxas de amplificação e a amplificação total a jusante para os comprimentos de onda $\Lambda(Go = 2,5) = 100$ e $\Lambda(Go = 2,5) = 450$ para $\gamma = 0,25$ e $-0,15$ ($m = 0,143$ e $-0,07$). Para $\Lambda(Go = 2,5) = 100$, os dois valores de m ($0,143$ e $-0,07$) resultam em $\Lambda(Go = 7) = 121$ e 91. Os valores correspondentes de Λ_{max} para os valores de m considerados são 174 e 251, respectivamente. O maior crescimento da perturbação com gradiente de pressão favorável em relação ao caso com gradiente de pressão adverso mostrado na sua Figura 6(a), pode ser explicado pelo fato de a amplificação total ser função tanto do gradiente de pressão, quanto da proximidade da amplificação máxima, que varia de acordo com o valor do parâmetro de aceleração m . A distância relativa entre o comprimento de onda do caso com gradiente de pressão favorável $\Lambda = 121$ e o correspondente $\Lambda_{max} = 174$ é menor do que a distância relativa do caso com gradiente de pressão adverso $\Lambda = 91$ e $\Lambda_{max} = 251$. Isso poderia justificar o maior crescimento da perturbação no caso com gradiente de pressão favorável, apesar do gradiente de pressão adverso resultar em maior desestabilização, o comprimento de onda resulta numa perturbação com pequena amplificação. Esta interpretação é qualitativa, uma vez que, pelos valores

utilizados por Rogenski não é possível fazer uma avaliação quantitativa da relação entre m , Λ e a proximidade de Λ_{max} .

Da Figura 6(b) de Rogenski et al. (2016a) para $\Lambda(Go = 2, 5) = 450$ observa-se que a perturbação mais amplificada corresponde ao caso de gradiente de pressão adverso. Para os valores de $\gamma = -0,15$ e $0,25$ ($m = -0,07$ e $0,143$) considerados tem-se $\Lambda(Go = 7) = 408$ e $\Lambda(Go = 7) = 543$ respectivamente, sendo que os valores de Λ_{max} correspondentes são 251 e 174. Neste caso, o comprimento de onda do caso com gradiente de pressão favorável é bem superior ao valor do comprimento de onda equivalente ao comprimento de onda de maior crescimento (543 *versus* 174). Para o caso com gradiente de pressão adverso, o comprimento de onda também é superior (408 *versus* 251), mas a diferença é menor e portanto o comprimento de onda do caso de gradiente de pressão adverso está mais próximo do máximo do que o caso com gradiente de pressão favorável.

Para camada limite sem gradiente de pressão ($m = 0$), o resultado de Rogenski apresentado em sua Figura 4, está de acordo com os resultados do presente estudo. O valor de Λ que possui o maior crescimento $\Lambda = 250$ é o mais próximo de $\Lambda_{max} = 212$ identificado aqui. O crescimento do vórtice com comprimento de onda $\Lambda = 100$ é menor do que o crescimento do vórtice com $\Lambda = 150$, uma vez que $\Lambda = 150$ está mais próximo de $\Lambda = 212$. Pelo mesmo motivo, o crescimento de $\Lambda = 350$ é maior do que o crescimento de $\Lambda = 450$.

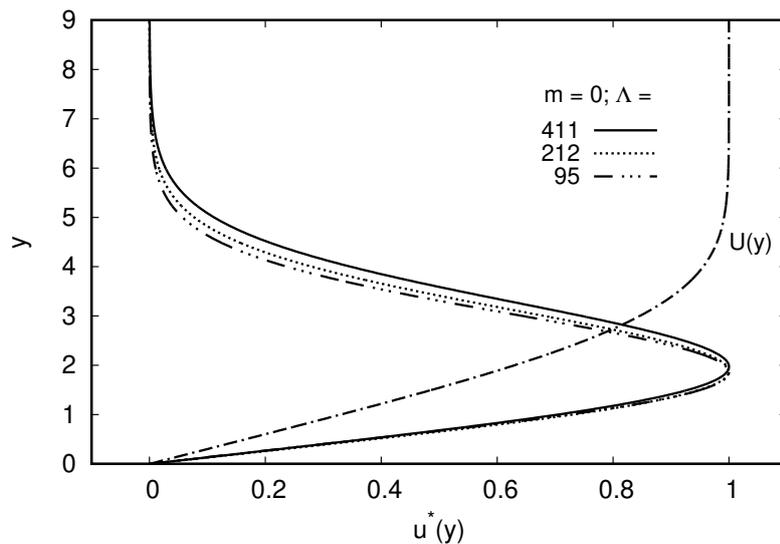
5.6 O campo de velocidades

O que se espera como resultado da presença dos vórtices de Görtler são variações significativas na distribuição de velocidades. No entanto, é preciso entender as relações entre comprimento de onda e espessura da camada limite expostos a diferentes gradientes de pressão, assim como as propriedades de campo em si sob tais condições. Com a finalidade de aprofundar estas relações e obter maiores informações do campo de velocidades, foram estudados diversos comprimentos de onda passando por aquele que fornece a maior taxa de crescimento. Este conjunto de valores de Λ foram investigados partindo de um gradiente de pressão neutro seguindo-se de um favorável ($m = 0,9$) e um outro adverso ($m = -0,09$).

O perfil da velocidade de perturbação $u^*(y)$ e o perfil de Blasius são apresentados na Fig. 5.18. Os demais perfis de $u^*(y)$ e de seus respectivos escoamentos base $U(y)$ para os gradientes de pressão investigados podem ser vistos nas Figuras 5.19 e 5.20. Nelas é possível visualizar as diferenças entre a espessura camada limite $\delta(U)$

e a espessura da velocidade de perturbação $\delta(u^*)$. A espessura da camada limite pode ser entendida como a posição y acima da parede onde o escoamento base U possui 99% da velocidade do escoamento externo U_e . A espessura da perturbação representa a posição y acima da parede onde u^* decaiu 99%, uma vez que u^* decai exponencialmente longe da parede. O mesmo comportamento é observado para as componentes v^* e w^* . Da Fig. 5.18 observa-se que a medida que o comprimento de onda é reduzido a espessura da perturbação $\delta(u^*)$ tende a ficar menos espessa. Comportamento análogo é observado para escoamentos sujeitos a um gradiente favorável (Fig. 5.19) ou a um adverso (Fig. 5.20). Na Figura 5.19 o perfil do escoamento base $U(y)$ se mostra mais achatado e de espessura menor quando comparado ao perfil base da Fig. 5.18. O contrário é observado no perfil distorcido de $U(y)$ referenciado na Fig. 5.20.

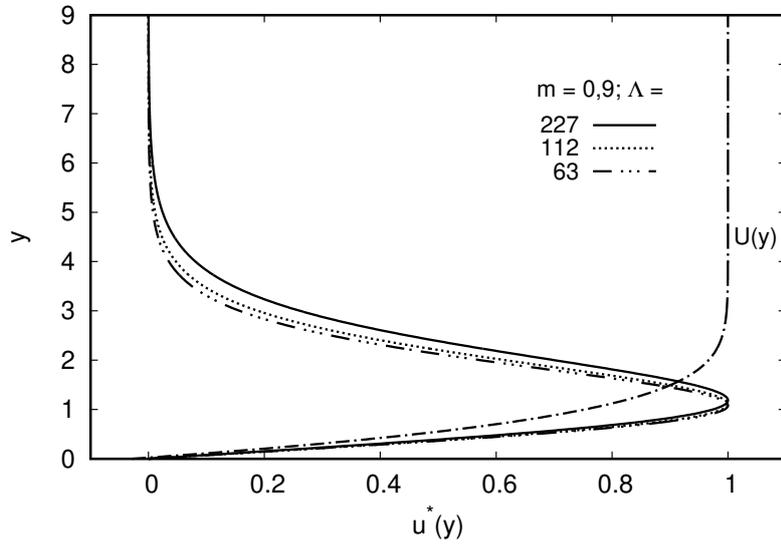
Figura 5.18 - Distribuição da velocidade longitudinal em função da coordenada normal para $m = 0$.



Fonte: Produção do autor.

