



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA, INOVAÇÕES E COMUNICAÇÕES
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

sid.inpe.br/mtc-m21c/2019/07.10.18.44-TDI

ANÁLISE DE ESTABILIDADE DE UMA CAMADA DE MISTURA COMPRESSÍVEL DE HIDROGÊNIO E OXIGÊNIO SOB A INFLUÊNCIA DO EMPUXO

Yan da Silva Pedroni

Dissertação de Mestrado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Combustão e Propulsão, orientada pelo Dr. Márcio Teixeira de Mendonça, aprovada em 03 de junho de 2019.

URL do documento original:

<<http://urlib.net/8JMKD3MGP3W34R/3TKLRDP>>

INPE
São José dos Campos
2019

PUBLICADO POR:

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE
Gabinete do Diretor (GBDIR)
Serviço de Informação e Documentação (SESID)
CEP 12.227-010
São José dos Campos - SP - Brasil
Tel.:(012) 3208-6923/7348
E-mail: pubtc@inpe.br

CONSELHO DE EDITORAÇÃO E PRESERVAÇÃO DA PRODUÇÃO INTELLECTUAL DO INPE - CEPPII (PORTARIA Nº 176/2018/SEI-INPE):**Presidente:**

Dra. Marley Cavalcante de Lima Moscati - Centro de Previsão de Tempo e Estudos Climáticos (CGCPT)

Membros:

Dra. Carina Barros Mello - Coordenação de Laboratórios Associados (COCTE)

Dr. Alisson Dal Lago - Coordenação-Geral de Ciências Espaciais e Atmosféricas (CGCEA)

Dr. Evandro Albiach Branco - Centro de Ciência do Sistema Terrestre (COCST)

Dr. Evandro Marconi Rocco - Coordenação-Geral de Engenharia e Tecnologia Espacial (CGETE)

Dr. Hermann Johann Heinrich Kux - Coordenação-Geral de Observação da Terra (CGOBT)

Dra. Ieda Del Arco Sanches - Conselho de Pós-Graduação - (CPG)

Silvia Castro Marcelino - Serviço de Informação e Documentação (SESID)

BIBLIOTECA DIGITAL:

Dr. Gerald Jean Francis Banon

Clayton Martins Pereira - Serviço de Informação e Documentação (SESID)

REVISÃO E NORMALIZAÇÃO DOCUMENTÁRIA:

Simone Angélica Del Ducca Barbedo - Serviço de Informação e Documentação (SESID)

André Luis Dias Fernandes - Serviço de Informação e Documentação (SESID)

EDITORAÇÃO ELETRÔNICA:

Ivone Martins - Serviço de Informação e Documentação (SESID)

Cauê Silva Fróes - Serviço de Informação e Documentação (SESID)



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA, INOVAÇÕES E COMUNICAÇÕES
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

sid.inpe.br/mtc-m21c/2019/07.10.18.44-TDI

ANÁLISE DE ESTABILIDADE DE UMA CAMADA DE MISTURA COMPRESSÍVEL DE HIDROGÊNIO E OXIGÊNIO SOB A INFLUÊNCIA DO EMPUXO

Yan da Silva Pedroni

Dissertação de Mestrado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Combustão e Propulsão, orientada pelo Dr. Márcio Teixeira de Mendonça, aprovada em 03 de junho de 2019.

URL do documento original:

<<http://urlib.net/8JMKD3MGP3W34R/3TKLRDP>>

INPE
São José dos Campos
2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Pedroni, Yan da Silva.

P343a Análise de estabilidade de uma camada de mistura compressível de hidrogênio e oxigênio sob a influência do empuxo / Yan da Silva Pedroni. – São José dos Campos : INPE, 2019.

xvi + 112 p. ; (sid.inpe.br/mtc-m21c/2019/07.10.18.44-TDI)

Dissertação (Mestrado em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Combustão e Propulsão) – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2019.

Orientador : Dr. Márcio Teixeira de Mendonça.

1. Instabilidade de Kelvin-Helmholtz. 2. Simulação numérica direta. 3. Camada de mistura binária. 4. Teoria de estabilidade linear. 5. Forças de empuxo. I.Título.

CDU 681.5.037



Esta obra foi licenciada sob uma Licença [Creative Commons Atribuição-NãoComercial 3.0 Não Adaptada](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/).

This work is licensed under a [Creative Commons Attribution-NonCommercial 3.0 Unported License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/).

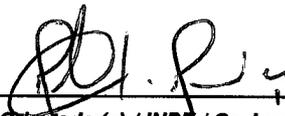
Aluno (a): *Yan da Silva Pedroni*

Título: "ANÁLISE DE ESTABILIDADE DE UMA CAMADA DE MISTURA COMPRESSÍVEL DE HIDROGÊNIO E OXIGÊNIO SOB A INFLUÊNCIA DO EMPUXO"

Aprovado (a) pela Banca Examinadora em cumprimento ao requisito exigido para obtenção do Título de **Mestre** em

**Engenharia e Tecnologia
Espaciais/Combustão e Propulsão**

Dr. Márcio Teixeira de Mendonça



Presidente / Orientador(a) / INPE / Cachoeira Paulista - SP

Participação por Vídeo - Conferência

Aprovado Reprovado

Dr. Wladimir Mattos da Costa Dourado

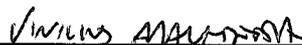


Membro da Banca / IAE/DCTA / São José dos Campos - SP

Participação por Vídeo - Conferência

Aprovado Reprovado

Dr. Vinicius Malatesta



Convidado(a) / ITA / São José dos Campos - SP

Participação por Vídeo - Conferência

Aprovado Reprovado

Este trabalho foi aprovado por:

maioria simples

unanimidade

São José dos Campos, 03 de junho de 2019

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Carlos e Alcinéia, por tudo que fizeram.

Ao Dr. Marcio por ter me orientado de maneira séria e responsável sempre se dispondo a conversar sobre diferentes dúvidas referente a pesquisa até que eu pudeste compreender.

Ao Dr. Fernando Fachinni pelas inúmeras discussões e conversas sobre minha pesquisa e incentivar ver problemas com uma abordagem diferenciada.

A minha namorada, Marie, por ter ouvido minhas reclamações constantes quando os resultados não saiam como esperado.

Ao CNPq pela bolsa oferecida que proporcionou os recursos para completar o mestrado.

As amizades conquistadas durante toda essa caminhada que me permitiram verbalizar minhas idéias mais incompreensíveis.

RESUMO

No presente trabalho estuda-se o problema de uma camada de mistura binária de oxigênio e hidrogênio em regime compressível, sem fonte de calor ou reação química, subsônica e com efeito de forças de volume. Este estudo é conduzido numericamente de duas formas distintas. A primeira usa a teoria de estabilidade linear, do inglês linear stability theory (LST), para encontrar uma nova equação que relaciona a força de empuxo e a compressibilidade. A partir desta equação desenvolve-se um código numérico para resolve-la usando o método da estimativa, em uma análise temporal e bidimensional. Se aborda também o problema usando um código de simulação numérica direta (SND), do inglês direct numerical simulation, que resolve as equações completas de Navier-Stokes através de uma discretização espacial de diferenças finitas de quarta ordem em ambas as direções e para a discretização temporal foi utilizado um Runge-Kutta de quarta ordem. A simulação é de um escoamento instantâneo, ou seja, se simula o escoamento base mais as suas perturbações, numa análise também temporal, que permite acompanhar o crescimento de uma perturbação até a formação dos vórtices de Kelvin-Helmholtz. Uma breve análise de escala foi usada para determinar os valores máximo e mínimos de cada um dos números adimensionais do problema. Notou-se através da simulação do código derivado da teoria de estabilidade linear que o efeito do empuxo é relevante para a escala de valores de Mach convectivo da ordem de 0,01, sendo o efeito desprezível para valores acima de 0,01. Notou-se que a configuração das espécies impacta o problema quando a força de empuxo é relevante, aumentando as taxas de amplificação quando a espécie mais densa escoar sob a menos densa e diminuindo no caso contrário. Também mostra-se o efeito amortizador da compressibilidade e que o aumento da mesma gera uma diminuição do número de onda responsável pela maior taxa de amplificação, enquanto o empuxo tem efeito contrário, independente da configuração o aumento da relevância da força de empuxo sempre está ligado com um aumento no número de onda da perturbação que gera a máxima taxa de amplificação. Confirma-se alguns dos resultados obtidos pelo código LST com o código DNS e mostra-se a diferença nos tempos necessários para se obter os vórtices de Kelvin-Helmholtz completamente formados para diferentes casos. Por final estuda-se o efeito da viscosidade, mostrando que este também tem um efeito amortizador nas perturbações.

Palavras-chave: Instabilidade de Kelvin-Helmholtz. Simulação Numérica Direta. Camada de mistura binária. Teoria de estabilidade linear. Forças de empuxo.

STABILITY ANALYSIS OF A COMPRESSIBLE MIXING LAYER OF HYDROGEN AND OXYGEN UNDER THE EFFECT OF BUOYANCY

ABSTRACT

In the present work it's studied the problem of a compressible binary mixing layer of oxygen and hydrogen without heat sources and chemical reaction, subsonic and with body forces. This study is performed using two distinct methodologies. The first use the linear stability theory (LST) to derive a new equation for the perturbation that relates the compressibility and the buoyancy force. Once the equation was found a shooting method code was written to find the solution in a temporal and bidimensional analysis. The problem is also aborded using a direct numeric simulation (DNS) to solve the full Naviers-Stokes equation using a fourth order finite difference for the spatial discretization and a fourth order Runge-Kutta for the temporal integration. The simulation is for the total flow, meaning that it's simulated the base flow with the perturbation, in a temporal analysis, which allows to see the growth of the perturbation until the full formation of the Kelvin-Helmholtz vortices. A brief scale analysis is performed to find out the range of the non-dimensional numbers used in the problem. It was noted using the LST code that the effect of the buoyancy is more significant for problems with convective Mach of the order of 0.01 and could be neglected for a value higher than 0.2. It was also noted that the configuration of the species change the effect of the buoyancy on the perturbation only when the buoyancy is relevant, having a disturbing effect when the heavier species flows over the lighter, and a damper effect for the opposite case. Also is show the damping effect caused by the raise of the compressibility that also causes a decrease of the wavenumber responsible for the highest amplification rate, that completely differs from the effect of the buoyancy, where independent of the configuration, a raise of the relevance of the buoyancy causes an increase of the wavenumber responsible for the maximum amplification rate. The amplification rate find it using the good agreement with the LST code, and it is shown the difference of time needed to different cases fully developed the Kelvin-Helmholtz vortices. At last it's studied the viscous effect in the problem, showing that this is also an amortization effect for the perturbation.

Keywords: Kelvin-Helmholtz Instability. Direct Numerical Simulation. Binary Mixing Layer. Linear Stability Theory. Buoyancy Forces.

LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
1.1 Vórtices de Kelvin-Helmholtz : a) Na atmosfera terrestre. b) Em saturno.	2
1.2 Camada de mistura.	4
1.3 Análise da estabilidade segundo os teoremas a partir da distribuição de velocidade de escoamento laminares, a) Estável b) Estável c) Necessariamente instável por Rayleigh d) Necessariamente instável por Rayleigh e Fjortoft.	7
1.4 Explicação do mecanismo a instabilidade de Kelvin-Helmholtz.	8
2.1 Domínio numérico do problema.	34
2.2 Evolução das perturbação antes da modificação devido ao empuxo.	38
2.3 Evolução das perturbação depois da modificação devido ao empuxo.. . . .	39
4.1 Independência do Mach Convectivo.	50
4.2 Validação do código LST - Teste Homogêneo.	54
4.3 Validação do código LST - Teste binário H2-O2.	55
4.4 Validação do código SND.	58
5.1 Efeito da estratificação da massa específica para um caso sem força de volume e $M_c = 0,01$	60
5.2 Efeito da compressibilidade nas taxas de amplificações para a camada de mistura H2-O2 sem força de volume.	61
5.3 Efeito da variação do número de Froude para configuração H2-O2 com $M_c = 0,01$	64
5.4 Efeito da variação do número de Froude para configuração H2-O2 com $M_c = 0,2$	64
5.5 Efeito da variação do número de Froude para configuração H2-O2 com $M_c = 0,4$	65
5.6 Efeito da variação do número de Froude para configuração H2-O2 com $M_c = 0,8$	65
5.7 Efeito da variação do número de Froude para configuração O2-H2 com $M_c = 0,01$	69
5.8 Efeito da variação do número de Froude para configuração O2-H2 com $M_c = 0,2$	69
5.9 Efeito da variação do número de Froude para configuração O2-H2 com $M_c = 0,4$	70

5.10	Efeito da variação do número de Froude para configuração O2-H2 com $M_c = 0,8$	70
5.11	Comparação do efeito de Fr na máxima taxa de amplificação para os casos H2-O2 e O2-H2 para $M_c = 0,01$	71
5.12	Comparação do efeito de Fr na máxima taxa de amplificação para os casos O2-H2 com diferentes compressibilidades.	73
5.13	Comparação do efeito de Fr na máxima taxa de amplificação para os casos H2-O2 com diferentes compressibilidades.	74
5.14	Comparação entre as respostas do LST e do SND para três valores de Mach convectivo.	76
5.15	Evolução da perturbação e ajuste de curva para diferentes números de Reynolds no caso $M_c = 0,4$	77
5.16	Evolução da perturbação e ajuste de curva para diferentes números de Reynolds no caso $M_c = 0,8$	78
5.17	Evolução da perturbação de três casos distintos até a saturação.	80
5.18	Distribuição da vorticidade para o caso homogêneo com $M_c = 0,4$	81
5.19	Distribuição da vorticidade para o caso binário H2-O2 com $M_c = 0,4$	82
5.20	Distribuição da vorticidade para o caso binário H2-O2 com $M_c = 0,8$	83

LISTA DE TABELAS

	<u>Pág.</u>
4.1 Análise dimensional do problema entre número de Froude, Mach convectivo e espessura da camada de mistura.	52
4.2 Resultados para diferentes números de pontos na direção normal.	53
4.3 Comparação da máxima taxa de amplificação em razão do Mach convectivo, ω_{max} entre o código LST e a literatura para uma camada de N2-O2 sem força de empuxo.	56
4.4 Comparação da taxa de amplificação, ω para diferentes números de ondas do código SND com a literatura.	57
5.1 Comparação entre $Fr = 3000$ e $Fr = 10^6$ para diferentes valores de M_c	62
5.2 Comparação das máximas taxas de amplificação para cada combinação de Fr e M_c testado para H2-O2.	67
5.3 Comparação das máximas taxas de amplificação para cada combinação de Fr e M_c testado para O2-H2.	72
5.4 Comparação das taxas de amplificações obtidas do SND entre $M_c = 0,4$ e $M_c = 0,8$ para diferentes valores de Reynolds.	79

SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
1 INTRODUÇÃO	1
1.1 Relevância	1
1.2 Teoria de estabilidade linear	4
1.3 Revisão bibliográfica	7
1.4 Estrutura do trabalho	11
1.5 Objetivo	12
2 METODOLOGIA DA ABORDAGEM SND	13
2.1 Equações governantes	13
2.2 Equações auxiliares	14
2.2.1 Pressão	15
2.2.2 Massa específica	15
2.2.3 Tensor de tensões viscosas	16
2.2.4 Fluxo de calor	17
2.2.5 Difusividade mássica	19
2.2.6 Constante do gás	20
2.2.7 Calor específico a pressão constante	21
2.2.8 Calor específico a volume constante	21
2.2.9 Energia interna	22
2.3 Parâmetros adimensionais	22
2.3.1 Razão de calores específicos	23
2.3.2 Fração mássica	23
2.3.3 Fração molar	24
2.3.4 Número de Mach	24
2.3.5 Número de Mach convectivo	25
2.3.6 Número de Reynolds	25
2.3.7 Número de Prandtl	26
2.3.8 Número de Lewis	26
2.3.9 Número de Froude	26
2.4 Variáveis características e equações adimensionais	27
2.4.1 Condição inicial e de contorno	29
2.5 Método numérico	31

2.5.1	Domínio	33
2.5.2	Derivadas temporais	34
2.5.3	Derivadas espaciais e condições de contorno	35
2.5.4	Tratamento de dados devido ao empuxo	37
3	METODOLOGIA DA ABORDAGEM LST	41
3.1	Análise de estabilidade linear.	41
3.2	Formulação numérica do código LST	46
4	VERIFICAÇÃO	49
4.1	Influência do número de Mach convectivo	49
4.2	Estudo da escala dos números adimensionais	50
4.3	Teste de independência de malha	52
4.4	Verificação LST	53
4.5	Verificação do SND	56
5	RESULTADO E ANÁLISE	59
5.1	Efeito da estratificação da massa específica.	59
5.2	Efeito da compressibilidade.	61
5.3	Influência do número de Froude usando LST	62
5.4	Resultados do SND	74
6	CONCLUSÕES	85
7	TRABALHOS FUTUROS	87
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	89
	APÊNDICE A - DEDUÇÃO DETALHADA.	93
A.1	Equação da Continuidade	94
A.2	Conservação da quantidade de movimento na direção x.	96
A.3	Conservação da quantidade de movimento na direção y.	98
A.4	Conservação da quantidade de movimento na direção z	99
A.5	Conservação da energia	100
A.6	Conservação da espécie	102
A.7	Lei do gás ideal	104
A.8	Constante do gás	105
A.9	Dedução da equação condensada.	106

1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho busca-se estudar como diferentes parâmetros físicos afetam a transição para turbulência de um escoamento binário. Para isso utiliza-se um escoamento bem conhecido na literatura o qual já se conhece que as perturbações crescem exponencialmente, a camada de mistura, onde duas correntes de fluidos com velocidades distintas escoam uma sobre a outra. O interesse é saber quais parâmetros irão acelerar ou retardar o crescimento dessas perturbações, com um interesse em particular na estratificação da massa específica, uma vez que devido a força de empuxo estar presente o problema deixa de ser simétrico.

Para se estudar o problema se faz uma abordagem numérica através de dois métodos distintos. A primeira é através da simulação numérica direta, SND, das equações de Naviers-Stokes adimensionalizadas. A segunda é através de uma simplificação das equações de Euler, também adimensionais, linearizando-as e agrupando-as de maneira a tratá-las através do método de análise de estabilidade linear (do inglês linear stability analysis - LSA). Essas duas metodologias são as mesmas empregadas no trabalho de Sandham (1990), sendo a primeira delas realizada também nos trabalhos de Quirino (2006), Jackson e Grosch (1989) e Kozusko et al. (1996), e a segunda nos trabalhos de Salemi (2006) e Fedioun e Lardjane (2005) entre outros. Com as respostas obtidas pelas duas abordagens é possível compará-las, obviamente se atentando para as simulações estarem em regimes onde tal comparação é válida, verificando se ambas convergem para o mesmo resultado, gerando um nível maior de confiança de que está se capturando a física do problema.

Este capítulo será dividido em cinco diferentes seções onde a primeira irá mostrar a importância e aplicabilidade do estudo. Na segunda é apresentada uma breve discussão sobre a teoria de estabilidade linear em uma camada de mistura, seguida de uma revisão bibliográfica mais detalhada sobre os diferentes trabalhos relacionado ao tema e a base metodológica utilizada aqui. A quarta seção detalha a estrutura de todo o trabalho, explicando brevemente o conteúdo de cada capítulo, e finaliza-se com a seção dos objetivos do trabalho.

1.1 Relevância

A evolução de um escoamento do regime laminar para o regime turbulento ocorre de diferentes maneiras e em uma variedade imensurável de configurações, tanto naturais, quanto provocados pelo homem. Porém a evolução tratada nesse problema é aquela que ocorre devido ao gradiente de velocidade e massa específica através

de uma camada de mistura gerando os vórtices de Kelvin-Helmholtz. Esse tipo de instabilidade em particular tem a vantagem de ser facilmente caracterizada em fotos de fenômenos atmosféricos sejam eles do planeta Terra ou em Júpiter, como mostra as fotos (a) e (b) da Figura 1.1.

A mistura entre diferentes espécies químicas através desse processo ocorre também em diferentes situações, tanto na natureza, como em estuários de rios, e correntes de poluição na atmosfera, quanto em aplicações para a engenharia, como em sistemas de propulsão aeroespacial. Entender como esse processo ocorre e quais os parâmetros que o influenciam, pode levar ao desenvolvimento de melhores propulsores, ou até de novas tecnologias para a prevenção ou redução de poluição.

Figura 1.1 - Vórtices de Kelvin-Helmholtz : a) Na atmosfera terrestre. b) Em saturno.



Fonte: a)Kaushik (2012).

Fonte: b)Nasa (2007).

É exigido dos novos aviões que atinjam velocidade maiores a um menor custo e maior eficiência. Para isso os sistemas propulsivos precisam queimar uma quantidade grande de combustível, as vezes em regimes supersônico como no caso de motores scramjets, em um comprimento relativamente curto da sua câmara de combustão. Em combustores onde não acontece a pré-mistura dos reagentes a zona de reação acontece na interface de contato entre o combustível e o comburente. Têm-se então um regime laminar que faz com que a combustão dependa da difusão molecular entre os reagentes do problema que por muitas vezes tem um tempo característico alto.

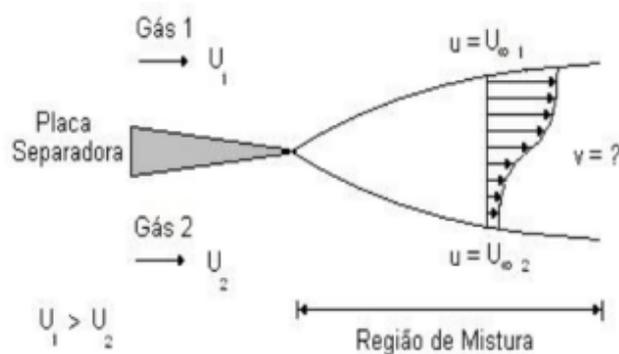
Isso gera duas opções de projeto, aumentar o comprimento da câmara de combustão de maneira a ter um tempo de residência maior compatível com o tempo difusivo, ou ter uma combustão incompleta e expelir combustível não queimado para fora do sistema propulsivo. Alternativamente, se o regime de escoamento for de transição ou mesmo turbulento a um ganho natural de interface dos reagentes propiciando assim uma câmara menor sem necessariamente comprometer sua eficiência.

A instabilidade hidrodinâmica também aparece presente em outros problemas da engenharia como um dos fatores a serem considerados, como em turbinas a gás e sua emissão de poluentes. A queima de qualquer combustível usando como oxidante o ar gera como subproduto os óxidos de nitrogênios, NO_x , que é altamente poluente e tem sua emissão na aviação civil regulamentada por vários tratados como a *Regulations for Nitrogen Oxide Emissions from Aircrafts*, (regulamentação federal da *United States Environmental Protection Agency - 40 CFR part 87*). Também é um parâmetro a ser considerado em estudos de emissão de ruídos, que é estudado mais profundamente através da aeroacústica, e no limite de extinção de chamas.

Apesar dos combustores terem uma tecnologia avançada, onde diversos fenômenos físicos podem ser estudados, podemos modelar o mesmo de uma forma simplificada como um escoamento laminar do combustível com velocidade U_1 na parte superior e um escoamento laminar de oxidante com velocidade U_2 na parte inferior. Entre as duas correntes existe uma zona finita de difusão onde a velocidade e as propriedades variam continuamente, isso sendo definido como a camada de mistura a ser tratada. Sabe-se da teoria de estabilidade linear que, para certos perfis base do escoamento, a inserção de qualquer perturbação levará o escoamento à formação dos vórtices de Kelvin-Helmoltz e posteriormente para um regime turbulento.

Modelar o problema como duas correntes de fluidos com velocidade e espécies diferentes, apesar de simplificada, representa bem a física do problema para o escopo desse projeto, e está representada esquematicamente na Figura 1.2

Figura 1.2 - Camada de mistura.



Fonte: Salemi (2006).

1.2 Teoria de estabilidade linear

Antes de se discutir sobre as bases do estudo de estabilidade hidrodinâmica, iremos definir o que é estabilidade. Basicamente o conceito de estabilidade está ligada a um sistema em equilíbrio, como por exemplo uma bola em repouso, ao introduzir perturbações pequenas nesse sistema se elas tendem a crescer rapidamente e alterar o estado do problema, como no caso da bola sobre uma superfície convexa, temos um sistema instável. Por outro lado se o sistema tem o seu estado aos poucos retornado para seu valor de origem temos um sistema estável, como o caso de uma bola sobre uma superfície côncava. Entre os dois temos uma estabilidade neutra, onde o sistema tende a um outro estado distinto do primeiro porém, depois de certo tempo sem mais crescimento, como o caso de uma bola sobre um plano indo do repouso para um movimento retilíneo uniforme.

No caso da instabilidade hidrodinâmica o sistema em equilíbrio em geral é um escoamento laminar, e na prática as perturbações são causadas naturalmente, provindas de vibrações, rugosidades, ruídos entre outros. O interesse então é perceber se esse escoamento se desenvolverá na forma de amortizar as perturbações sempre matendo-se como um escoamento laminar, ou se ele tenderá a um escoamento turbulento dado o tempo necessário. A teoria da estabilidade linear é uma maneira de estudar a evolução desse sistema.

Como tratar matematicamente o escoamento vai do modelo específico utilizado, sendo possível se abordar o problema de duas maneiras. A primeira é somente analisando as perturbações do problema e a segunda maneira é analisar a soma do efeito das perturbações sobre o escoamento laminar inicial, chamado de escoamento base. A esse tipo de análise se dá o nome de análise das propriedades instantâneas. Pode-se representar matematicamente o escoamento instantâneo pela Equação 1.1 que descreve como a variável instantânea da velocidade na direção x depende do escoamento base, $U(y)$, e da perturbação, $u'(x, y, z, t)$:

$$u(x, y, z, t) = U(y) + u'(x, y, z, t). \quad (1.1)$$

Propondo-se a solução por modos normais, pode-se escrever a oscilação do sistema de maneira favorável a uma análise posterior. Sendo assim temos:

$$u'(x, y, z, t) = \mathbf{R}\{\hat{u}(y)\exp[i(\alpha x + \beta z - \omega t)]\}, \quad (1.2)$$

onde u é velocidade, t, tempo, x, y e z, as posições nas direções longitudinal, normal e transversal, respectivamente, α é o número de onda na direção x, β o número de onda na direção z e ω é a frequência angular, o símbolo \mathbf{R} demonstra que só se considera a parte real.

A vantagem de modelar dessa maneira é trabalhar com equações derivadas no campo complexo, evitando assim equações extensas de senos e cossenos e tornando mais fácil a interpretação física das derivações. As variáveis α e ω desta equação podem ser complexos e β real, podendo decompor e agrupar a equação da seguinte maneira:

$$u'(x, y, z, t) = [\hat{u}(y)\exp(-\alpha_i x + \omega_i t)][\exp(i\alpha_r x + i\beta z - i\omega_r t)], \quad (1.3)$$

onde podemos entender fisicamente que o primeiro termo entre colchetes representa a amplitude e o segundo termo entre colchetes representa a oscilação da perturbação.

A partir da Equação 1.3 é possível perceber-se que se a variável ω tem somente parte real, e α somente complexa, a amplitude depende de α e de x , denominando-se assim uma análise espacial. Por outro lado se ω é complexa e α real a amplitude da perturbação depende de ω e t , sendo assim uma análise temporal. No caso da camada de mistura essas análises podem ser entendidas como um observador num

referencial em repouso fora do escoamento, para o caso da análise espacial, ou com o referencial acompanhando o escoamento, no caso da análise temporal.

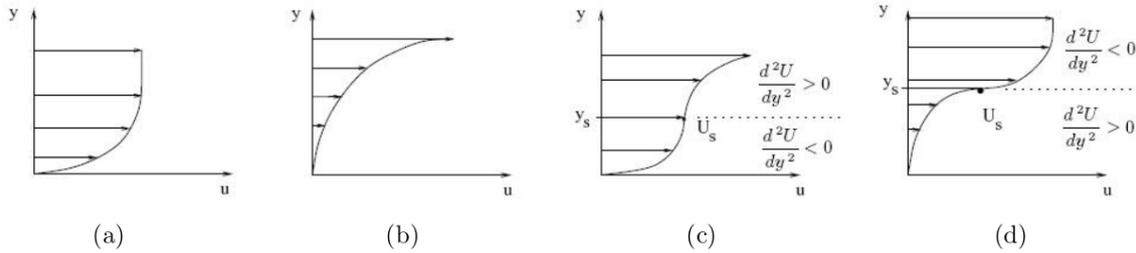
Também é possível perceber facilmente se a amplitude das perturbações crescerão ou diminuirão de acordo com as taxas de amplificações, ω_i e α_i . Para ter-se um crescimento das perturbações com o tempo na análise temporal é necessário que ω_i seja positivo, caso contrário teremos um escoamento estável, ou neutro para o caso específico de termos a taxa de amplificação igual a zero. No caso da análise espacial, para termos um aumento das perturbações conforme x aumenta precisa-se que o valor de α_i seja negativo. Nesse trabalho somente a análise temporal é realizada.

Alguns teoremas são bastante conhecidos e úteis para o estudo desenvolvido nesse trabalho de uma camada de mistura, porém restringimos a somente explicar brevemente seu significado, não se alongando em deduções que podem facilmente ser encontradas na literatura, ou em qualquer outro livro de teoria de estabilidade linear.

O primeiro deles é o teorema de Rayleigh, deduzido por [Rayleigh \(1879\)](#), ou também conhecido por teorema do ponto de inflexão de Rayleigh. O teorema deduz e conclui que para haver instabilidade em um escoamento não viscoso é necessário que haja ao menos um ponto de inflexão no perfil de velocidade laminar base $U(y)$. O teorema e Fjortoft, deduzido em [Fjortoft \(1950\)](#), por sua vez complementa o teorema de Rayleigh ao deduzir uma relação entre a derivada segunda da velocidade e a posição y em relação ao ponto de inflexão. Para um escoamento ser instável pelo teorema de Fjortoft, a região acima do ponto de inflexão tem que ter derivada segunda do escoamento base menor que zero e para região abaixo do ponto de inflexão ter derivada segunda do escoamento base maior que zero. A [Figura 1.3](#) explica ambos os teoremas de forma gráfica. Esses teoremas são o que permite saber que uma função na forma da tangente hiperbólica, usada nesse trabalho, necessariamente gerará um escoamento instável permitindo obter as taxas de amplificação necessárias, uma vez que uma função deste tipo respeita ambos os teoremas.

Por final tem-se o teorema de Squire, deduzido em [Squire \(1933\)](#), que demonstra analiticamente que uma perturbação 3-D é mais estável que uma perturbação 2-D quando num escoamento base bidimensional. Isso, porém, deixa de ser verdade quando deixa-se de usar a imposição de um escoamento incompressível, como demonstrado no trabalho de [Dunn e Linn \(1955\)](#). No presente trabalho ainda assim se usará um escoamento com perturbações bidimensionais devido ao tempo computacional da simulação SND. Porém é bom se atentar que para um caso real elas podem não ser as maiores taxas de amplificação do problema.

Figura 1.3 - Análise da estabilidade segundo os teoremas a partir da distribuição de velocidade de escoamento laminares, a) Estável b) Estável c) Necessariamente instável por Rayleigh d) Necessariamente instável por Rayleigh e Fjortoft.



Fonte: Salemi (2006)

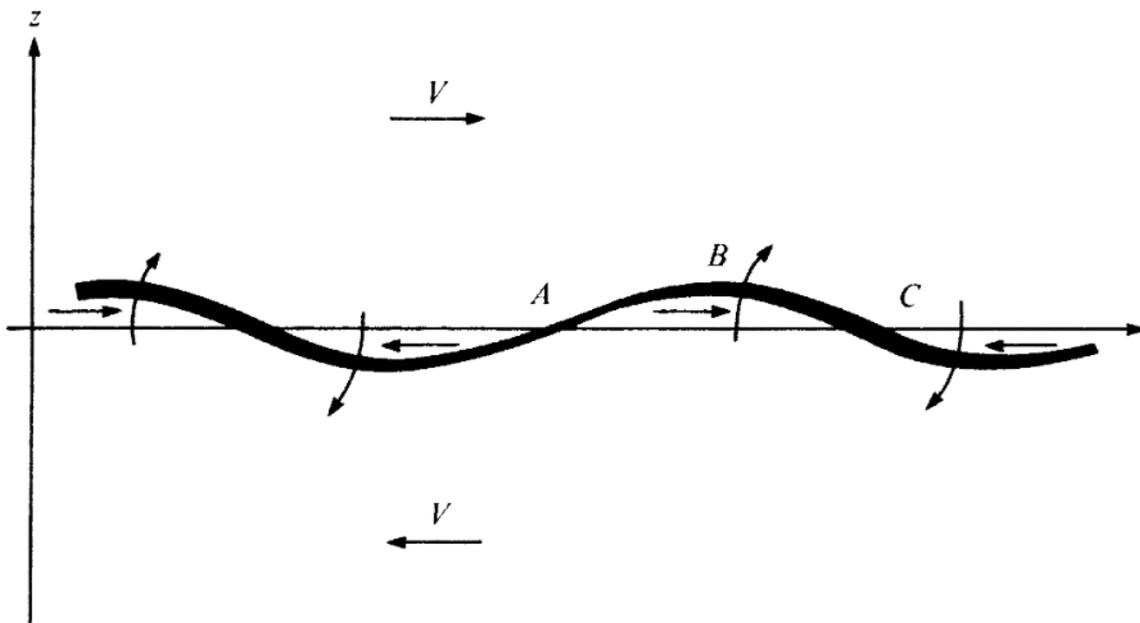
1.3 Revisão bibliográfica

A literatura é repleta de estudos de instabilidade, porém, é aparente uma divisão nos estudos, para casos de camadas de misturas com velocidade de correntes altas, no regime compressível, se encontra estudadas tanto de camadas homogêneas quanto binárias, porém nunca considerando a força de volume como relevante para o problema. Em contrapartida em casos onde as velocidades das correntes são baixas e se tem o desejo de analisar o efeito da força de empuxo, a aproximação de Boussinesq é utilizada restringindo a análise para somente casos incompressíveis. Em casos binários, como este trabalho, as espécies têm massas específicas muito diferentes tornando a análise necessariamente compressível e impossibilitando a aproximação de Boussinesq. Sendo assim usou-se estudos de bases para desenvolver as metodologias desse trabalho, com trabalhos bastante conhecidos da área da instabilidade de Kelvin-Helmholtz em regimes compressíveis principalmente para camadas homogêneas e alguns estudos específicos de camadas binária. Também estudou-se alguns trabalhos de oceanografia e de camadas de mistura provocados por estuários de rios, que não têm velocidades características altas que justifiquem a formulação compressível porém desenvolvem a formulação com a força de empuxo.

O mecanismo físico pelo qual a instabilidade Kelvin-Helmholtz se desenvolve é explicado em detalhes em Batchelor (1965) usando a vorticidade dinâmica e a Figura 1.4 para explicar como o gradiente de velocidade em uma camada de mistura implica em um aumento de uma perturbação a ponto de uma formação de um vórtice. Drazin (2002) mostra a abordagem matemática clássica para um problema de duas

correntes de fluido irrotacionais e incompressíveis uma escoando sobre a outra, onde as equações são linearizadas e aplica-se a solução por modos normais de maneira que chega-se em uma equação no qual dois modos distintos de instabilidade aparecem, o modo devido ao cisalhamento do elemento de fluido, gerando os vórtices de Kelvin-Helmholtz conhecidos, e a instabilidade de Rayleigh-Taylor provocada devido ao empuxo em gradientes de massa específica que ocorre mesmo sem gradientes de velocidade.