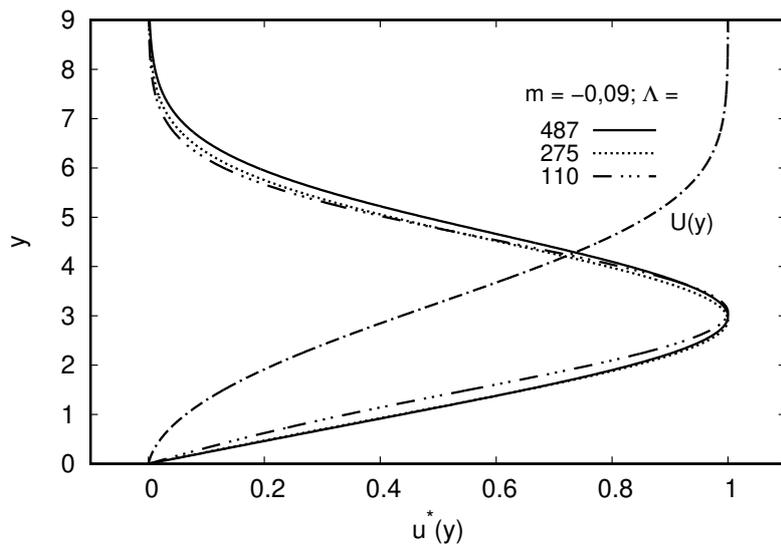
As Tabelas 5.6, 5.7 e 5.8 reúnem informações acerca da variação da espessura da velocidade de perturbação $\delta(u^*)$ com Λ e da espessura camada limite $\delta(U)$, esta última independente do comprimento de onda estudado. Nota-se que para um dado m , $\delta(u^*)$ varia pouco com Λ e λ explicando a proximidade das curvas de Λ destacadas nas Figs. 5.18, 5.19 e 5.20. Apesar disso, atenta-se ao fato de $\delta(u^*)$ variar significativamente com mudanças no gradiente de pressão.

Figura 5.19 - Distribuição da velocidade longitudinal em função da coordenada normal para $m = 0,9$.



Fonte: Produção do autor.

Figura 5.20 - Distribuição da velocidade longitudinal em função da coordenada normal para $m = -0,09$.



Fonte: Produção do autor.

Tabela 5.6 - Variação da espessura de uma perturbação $\delta(u^*)$ para $m = 0$ em $Go = 7$ para diversos comprimentos de onda.

$\delta(U)$	$\delta(u^*)$	Λ	λ
4,9104	6,6743	411	15,10
:	6,4512	285	11,83
:	6,2928	212	9,73
:	6,0984	134	7,17
4,9104	6,0192	95	5,68

Tabela 5.7 - Variação da espessura de uma perturbação $\delta(u^*)$ para um gradiente de pressão favorável ($m = 0,9$) em $Go = 7$ para diversos comprimentos de onda.

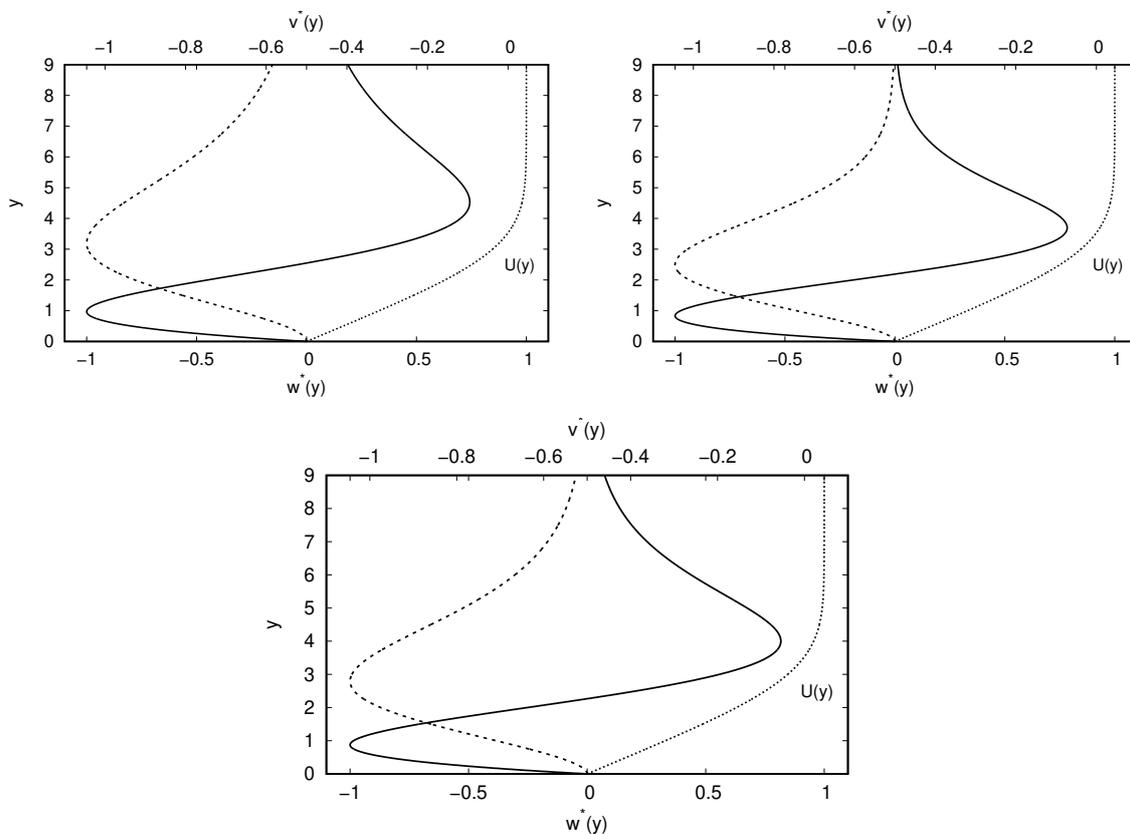
$\delta(U)$	$\delta(u^*)$	Λ	λ
2,4912	5,7384	227	10,18
:	5,4144	166	8,26
:	5,0976	112	6,34
:	4,9176	82	5,15
2,4912	4,8240	63	4,33

Tabela 5.8 - Variação da espessura de uma perturbação $\delta(u^*)$ para um gradiente de pressão adverso ($m = -0,09$) em $Go = 7$ para diversos comprimentos de onda.

$\delta(U)$	$\delta(u^*)$	Λ	λ
6,8976	8,0712	487	16,91
:	7,8696	325	12,92
:	7,7904	275	11,55
:	7,6032	162	8,12
6,8976	7,5816	110	6,26

O campo de velocidades pode ser complementado pelas informações contidas na Figuras 5.21, 5.22 e 5.23. Nelas apresentam-se os perfis das velocidades de perturbação $v^*(y)$ e $w^*(y)$ juntamente aos correlatos perfis $U(y)$. Observa-se que a medida que comprimento de onda cresce, mais espessa se torna $\delta(v^*)$ e $\delta(w^*)$. O quão grande ou pequena é esta variação depende também do valor de m . Gradientes positivos (Fig. 5.22) tendem a uma espessura δ menor do que aqueles negativos (Fig. 5.22).

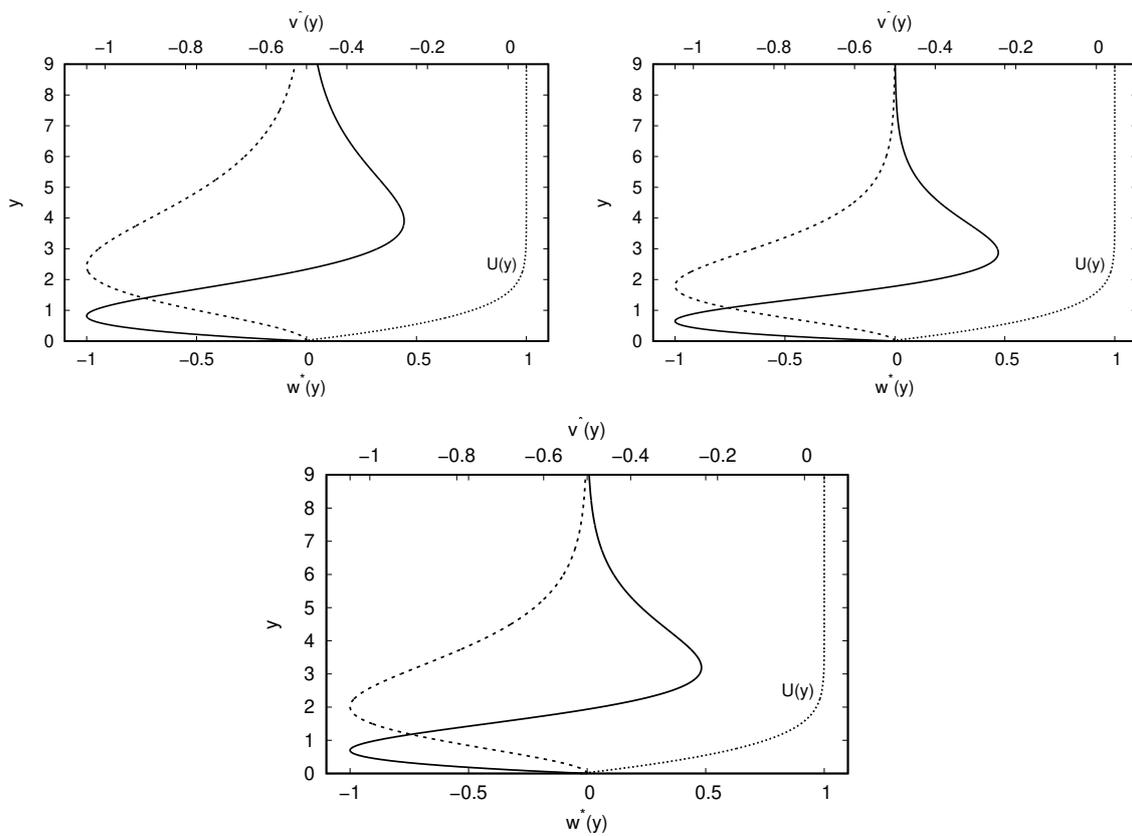
Figura 5.21 - Perfis de velocidade no plano transversal e normal com $m = 0$ para diferentes comprimentos de onda. À direita $\Lambda = 411$, à esquerda $\Lambda = 95$ e no centro $\Lambda_{m\acute{a}x} = 212$.



Fonte: Produção do autor.

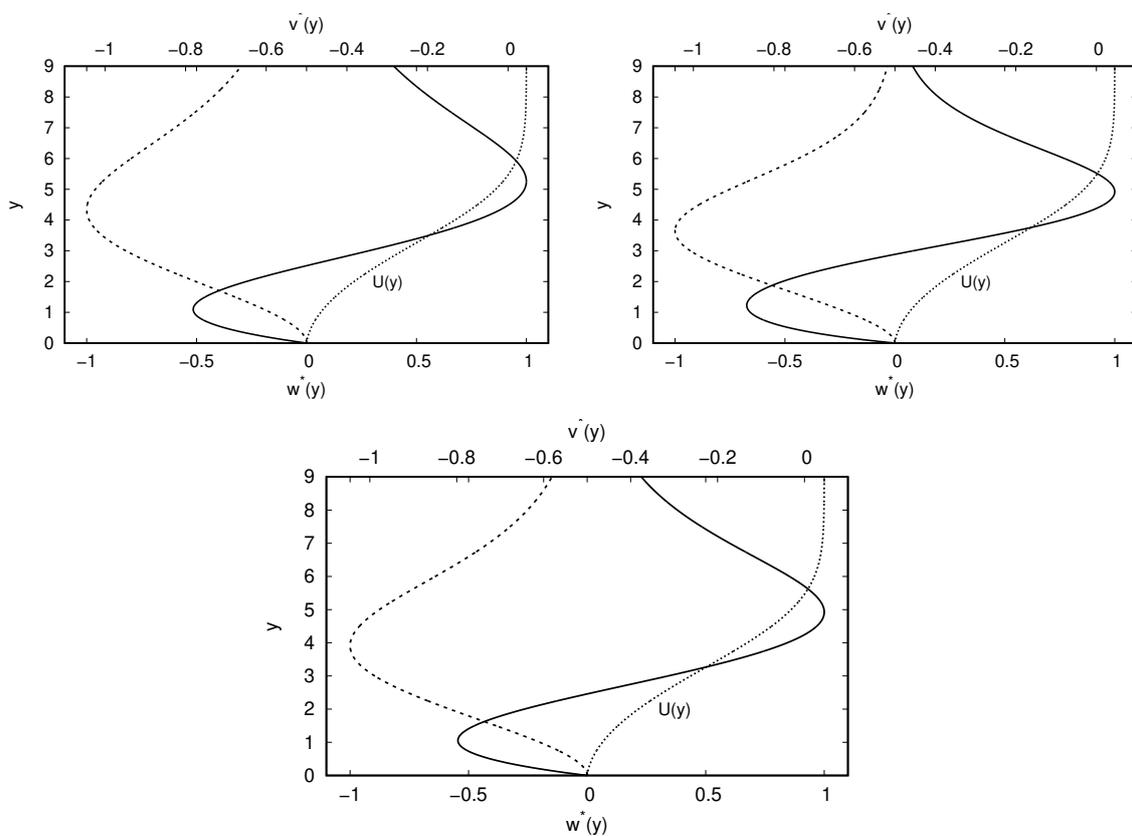
Isolinhas de velocidade no plano yz são apresentadas nas Figuras 5.24, 5.25 e 5.26 para os valores de $m = 0$, $m = 0,9$ e $m = -0,09$ nesta ordem. As isolinhas de velocidade $u^*(y, z)$ formam esferas de diâmetros distintos onde à direita das figuras estão posicionadas as isolinhas de valor positivo em ordem crescente. A menor representa $u^* = 0,2$ seguidas de $u^* = 0,4; 0,6$ e $0,8$. À esquerda tem-se aquelas de valor negativo de u^* seguindo a ordem da menor esfera $(-0,8)$ para a maior $(-0,2)$ variando-se de $-0,2$. Percebe-se que apesar das alturas das isolinhas não variarem muito com o comprimento de onda para um dado m , elas se modificam a medida que gradiente muda. Para $m = 0,9$ as isolinhas são deslocadas para baixo apresentando uma configuração de menor espessura $\delta(u^*)$ (Fig. 5.25), enquanto que para $m = -0,09$ são deslocadas para cima (Fig. 5.26) tomando por base o comportamento do escoamento com gradiente de pressão neutro observado na Fig. 5.24.

Figura 5.22 - Perfis de velocidade no plano transversal e normal com $m = 0,9$ para diferentes comprimentos de onda. À direita $\Lambda = 227$, à esquerda $\Lambda = 63$ e no centro $\Lambda_{m\acute{a}x} = 112$.



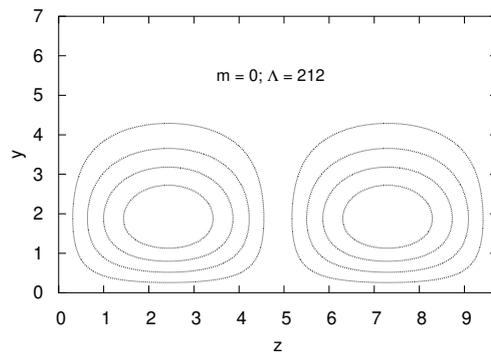
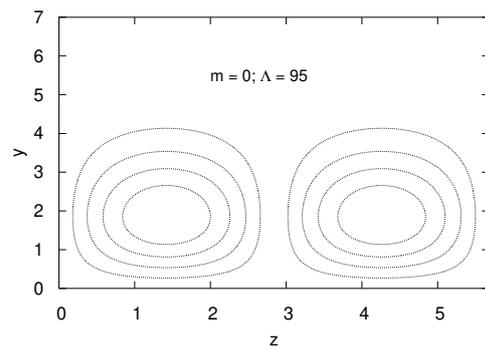
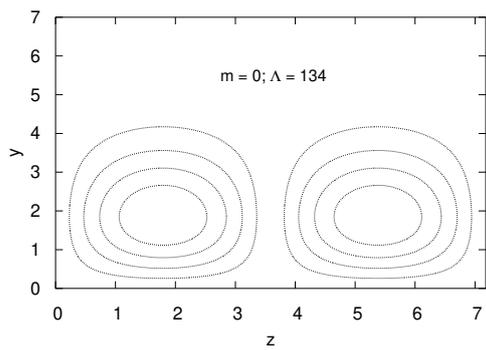
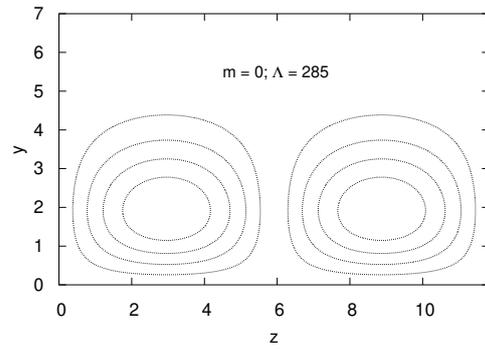
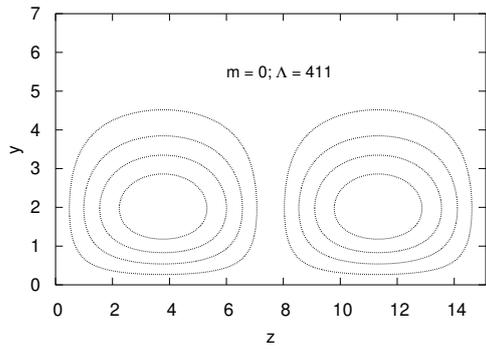
Fonte: Produção do autor.