Figura 1.4 - Explicação do mecanismo a instabilidade de Kelvin-Helmholtz.



Fonte: Batchelor (1965).

Esse primeiro modo de instabilidade é estudado experimentalmente em [Brown e Roshko \(1974\)](#), assim como os efeitos que a razão entre as massas específicas têm sobre uma camada de mistura incompressível. Os autores demonstram dois diferentes mecanismos de mistura, o de captura, que forma o vórtices, e o de emparelhamento, que colapsa dois vórtices vizinhos. Esse segundo mecanismo é mais profundamente estudado numericamente para um caso bidimensional por [Metcalf et al. \(1987\)](#).

O estudo da camada de mistura homogênia foi estendido para o regime compressível

em Jackson e Grosch (1989) através de uma abordagem da linearização das equações de Euler, para problemas 2-D e 3-D com o objetivo de investigar a presença de modos de instabilidades extras. O trabalho usa perfis canônicos na forma de tangentes hiperbólicas para o escoamento base e também analisa problemas com cada uma das correntes de fluido com diferentes temperatura. O trabalho consegue concluir que existe um único modo para casos 2-D e subsônicos podem haver até três modos para casos com perturbação tridimensionais. Outro ponto importante é a demonstração de que a compressibilidade tem um efeito amortizador diminuindo os valores das taxas de amplificação.

Também de forma experimental Papamoschou (1987) estuda uma camada de mistura através de uma análise espacial para diferentes combinação de gases, porém num regime compressível e usando como parâmetro um número de Mach convectivo para relacionar diferentes resultados. Com essa abordagem o trabalho consegue mostrar o efeito amortizador da compressibilidade que para casos supersônicos pode chegar a diminuir a taxa de amplificação em 5 vezes quando comparado com casos incompressíveis. O trabalho também conclui não haver diferença entre os comportamentos das curvas de taxas de amplificação se a mesma razão de densidade e de velocidade forem mantidas entre os casos compressíveis e incompressíveis.

Outro estudo de camada de mistura binária, usando dessa vez a análise de estabilidade linear foi o de Kozusko et al. (1996), onde além dos parâmetros estudados por Brown e Roshko (1974), também foram estudados o efeito que a diferença de temperatura entre as correntes induz na estabilidade do escoamento e também uma comparação entre diferentes modelos térmicos das propriedades físicas de cada gás. A conclusão do artigo é que não só a estratificação da massa específica afeta significativamente a formação dos vórtices de Kelvin-Helmholtz como a razão entre os valores das propriedades da camada livre podem servir de preditor do comportamento geral do mesmo.

Uma comparação entre a abordagem temporal e a espacial para uma camada de mistura binária bidimensional com perturbações em 3-D usando SND é feita em Fedoun e Lardjane (2005). Vários parâmetros foram estudados, tais como o efeito da compressibilidade, do ângulo entre a propagação da perturbação e do escoamento e o efeito da estratificação da densidade devido a diferentes espécies. No estudo encontra-se um modo dominante para casos subsônicos e um segundo modo instável para caso supersônico, sendo este segundo um modo com taxas de amplificação muito inferiores ao primeiro. Como a análise foi 3-D encontrou-se um valor de nú-

mero de Mach convectivo de 0,6 no qual a máxima taxa de amplificação deixa de estar relacionada a uma perturbação bidimensional, passando a ser relacionado a uma perturbação que tenha um ângulo em relação a velocidade convectiva do escoamento base, também mostrou-se que isto independe da razão entre a massa específica das espécies.

No estudo de [Okong'o e Bellan \(2003\)](#) simula-se a camada de mistura binária compressível com diferentes pares de espécies num código SND. O objetivo do trabalho é obter um sistema de equações de similaridade para a velocidade na direção longitudinal, temperatura e fração mássica para o escoamento base, obtendo dessa forma as equações que definem o escoamento base, e dessa forma ver a diferenças que uma mistura não ideal causaria em relação a perfis canônicos. Estes diferentes perfis então são utilizados numa análise de estabilidade linear e comparados entre si mostrando diferenças significativas nas taxas de amplificação. Este trabalho também teve a inovação de considerar os efeitos de Dufour e Soret como relevantes do problema por trabalhar com gases em condições termodinâmicas supercríticas.

Um estudo interessante sobre estratificação das propriedades físicas do fluido é o de [Ghazali e Kelso \(2001\)](#), que mostra que a variação da viscosidade aumenta o gradiente de velocidade que, por sua vez, segundo o artigo, aumentam o taxa de amplificação das perturbações.

Com relação a estudos levando em consideração a força de empuxo usando a aproximação de Boussinesq têm-se por exemplo os trabalhos de [Lindzen \(1974\)](#), de [Rambaldi e Salustri \(1981\)](#) e de [Martinez et al. \(2006\)](#), onde todos analisam casos de camadas de mistura homogêneas com velocidades características das correntes baixas. Neste último trabalho se analisa temporalmente a evolução das perturbações de Kelvin-Helmholtz de uma camada de mistura com um perfil estável da estratificação da massa específica, ou seja, com uma corrente de fluido mais leve escoando sobre uma mais pesada. O trabalho obtêm as respostas através de uma simulação numérica direta das equações de Navier-Stokes usando a aproximação de Boussinesq. As conclusões obtidas pelo trabalho são que gradientes estáveis de massa específica diminuem a taxa de amplificação conforme o empuxo é mais relevante, e em casos com um gradiente suficientemente alto o mecanismo de emparalhamento de vórtices mostrado em [Brown e Roshko \(1974\)](#) não ocorre.

Outros estudos comuns na área de camada de mistura são representar o escoamento com a adição de uma modificação como jatos e esteiras como nos casos de [Manco et al. \(2015\)](#), [Soares et al. \(2014\)](#) e [Mendonça \(2014\)](#).

O estudo de [Sandham \(1990\)](#) é usado como base matemática do estudo da parte de análise de estabilidade linear desse trabalho. Neste trabalho uma camada de mistura compressível e homogênea é analisada através de uma análise LST espacial e temporal e através de um código SND. O objetivo era analisar o efeito da compressibilidade para casos 2-D e 3-D, e consegue-se mostrar que para casos de alto número de Mach as estruturas desestabilizadoras são predominantemente tridimensionais. Neste trabalho usa-se também a simplificação desenvolvida por [Gropengiesser \(1970\)](#) que transforma o sistema de duas equações diferenciais parciais em uma única equação diferencial dependendo de uma única variável, facilitando o método numérico utilizado.

Esse trabalho dá continuação ao estudo de [Quirino \(2006\)](#), que utilizou um modelo 2-D de camada de mistura homogênea com uma fonte de calor para modelar o calor de combustão liberado, estudando assim os efeitos térmicos na estabilização das perturbações. Este trabalho também utiliza o estudo de [Salemi \(2006\)](#) que estudou uma camada de mistura binária, porém usando análise de estabilidade linear ao invés de SND como foi o caso do estudo de Quirino.

1.4 Estrutura do trabalho

No Capítulo 2 é apresentada a metodologia usada para tratar o problema com um código SND, mostrando o sistema de equações utilizado, as simplificações e considerações feitas, assim como as condições iniciais e de contorno, e também o método computacional utilizado para o desenvolvimento do código SND. No Capítulo 3 expõe-se brevemente as equações feitas para resolver o problema com a abordagem da teoria de estabilidade linear, mostrando-se a equação que se deduziu para levar em conta o empuxo, a estratificação da massa específica e a compressibilidade, assim como o método numérico usado para resolvê-la. No Capítulo 4 mostra-se como o número de Mach convectivo, parâmetro que será melhor explicado nas próximas seções, é o parâmetro que informa a compressibilidade do problema para uma camada de mistura binária, assim como um breve estudo das escalas do problema levando em consideração as hipóteses utilizadas na metodologia, permitindo assim ter uma noção dos limites dos números adimensionais que fazem sentido para o problema. Também mostra-se um teste de independência de malha realizado para determinar o tamanho da malha do código SND. Por final mostra uma verificação de ambos os códigos desenvolvidos mostrando que ambos ainda retornam resposta condizentes com a literatura quando as mesmas condições são implementadas.. O Capítulo 5 expõe os resultados, mostrando primeiramente os obtidos pelo código LST, mostrando

a influência da compressibilidade, da estratificação da massa específica, e do empuxo tanto para casos onde a espécie mais pesada escoa sobre a mais leve, quanto o contrário, para diferentes compressibilidades. Mostra-se também os resultados obtidos pelo código SND comparando suas respostas de taxa de amplificação com as obtidas pelo LST. Mostra-se também um breve estudo da influência das forças viscosas no problema, e uma visão da distribuição da vorticidade de alguns casos simulados. O Capítulo 6 expõe as conclusões retiradas do estudo feito ao longo deste trabalho e finaliza-se com o Capítulo 7 mostrando algumas opções de trabalhos futuros. No apêndice A mostra-se com detalhe o processo feito para se obter a equação que define o código LST.

1.5 Objetivo

O objetivo principal do trabalho é analisar a influência que a força de empuxo tem sobre uma camada de mistura binária de oxigênio e hidrogênio e se a disposição destas espécies é relevante para o crescimento ou diminuição das perturbações em um modelo simplificado de propulsor aeroespacial, onde a camada de mistura é relativamente pequena. Também, têm-se como objetivos secundários o estudo dos efeitos da compressibilidade, das forças viscosas e da razão entre as massas específicas das espécies. Para isso, será avaliado como a taxa de amplificação varia devido a variação de cada uma das variáveis de interesse.

2 METODOLOGIA DA ABORDAGEM SND

Neste capítulo são apresentadas as equações governantes e auxiliares para resolver o problema de camada de mistura binária sobre a influência do empuxo através de um código de simulação numérica direta, SND. Na Seção 2.1 são expostas as considerações usadas e as equações governantes do problema. Na Seção 2.2 são expostas as equações auxiliares e hipóteses utilizadas para fechar o sistema de equações, assim como uma breve explicação dos números adimensionais que apareceram no problema. Na Seção 2.4 todas as equações previamente mostradas são reescritas na forma adimensional e as condições de contorno e iniciais, assim como o escoamento base e as perturbações iniciais, são definidas. A Seção 2.5 mostra os métodos numéricos usados para resolver as equações previamente apresentadas.

2.1 Equações governantes

Primeiramente deve-se listar algumas hipóteses simplificadoras. Sendo assim temos as seguintes considerações:

- Bidimensional.
- Compressível.
- Escoamento Viscoso.
- Transferência de calor por radiação desprezível.
- Efeitos de Duffour e Soret desprezíveis.
- Binário.
- Sem reação química.
- Forças de volume relevante devido a gravidade.

Sendo assim, as equações governantes são as de Navier-Stokes e a da conservação das espécies escritas abaixo na forma diferencial:

$$\frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \frac{\partial}{\partial x^*}(\rho^* u^*) + \frac{\partial}{\partial y^*}(\rho^* v^*) = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t^*}(\rho^* u^*) + \frac{\partial}{\partial x^*}(\rho^* u^{*2} + p^* - \tau_{xx}^*) + \frac{\partial}{\partial y^*}(\rho^* u^* v^* - \tau_{xy}^*) = 0, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t^*}(\rho^* v^*) + \frac{\partial}{\partial x^*}(\rho^* u^* v^* - \tau_{xy}^*) + \frac{\partial}{\partial y^*}(\rho^* v^{*2} + p^* - \tau_{yy}^*) + \rho^* g^* = 0, \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t^*}(E_t^*) + \frac{\partial}{\partial x^*} \left[(E_t^* + p^*)u^* + q_x^* - u^* \tau_{xx}^* - v^* \tau_{xy}^* \right] + \\ \frac{\partial}{\partial y^*} \left[(E_t^* + p^*)v^* + q_y^* - u^* \tau_{xy}^* - v^* \tau_{yy}^* \right] + \rho^* g^* v^* = 0, \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t^*}(\rho^* Y_I^*) + \frac{\partial}{\partial x^*} \left(\rho^* u^* Y_1^* - \rho^* \mathcal{D}_{12}^* \frac{\partial Y_1^*}{\partial x^*} \right) + \frac{\partial}{\partial y^*} \left(\rho^* v^* Y_1^* - \rho^* \mathcal{D}_{12}^* \frac{\partial Y_1^*}{\partial y^*} \right) = 0, \quad (2.5)$$

onde

$$E_t^* = \rho^* \left[e^* + \frac{1}{2}(u^{*2} + v^{*2}) \right], \quad (2.6)$$

A notação $*$ identifica uma variável dimensional, ρ é a massa específica do fluido, u e v , as as componentes da velocidade nas direções, x e y , as coordenadas na direção longitudinal e normal, respectivamente, t o tempo, p a pressão, τ o tensor de tensões viscosas, q o fluxo de calor sendo a direção do fluxo indicada pelo subscrito, E_t a energia total, e a energia interna, Y_1 a fração mássica das espécies correspondente ao gás do subscrito, g a aceleração da gravidade e \mathcal{D}_{12} a difusividade molecular entre as espécies 1 e 2, onde o subscrito 1 define o gás na corrente superior e o subscrito 2 o gás na corrente inferior.

2.2 Equações auxiliares

Para resolver o sistema de equações acima é necessário definir diversas equações auxiliares que representam o modelo usado para caracterizar os coeficientes de transporte dos gases, as propriedades de mistura e as propriedades termodinâmicas. Existem dois métodos diferentes normalmente utilizados para se trabalhar com os coeficientes de transportes: considerá-los como um valor constante, utilizando um valor médio ao longo de toda a secção transversal do domínio, ou considerá-los como variáveis. O impacto dessa escolha foi estudado nos trabalhos de [Shin e Ferziger \(1991\)](#) em uma camada de mistura com reação química, e [Kozusko et al. \(1996\)](#) para uma camada de mistura binária e compressível. Ambos concluíram que as taxas de amplificação obtidas usando coeficientes de transporte constantes são superestimadas.

Um estudo similar a este foi feito por [Fedioun e Lardjane \(2005\)](#) e também mostrou uma diferença significativa entre as duas formulações. Então é importante que para manter a precisão do código use-se um método preciso para se calcular os coeficientes de transporte da mistura de gases.

Para o caso de se calcular as propriedades termodinâmicas de uma mistura de gases, densidade, temperatura e pressão, os modelos de Amagat ou Dalton podem ser utilizados gerando o mesmo resultado. Por conveniência utilizou-se nesse trabalho o modelo de Amagat para a mistura, e ambos os gases foram tratados como gás ideal.

2.2.1 Pressão

Considerando o modelo de Amagat para mistura de gases a pressão parcial, ou seja a pressão sobre um gás em uma mistura e gases, é a mesma que a pressão total da mistura. Ou seja

$$p_{mix}^* = p_1^* = p_2^* \quad (2.7)$$

2.2.2 Massa específica

Para se calcular a massa específica da mistura é imposto que ambos os gases se comportam como gases ideais. Um gás ideal é aquele no qual as interações entre as partículas do gás podem ser descritas como colisões perfeitamente elásticas, ou seja, em que as forças nucleares podem ser desprezadas na interação entre partículas. [Çengel e Boles \(1996\)](#) consideram que hidrogênio e oxigênio podem ser considerados como gases ideais com uma tolerância razoável, principalmente em casos de pressões não muito elevadas e temperaturas não muito baixas.

Com isso é possível utilizar a lei do gás ideal para se ter uma relação entre a massa específica da mistura, temperatura e pressão

$$\rho_{mix}^* = \frac{P_{mix}^*}{T^* R_{mix}^*} \quad (2.8)$$

onde P_{mix}^* é a pressão da mistura, R_{mix}^* a constante do gás da mistura, T^* a temperatura e ρ_{mix}^* a massa específica da mistura.

2.2.3 Tensor de tensões viscosas

Os gases utilizados nesse trabalho, oxigênio e hidrogênio, são considerados fluidos Newtonianos, ou seja, a deformação apresentada pelo fluido tem uma relação linear com a tensão imposta sobre o mesmo. Sendo assim as equações que representam os termos de tensões viscosas para um fluido Newtoniano são as seguintes:

$$\tau_{xy}^* = \mu^* \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right), \tau_{xx}^* = \frac{2\mu^*}{3} \left(2\frac{\partial u^*}{\partial x^*} - \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right), \tau_{yy}^* = \frac{2\mu^*}{3} \left(-\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + 2\frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right), \quad (2.9)$$

onde μ^* é a viscosidade dinâmica da mistura. A viscosidade de cada uma das espécies ainda precisa ser calculada assim como o valor da viscosidade para a mistura entre as duas espécies.

Uma das maneiras mais precisas e recorrentes de se calcular a viscosidade de um fluido é utilizando um polinômio já validado. Provavelmente o polinômio mais utilizado é o formulado pela NASA em [Bride et al. \(1993\)](#). Esse polinômio leva em consideração mudanças da viscosidade devido a variações na temperatura, porém ignora mudanças causadas devido a variações na pressão. O polinômio usado aqui é o seguinte:

$$\ln \mu_{gas}^* = A_\mu \ln T^* + B_\mu T^{*-1} + C_\mu T^{*-2} + D_\mu, \quad (2.10)$$

Essa equação retorna o valor da viscosidade dinâmica, μ_{gas}^* , em micro-poise [μP] ou [$10^{-7} kg/m.s$], para uma espécie de gás, onde T^* é a temperatura medida em [K] e A_μ, B_μ, C_μ e D_μ são os coeficientes apresentados em [Bride et al. \(1993\)](#) para a espécie que se procura a viscosidade.