Figura 5.23 - Perfis de velocidade no plano transversal e normal com $m = -0,09$ para diferentes comprimentos de onda. À direita $\Lambda = 487$, à esquerda $\Lambda = 110$ e no centro $\Lambda_{m\acute{a}x} = 275$.



Fonte: Produção do autor.

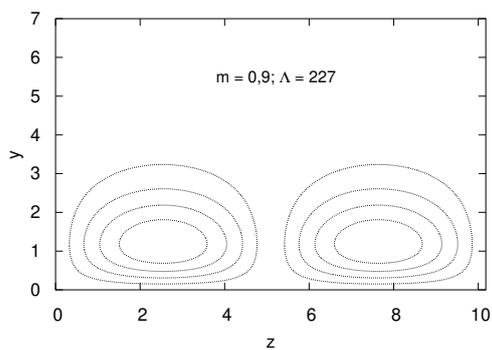
Figura 5.24 - Isolinhas de velocidade no plano yz para um gradiente de pressão neutro. (A) e (B) comprimentos de onda posicionados à esquerda do comprimento de onda de maior crescimento. (C) e (D) comprimentos de onda posicionados à direita. (E) comprimento de onda de maior crescimento.



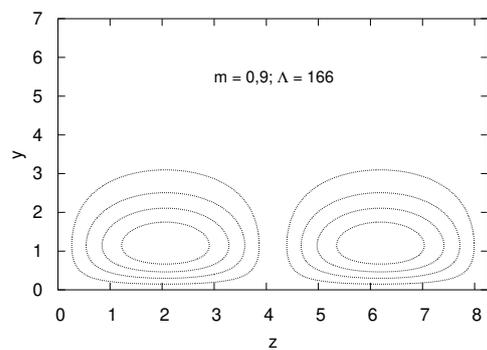
(E)

Fonte: Produção do autor.

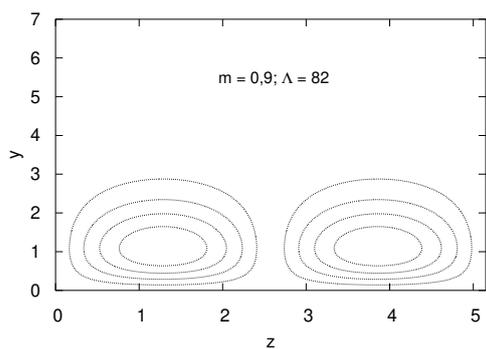
Figura 5.25 - Isolinhas de velocidade no plano yz para o gradiente de pressão favorável $m = 0,9$. (A) e (B) comprimentos de onda posicionados à esquerda do comprimento de onda de maior crescimento. (C) e (D) comprimentos de onda posicionados à direita. (E) comprimento de onda de maior crescimento.



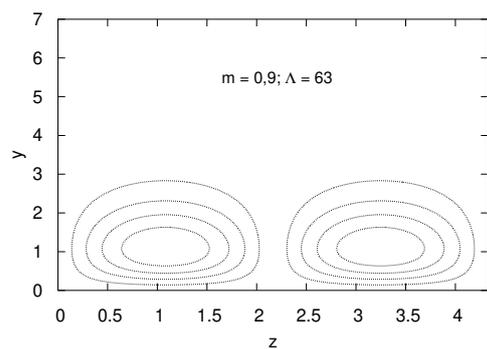
(A)



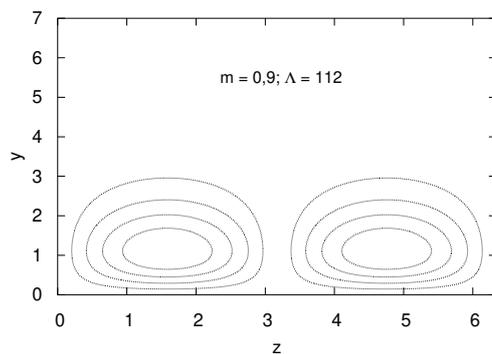
(B)



(C)



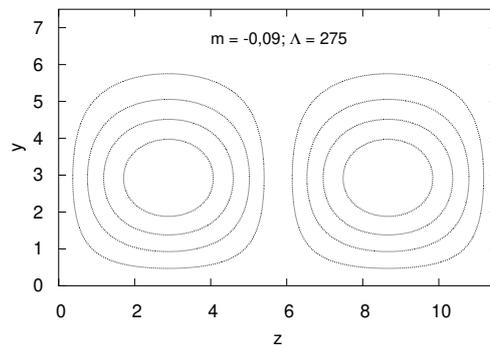
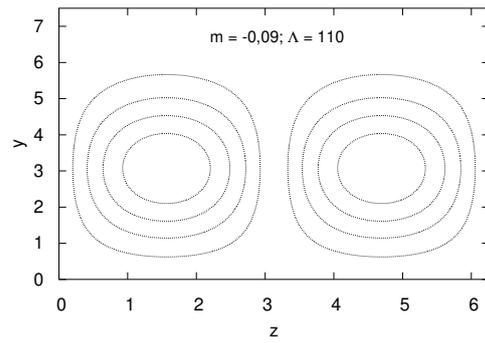
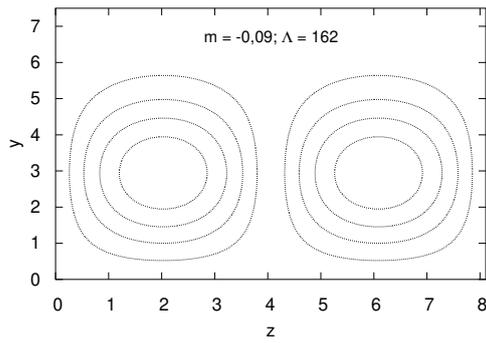
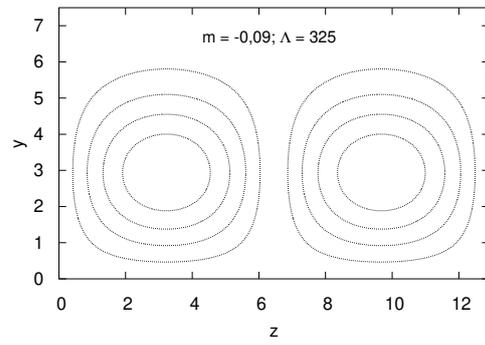
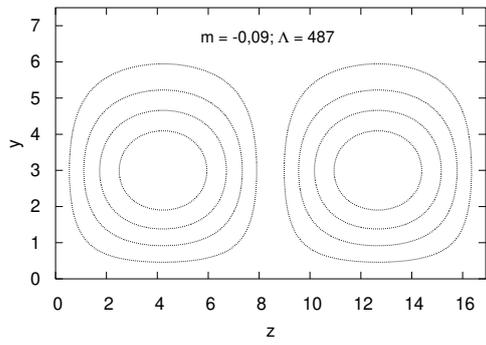
(D)



(E)

Fonte: Produção do autor.

Figura 5.26 - Isolinhas de velocidade no plano yz para o gradiente de pressão adverso $m = -0,09$. (A) e (B) comprimentos de onda posicionados à esquerda do comprimento de onda de maior crescimento. (C) e (D) comprimentos de onda posicionados à direita. (E) comprimento de onda de maior crescimento.



(E)

Fonte: Produção do autor.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS FUTURAS

O presente trabalho apresentou um estudo sobre os efeitos do gradiente de pressão no desenvolvimento dos vórtices de Görtler em camadas limite sobre superfícies côncavas. O estudo numérico foi conduzido baseado na teoria de estabilidade linear, que mostrou-se uma ferramenta poderosa, quando respeitado os limites de aplicabilidade da teoria, i.e., a teoria produz resultados consistentes para números de Görtler acima de 7.