Para se calcular a viscosidade da mistura de gases e necessário usar o método de Chapman-Enskog dado pela Equação 2.11.

$$\mu_{mix}^* = \frac{X_{gas1} \mu_{gas1}^*}{X_{gas1} + X_{gas2} \phi_{12}} + \frac{X_{gas2} \mu_{gas2}^*}{X_{gas2} + X_{gas1} \phi_{21}}, \quad (2.11)$$

onde μ_{mix}^* , μ_{gas1}^* e μ_{gas2}^* são as viscosidade dinâmicas, respectivamente, da mistura, do gás na corrente superior e do gás na corrente inferior todos medidos em [$kg/m.s$].

X_{gas1} e X_{gas2} são as frações molares dos gases da corrente superior e inferior, respectivamente. ϕ_{12} e ϕ_{21} são parâmetros adimensionais definidos por Wilke usando o modelo de Sutherland. Apesar do modelo não ser tão preciso para gases diatômicos, a simplicidade do modelo faz com que o mesmo seja utilizado numa variedade de trabalhos de camada de mistura binária. Por isso utilizou-se a formulação de Wilke dada pelas equações 2.12 e 2.13

$$\phi_{12} = \frac{\left[1 + (\mu_{gas1}^*/\mu_{gas2}^*)^{1/2}(\mathcal{M}_2^*/\mathcal{M}_1^*)^{1/4}\right]^2}{[8(1 + \mathcal{M}_1^*/\mathcal{M}_2^*)]^{1/2}}, \quad (2.12)$$

$$\phi_{21} = \phi_{12} \frac{\mu_{gas2}^* \mathcal{M}_1^*}{\mu_{gas1}^* \mathcal{M}_2^*}, \quad (2.13)$$

onde \mathcal{M}_1^* e \mathcal{M}_2^* são as massas molares dos gases na corrente superior e inferior respectivamente, ambas medidas em [kg/kmol].

2.2.4 Fluxo de calor

O fluxo de calor, q_i^* , na Equação 2.4, precisa ser definido. Pode-se considerar que o fluxo de calor no problema acontece por dois fenômenos, devido a condução térmica, q_{cond}^* , e o fluxo de calor devido a interdifusão, q_{id}^* , sendo ignorado o fluxo de calor causado por radiação, ou seja:

$$q_x^* = q_{id,x}^* + q_{cond,x}^* \quad ; \quad q_y^* = q_{id,y}^* + q_{cond,y}^*. \quad (2.14)$$

Os termos de condução podem ser escritos através da lei de Fourier com a Equação 2.15:

$$q_x^* = -k^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*}, \quad q_y^* = -k^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*}, \quad (2.15)$$

onde k^* é a condutividade térmica.

O fluxo de calor devido a interdifusão expressa a energia térmica carregada devido a velocidade de difusão, que por sua vez acontece devido ao gradiente de concentração de massa. Em Kuo (1986) se escreve o termo segundo a Equação 2.16

$$q_{id,x}^* = \rho^* \sum h_i^* Y_i^* \mathbf{V}_i^*; \quad q_{id,y}^* = \rho^* \sum h_i^* Y_i^* \mathbf{V}_i^*, \quad (2.16)$$

onde h^* é a entalpia, \mathbf{V}^* a velocidade de difusão mássica e o subscrito i indica a espécie do gás da mistura. A velocidade de difusão por sua vez pode ser expressa através da lei Fick:

$$J_i^* = \rho_i^* \mathcal{D}^* \nabla Y_i^*. \quad (2.17)$$

Após algum algebrismo chegamos numa equação simplificada similar a lei de Fourier:

$$q_{id,x}^* = \rho^* h_1^* \mathcal{D}^* \frac{\partial Y_1^*}{\partial x^*} + \rho^* h_2^* \mathcal{D}^* \frac{\partial Y_2^*}{\partial x^*}, \quad q_{id,y}^* = \rho^* h_1^* \mathcal{D}^* \frac{\partial Y_1^*}{\partial y^*} + \rho^* h_2^* \mathcal{D}^* \frac{\partial Y_2^*}{\partial y^*}. \quad (2.18)$$

Da mesma maneira que a viscosidade é preciso calcular condutividade térmica da mistura de uma maneira precisa. Primeiramente é usado o polinômio da NASA dado por [Bride et al. \(1993\)](#), e expresso abaixo na Equação 2.19 para calcular a condutividade térmica de cada uma das espécies.

$$\ln k_{gas}^* = A_k \ln T^* + B_k T^{*-1} + C_k T^{*-2} + D_k, \quad (2.19)$$

onde k_{gas}^* é a condutividade térmica medida em [10^{-4} W/m.K], T^* a temperatura medida em [K] e A_k, B_k, C_k e D_k são os coeficientes apresentados em [Bride et al. \(1993\)](#).

Para calcular a condutividade térmica da mistura binária de gases o método de Wassiljewa é utilizado, análogo ao método de Champan-Enskog para a viscosidade.

$$k_{mix}^* = \frac{X_{gas1} k_{gas1}^*}{X_{gas1} + X_{gas2} \Upsilon_{12}} + \frac{X_{gas2} k_{gas2}^*}{X_{gas2} + X_{gas1} \Upsilon_{21}}, \quad (2.20)$$

onde k_{mix}^* , k_{gas1}^* e k_{gas2}^* são as condutividades térmicas, respectivamente, da mistura binária, do gás na corrente superior e do gás na corrente inferior todos medidos em [$W/kg.K$]. X_{gas1} e X_{gas2} são as frações molares do gás na corrente superior e inferior, respectivamente. Υ_{12} e Υ_{21} são parâmetros adimensionais definidos por

Mason e Saxana, como visto em Reid et al. (1977), e expressos pelas equações 2.21 e 2.22.

$$\Upsilon_{12} = \frac{[1 + (k_{gas1}^*/k_{gas2}^*)^{1/2}(\mathcal{M}_2^*/\mathcal{M}_1^*)^{1/4}]^2}{[8(1 + \mathcal{M}_1^*/\mathcal{M}_2^*)]^{1/2}}, \quad (2.21)$$

$$\Upsilon_{21} = \Upsilon_{12} \frac{k_{gas2}^* \mathcal{M}_1^*}{k_{gas1}^* \mathcal{M}_2^*}, \quad (2.22)$$

onde \mathcal{M}_1^* e \mathcal{M}_2^* são as massas molares do gás na corrente superior e inferior, respectivamente, medidas em [kg/mol].

2.2.5 Difusividade mássica

A difusão de massa pode ser afetada por diferentes parâmetros como temperatura, pressão e gradiente de concentração. O efeito da temperatura é conhecido como efeito Soret, e o da pressão é conhecido como efeito Duffour, ambos os efeitos são pequenos quando comparados com a difusão imposta pelo gradiente de concentração, então nesse trabalho os efeitos Duffour e Soret são desconsiderados. Para pressões baixas e moderadas a teoria de difusão é bem estabelecida, como apresentado por Reid et al. (1977). A equação 2.23 retorna a difusividade mássica, \mathcal{D}_{12}^* , medida em [m/s^2], entre o gás da corrente superior e o gás da corrente inferior:

$$\mathcal{D}_{12}^* = 1.858 \times 10^{-7} T^{*1.5} \frac{[(\mathcal{M}_1^* + \mathcal{M}_2^*)/\mathcal{M}_1^* \mathcal{M}_2^*]^{1/2}}{p^* \sigma_{12}^{*2} \Omega_D}, \quad (2.23)$$

onde \mathcal{M}_1^* e \mathcal{M}_2^* são as massas molares das espécies dos gases na corrente superior e inferior, respectivamente, medidas para essa equação em [kg/kmol], p a pressão da mistura medida para o uso nessa equação em [atm], σ_{12}^* , o comprimento característico medido em [Å] e Ω_D a integral de colisão, adimensional.

O comprimento característico, σ_{12} , é dado por:

$$\sigma_{12}^* = \frac{\sigma_1^* + \sigma_2^*}{2}, \quad (2.24)$$

onde σ_1^* é o diâmetro de colisão do gás da corrente superior e σ_2^* o diâmetro de colisão do gás na corrente inferior ambos medidos em [Å].

A integral de colisão, Ω_D , é calculada através da relação de Neufeld, apresentada em Reid et al. (1977), como:

$$\Omega_D = \frac{A}{T^B} + \frac{C}{\exp(D.T)} + \frac{E}{\exp(F.T)} + \frac{G}{\exp(H.T)}, \quad (2.25)$$

onde A, B, C, D, E, F, G e H são constantes adimensionais apresentadas no apêndice T é a temperatura adimensional calculada por:

$$T = k_B^* \frac{T^*}{\epsilon_{12}^*}, \quad (2.26)$$

onde k_B^* é a constante de Boltzmann medida em [10^{-7} J/K] e ϵ_{12}^* a constante da energia potencial de Lennard-Jones da mistura de gases medida em [10^{-7} J].

A constante da energia potencial de Lennard-Jones para a mistura pode ser encontrada através da equação a seguir:

$$\epsilon_{12}^* = (\epsilon_1^* \epsilon_2^*)^2, \quad (2.27)$$

onde ϵ_1^* é a constante de energia potencial do gás da corrente superior e ϵ_2^* a constante da energia potencial do gás da corrente inferior, ambos medidos em [Å].

2.2.6 Constante do gás

Fisicamente a constante do gás relaciona a escala da energia com a escala de temperatura, quando um mol da substância é analisado a uma dada temperatura. A constante do gás é dada pela Equação 2.28:

$$R_{gas}^* = \frac{R_{uni}^*}{\mathcal{M}_{gas}^*}, \quad (2.28)$$

onde R_{gas}^* é a constante do gás medida em [J/kg.K], R_{uni}^* a constante universal dos gases medida em [J/mol.K].

Para calcular o valor da constante do gás da mistura na base mássica a equação 2.29 é usada:

$$R_{mix}^* = R_{gas1}^* Y_1^* + R_{gas2}^* Y_2^*, \quad (2.29)$$

onde R_{mix}^* , R_{gas1}^* e R_{gas2}^* são respectivamente, a constante do gás da mistura, a constante do gás da corrente superior e a constante do gás da corrente inferior, todos medidos em [J/kg.K]. Y_1^* e Y_2^* são as frações mássicas da espécie da corrente superior e inferior respectivamente.

2.2.7 Calor específico a pressão constante

Ao invés de se fazer a consideração do gás como caloricamente perfeito, onde o calor específico do gás não muda com a variação da temperatura, utilizou-se a consideração de gás termicamente perfeito. Para descrever a variação do calor específico devido a temperatura usou-se o polinômio de sete termos descrito em [Bride et al. \(1993\)](#), dado por:

$$c_{p_{gas}}^* = R_{gas}^* (a_1 T^{*-2} + a_2 T^{*-1} + a_3 + a_4 T^{*1} + a_5 T^{*2} + a_6 T^{*3} + a_7 T^{*4}), \quad (2.30)$$

onde $c_{p_{gas}}^*$ é o calor específico a pressão constante medido em [J/kg.K] e a_1, \dots, a_7 são os coeficientes do polinômios para o oxigênio ou hidrogênio apresentado em [Bride et al. \(1993\)](#).

Para encontrar o calor específico a pressão constante da mistura de gases uma equação análoga a Equação 2.29 é utilizada.

$$c_{p_{mix}}^* = c_{p_{gas1}}^* Y_1^* + c_{p_{gas2}}^* Y_2^*, \quad (2.31)$$

onde é importante salientar que $c_{p_{gas}}^*$ precisa estar em [J/kg.K] para manter a consistência nas unidades.

2.2.8 Calor específico a volume constante

Para o calor específico a volume constante, $c_{v_{gas}}^*$, como o valor de $c_{p_{gas}}^*$ e de R_{gas}^* , já é conhecido podemos utilizar a definição da constante do gás dada pela Equação 2.32 para calculá-lo:

$$c_{v_{gas}}^* = c_{p_{gas}}^* - R_{gas}^*. \quad (2.32)$$

E para calcular o calor específico a volume constante da mistura uma equação análoga é utilizada:

$$c_{v_{mix}}^* = c_{v_{gas1}}^* Y_1^* + c_{v_{gas2}}^* Y_2^*, \quad (2.33)$$

onde também é importante salientar que $c_{v_{gas}}^*$ precisa estar em [J/kg.K] para manter consistência das unidades.

2.2.9 Energia interna

A energia interna de um gás ideal pode ser calculada por:

$$e^* = \int c_{v_{mix}}^* dT^*, \quad (2.34)$$

onde e^* é a energia interna medida em [J/kg].

Como a variação da temperatura é pequena, optou-se por usar uma versão simplificada da equação acima para evitar a integração numérica do calor específico com a temperatura ou de outro polinômio. Tornando assim a consideração como os gases sendo caloricamente perfeitos usando assim a seguinte equação para o cálculo da energia interna da mistura:

$$e^* = c_{v_{mix}}^* T^*, \quad (2.35)$$

2.3 Parâmetros adimensionais

Para se trabalhar com problemas sem se preocupar com os valores específicos de todas as variáveis usa-se as equações na forma adimensional. Fazendo isso um grupo de números adimensionais surge multiplicando diferentes termos nas equações de conservação, o que permite visualizar de forma direta como esses adimensionais afetam o problema. Nesta seção serão apresentados todos os números adimensionais que aparecem no desenvolvimento do trabalho, uma breve explicação de seu significado. Também serão apresentados parâmetros adimensionais que não aparecem

como resultados da adimensionalização do problema mas que não foram apresentados anteriormente, como a razão de calores específicos, a fração mássica e a fração molar.

2.3.1 Razão de calores específicos

A razão de calores específicos pode ser entendido como a relação entre a variação de entalpia e a variação de energia interna de um gás e pode ser expressa através da equação a seguir

$$\gamma = \frac{c_{p_{gas1}}^*}{c_{v_{gas1}}^*}, \quad (2.36)$$

onde γ é a razão de calores específico, $c_{p_{gas1}}$ o calor específico a pressão constante do gás da corrente superior medida em [J/kg.K] e $c_{v_{gas1}}$ o calor específico a volume constante do gás da corrente inferior medida em [J/kg.K]. Nesse trabalho será considerada que a razão de calores específicos do oxigênio e do hidrogênio são iguais.

2.3.2 Fração mássica

O uso da fração mássica so tem utilidade quando se trabalha com uma mistura de diferentes gases e representa a porcentagem de massa da mistura corresponde a cada espécie, ou de forma matemática:

$$Y_{gas1}^* = \frac{m_{gas1}^*}{m_{mix}^*}, \quad (2.37)$$

onde Y_{gas1}^* é a fração mássica do gás na corrente superior, m_{gas1}^* a massa do gás na corrente superior medida em [kg], e m_{mix}^* a massa total da mistura medida em [kg].

Como estamos trabalhando com uma mistura binária e sem reação química, uma vez que se sabe a fração mássica de uma espécie utiliza-se a Equação 2.38 para se encontrar a outra:

$$Y_{gas2}^* = 1 - Y_{gas1}^*. \quad (2.38)$$

Como neste trabalho o perfil inicial de fração mássica da espécie na corrente superior é dado, e a evolução temporal é calculada através da equação da conservação das

espécies apresentada no próximo capítulo somente a Equação 2.38 já é suficiente para calcular a fração mássica.

2.3.3 Fração molar

A fração molar pode ser descrita de forma analoga a fração mássica, porém ao invés de representar a porcentagem de massa, representa a porcentagem de mols e é necessária nos cálculos da viscosidade e condutividade térmica como mostrado nas equações 2.11 e 2.20. Conhecendo-se a fração mássica e o peso molecular das espécies pode se usar a equação apresentada em (TURNES, 1993) para se calcular a fração molar.

$$X_{gas1} = Y_{gas1}^* \frac{\mathcal{M}_{mix}^*}{\mathcal{M}_{gas1}^*}, \quad (2.39)$$

onde X_{gas1} é a fração molar do gás da corrente superior, Y_{gas1}^* é a fração mássica da corrente superior, \mathcal{M}_{gas1}^* o peso molecular do gás na corrente superior medido em [kg/mol] e \mathcal{M}_{mix}^* o peso molecular da mistura medido em [kg/mol].

2.3.4 Número de Mach

A velocidade do som é aquela na qual as perturbações acústicas se propagam. A razão entre a velocidade do som e a velocidade convectiva do escoamento é definida como número de Mach e pode ser interpretada como a razão entre a energia cinética e energia interna do escoamento como explicado em Anderson (2003).

Neste trabalho utilizou-se como velocidade característica a velocidade de convecção da corrente superior, U_1 , então:

$$M_1 = \frac{U_1^*}{a_1^*}, \quad (2.40)$$

onde M_1^* é o número de Mach relacionado ao escoamento superior e a_1^* a velocidade do som para o gás na corrente superior medida em [m/s], e pode ser calculada através da expressão:

$$a_1^{*2} = \gamma_1^* R_1^* T_1^*, \quad (2.41)$$

2.3.5 Número de Mach convectivo

É importante salientar a diferença entre o número de Mach que aparece nas equações de conservação como resultado da adimensionalização e das variáveis características escolhidas e o Mach convectivo que mede realmente o efeito da compressibilidade atuando sobre a camada de mistura binária. Em [Kozusko et al. \(1996\)](#) é apresentada uma relação entre o número de Mach e o número de Mach convectivo, onde se demonstra que o Mach convectivo é um fator importante alterando consideravelmente a taxa de amplificação em uma camada de mistura binária compressível. O estudo também descobriu que a direção da estratificação da massa específica tem praticamente nenhum impacto na taxa de amplificação. Para fluidos com mesma razão de calores específicos, o que consideraremos nesse trabalho, a Equação 2.42 define o valor de Mach convectivo para uma camada de mistura binária

$$M_c = M_1 \frac{(1 - U_1^*/U_2^*)}{(1 + \sqrt{\rho_1^*/\rho_2^*})}, \quad (2.42)$$

onde M_c é o número de Mach convectivo, M_1 o número de Mach da corrente superior, U_1^* e U_2^* são as velocidade das correntes superior e inferior, respectivamente, e ρ_1^* e ρ_2^* são as massas específicas da corrente superior e inferior respectivamente.

2.3.6 Número de Reynolds

Presente em praticamente todos os problemas onde a viscosidade do fluido precisa ser considerada, o número de Reynolds representa uma relação entre forças inerciais e forças viscosas. O número de Reynolds é definido por:

$$Re_1 = \frac{\rho_1^* U_1^* \delta_w^*}{\mu_1^*}, \quad (2.43)$$

onde Re_1^* é o número de Reynolds com respeito as propriedades da corrente livre superior, U_1^* a velocidade da corrente superior medida em [m/s], ρ_1^* a massa específica do gás na corrente superior medida em [kg/m³] e δ_w^* o comprimento característico, que nesse trabalho é usado a espessura de vorticidade medida em [m].

A espessura de vorticidade é calculada pela expressão:

$$\delta_w^* = \frac{U_1^* - U_2^*}{|du^*/dy^*|_{max}}, \quad (2.44)$$

onde $U_1^* - U_2^*$ é a diferença entre as velocidade das correntes livre superior e inferior e $|du^*/dy^*|_{max}$ o máximo gradiente da velocidade do perfil inicial.

2.3.7 Número de Prandlt

O número de Prandlt aparece em problemas onde esta presente difusão de energia térmica e cinética, onde, segundo Incropera (1994), o número de Prandlt pode ser visto como uma relação entre os dois fenômenos. A Equação 2.45 é a definição matemática do número de Prandlt:

$$Pr_1 = \frac{\mu_{gas1}^* c_{p_{gas1}}^*}{k_{gas1}^*}, \quad (2.45)$$

onde Pr_1 é o número de Prandlt, μ_{gas1}^* a viscosidade dinâmica medida em [kg/m s], $c_{p_{gas1}}^*$ o calor específico a pressão constante medido em [J/kg K] e k_{gas1}^* a condutividade térmica medida em [W/m K], todas remetendo ao gás das corrente livre superior.

2.3.8 Número de Lewis

O número de Lewis relaciona os efeitos da difusividade de massa e da difusividade térmica e pode ser definido como:

$$Le_1 = \frac{k_{gas1}^*}{\rho_{gas1}^* c_{p_{gas1}}^* D_{12}^*}, \quad (2.46)$$

onde Le_1 é o número de Lewis, $c_{p_{gas1}}^*$ o calor específico a pressão constante medida em [J/kg K], e k_{gas1}^* a condutividade térmica medida em [W/m K], todas remetendo ao gás da corrente livre superior. D_{12}^* é a difusividade mássica medida em [m/s],

2.3.9 Número de Froude

Presente apenas em problemas onde forças de campo são consideradas, o número de Froude pode ser entendido como uma relação entre as forças inercias e as forças de empuxo, causada pela diferença de massa específica e da gravidade. Quanto menor o número de Froude mais significante é a força de empuxo no problema, isto é:

$$Fr_1 = \frac{U_1^*}{\sqrt{\delta_w^* g^*}}, \quad (2.47)$$

onde Fr_1 é o número de Froude, δ_w^* a espessura de vorticidade já definida pela Equação 2.44 medida em [m], U_1^* a velocidade na corrente livre superior medida em [m/s] e g^* a aceleração da gravidade medida em [m/s^2].

2.4 Variáveis características e equações adimensionais

As variáveis características escolhidas para adimensionalizar o problema são referentes a camada superior do escoamento com excessão do comprimento característico, onde a espessura de vorticidade é escolhida. Abaixo os valores das variáveis adimensionais e sua relação com as variáveis características:

$$t = \frac{U_1^* t^*}{\delta_w^*}, \quad x = \frac{x^*}{\delta_w^*}, \quad y = \frac{y^*}{\delta_w^*}, \quad u = \frac{u^*}{U_1^*}, \quad v = \frac{v^*}{U_1^*}, \quad k = \frac{k^*}{k_1^*}, \quad (2.48)$$

$$p = \frac{p^*}{\rho_1^* U_1^{*2}}, \quad T = \frac{T^*}{T_1^*}, \quad \rho = \frac{\rho^*}{\rho_1^*}, \quad E_t = \frac{E_t^*}{\rho_1^* U_1^{*2}}, \quad \mu = \frac{\mu^*}{\mu_1^*}, \quad Y_I = \frac{Y_I^*}{Y_1^*}.$$

Substituindo as variáveis adimensionais nas equações de 2.1 a 2.5, transforma-se as equações nas suas formas adimensionais escritas abaixo de 2.49 a 2.53:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \quad (2.49)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + p - \frac{1}{Re_1} \tau_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho uv - \frac{1}{Re_1} \tau_{xy}) = 0 \quad (2.50)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho uv - \frac{1}{Re_1} \tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v^2 + p - \frac{1}{Re_1} \tau_{yy}) + \frac{\rho}{Fr^2} = 0 \quad (2.51)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(E_t) + \frac{\partial}{\partial x} \left[(E_t + p)u + q_x - \frac{1}{Re_1} \tau_{xx} - \frac{1}{Re_1} \tau_{xy} \right] + \\ \frac{\partial}{\partial y} \left[(E_t + p)v + q_y - \frac{1}{Re_1} \tau_{xy} - \frac{1}{Re_1} \tau_{yy} \right] + \frac{\rho v}{Fr^2} = 0 \end{aligned} \quad (2.52)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho Y_I) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho u Y_I - \frac{1}{Re_1 Pr_1 Le_1} \rho \mathcal{D} \frac{\partial Y_I}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho v Y_I - \frac{1}{Re_1 Pr_1 Le_1} \rho \mathcal{D} \frac{\partial Y_I}{\partial y} \right) = 0, \quad (2.53)$$

onde q_x e q_y são os fluxos de calor devido a condução e interdifusão e pode ser expresso na forma adimensional através de:

$$q_x = \frac{1}{(\gamma - 1)Ma^2 Pr Re} \frac{\partial}{\partial x} k \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{1}{Pr Le Re} \frac{\partial}{\partial x} \rho \mathcal{D} h_i \frac{\partial Y_i}{\partial x} \quad (2.54)$$

e

$$q_y = \frac{1}{(\gamma - 1)Ma^2 Pr Re} \frac{\partial}{\partial y} k \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{1}{Pr Le Re} \frac{\partial}{\partial y} \rho \mathcal{D} h_i \frac{\partial Y_i}{\partial y}. \quad (2.55)$$

Não somente as equações governantes mas também as equações de fechamento precisam ser adimensionalizadas. Abaixo mostra-se a lei do gás ideal, 2.56, a relação termodinâmica entre energia interna e temperatura, 2.57, a constante de gás da mistura, 2.58, o calor específico a volume constante, 2.59, a relação de Chapman-Eskog, 2.60 e a relação de Wassiljewa 2.61, tal que:

$$P = \frac{\rho R T}{Ma_1^2 \gamma}, \quad (2.56)$$

$$c_v T = Ma_1^2 \gamma (\gamma - 1) e, \quad (2.57)$$

$$R = Y_1 + \frac{R_{gas2}^*}{R_{gas1}^*} Y_2, \quad (2.58)$$

$$c_v = Y_1 + \frac{C_{v_{gas2}}^*}{C_{v_{gas1}}^*} Y_2, \quad (2.59)$$

$$\mu = \frac{X_{gas1}}{X_{gas1} + X_{gas2} \phi_{12}} + \frac{X_{gas2} \mu_{gas2} / \mu_{gas1}}{X_{gas2} + X_{gas1} \phi_{21}}, \quad (2.60)$$

$$k = \frac{X_{gas1}}{X_{gas1} + X_{gas2} \Upsilon_{12}} + \frac{X_{gas2} k_{gas2} / k_{gas1}}{X_{gas2} + X_{gas1} \Upsilon_{21}}, \quad (2.61)$$

onde Re_1 , Pr_1 , Ma_1 , Le_1 e Fr_1 são os número de Reynolds, Prandtl, Mach, Lewis e Froude respectivamente e γ é a razão de calores específicos, todos já apresentados no capítulo anterior.

2.4.1 Condição inicial e de contorno

Uma vez que todas as equação foram adimensionalizadas é preciso definir as condições de contorno e iniciais do problema. É preciso usar condições adequadas de acordo com a física do problema. Nesse caso queremos simular um caso de duas correntes distintas de escoamento laminar que já tem um perfil de mistura inicial e então uma perturbação é inserida. Para isso as condições iniciais são as propriedades das variáveis do escoamento base mais a perturbação. Nesse trabalho se introduziu as perturbações nas variáveis da velocidade.

$$u(x, y, 0) = u_L(y) + u'(x, y), \quad (2.62)$$

$$v(x, y, 0) = v_L(y) + v'(x, y), \quad (2.63)$$

$$T(x, y, 0) = T_L(y), \quad (2.64)$$

$$p(x, y, 0) = p_L(y), \quad (2.65)$$

$$\rho(x, y, 0) = \rho_L(y), \quad (2.66)$$

$$E_t(x, y, 0) = E_{tL}(y), \quad (2.67)$$

$$e(x, y, 0) = e_L(y), \quad (2.68)$$

$$Y_1(x, y, 0) = Y_{1L}(y), \quad (2.69)$$

onde o subscrito L representa a fração do escoamento laminar e o sobrescrito ()' representa a fracção da perturbação. A velocidade u_L do escoamento laminar base assim como a fracção molar no instante inicial são definidas por uma tangente hiperbólica nas equações 2.70 e 2.71, respectivamente. O perfil da velocidade normal é zero no instante inicial uma vez que temos um escoamento paralelo, dessa maneira, após certa modificação que será explicada na Seção 2.5.4 podemos capturar o crescimento das perturbações através da variável v :

$$u_L(y) = \frac{(U_1 + U_2)}{2} + \frac{(U_1 - U_2)}{2} \tanh\left(\frac{2y}{\delta}\right), \quad (2.70)$$

$$Y_{1L}(y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{2y}{\delta}\right), \quad (2.71)$$

$$v_L(y) = 0. \quad (2.72)$$

Os perfis de temperatura e pressão base inicialmente foram considerados constantes

ao longo de todo o domínio e com o mesmo valor da corrente livre superior. Ao fazer isso está sendo desconsiderada a diferença de pressão devido a força hidrostática no escoamento base. Isto é possível pois a modelagem do problema tem como objetivo sistemas propulsivos e não modelos atmosféricos, que por sua vez tem um comprimento vertical baixo, o que em conjunto com o baixo valor da massa específica dos gases serve como uma boa hipótese.

$$T_L(y) = 1, \quad P_L(y) = 1. \quad (2.73)$$

A distribuição inicial da massa específica é calculada através da lei do estado adimensionalizada, 2.56, e a energia interna é calculada usando a Equação simplificada para temperatura constante do gás perfeito, 2.74.

$$e_L(y) = \frac{c_v T}{Ma_1^2 \gamma (\gamma - 1)}. \quad (2.74)$$

A perturbação é imposta através dos perfis de velocidade com uma função com variação trigonométrica na direção longitudinal e multiplicada por uma função com um decaimento exponencial com y para a perturbação ser significativa somente na região da camada de mistura, decaindo fora da mesma.

$$u' = 2\sigma y e^{-(\sigma y^2)} \left[\frac{A_1 \cos(\alpha_1 x)}{\alpha_1} + \frac{A_2 \cos(\alpha_2 x)}{\alpha_2} \right], \quad (2.75)$$

$$v' = y e^{-(\sigma y^2)} [A_1 \sin(\alpha_1 x) + A_2 \sin(\alpha_2 x)], \quad (2.76)$$

onde σ é a variância, que é igual a $2\delta_w^{-1}$ e, A_1 e A_2 são as amplitudes da onda relacionadas aos números de onda α_1 e α_2 .

As condições de contorno de cima e de baixo do domínio são simplesmente os valores das variáveis da corrente livre superior e inferior:

$$u(y \rightarrow +\infty) = U_1, u(y \rightarrow -\infty) = U_2, \quad (2.77)$$

$$v(y \rightarrow +\infty) = 0, v(y \rightarrow -\infty) = 0, \quad (2.78)$$

$$T(y \rightarrow +\infty) = T_1, T(y \rightarrow -\infty) = T_2, \quad (2.79)$$

$$P(y \rightarrow +\infty) = P_1, v(y \rightarrow -\infty) = P_2, \quad (2.80)$$

$$\rho(y \rightarrow +\infty) = \rho_1, \rho(y \rightarrow -\infty) = \rho_2, \quad (2.81)$$

$$E_t(y \rightarrow +\infty) = E_{t,1}, E_t(y \rightarrow -\infty) = E_{t,2}, \quad (2.82)$$

$$e(y \rightarrow +\infty) = e_1, e(y \rightarrow -\infty) = e_2. \quad (2.83)$$

Já na direção longitudinal, uma vez que está se usando uma análise temporal centrada na onda, se pode usar uma condição periódica e definir o tamanho do domínio longitudinal a partir do número de onda $\lambda = L_x$ da seguinte maneira:

$$u(x, y) = u(x + L_x, y), \quad (2.84)$$

$$v(x, y) = v(x + L_x, y), \quad (2.85)$$

$$T(x, y) = T(x + L_x, y), \quad (2.86)$$

$$P(x, y) = P(x + L_x, y), \quad (2.87)$$

$$\rho(x, y) = \rho(x + L_x, y), \quad (2.88)$$

$$E_t(x, y) = E_t(x + L_x, y), \quad (2.89)$$

$$e(x, y) = e(x + L_x, y). \quad (2.90)$$

2.5 Método numérico

Existem diferentes métodos para se resolver escoamentos turbulentos através da solução numérica das equações de Navier-Stokes, sendo a principal diferença entre eles é como os termos de tensões turbulentas são modelados. Os principais modelos atuais são:

- Simulação de Grandes Escalas (Large Eddy Simulation - LES)
- Simulação considerando as médias de Reynolds (Reynolds Average Navier-Stokes Simulation - RANS)
- Simulação Numérica Direta - SND (Direct Numerical Simulation - DNS).

Cada um desses métodos é melhor empregado para diferentes situações de acordo com o que ele se propõe. A LES simula somente as equações de conservação nas maiores escalas do problema, tendo um modelo de sub-malha desenvolvido para resolver as demais escalas do problema. Isto torna este método menos custoso computacionalmente e portanto mais vantajoso para se resolver problemas com uma complexidade maior. Em contrapartida a elaboração de um modelo de sub-malha confiável e preciso pode ser um desafio.

A formulação RANS é uma ferramenta muito utilizada industrialmente para a simulação de escoamentos turbulentos. Nela as equações são reescritas usando-se a suposição de média de Reynolds e modelam-se especificamente os termos de flutuações através de equação extras de fechamento, essas flutuações são resultado da simplificação das equações.

A SND por sua vez resolve completamente todas as escalas, sem nenhuma simplificação ou alteração das equações de conservação. Apesar de sua simplicidade, ela denota um alto custo computacional e normalmente é limitada para problemas em que o domínio numérico não seja grande ou com uma geometria do escoamento muito complicada, o que faz dela a ferramenta mais adequada para pesquisas como esta, uma vez que o problema não apresenta uma topologia de escoamento complicado ou um domínio grande.

O método SND utilizado aqui, usa diferenças finitas para resolver numericamente as derivadas nas equações de conservação. Devido ao fato de as perturbações, e por extensão, a instabilidade de Kelvin-Helmoltz serem oscilações pequenas no valor do escoamento base, o método precisa ter um erro numérico bastante baixo para que o mesmo não afete a solução do problema.

Também é importante notar que o problema a ser analisado tem derivadas espaciais em duas direções e derivadas temporais. A estratégia para resolver cada uma dessas derivadas é diferente. No caso da discretização espacial será utilizado um método de diferenças finitas de quarta ordem, sendo centrada nos pontos internos e deslocada nos pontos próximos a fronteira do domínio na direção normal, assim como nos trabalhos de [Lele \(1992\)](#) e [Mahesh \(1998\)](#)). Nos termos de derivada temporal, o método utilizado é o de Runge-Kutta de quarta ordem de precisão [Ferziger e Peric \(1997\)](#).

2.5.1 Domínio

Teoricamente a simulação de uma mistura binária através de uma análise temporal consiste em duas correntes de fluidos sobrepostas escoando em direções opostas em um domínio infinito em ambas as direções e recebendo uma perturbação entre as duas correntes. Como é necessário resolver o problema de forma numérica, um domínio finito é essencial, e para definir o tamanho desse domínio algumas considerações precisam ser avaliadas.

Para o tamanho longitudinal do domínio usa-se a condição de periodicidade do escoamento. Como foi introduzida uma perturbação com uma função periódica com número de onda λ , e também uma segunda com a metade do número de onda da primeira, o tamanho do domínio deve ser um múltiplo inteiro do maior comprimento de onda. Sendo assim para cada onda completa dentro do domínio um vórtice de Kelvin-Helmholtz deve aparecer para a periodicidade ser respeitada, e para economia usou-se o mesmo tamanho do maior número de onda entre as duas perturbações impostas.

Para a direção normal teoricamente o domínio só precisaria ser grande o suficiente para capturar a camada de mistura e todo o fenômeno da evolução das perturbações até os vórtices de Kelvin-Helmholtz. Porém como está se simulando um ambiente sem fronteiras físicas em nenhuma simulação, seria indicado usar condições de contorno não-reflexivas nas fronteiras superior e inferior. Devido a isso instabilidades numéricas irradiando da meio do domínio são refletidas nos contornos superior e inferior e podem afetar ao longo do tempo o resultado da simulação. Para que se evite que isso aconteça a solução mais simples é de aumentar o domínio vertical de maneira que o tempo necessária para as instabilidades percorrerem todo o domínio e refletirem de maneira significativa seja maior que o tempo de simulação desejado. Nesse caso se optou por um tamanho vertical de 24 vezes maior que espessura da camada de mistura.