Num primeiro momento, foram estendidos os resultados disponíveis na literatura, produzindo diagramas de estabilidade para valores do parâmetro de aceleração da solução de similaridade de Falkner-Skan m variando de gradientes de pressão favoráveis a adversos e comparando-os com o diagrama de estabilidade para camada limite de Blasius. Os resultados mostraram o efeito desestabilizante do gradiente de pressão adverso e o efeito estabilizante do gradiente de pressão favorável, reforçando as conclusões obtidas em pesquisas prévias. Ademais, observou-se que as curvas de taxas de amplificação constante são deslocadas para cima ou para baixo no diagrama de estabilidade dependendo do gradiente de pressão imposto, de modo que as maiores taxas de amplificação são encontradas tardiamente a jusante para escoamentos sujeitos a gradientes de pressão favoráveis ou mais cedo a montante para gradientes de pressão adversos. As taxas de amplificação na direção do escoamento mostradas aumentam com a diminuição do gradiente de pressão favorável ou incremento do gradiente de pressão adverso.

O principal foco deste trabalho e por consequência, a maior contribuição, refere-se a determinação do comprimento de onda transversal $\Lambda_{máx}$ correspondente à perturbação que tem maior amplificação. Uma gama de parâmetros de aceleração de Falkner-Skan foram investigados e os valores de $\Lambda_{máx}$ identificados. Os efeitos do gradiente de pressão no desenvolvimento dos vórtices de Görtler relatados em pesquisas anteriores foram complementados, investigando-se a relação entre gradiente de pressão e o comprimento de onda correspondente à maior amplificação a jusante.

Entretanto, o tema está longe de estar fechado. Espera-se como continuidade do presente estudo, expandir as análises das propriedades de campo para a metodologia apresentada. Acrescer análises sobre o campo de velocidades nos planos yz , xz e/ou o comportamento de p melhorará a compreensão do desenvolvimento e evolução dos vórtices de Görtler.

Como visto no Cap. 1, diversos pesquisadores tem usado a simulação numérica di-

reta para aprofundar o tema. O DNS apesar de permitir a análise dos estágios mais adiantados do processo de transição o faz a um custo computacional muito alto limitando os estudos a poucos casos. Pretende-se assim, dar continuidade aos estudos realizados por Rogenski et al. (2013), Rogenski (2015), Rogenski et al. (2016a), Rogenski et al. (2016b), mas utilizando-se um modelo bem menos custoso, em termos de recursos computacionais, como o modelo dado pelas equações de estabilidade parabolizadas (PSE), com o objetivo de aprofundar as análises realizadas, permitindo uma maior variação dos parâmetros de influência do problema.

O modelo PSE, considera o histórico do escoamento, permitindo a inclusão de efeitos de crescimento da camada limite, levando em consideração que a mesma é não paralela. O modelo PSE já foi utilizado anteriormente por Mendonça (1997), Mendonça et al. (2000) no estudo da interação entre vórtices de Görtler e ondas de Tollmien-Schlichting e evita as limitações do modelo de solução de instabilidade local por modos normais, que a rigor não estão corretos para uma determinada faixa de condições de escoamento, faixa esta em que o crescimento dos vórtices é da mesma ordem que o crescimento da camada limite. Portanto, os resultados aqui obtidos serão utilizados como condição inicial na formulação PSE.

Outro ponto de futuras investigações, parte dos resultados para o desenvolvimento não linear dos vórtices de Görtler obtidos por Matsson (2008), confirmados e ampliados pelos trabalhos desenvolvidos a alguns anos pelo grupo de Souza. Os resultados da presente investigação associados a uma formulação PSE direcionada ao estudo da evolução não-linear dos vórtices de Görtler, apresenta um potencial interessante para fornecer um mapa mais completo do entendimento do fenômeno de saturação dos vórtices.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABBAS, A.; VICENTE, J. de; VALERO, E. Aerodynamic technologies to improve aircraft performance. **Aerospace Science and Technology**, v. 28, p. 100–132, 2013. 1

BOIKO, A. V.; DOVGAL, A. V.; GREK, G. R.; KOZLOV, V. V. **Physics of transitional shear flows**. [S.l.]: Springer-Verlag, 2012. (Fluid Mechanics and Its Applications). 2

BOTTARO, A.; LUCHINI, P. Görtler vortices: are they amenable to local eigenvalue analysis? **European Journal of Mechanics B/Fluids**, v. 18, n. 1, p. 47–65, 1999. 31, 58

CHARRU, F. **Hydrodynamic instabilities**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2011. (Cambridge Texts in Applied Mathematics). 2

CHENEY, W.; KINCAID, D. **Linear algebra: theory and applications**. [S.l.]: Jones and Bartlett, 2009. 544–558 p. 45

CHOSSAT, P.; IOOSS, G. **The Couette-Taylor problem**. [S.l.]: Springer-Verlag, 1994. (Applied Mathematical Sciences 102). 4

CURRIE, I. G. **Fundamental mechanics of fluids**. 3. ed. [S.l.]: McGraw-Hill, 2003. (Mechanical Engineering). 3, 24

DRAZIN, P. G.; REID, W. H. **Hydrodynamic stability**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1981. 4

DUTZ, S.; HAYDEN, M.; SCHAAP, A.; STOEBER, B.; HÄFELI, U. O. A microfluidic spiral for size-dependent fractionation of magnetic microspheres. **Journal of Magnetism and Magnetic Materials**, v. 324, p. 3791–3798, 2012. 5

FINNIS, M. V.; BROWN, A. The streamwise development of görtler vortices in a favorable pressure gradient. In: INTERNATIONAL GAS TURBINE AND AEROENGINE CONGRESS AND EXPOSITION, 1994. **Proceedings...** Netherlands: ASME, 1994. (ASME paper 94-GT-166), p. 1–13. 11

FJØRTOFT, R. Application of integral theorems in deriving criteria of stability for laminar flows and for the baroclinic circular vortex. **Geofysiske Publikasjoner**, v. 17, p. 1–52, 1950. 2

FLORYAN, J. M. On the Görtler instability of boundary layers. **Progress in Aerospace Sciences**, v. 28, p. 235–271, 1991. 7, 9, 19, 21, 29, 31

FLORYAN, J. M.; SARIC, W. S. Stability of görtler vortices in boundary layers with suction. In: AIAA FLUID AND PLASMA DYNAMICS CONFERENCE, 12., 1979. **Proceedings...** Williamsburg, Virginia: AIAA, 1979. (AIAA paper 79-1497). 10

_____. Stability of görtler vortices in boundary layers. **AIAA Journal**, v. 20, p. 316–324, 1982. 7, 28

GÖRTLER, H. Instabilität laminarer grenzsichten an konkaven wänden gegenüber gewissen dreidimensionalen störungen. **ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik**, v. 21, p. 250–252, 1941. 6, 7

GOULPIÉ, P.; KLINGMANN, B. G. B.; BOTTARO, A. Görtler vortices in boundary layers with streamwise pressure gradient: Linear theory. **Physics of Fluids**, v. 8, p. 451–459, 1996. 10, 11, 15, 24, 54, 55, 56, 68

HALL, P. The linear development of Görtler vortices in growing boundary layers. **Journal of Fluid Mechanics**, v. 130, p. 41–58, 1983. 31

_____. Görtler vortices in growing boundary layer: the leading edge receptivity problem, linear growth and the nonlinear breakdown state. **Mathematika**, v. 37, n. 74, p. 151–189, 1990. 7

HAN, J.-C.; DUTTA, S.; EKKAD, S. **Gas turbine heat transfer and cooling technology**. 2. ed. [S.l.]: CRC Press, Taylor and Francis, 2013. 1

HOWARD, L. N. Note on a paper of john w. miles. **Journal of Fluid Mechanics**, Cambridge University Press, v. 10, n. 4, p. 509–512, 1961. 2

ITOH, N. A non-parallel theory for görtler instability of falkner-skan boundary layers. **Fluid Dynamics Research**, v. 28, p. 383–396, 2001. 12

KOSCHMIEDER, E. L. **Bérnard cells and Taylor vortices**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1993. (Cambridge Monographs on Mechanics and Applied Mathematics). 5