Para determinar o tamanho da malha um teste de independência de malha foi realizado e será mostrado na Seção 4.3. Para se determinar o intervalo em ambas as direções se divide o tamanho do domínio pela número de pontos da malha nas respectivas direções.

Para o intervalo na direção longitudinal:

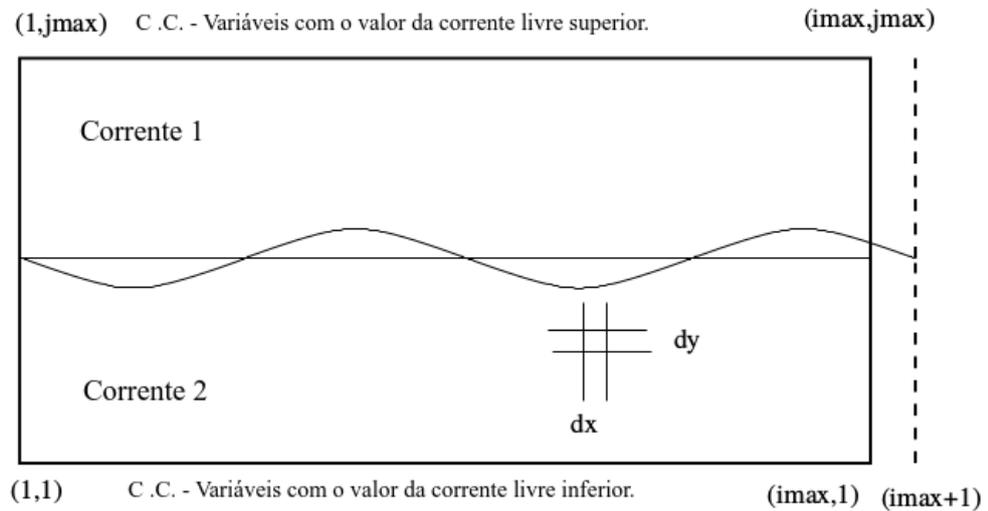
$$dx = \frac{L_x}{imax}, \quad (2.91)$$

E para o intervalo na direção normal:

$$dy = \frac{L_y}{jmax}, \quad (2.92)$$

A Figura 2.1 mostra uma representação do domínio.

Figura 2.1 - Domínio numérico do problema.



Fonte: Adaptado de Quirino (2006).

2.5.2 Derivadas temporais

Para resolver o problema transiente é necessário um passo de tempo, Δt , de tal maneira que não seja tão grande que não capture os fenômenos nas menores escalas e nem tão pequeno que torna a simulação inviável devido ao longo tempo computacional. Para isso um critério de estabilidade é utilizado usando o número de Courant, C , da mesma maneira que Sandham (1990).

$$\Delta t = \frac{C}{a}, \quad (2.93)$$

onde

$$a = \pi \left[\frac{1}{M_1} \left(\frac{1}{dx} + \frac{1}{dy} \right) + \left(\frac{|u|}{dx} + \frac{|v|}{dy} \right) + \frac{T^{0.65}}{\rho(\gamma - 1)M_1^2 Pr_1 Re_1} \left(\frac{1}{dx} + \frac{1}{dy} \right) \right], \quad (2.94)$$

onde as variáveis dx e dy são os passos dimensionais escolhidas na direções longitudinal e normal, respectivamente. Nesse trabalho usou-se $C = 0,9$ para todos os casos. O método para resolver o passo temporal da simulação é através de um método de Runge-Kutta condicionalmente estável de 4 passo que pode ser descrita conforme abaixo:

$$f_{n+1/2}^* = f^n + \frac{\Delta}{2} f(t_n, f_n), \quad (2.95)$$

$$f_{n+1/2}^{**} = f^n + \frac{\Delta}{2} f(t_{n+1/2}, f_{n+1/2}^*), \quad (2.96)$$

$$f_{k+1/2}^* = f^n + \Delta f(t_{n+1/2}, f_{k+1/2}^{**}), \quad (2.97)$$

$$f^{n+1} = f^n + \frac{\Delta}{6} \left[f(t_n, f_n) + 2f(t_{n+1/2}, f_{n+1/2}^*) + 2f(t_{n+1/2}, f_{n+1/2}^{**}) + f(t_{n+1}, f_{n+1}^*) \right]. \quad (2.98)$$

2.5.3 Derivadas espaciais e condições de contorno

Para resolver o problema espacial usou-se um método de diferenças finitas simples com um extêncil de quarta ordem centrada para todas as derivadas de primeira e segunda ordem, com exceção aos pontos próximos a fronteira. Ou seja as derivadas em x de primeira ordem para uma variável qualquer ϕ é calculada a partir do extêncil 2.99, e para derivadas em x de segunda ordem usa-se o extêncil 2.100

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_{i,j} = \left[\frac{-\phi(i+2,j) + 8\phi(i+1,j) - 8\phi(i-1,j) + \phi(i-2,j)}{12dx}\right], \quad (2.99)$$

$$\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)_{i,j} = \left[\frac{-\phi(i+2,j) + 16\phi(i+1,j) - 30\phi(i,j) + 16\phi(i-1,j) - \phi(i-2,j)}{12dx^2}\right], \quad (2.100)$$

onde i significa pontos na direção longitudinal e j pontos na direção normal.

Para os pontos próximo das fronteiras direita e esquerda a periodicidade pode ser utilizada de maneira que os pontos fora do domínio tem os valores dos pontos da fronteira oposta de maneira exposta na Equação 2.101 seguinte maneira. Assim os extêncis mostrados nas equações 2.99 e 2.100 podem ser utilizadas.

$$\phi(1, y) = \phi(imax + 1, y). \quad (2.101)$$

Analogamente os pontos $i = 2$ são iguais que para os pontos $i = n + 2$.

Para derivadas na direção normal usamos os mesmos extêncis mostrados anteriormente porém com a variação dos pontos j e não em i . Porém, diferentemente da direção x os mesmos extêncis não podem ser utilizado nos pontos próximos a fronteira superior e inferior uma vez que não temos a condição de periodicidade nessa direção. Devido a isso usa-se diferentes extêncis para diferentes linhas. No caso das derivadas de primeira ordem para os pontos ($j = 1$ e $j = jmax$), usa-se um extêncil de segunda ordem deslocado conforme a Equação 2.102. Para pontos adjacentes a fronteira ($j = 2$ e $j = jmax - 1$) o extêncil utilizado é um de segunda ordem centrado conforme 2.103.

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)_{jmin} = \left[\frac{-3\phi(i,j) + 2\phi(i,j+1) - \phi(i,j+2)}{2dx}\right]. \quad (2.102)$$

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)_{jmin+1} = \left[\frac{\phi(i,j+1) - \phi(i,j-1)}{2dx}\right]. \quad (2.103)$$

Para as derivadas de segunda ordem, no caso dos pontos adjacentes a fronteira, usa-se um extêncil de segunda ordem centrado.

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{jmin} = \left[\frac{\phi(i, j-1) - 2\phi(i, j) + \phi(i, j+1)}{dx^2}\right]. \quad (2.104)$$

Para pontos na fronteira um extencil de segunda ordem deslocado.

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}\right)_{jmin} = \left[\frac{2\phi(i, j) - 5\phi(i, j+1) + 4\phi(i, j+2) - \phi(i, j+3)}{dx^2}\right]. \quad (2.105)$$

Como é imposto que a fronteira superior e inferior ambas tenham os valores das variáveis da corrente livre, é imposta numericamente que os valores das derivadas nesses pontos devam ser sempre zero:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)_{jmax} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)_{jmix} = 0. \quad (2.106)$$

Como comentado anteriormente essas condições escolhidas não são as ideias para o problema devido ao efeito da reflexão.

2.5.4 Tratamento de dados devido ao empuxo

A formulação do código resolve o problema para um escoamento instantâneo, ou seja as variáveis simuladas em todos os instantes são a soma da parte base e da perturbação como mostrado na Sub-seção 2.4.1.

A maneira como encontramos a taxa de amplificação das perturbações, ω , é avaliando o incremento sofrido pela componente de velocidade na direção normal, v . Ou seja a velocidade na direção y depende de:

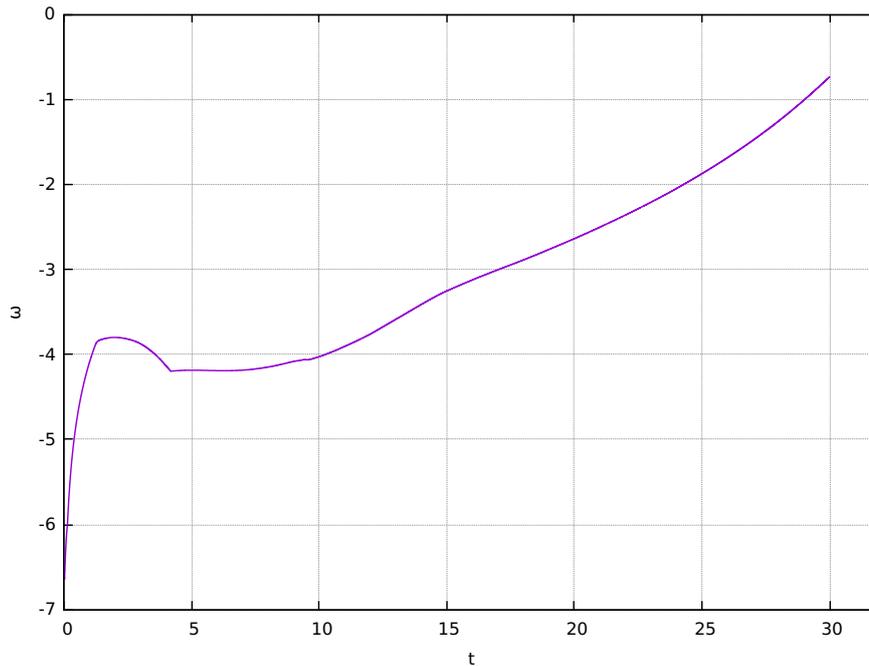
$$v(x, y, t) = v_l(x, y, t) + v'(x, y, t), \quad (2.107)$$

onde v é a velocidade instantânea, v_l a velocidade normal do escoamento base e v' a velocidade normal da perturbação.

Como $v_l(x, y, 0) = 0$, e se o problema não propiciar o aumento da velocidade na direção normal referente ao escoamento base, v_l , podemos usar esse método pois ao avaliar a velocidade normal instantânea o único efeito sobre ela é o da perturbação. O problema é que ao considerarmos a força de campo provocado pela gravidade e

ignorarmos a diferença de pressão devido a hidroestática, naturalmente a velocidade normal base crescerá com o tempo, $v_l(x, y, t) \neq zero$, comprometendo a única variável somente que somente dependia da perturbação. Em um gráfico logarítmico de v por t espera-se ver uma linha reta após um certo tempo onde a inclinação da reta indica a taxa de amplificação, ω . A seguir está o gráfico obtido:

Figura 2.2 - Evolução das perturbação antes da modificação devido ao empuxo.



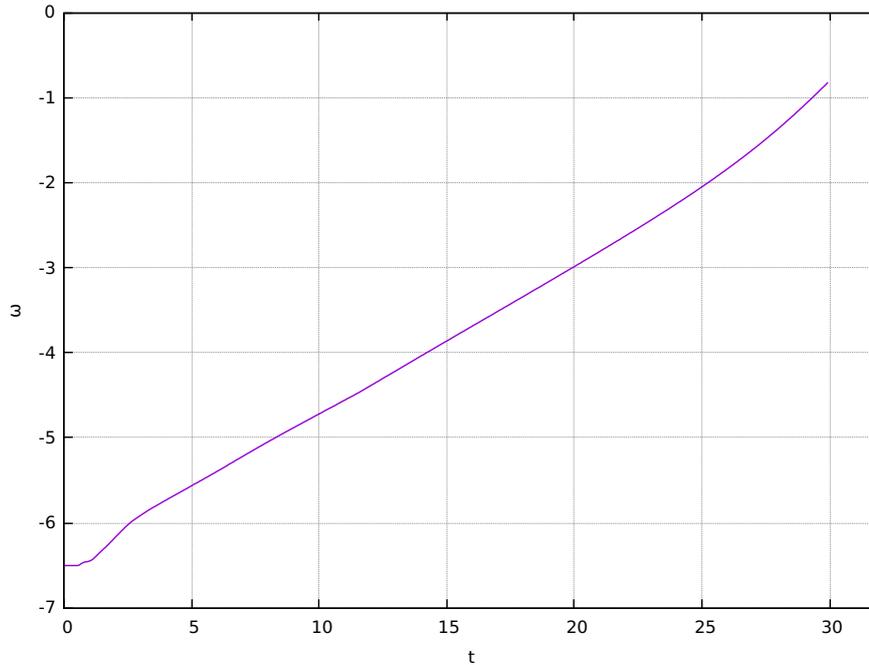
Fonte: Produzido pelo Autor.

Muito diferente do que se esperava, devido ao erro de v não ser somente dependente das perturbações.

Para resolver isso usa-se a propriedade de linearidade da perturbação, ou seja, durante o crescimento linear das amplificações pode-se operar matematicamente as variáveis de duas simulações sem erro na resposta final. Então simula-se dois casos ao mesmo tempo com os mesmos parâmetros, porém um somente com o escoamento base, sem a excitação das perturbações das equações 2.75 e 2.76, e um com as perturbações, ambas utilizando o mesmo como passo temporal (tomando cuidado para este passo de tempo imposto ser menor que o passo obtido pela Equação 2.93 de ambas as simulações). A cada 50 iterações é escrito um arquivo de saída com a matriz da velocidade normal de cada uma das simulações, e após o fim das simulações

de ambas utiliza-se um programa auxiliar para se subtrair a matriz de velocidade instantânea do escoamento sem perturbação do escoamento com perturbação, retornando a variável v a ser independente do escoamento base.

Figura 2.3 - Evolução das perturbação depois da modificação devido ao empuxo..



Fonte: Produzido pelo Autor.

A Figura 2.3 mostra o gráfico logarítmico da velocidade instantânea v pelo tempo t quando o processo explicado acima é realizado, obtendo um resultado muito mais perto de uma reta na qual a taxa de amplificação pode ser extraída.

3 METODOLOGIA DA ABORDAGEM LST

Neste capítulo são apresentadas as equações governantes e auxiliares para resolver o problema de camada de mistura binária sobre a influência do empuxo através de análise de estabilidade linear. Na Seção 3.1 são expostas as considerações usadas, as equações governantes já linearizadas do problema, a transformação de variável feita para simplificar ainda mais o sistema de equação e por final a equação governante do problema que relaciona os diferentes parâmetros que influenciam no problema de camada de mistura binária. Na Seção 3.2 o esquema numérico utilizado para solucionar a equação encontrada é detalhado assim como as condições iniciais do escoamento base utilizadas.

3.1 Análise de estabilidade linear.

As equações de conservação usadas para deduzir as equações linearizadas são as mesmas que as usadas no SND mas com condições ligeiramente diferente. As considerações são:

- Escoamento laminar.
- Escoamento base bidimensional.
- Compressível.
- Invíscido.
- Força de campo somente na direção normal
- Radiação térmica desprezível.
- Sem reação química.
- Gás termicamente perfeito.
- Gás ideal.

É importante salientar que apesar de estarmos deduzindo a partir de um caso com uma perturbação em 3-D nesta seção, essa condição é usada para se obter uma equação mais genérica, mas será mostrado mais a frente uma simplificação que torna o problema comparável com o caso de uma perturbação somente em duas dimensões. As equações de conservação são utilizadas na forma adimensional com as mesmas variáveis características que no caso da formulação para o SND.

As equações para a análise de estabilidade linear são deduzidas a partir das equações de conservação substituindo as variáveis por uma parte referente ao escoamento base e uma parte referente a perturbação. É assumido solução por modos normais para as perturbações, sendo as variáveis expressas da seguinte forma:

$$\Phi^l(x, y, z, t) = \Re \left\{ \widehat{\Phi}(y) \exp [i(\alpha x + \beta z - \omega t)] \right\}, \quad (3.1)$$

onde Φ^l é a perturbação da variável dependente e $\widehat{\Phi}$ é a autofunção correspondente.