MANGALAM, S. M.; DAGENHART, J. R.; HEPNER, T. E.; MEYERS, J. F. The görtler instability on an airfoil. In: AIAA AEROSPACE SCIENCES

MEETING AND EXHIBIT, 23., 1985. **Proceedings...** Reno, Nevada: AIAA, 1985. (AIAA paper 85-0491), p. 1–23. [11](#), [13](#)

MATSSON, O. J. E. Görtler vortices in falkner-skam flows with suction and blowing. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, v. 56, p. 257–277, 2008. [xix](#), [12](#), [13](#), [68](#), [69](#), [82](#)

MÉNDEZ, M.; SHADLOO, M. S.; HADJADJ, A.; DUCOIN, A. Boundary layer transition over a concave surface caused by centrifugal instabilities. **Computers & Fluids**, v. 171, p. 35–153, 2018. [14](#), [15](#)

MENDONÇA, M. T. **Numerical analysis of Görtler vortices /Tollmien-Schlichting waves interaction with a spatial nonparallel model**. Tese (Doutorado) — The Pennsylvania State University, Old Main, 1997. [21](#), [82](#)

MENDONÇA, M. T.; MORRIS, P. J.; PAULEY, L. L. Interaction between Görtler vortices and two-dimensional Tollmien-Schlichting waves. **Physics of Fluids**, v. 12, n. 6, p. 1461–1471, 2000. [28](#), [37](#), [39](#), [82](#)

MITSUDHARMADI, H.; WINOTO, S. H.; SHAH, D. A. Development of most amplified wavelength görtler. **Physics of Fluids**, v. 18, p. 1–12, 1993. [10](#)

MOSER, K. W.; RAGUIN, L. G.; HARRIS, A.; MORRIS, H. D.; GEORGIADIS, J.; SHANNON, M.; PHILPOTT, M. Visualization of Taylor-Couette and spiral poiseuille flows using a snapshot flash spatial tagging sequence. **Magnetic Resonance Imaging**, v. 18, p. 199–207, 2000. [4](#)

OTTO, S. R.; DENIER, J. P. **The effect of crossflow on Görtler vortices**. [S.l.: s.n.], 1993. [11](#)

RAGAB, S. A.; NAYFEH, A. H. Görtler instability. **Physics of Fluids**, v. 24, n. 8, p. 1405–1417, 1981. [10](#), [11](#), [35](#)

RAYLEIGH, L. On the stability, or instability, of certain fluid motions. **Proceedings of the London Mathematical Society**, v. 11, p. 57–70, 1880. [2](#)

_____. On the convective currents in a horizontal layer of fluid when the higher temperature is on the under side. **Philosophical Magazine**, v. 32, p. 529–546, 1916. [2](#)

_____. On the dynamics of revolving fluids. **Proceedings of the Royal Society A**, v. 93, n. 648, p. 148–154, 1917. [2](#)

- ROGENSKI, J. K. **Influência do gradiente de pressão na transição em escoamentos sobre superfícies côncavas**. Tese (Doutorado em Ciências da Computação e Matemática Computacional) — Universidade de São Paulo, São Carlos, 2015. 13, 15, 82
- ROGENSKI, J. K.; SOUZA, L. F. de; FLORYAN, J. M. Influence of curvature variations on the primary instability development in boundary layer flow. In: INTERNATIONAL CONGRESS OF MECHANICAL ENGINEERING, 22., 2013. **Proceedings...** Ribeirão Preto, SP: COBEM, 2013. 13, 15, 82
- _____. Influence of pressure gradients on the evolution of the görtler instability. **AIAA Journal**, v. 54, n. 9, p. 2914–2919, 2016. xix, 13, 14, 15, 59, 69, 70, 71, 82
- _____. Non-linear aspects of görtler instability in boundary layers with pressure gradient. **Physics of Fluids**, v. 28, n. 124107, p. 1–15, 2016. 13, 14, 15, 82
- SARIC, W. S. Görtler vortices. **Annual Review of Fluid Mechanics**, v. 26, p. 379–409, 1994. 7, 9, 54, 55
- SCHLICHTING, H. **Boundary layer theory**. [S.l.]: McGraw Hill, 1979. 817 p. 24, 38
- SCHMID, P. J.; HENNINGSON, D. S. **Stability and transition in shear flows**. [S.l.]: Springer-Verlag, 2001. (Applied Mathematical Sciences). 1
- SCHRADER, L.; BRANDT, L.; ZAKI, T. A. Receptivity, instability and breakdown of görtler flow. **Journal of Fluid Mechanics**, v. 682, p. 362–396, 2011. 10
- SESCU, A.; THOMPSON, D. On the excitation of görtler vortices by distributed roughness elements. **Theoretical and Computational Fluid Dynamics**, v. 29, p. 67–92, 2015. 10
- SILVEIRA NETO, A. da; MANSUR, S. S. Turbulência. In: SILVEIRA NETO, A. DA; MANSUR, S. S.; SILSVESTRINI, J. H. (EDS.). **II Escola de Primavera de Transição e Turbulência**. Uberlândia: ABCM, 2000. v. 2, p. 246–304. 2, 6, 29
- SMITH, A. M. O.; GAMBERONI, N. **Transition, pressure gradient and stability theory**. [S.l.: s.n.], 1956. 10
- SOUZA, L. F. **Instabilidade centrífuga e transição para turbulência em escoamentos laminares sobre superfícies côncavas**. Tese (Doutorado em

Engenharia Aeronáutica e Mecânica) — Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, 2003. 10

SOUZA, L. F. de; MENDONÇA, M. T. de; MEDEIROS, M. A. F. de; KLOKER, M. Seeding of görtler vortices through a suction and blowing strip. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, v. 26, n. 3, p. 269–279, 2004. 9

SWEARINGEN, J. D.; BLACKWELDER, R. F. The growth and breakdown of streamwise vortices in the presence of a wall. **Journal of Fluid Mechanics**, v. 182, p. 255–290, 1987. 32

THOLE, K. A. Airfoil endwall heat transfer. In: DENNIS, R. (Ed.). **The gas turbine handbook**. Morgantown, US: U.S. Department of Energy, 2006. p. 353–363. 5

WHITE, F. M. **Viscous fluid flow**. [S.l.]: McGraw-Hill, 1974. 24

ZHANG, H.; FASEL, H. Spatial direct numerical simulation of Görtler vortices. In: AIAA FLUID DYNAMICS CONFERENCE, 1999. **Proceedings...** Norfolk, USA, 1999. 10

ANEXO A - OBTENÇÃO DOS AUTOVALORES E AUTOVETORES NA REGIÃO EXTERNA DA CAMADA LIMITE

A seguir é detalhada a metodologia empregada no que tange à obtenção da solução do sistema matricial (Eq. 4.2), que longe da região cisalhante, após as considerações apresentadas na Seção 4.2, foi reduzido a um sistema de EDO's com coeficientes constantes. Sendo assim, os autovalores e autovetores associados a este sistema podem ser obtidos como se segue.

A.1 Autovalores do operador $M : Y \rightarrow Y$ tal que $My = \lambda y$

Para obtenção dos autovalores, faz-se com que o determinante seja zero, na forma

$$\text{Det } |M - \lambda I| = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ (-\beta^2\alpha - \beta^4) & -\beta^2V & (2\beta^2 + \alpha) & V - \lambda & (-\beta^2V_x - 2\beta^2Go^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (\alpha + \beta^2) & V - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad ,$$

onde λ são os autovalores da matriz M , V é a componente da velocidade do escoamento base na direção normal, V_x é a derivada em relação a x e β , α e Go o número de onda, a taxa de amplificação e o número de Görtler, respectivamente. Simplificando a notação acima tem-se,

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ A & B & C & V - \lambda & D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E & V - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad .$$