As equações são linearizadas, ou seja os termos não lineares são desprezados. O grupo de equações resultante para o problema da camada de mistura compressível binária sobre a influência da força de empuxo é:

$$\hat{\rho}i(\alpha\bar{u} - \omega) + \hat{v}\frac{d\bar{\rho}}{dy} + \bar{\rho} \left[i(\alpha\hat{u} + \beta w') + \frac{d\hat{v}}{dy} \right] = 0, \quad (3.2)$$

$$\hat{u}i(\alpha\bar{u} - \omega) + \hat{v}\frac{d\bar{u}}{dy} = -\frac{i\alpha\hat{p}}{\bar{\rho}\gamma Ma_1^2}, \quad (3.3)$$

$$\hat{v}i(\alpha\bar{u} - \omega) = -\frac{1}{\bar{\rho}\gamma Ma_1^2} \frac{d\hat{p}}{dy} - \frac{\hat{p}}{\bar{\rho}Fr^2}, \quad (3.4)$$

$$\hat{w}i(\alpha\bar{u} - \omega) = -\frac{i\beta\hat{p}}{\bar{\rho}\gamma Ma_1^2}, \quad (3.5)$$

$$\hat{T}i(\alpha\bar{u} - \omega) + \hat{v}\frac{d\bar{T}}{dy} + \frac{(\gamma - 1)}{\bar{\rho}\bar{R}} \left[i(\alpha\hat{u} + \beta\hat{w}) + \frac{d\hat{v}}{dy} \right] = 0, \quad (3.6)$$

$$\hat{Y}_1 i(\alpha\bar{u} - \omega) + \hat{v}\frac{d\bar{Y}_1}{dy} = 0, \quad (3.7)$$

$$\hat{p} = \bar{\rho}\bar{R}\hat{T} + \bar{\rho}\hat{R}\bar{T} + \hat{\rho}\bar{R}\bar{T}. \quad (3.8)$$

Com esse sistema de equações, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5, 3.6, 3.7 e 3.8 é possível depois de algum algebrismo transformar em um sistema de somente duas equações:

$$(\alpha\bar{u} - \omega) \frac{d\hat{v}}{dy} - \alpha \hat{v} \frac{d\bar{u}}{dy} = \frac{i\alpha^2 G \hat{p}}{\gamma Ma_1^2}, \quad (3.9)$$

$$\bar{\rho}\alpha(\alpha\bar{u} - \omega) + \frac{\alpha}{\hat{v}(\alpha\bar{u} - \omega)Fr^2} \left[\hat{v} \frac{d\bar{\rho}}{dy} + \bar{\rho} \left[i(\alpha\hat{u} + \beta w') + \frac{d\hat{v}}{dy} \right] \right] = \frac{i\alpha}{\hat{v}\gamma Ma_1^2} \frac{d\hat{p}}{dy}, \quad (3.10)$$

onde a função G é definida como:

$$G = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\bar{\rho}\alpha^2} - Ma_1^2 \frac{(\alpha\bar{u} - \omega)^2}{\alpha^2}. \quad (3.11)$$

A Equação 3.10 é a conservação do quantidade de movimento da direção y , porém, modificada pela equação da continuidade e a lei do estado para se eliminar a flutuação da densidade. O processo para se chegar nessa equação é mostrado com mais detalhes no apêndice A deste trabalho.

Utilizando a transformação de variável proposta por Gropengieser (GROPENGIESER, 1970), que define a função χ como:

$$\chi = \frac{i\alpha\hat{p}}{\gamma Ma_1^2 \hat{v}}, \quad (3.12)$$

O sistema de duas equações, 3.9 e 3.10, pode ser mais uma vez simplificado em um sistema de uma única equação:

$$\begin{aligned} \frac{d\chi}{dy} = \bar{\rho}\alpha(\alpha\bar{u} - \omega) + \frac{\alpha}{(\alpha\bar{u} - \omega)Fr^2} \left[\frac{\bar{\rho}\alpha G \chi}{(\alpha\bar{u} - \omega)} - \frac{(\alpha^2 + \beta^2)\chi}{(\alpha\bar{u} - \omega)\alpha} + \frac{d\bar{\rho}}{dy} \right] + \\ - \frac{\alpha\chi}{(\alpha\bar{u} - \omega)} \left[\frac{d\bar{u}}{dy} + G\chi \right]. \end{aligned} \quad (3.13)$$

A Equação 3.13 é a forma mais genérica do problema, ou seja, para uma perturbação tridimensional. Como vamos comparar a resposta obtida através desse método com o SND, que foi formulado para um caso bidimensional, é necessário simplificar a equação acima para que represente exatamente o mesmo problema. Isso é realizado facilmente ao se considerar $\beta = 0$ transformando a equação de $d\chi/dy$ para a seguinte

forma:

$$\frac{d\chi}{dy} = \bar{\rho}\alpha^2(\bar{u} - \omega/\alpha) + \frac{\bar{\rho}}{(\bar{u} - \omega/\alpha)Fr^2} \left[\frac{\bar{\rho}G\chi}{(\bar{u} - \omega/\alpha)} - \frac{\chi}{(\bar{u} - \omega/\alpha)} + \frac{d\bar{\rho}}{dy} \right] - \frac{\chi}{(\bar{u} - \omega/\alpha)} \left[\frac{d\bar{u}}{dy} + G\chi \right]. \quad (3.14)$$

É importante notar que quando o número de Froude tende a infinito o segundo termo do lado direito da Equação 3.14 tende a zero, retornando assim à mesma equação deduzida por Salemi (2006) em que a força de empuxo não foi considerada, o que corrobora com o significado de um alto número de Froude.

Como descrito em Sandham (1990), as condições de contorno da Equação 3.14 são as derivadas de tal modo que quando $y \rightarrow \pm\infty$ temos $\chi = const.$, $d\chi/dy = 0$, $d\bar{u}/dy = 0$ e $d\bar{\rho}/dy = 0$. Então a condição de contorno do problema para $y \rightarrow \mp\infty$ são as raízes de uma equação de segundo grau que podem ser encontradas facilmente através da fórmula de Bhaskara:

$$\chi(y \rightarrow \pm\infty) = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4A.C}}{2A}, \quad (3.15)$$

onde cada constante é descrita abaixo:

$$A = -G \frac{\alpha}{(\bar{u} - \omega/\alpha)}, \quad (3.16)$$

$$B = \frac{\bar{\rho}}{(\bar{u} - \omega/\alpha)Fr^2} \left[\frac{\bar{\rho}G}{(\bar{u} - \omega/\alpha)} - \frac{1}{(\bar{u} - \omega/\alpha)} \right], \quad (3.17)$$

$$C = \bar{\rho}\alpha^2(\bar{u} - \omega/\alpha). \quad (3.18)$$

Ao se resolver a Equação 3.14, a função χ e a função G são calculadas assim como os autovalores α e ω . Isso já seria suficiente para comparar ambas as metodologias uma vez que o objetivo principal do trabalho é avaliar a influência da força de empuxo na taxa de crescimento das perturbações, porém é possível comparar também as

topologias do escoamento. Para isso é necessário manipular as equações 3.9 e 3.10 e integrar as equações resultantes com o propósito de se calcular os autovetores da velocidade normal, \hat{v} , e o autovetor da pressão, \hat{p} . As equações já operadas são:

$$\frac{d\hat{p}}{dy} = -\bar{\rho}\gamma Ma_1^2 i(\alpha\bar{u} - \omega)\hat{v} - \frac{\bar{\rho}\gamma Ma_1^2 i}{(\alpha\bar{u} - \omega)Fr^2} \left[\hat{v} \frac{d\bar{\rho}}{dy} + \bar{\rho}i\alpha\hat{u} + \bar{\rho} \frac{d\hat{v}}{dy} \right], \quad (3.19)$$

$$\frac{d\hat{v}}{dy} = \frac{i\alpha^2 G\hat{p}}{\gamma Ma_1^2 (\alpha\bar{u} - \omega)} + \frac{\alpha \hat{v}}{(\alpha\bar{u} - \omega)} \frac{d\bar{u}}{dy}. \quad (3.20)$$

As condições de contorno para se integrar as equações 3.19 e 3.20 são apresentadas em Sandham (1990), respectivamente, como:

$$\hat{p}(0) = \frac{\chi(0) \gamma Ma_1^2}{i \alpha}, \quad (3.21)$$

$$\hat{v}(0) = 1 + 0i. \quad (3.22)$$

A partir do cálculo de \hat{v} e \hat{p} , é possível calcular todos os outros autovetores do escoamento a partir das equações 3.2, a 3.8.

Da Equação 3.2, é calculado a massa específica, $\hat{\rho}$, através de:

$$\hat{\rho} = \frac{\hat{v}i}{(\alpha\bar{u} - \omega)} \frac{d\bar{\rho}}{dy} - \frac{\bar{\rho}\alpha\hat{u}}{(\alpha\bar{u} - \omega)} - \frac{\bar{\rho}\beta\hat{w}}{(\alpha\bar{u} - \omega)} + \frac{\bar{\rho}i}{(\alpha\bar{u} - \omega)} \frac{d\hat{v}}{dy}. \quad (3.23)$$

Da Equação 3.3, é calculada a velocidade longitudinal, \hat{u} , através de:

$$\hat{u} = -\frac{\alpha\hat{p}}{\gamma Ma_1^2 \bar{\rho}_{mix} (\alpha\bar{u} - \omega)} + \frac{\hat{v}i}{(\alpha\bar{u} - \omega)} \frac{d\bar{u}}{dy}. \quad (3.24)$$

Da Equação 3.5, é calculado a velocidade transversal, \hat{w} , através de:

$$\hat{w} = -\frac{\beta\hat{p}}{\gamma Ma_1^2 \bar{\rho} (\alpha\bar{u} - \omega)}. \quad (3.25)$$

A temperatura, \hat{T} , pode ser calculada usando Equação 3.6 assim:

$$\begin{aligned}\hat{T} = & -\frac{(\gamma-1)\alpha\hat{u}}{R\bar{\rho}(\alpha\bar{u}-\omega)} - \frac{(\gamma-1)\beta\hat{w}}{R\bar{\rho}(\alpha\bar{u}-\omega)} - \\ & + \frac{(\gamma-1)i}{R\bar{\rho}(\alpha\bar{u}-\omega)} \frac{d\hat{v}}{dy} + \frac{\hat{v}i}{(\alpha\bar{u}-\omega)} \frac{d\bar{T}}{dy},\end{aligned}\quad (3.26)$$

E usando Equação 3.7, se calcula a fração mássica \hat{Y}_1 , da seguinte forma:

$$\hat{Y}_1 = \frac{\hat{v}i}{(\alpha\bar{u}-\omega)} \frac{d\bar{Y}_1}{dy}.\quad (3.27)$$

3.2 Formulação numérica do código LST

A metodologia implementada para se chegar a Equação 3.14 basicamente reduziu o problema da camada de mistura em um problema de autovalor o qual existem diversas maneira de se solucionar. Nesse trabalho se optou pelo método da estimativa, do inglês shooting method, e aqui detalha-se brevemente como o método funciona e como foi implementado.

O domínio numérico do código usando a abordagem LST não precisa ser tão grande quanto o do SND uma vez que não existe o problema de reflexão nas condições de contorno. Por isso usou-se um tamanho da metade do utilizado do SND. Como na seção anterior deduzimos para um problema mais genérico a equação encontrada é suficiente para resolver problemas através da análise temporal ou espacial, ou em um análise com perturbações em três dimensões. Porém como o código que iremos comparar em SND só é capaz de resolver o problema temporal com perturbações em duas dimensões será mostrado somente esse caso na LST.

O código começa lendo os diferentes parâmetros da simulação, como número de pontos da malha, escoamento base, e os número adimensionais através de um arquivo de entrada. Descreve-se tanto a velocidade na direção x quanto a fração mássica com uma tangente hiperbólica da mesma maneira como realizado para o escoamento base no código SND:

$$u_L(y) = \frac{(U_1 + U_2)}{2} + \frac{(U_1 - U_2)}{2} \tanh\left(\frac{2y}{\delta}\right),\quad (3.28)$$

$$Y_{1L}(y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{2y}{\delta}\right).\quad (3.29)$$

Como se testará casos com compressibilidade relevante, no qual a dissipação viscosa em calor é significativa, usa-se a relação de Crocco-Busseman para informar o perfil de temperatura do escoamento base.

$$T(y) = \frac{M_c^2(\gamma - 1)}{2}(u_L(y)(1 - U_2) - u_L(y)^2 + 1) + \frac{(1 - u_L(y))T_2}{1 - U_2} + \frac{u_L(y) - U_2}{1 - U_2}. \quad (3.30)$$

Sendo que os valores das propriedades na corrente livre são: $T_1 = 1$, $T_2 = 1$, $U_1 = 1$ e $U_2 = -1$

Após isso o programa faz as seguintes tarefas:

- Estima-se um valor ω a partir de um determinado α .
- Equação 3.14 é integrada a partir da condição de contorno superior até o meio da camada de mistura.
- Equação 3.14 é integrada a partir da condição de contorno inferior até o meio da camada de mistura.
- Compara-se o valor de $\chi(0)^+$ encontrado no passo 2 com o valor de $\chi(0)^-$, encontrado através do passo 3.
- Se os valores não forem suficientemente próximos chuta-se um outro valor para ω através do método da secante e retorna-se ao passo 2 até os valores forem suficientemente próximos.
- Calcula-se os autovetores \hat{p} e \hat{v} integrando-se as equações, respectivamente, 3.19 e equation 3.20, do centro da camada da mistura para os contornos usando como condição de contorno 3.21 e 3.22.
- Os demais autovetores, $\hat{\rho}$, \hat{u} , \hat{w} , \hat{T} and \hat{Y}_1 são calculado através das equações 3.23, 3.24, 3.25, 3.26 e 3.27 respectivamente.

4 VERIFICAÇÃO

Esse capítulo tem por objetivo mostrar os diferentes testes realizados para verificar e validar os códigos e que ambos geram resultados condizentes com a literatura. Na [Seção 4.1](#) mostra-se o como o Mach convectivo é o parâmetro que informa a compressibilidade do problema e relaciona valores de Mach distintos das correntes livres de oxigênio e hidrogênio. Na [Seção 4.2](#) é feita uma breve análise de qual faixa de valores os números adimensionais devem estar para se ter uma representação condizente com a realidade. Na [Seção 4.3](#) mostra-se o teste de independência de malha realizado para encontrar a malha ideal para o código SND. A [Seção 4.4](#) mostra a comparação do código LST para uma camada de mistura homogênea, e portanto sem força de empuxo, com alguns resultados da literatura, tanto numéricos quanto experimentais. Por final a [Seção 4.5](#) mostra como o código de SND desenvolvido a partir das equações de Naviers-Stokes pode ser comparado com as soluções encontradas pelo código LST, desenvolvido a partir das equações de Euler.

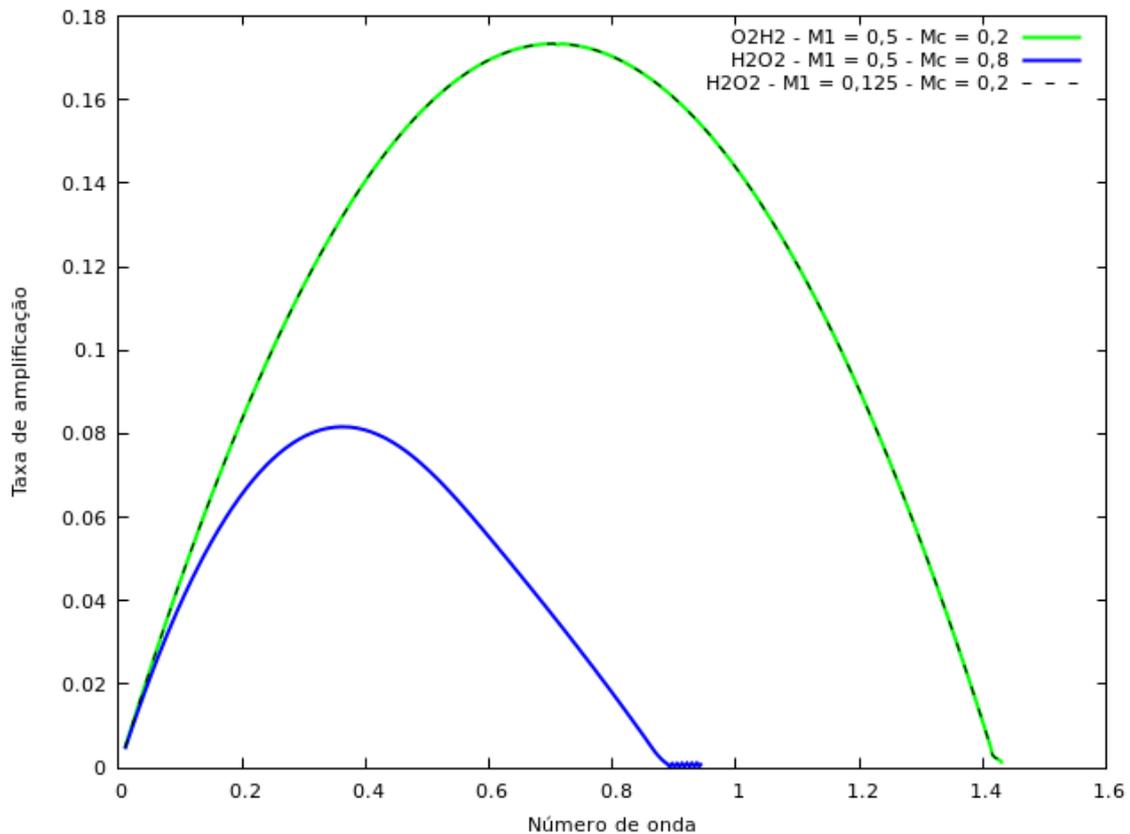
4.1 Influência do número de Mach convectivo

Como explicado anteriormente o problema da camada de mistura binária tem dois números de Mach distintos, o número de Mach referente a camada de superior, M_1 e o número de Mach convectivo, M_c . Porém é importante notar que o problema com O_2 na camada superior com um dado M_1 não é o mesmo que o caso com H_2 na camada superior e mesmo M_1 , devido ao fato da adimensionalização que resulta em M_1 agora usar a massa molar do hidrogênio no lugar do oxigênio. Para se mudar a configuração do problema e ainda representar o mesmo caso é necessário alterar o M_1 de maneira a manter o mesmo número de Mach convectivo em ambas as configurações.

Realizou-se algumas simulação com o código LST com o número de Froude alto, 10^6 , de maneira a ter a força de empuxo desprezível, para demonstrar o efeito dos diferentes números de Mach. Primeiro para a configuração O2-H2 usou-se um M_1 de 0,5, ($M_c = 0,2$), obteve-se a curva verde na [Figura 4.1](#) que mostra como a taxa de amplificação, ω , varia de acordo com o número de onda, α . Depois disso simulou-se um segundo caso para a configuração H2-O2 com mesmo M_1 de 0,5, curva azul. Pode-se perceber que as curvas são completamente diferentes, tendo está última valores de taxa de amplificações muito menores, o que pode ser facilmente explicado devido a compressibilidade do problema ter aumentado, pois o M_c nesse caso é de 0,8. Por final simulou-se um terceiro caso para a configuração H2-O2 porém com $M_1 = 0,125$ de maneira a manter o mesmo valor do Mach convectivo

do primeiro teste, o resultado se vê na linha pontilhada preta. Assim pode-se notar que a taxa de amplificação independe da configuração do problema quando a força de empuxo é desprezível desde que o Mach convectivo permaneça constante.