Tal que, aplicando o método dos cofatores, resulta o polinômio

$$\lambda^6 - 2V\lambda^5 + [V^2 - (E + C)]\lambda^4 + [V(E + C) - B]\lambda^3 + [EC + VB - A]\lambda^2 + [EB + VA]\lambda + EA = 0 \quad ,$$

onde

$$\begin{aligned} A &= -\beta^2\alpha - \beta^4 \quad , \\ B &= -\beta^2V \quad , \\ C &= 2\beta^2 + \alpha \quad , \\ D &= -\beta^2V_x - 2\beta^2Go \quad , \\ E &= \alpha + \beta^2 \quad , \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} E + C &= 3\beta^2 + 2\alpha \quad , \\ V(E + C) - B &= 3V\beta^2 + 2V\alpha + V\beta^2 \quad , \\ EC + VB - A &= 4\beta^2\alpha + \alpha^2 + 3\beta^4 - \beta^2V^2 \quad , \\ EB + VA &= -2\beta^2\alpha V - 2\beta^4V \quad , \\ EA &= -\beta^6 - \beta^2\alpha^2 - 2\beta^4\alpha \quad , \end{aligned}$$

que expandindo, obtêm-se o polinômio como apresentado na Eq. (A.1):

$$\begin{aligned} &+\lambda^6 - 2V\lambda^5 + [V^2 - 3\beta^2 - 2\alpha]\lambda^4 + [3V\beta^2 + 2V\alpha + V\beta^2]\lambda^3 \\ &+ [4\beta^2\alpha + \alpha^2 + 3\beta^4 - \beta^2V^2]\lambda^2 + [-2\beta^2\alpha V - 2\beta^4V]\lambda - \beta^6 - \beta^2\alpha^2 - 2\beta^4\alpha = 0 \quad . \end{aligned}$$

A.2 Raízes do polinômio característico

Pode-se mostrar que β e $-\beta$ são raízes, tal que podemos fatorar o polinômio na forma

$$(\lambda + \beta)(\lambda - \beta) = (\lambda^2 - \beta^2) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$(\lambda^2 - \beta^2)(A_1\lambda^4 + A_2\lambda^3 + A_3\lambda^2 + A_4\lambda + A_5) = 0 \quad ,$$

ou

$$\begin{aligned} & (A_1\lambda^6 + A_2\lambda^5 + A_3\lambda^4 + A_4\lambda^3 + A_5\lambda^2) - \\ & - (A_1\beta^2\lambda^4 + A_2\beta^2\lambda^3 + A_3\beta^2\lambda^2 + A_4\beta^2\lambda + A_5\beta^2) = 0 \quad . \end{aligned}$$

Agrupando os termos temos

$$\begin{aligned} & A_1\lambda^6 + A_2\lambda^5 + (A_3 - A_1\beta^2)\lambda^4 + (A_4 - A_2\beta^2)\lambda^3 + \\ & (A_5 - A_3\beta^2)\lambda^2 - A_4\beta^2\lambda - A_5\beta^2 = 0 \quad . \end{aligned}$$

Comparando com a Equação (A.1) temos

$$\begin{aligned} A_1 &= 1 \quad , \\ A_2 &= -2V \quad , \\ (A_3 - A_1\beta^2) &= (V^2 - 3\beta^2 - 2\alpha) \quad , \\ (A_4 - A_2\beta^2) &= (3V\beta^2 + 2V\alpha + V\beta^2) \quad , \\ (A_5 - A_3\beta^2) &= (4\beta^2\alpha + \alpha^2 + 3\beta^4 - \beta^2V^2) \quad , \\ -A_4\beta^2 &= (-2\beta^2\alpha V - 2\beta^4V) \quad , \\ -A_5\beta^2 &= -\beta^6 - \beta^2\alpha^2 - 2\beta^4\alpha \quad , \end{aligned}$$

ou, simplificando

$$\begin{aligned}A_1 &= 1 \quad , \\A_2 &= -2V \quad , \\A_3 &= v^2 - 2(\beta^2 + \alpha) \quad , \\A_4 &= 2V(\beta^2 + \alpha) \quad , \\A_5 &= (\beta^2 + \alpha)^2 \quad ,\end{aligned}$$

que resulta no polinômio de quarto grau

$$\lambda^4 - 2V\lambda^3 + [V^2 - 2(\beta^2 + \alpha)]\lambda^2 + 2V(\beta^2 + \alpha)\lambda + (\beta^2 + \alpha)^2 = 0 \quad ,$$

cujas raízes são

$$\lambda = \frac{1}{2} \left[V + \sqrt{V^2 + 4(\alpha + \beta^2)} \right] \quad ,$$

$$\lambda = \frac{1}{2} \left[V - \sqrt{V^2 + 4(\alpha + \beta^2)} \right] \quad .$$

Essas raízes foram conferidas também utilizando-se um manipular algébrico ao fatorar o polinômio

$$\left[(\beta^2 + \alpha) + (V - \lambda)\lambda \right]^2 = 0 \quad .$$

A.3 Autovetores associados

Autovetor de $-\beta$

Tem-se para o autovalor $-\beta$, o autovetor Y_1

$$Y_1 = Y_I e^{-\beta\eta} \quad ,$$

$$\begin{pmatrix} \beta & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 1 & 0 & 0 \\ -\beta^2(\beta^2 + \alpha) & -\beta^2 V & (2\beta^2 + \alpha) & V + \beta & -\beta^2(V_x + 2Go^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (\beta^2 + \alpha) & V + \beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \\ y_9 \end{pmatrix} = 0 \quad ,$$

$$\begin{aligned} \beta y_4 + y_5 &= 0 \quad , \\ \beta y_5 + y_6 &= 0 \quad , \\ \beta y_6 + y_7 &= 0 \quad , \\ -\beta^2(\beta^2 + \alpha) y_4 - \beta^2 V y_5 + (2\beta^2 + \alpha) y_6 + (V + \beta) y_7 - \beta^2(V_x + 2Go^2) y_8 &= 0 \quad , \\ \beta y_8 + y_9 &= 0 \quad , \\ (\beta^2 + \alpha) y_8 + (V + \beta) y_9 &= 0 \quad , \end{aligned}$$

tal que

$$\begin{aligned} -\beta^2(\beta^2 + \alpha) y_4 + \beta^3 V y_4 + (2\beta^2 + \alpha) \beta^2 y_4 - (V + \beta) \beta^3 y_4 - \beta^2(V_x + 2Go^2) y_8 &= 0 \quad , \\ \beta y_8 + y_9 &= 0 \quad , \\ (\beta^2 + \alpha) y_8 + (V + \beta) y_9 &= 0 \quad . \end{aligned}$$

Tomando-se $y_8 = y_9 = 0$, tal que $y_4 = 1$, resulta

$$\begin{pmatrix} \beta & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta^2(\beta^2 + \alpha) & -\beta^2 V & (2\beta^2 + \alpha) & V + \beta & -\beta^2(V_x + 2Go^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -\beta \\ \beta^2 \\ -\beta^3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\therefore Y_I = \begin{pmatrix} 1 \\ -\beta \\ \beta^2 \\ -\beta^3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Autovetor de λ

Para o autovalor

$$\lambda = \frac{1}{2} \left[V - \sqrt{V^2 + 4(\alpha + \beta^2)} \right] ,$$

o autovetor Y_2 resulta

$$Y_2 = Y_{II} e^{\lambda \eta} .$$

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ (-\beta^2\alpha - \beta^4) & -\beta^2V & (2\beta^2 + \alpha) & V - \lambda & (-\beta^2V_x - 2\beta^2Go^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (\alpha + \beta^2) & V - \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \\ y_9 \end{pmatrix} = 0 \quad ,$$

$$\begin{aligned} -\lambda y_4 + y_5 &= 0 \quad , \\ -\lambda y_5 + y_6 &= 0 \quad , \\ -\lambda y_6 + y_7 &= 0 \quad , \\ -\beta^2(\beta^2 + \alpha)y_4 - \beta^2Vy_5 + (2\beta^2 + \alpha)y_6 + (V - \lambda)y_7 - \beta^2(V_x + 2Go^2)y_8 &= 0 \quad , \\ -\lambda y_8 + y_9 &= 0 \quad , \\ (\beta^2 + \alpha)y_8 + (V - \lambda)y_9 &= 0 \quad . \end{aligned}$$

Tomando $y_8 = y_9 = 0$, resulta para a quarta equação

$$\left[-\beta^2(\beta^2 + \alpha) - \beta^2V\lambda + (2\beta^2 + \alpha)\lambda^2 + (V - \lambda)\lambda^3 \right] y_4 = 0 \quad .$$

Para $\lambda = \frac{1}{2} \left[V - \sqrt{V^2 + 4(\beta^2 + \alpha)} \right]$, resulta $0 = 0$, de acordo com a manipulação simbólica em <https://www.wolframalpha.com>, mostrando que a quarta equação é combinação linear das três primeiras.

Tomando $y_4 = 1$, resulta

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ -\beta^2(\beta^2 + \alpha) & -\beta^2 V & (2\beta^2 + \alpha) & V - \lambda & -\beta^2(V_x + 2Go^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \lambda^3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\therefore Y_{II} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \lambda^3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Autovetor da raiz repetida λ

O terceiro autovalor é raiz múltipla idêntica ao segundo autovetor. Deve-se buscar soluções para Y_3 na forma

$$Y_3 = Y_{II} \eta e^{\lambda \eta} + Y_{III} e^{\lambda \eta} ,$$

onde o vetor Y_{III} é solução do sistema algébrico linear não homogêneo

$$[M - \lambda I] Y_{III} = Y_{II} .$$

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ (-\beta^2\alpha - \beta^4) & -\beta^2V & (2\beta^2 + \alpha) & V - \lambda & (-\beta^2V_x - 2\beta^2Go^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (\alpha + \beta^2) & V - \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \\ y_9 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \lambda^3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} -\lambda y_4 + y_5 &= 1, \\ -\lambda y_5 + y_6 &= \lambda, \\ -\lambda y_6 + y_7 &= \lambda^2, \\ -\beta^2(\beta^2 + \alpha)y_4 - \beta^2Vy_5 + (2\beta^2 + \alpha)y_6 + (V - \lambda)y_7 - \beta^2(V_x + 2Go^2)y_8 &= \lambda^3, \\ -\lambda y_8 + y_9 &= 0, \\ (\beta^2 + \alpha)y_8 + (V - \lambda)y_9 &= 0. \end{aligned}$$

Da quinta equação, $y_9 = \lambda y_8$ tal que,

$$(\beta^2 + \alpha)y_8 + (V - \lambda)\lambda y_8 = 0,$$

ou

$$(\beta^2 + \alpha) + (V - \lambda)\lambda = 0. \quad (\text{A.1})$$

Esta equação é consistente com a Eq. (3.8) (repetida abaixo)

$$u'' = (U\alpha + \beta^2 + U_x)u + U_y v + V u' \quad ,$$

onde, longe da camada cisalhante, se reduz a

$$u'' - (\alpha + \beta^2)u - V u' = 0 \quad ,$$

cuja solução é do tipo

$$u(\eta) = C \exp(\lambda\eta) \quad ,$$

e que gera a equação característica

$$\lambda^2 - V\lambda - (\alpha + \beta^2) = 0 \quad , \tag{A.2}$$

idêntica à Equação (A.1) e, portanto, a sexta equação do sistema de equações é idênticamente nula, $0 = 0$. Retornando ao sistema de equações

$$\begin{aligned} y_5 &= \lambda y_4 + 1 \quad , \\ y_6 &= \lambda^2 y_4 + 2\lambda \quad , \\ y_7 &= \lambda^3 y_4 + 3\lambda^2 \quad , \\ -\beta^2 (\beta^2 + \alpha) y_4 - \beta^2 V y_5 + (2\beta^2 + \alpha) y_6 + (V - \lambda) y_7 - \beta^2 (V_x + 2Go^2) y_8 &= \lambda^3 \quad , \\ -y_8 \lambda + y_8 \lambda &= 0 \quad , \\ (\beta^2 + \alpha) y_8 + (V - \lambda) y_8 \lambda &= 0 \quad , \end{aligned}$$

onde as duas últimas equações estão satisfeitas. Para os demais y_i , resulta

$$\begin{aligned} y_5 &= \lambda y_4 + 1 \quad , \\ y_6 &= \lambda^2 y_4 + 2\lambda \quad , \\ y_7 &= \lambda^3 y_4 + 3\lambda^2 \quad , \end{aligned}$$

$$-\beta^2 (\beta^2 + \alpha) y_4 - \beta^2 V y_5 + (2\beta^2 + \alpha) y_6 + (V - \lambda) y_7 - \beta^2 (V_x + 2Go^2) y_8 = \lambda^3 \quad .$$

Substituindo para y_4 , temos

$$\begin{aligned} -\beta^2 (\beta^2 + \alpha) y_4 - \beta^2 V (\lambda y_4 + 1) + (2\beta^2 + \alpha) (\lambda^2 y_4 + 2\lambda) + \\ (V - \lambda) (\lambda^3 y_4 + 3\lambda^2) - \beta^2 (V_x + 2Go^2) y_8 = \lambda^3 \quad . \end{aligned}$$

Resolvendo para y_4 ,

$$\begin{aligned} -\beta^2 (\beta^2 + \alpha) y_4 - \beta^2 V \lambda y_4 - \beta^2 V + (2\beta^2 + \alpha) \lambda^2 y_4 + (2\beta^2 + \alpha) 2\lambda \\ + (V - \lambda) \lambda^3 y_4 + (V - \lambda) 3\lambda^2 - \beta^2 (V_x + 2Go^2) y_8 = \lambda^3 \quad , \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} [-\beta^2 (\beta^2 + \alpha) - \beta^2 V \lambda + (2\beta^2 + \alpha) \lambda^2 + (V - \lambda) \lambda^3] y_4 \\ = \beta^2 V - (2\beta^2 + \alpha) 2\lambda - (V - \lambda) 3\lambda^2 + \beta^2 (V_x + 2Go^2) y_8 + \lambda^3 \quad . \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

O termo que multiplica y_4 é nulo

$$-\beta^2 (\beta^2 + \alpha) - \beta^2 V \lambda + (2\beta^2 + \alpha) \lambda^2 + (V - \lambda) \lambda^3 = 0 \quad ,$$

conforme verificação em <https://www.wolframalpha.com>. Desta forma é necessário optar por $y_4 = 0$ tal que a equação resulta

$$\beta^2 (V_x + 2Go^2) y_8 = -\beta^2 V + (2\beta^2 + \alpha) 2\lambda + (V - \lambda) 3\lambda^2 - \lambda^3 \quad \therefore$$

$$y_8 = \frac{-\beta^2 V + (2\beta^2 + \alpha) 2\lambda + (V - \lambda) 3\lambda^2 - \lambda^3}{\beta^2 (V_x + 2Go^2)} \quad . \quad (\text{A.4})$$

Para o sistema

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ (-\beta^2\alpha - \beta^4) & -\beta^2V & (2\beta^2 + \alpha) & V - \lambda & (-\beta^2V_x - 2\beta^2Go^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (\alpha + \beta^2) & V - \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \\ y_9 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \lambda^3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

resulta Y_{III} na forma

$$Y_{III} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2\lambda \\ 3\lambda^2 \\ y_8 \\ y_8\lambda \end{pmatrix}.$$

Utilizando y_8 dado acima, finalmente

$$Y_3 = Y_{II} \eta e^{\lambda\eta} + Y_{III} e^{\lambda\eta},$$

com

$$Y_{II} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \lambda^3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

PUBLICAÇÕES TÉCNICO-CIENTÍFICAS EDITADAS PELO INPE

Teses e Dissertações (TDI)

Teses e Dissertações apresentadas nos Cursos de Pós-Graduação do INPE.

Manuais Técnicos (MAN)

São publicações de caráter técnico que incluem normas, procedimentos, instruções e orientações.

Notas Técnico-Científicas (NTC)

Incluem resultados preliminares de pesquisa, descrição de equipamentos, descrição e ou documentação de programas de computador, descrição de sistemas e experimentos, apresentação de testes, dados, atlas, e documentação de projetos de engenharia.

Relatórios de Pesquisa (RPQ)

Reportam resultados ou progressos de pesquisas tanto de natureza técnica quanto científica, cujo nível seja compatível com o de uma publicação em periódico nacional ou internacional.

Propostas e Relatórios de Projetos (PRP)

São propostas de projetos técnico-científicos e relatórios de acompanhamento de projetos, atividades e convênios.

Publicações Didáticas (PUD)

Incluem apostilas, notas de aula e manuais didáticos.

Publicações Seriadas

São os seriados técnico-científicos: boletins, periódicos, anuários e anais de eventos (simpósios e congressos). Contam destas publicações o Internacional Standard Serial Number (ISSN), que é um código único e definitivo para identificação de títulos de seriados.

Programas de Computador (PDC)

São a seqüência de instruções ou códigos, expressos em uma linguagem de programação compilada ou interpretada, a ser executada por um computador para alcançar um determinado objetivo. Aceitam-se tanto programas fonte quanto os executáveis.

Pré-publicações (PRE)

Todos os artigos publicados em periódicos, anais e como capítulos de livros.