Figura 4.1 - Independência do Mach Convectivo.



Fonte: Produzido pelo Autor.

Devido a isso e por um motivo de simplicidade e clareza se informará na seção de resultados o número de Mach convectivo de cada uma das simulações e não o número de Mach da corrente livre superior.

4.2 Estudo da escala dos números adimensionais

Com as definições dos número adimensionais já expostas, e como parte deste estudo vai ser feito através das equações de conservação linearizada na forma adimensional é útil se fazer um estudo breve de quanto esse parâmetros podem variar sem que

se tornem completamente não representativos de variáveis reais ou rompam com considerações utilizadas para modelar o problema.

Existem dois números adimensionais no estudo através do código LST, o número de Mach e o número de Froude, através deles podemos expressar uma relação para o comprimento dimensional, e como este trabalho tem por objetivo a análise de sistemas propulsivos podemos limitar o valor dos números adimensionais baseado no comprimento máximo de uma espessura de vorticidade. Além disso para camadas muito espessas a pressão hidrostática passa a ser relevante e a consideração de que a pressão do escoamento superior e inferior são iguais deixa de ser válida.

A relação entre a espessura de vorticidade, o número de Mach e o número de Froude é a seguinte:

$$\delta_w = \frac{Ma_1^2 \gamma R_1 T}{Fr^2 g}, \quad (4.1)$$

Ou escrevendo a partir do número de Mach convectivo, de maneira a mostrar a independência da medição em relação a uma configuração específica temos a seguinte equação:

$$\delta_w = \left(\frac{5Ma_c}{8Fr} \right)^2 \frac{\gamma R_{uni} T}{2g}, \quad (4.2)$$

Sabendo que a compressibilidade do problema que pretende-se analisar é desde regimes subsônicos até regimes próximos de sônicos, a faixa de valores utilizada para o número de Mach é de, $0,01 \leq Ma \leq 0,8$. Considerando a gravidade da terra como a terrestre medida em solo, tem-se uma relação tripla entre número de Froude, número de Mach convectivo e espessura de vorticidade. A Tabela 4.1 mostra os resultados entre estas relações. A segunda coluna mostra o valor da espessura de vorticidade para um dado Mach convectivo e um Froude de 3000, ou seja a espessura de vorticidade quando espera-se que os efeitos do empuxo são desprezíveis. na terceira coluna mostra-se o valor de Froude para diferentes valores de Mach convectivo quando uma espessura de vorticidade de 1 metro é considerada.

Tabela 4.1 - Análise dimensional do problema entre número de Froude, Mach convectivo e espessura da camada de mistura.

	Froude = 3000	$\delta_w = 1$ m
Ma_c	δ_w	Fr mínimo
0,01	0,83 mm	2,49
0,1	8,30 mm	24,91
0,2	16,61 mm	49,83
0,4	33,22 mm	99,65
0,8	66,43 mm	199,31

Sendo assim temos um intervalo de valores para os número adimensionais que podemos utilizar, sendo o limitante superior de $Fr = 3000$, como o valor no qual pode-se considerar as forças de volume irrelevantes, e os valores para Froude correspondente a $\delta_w = 1m$ o limitante inferior no qual as suposições impostas nas deduções ainda são válidas, pois a camada de mistura não está espessa o suficiente a ponto de a pressão hidroestática ser relevante para o problema. Os resultados apresentados no próximo capítulo são obtidos com os número adimensionais sempre dentro destes intervalos.

4.3 Teste de independência de malha

O conhecimento de que a qualidade da solução depende de sua malha é intuitivo, uma vez que é óbvio que uma malha grosseira que não capture os fenômenos físicos das menores escalas inadvertidamente gerarão erros. Por outro lado malhas muito refinadas trazem um custo computacional alto o que pode tornar a simulação inviável. De forma geral, para uma SND, deseja-se a malha mais grosseira possível mas que ainda capture todos os fenômenos físicos do problema. Assim sendo, o teste de independência tem como objetivo mostrar que a solução não mais está sendo afetado pelo refino da malha, estando num patamar ótimo.

A estratégia mais simples de se fazer este teste é resolver o código a partir de uma malha bastante grosseira, e ir realizando testes com malhas cada vez mais refinadas até que a solução pare de mudar significativamente. Quando isto ocorrer diz que se alcançou a independência de malha necessária. Neste momento não é necessário comparar-se a resposta obtida com uma solução da literatura.

Sendo assim testou-se diferentes malhas para o problema e como elas afetavam a taxa de amplificação para um caso qualquer. Sabe-se que para o problema de camada

de mistura, devido ao gradiente vertical intenso, é necessário que haja muitos mais pontos na direção normal do que na direção longitudinal. Usou-se para o número de pontos na direção longitudinal $i_{max} = 200$. Somente se refinou os pontos na direção normal e testou-se os valores j_{max} de 400, 800, 1200 e 1600. Os resultados obtidos podem ser vistos na [Tabela 4.2](#).

O caso testado foi para uma camada superior de hidrogênio e com os números adimensionais: $Fr = 3000$, $Ma = 0,4$ e $Re = 20000$.

Tabela 4.2 - Resultados para diferentes números de pontos na direção normal.

j_{max}	ω	% de mudança
400	0,0959484	-
800	0,0995614	3,76%
1200	0,0996243	0,06%
1600	0,1032460	3,63%

Percebe-se que ao dobrar a malha de $j_{max} = 400$ para 800 a alteração é pequena porém ainda relevante, ao se aumentar em mais 400 pontos a diferença entre os resultados é praticamente inexistente, havendo uma mudança menor do que 0,06%, ao se aumentar em mais 400 pontos a resposta se altera em 3,6% porém o tempo computacional aumenta bastante quando comparado com a malha de 200:800, se tornando inviável para o número de simulações necessário para esse trabalho.

Considera-se que obteve-se uma independência de malha a partir de 800 devido a baixa a alteração entre 800 e 1200 pontos e devido a malha de 1600 ter um tempo de convergência inviável. Um estudo mais detalhado poderia ter sido realizado procurando o porquê da alteração da mudança de 1200 para 1600 que esperava-se ser menor, porém preferiu-se dar continuidade ao trabalho usando a malha 800:200 em todas as simulações realizadas neste trabalho.

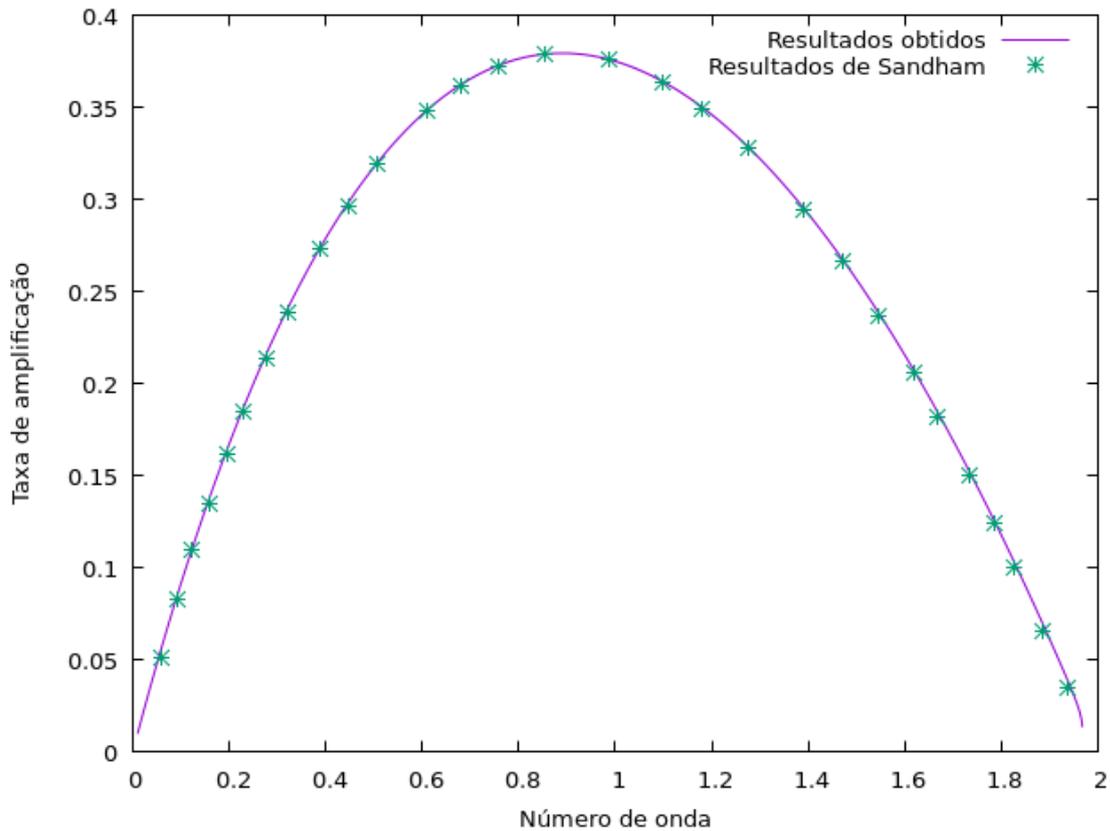
4.4 Verificação LST

O código previamente desenvolvido para o trabalho de [Salemi \(2006\)](#) foi modificado devido ao objetivo de se analisar o efeito da força de empuxo. Devido a isso é prudente mostrar mais uma vez que o código continua dando resultados corretos e condizentes com os encontrados na bibliografia, mostrando que as alterações realizadas no código não afetaram negativamente o algoritmo. Para isso pode-se

primeiramente comparar os resultados obtidos pelo código para uma camada de mistura homogênea com os resultados apresentado em Sandham (1990) nas mesmas condições.

Como a camada de mistura é homogênea a força de empuxo se torna inexistente no problema então não é necessário informar o número de Froude. Para essa simulação impôs-se como a razão das constantes do gás da camada superior e inferior como 1 e o número de Mach é 0,01.

Figura 4.2 - Validação do código LST - Teste Homogêneo.



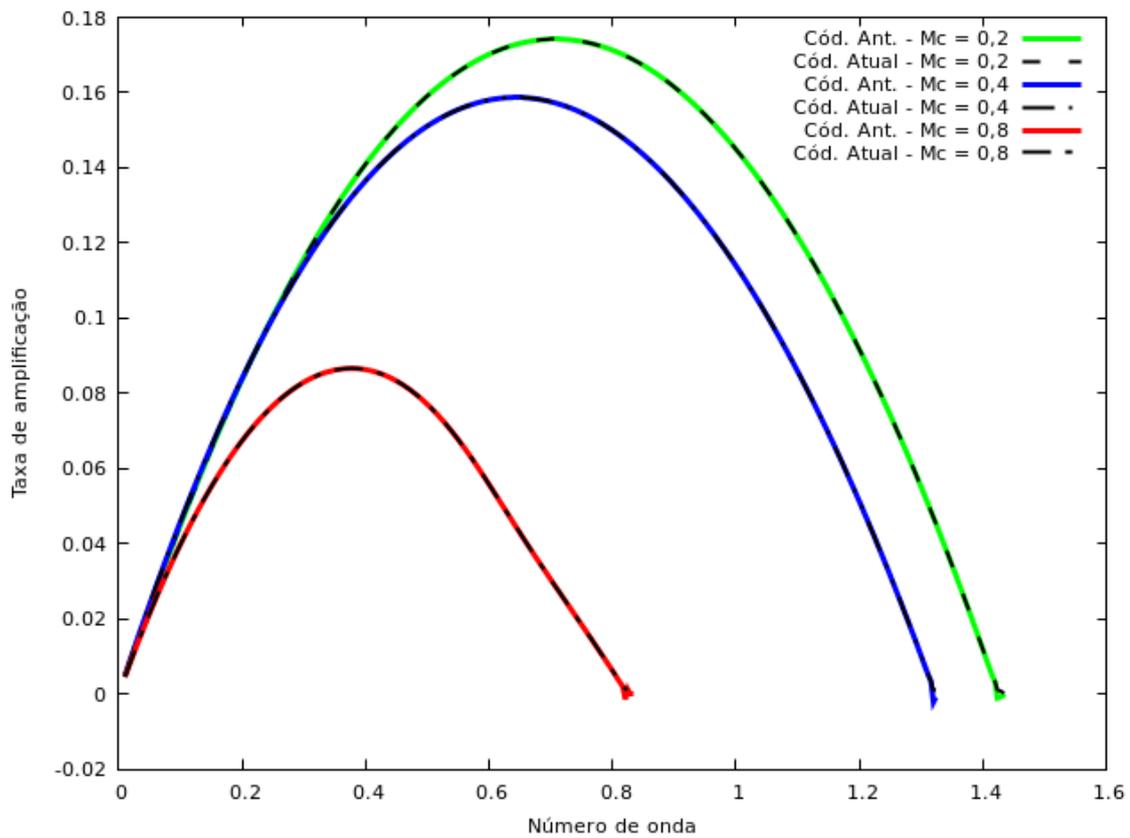
Fonte: Produzido pelo Autor.

Pode-se perceber na Figura 4.2 que os pontos que representam os resultados obtidos por Sandham ficam praticamente todos sobre a curva obtida pelo código desenvolvido neste trabalho demonstrando uma concordância dos resultados muito alta, então pode-se concluir que no regime homogêneos o código continua dando respostas

condizentes com a literatura.

Porém o código antes das modificações para a implementação do empuxo também reproduzia bem o caso binário. Então cabe verificar se o código continua reproduzindo bem esses casos. Para isso dois testes diferentes foram realizados. No primeiro teste compara-se o próprio código na versão antes das alterações com ele após as alterações, para uma configuração H2-O2 para diferentes números de Mach convectivo. Para garantir que a força de empuxo é desprezível usa-se um Froude extremamente alto, 10^6 .

Figura 4.3 - Validação do código LST - Teste binário H2-O2.



Fonte: Produzido pelo Autor.

A Figura 4.3 mostra os resultados para os números de Mach convectivo 0,2, 0,4 e 0,8 e pode-se ver uma concordância excelente entre cada um dos códigos, confirmando que a versão atual do código, quando se usa um número de Froude suficientemente

alto tende seu resultado para a versão do código sem a implementação do empuxo, conforme esperado.

Por final compara-se as máximas taxas de amplificação obtidas para um camada de mistura binária de nitrogênio e oxigênio com Froude alto, 10^6 , com os resultados exposto no trabalho de Fedioun e Lardjane (2005) para diferentes números de Mach convectivo. Apesar de o trabalho usado como comparação não usar exatamente as mesmas condições iniciais, tendo uma diferença significativa na forma como o perfil de velocidade é escrita, ainda assim a comparação é próxima o suficiente.

Tabela 4.3 - Comparação da máxima taxa de amplificação em razão do Mach convectivo, ω_{max} entre o código LST e a literatura para uma camada de N2-O2 sem força de empuxo.

M_c	ω_{max} (Fediun ⁽¹⁾)	ω_{max} - Cód. Atual	Diferença (%)
0,01	0,3820	0,3787	0,86
0,1	0,3773	0,3742	0,82
0,2	0,3632	0,3607	0,80
0,3	0,3405	0,3391	0,41
0,4	0,3102	0,3101	0,03
0,5	0,2735	0,2749	0,51

⁽¹⁾ Fedioun e Lardjane (2005).

A Tabela 4.3 mostra os resultados dessa comparação e percebe-se que a diferença entre os resultados obtidos pela análise temporal feita por Fedioun e Lardjane (2005) e a obtida por este trabalho é por volta de 1 %, considerando que existem diferenças significativas entre as metodologias considera-se essa diferença satisfatória e que o código LST foi verificado.

4.5 Verificação do SND

A versão do código SND usada neste trabalho foi desenvolvida usando como base um código desenvolvido no trabalho de Quirino (2006) para a simulação de uma camada de mistura homogênea e sem a influência da força de empuxo. Sendo assim, é prudente verificar se depois das modificações realizadas no código o mesmo ainda é capaz de reproduzir os resultados corretos quando as devidas variáveis de entrada são informadas. Para realizar tal verificação se utiliza como comparação os dados obtidos através de um LST em Sandham (1990) para uma camada homogênea com número de Mach, $M_1 = 0,4$ uma vez que o código SND não converge para números

de Mach tão baixos como 0,01 usado na seção anterior. Uma diferença importante entre as duas abordagens é o fato de o código LST ser escrito usando equações de Euler e o SND a partir das equações completas de Navier-Stokes, ou seja os termos viscosos estão presentes. Então é preciso definir um número de Reynolds alto o suficiente de maneira que os termos viscosos sejam pequenos o suficiente para que na prática a simulação seja de um problema não viscoso.

Isto posto simulou-se o código SND com $Re = 5000$, para uma razão de massa específica igual a 1, e com as propriedades físicas do gás constantes e todas como 1, uma vez que não há mais alteração de espécies. Da mesma maneira que a seção anterior usou-se número de Froude 10^6 para se considerar um caso sem empuxo. Os resultados dessa simulação podem ser visto na coluna 2 da tabela 4.4. É possível perceber um erro percentual em relação aos dados obtidos na literatura, coluna 4, de 1,7 % a 5 %, um erro alto demais pra ser considerado como válido.

Tabela 4.4 - Comparação da taxa de amplificação, ω para diferentes números de ondas do código SND com a literatura.

α	Re = 5000	Re = 20000	Sandham	Erro ⁽¹⁾ (%)	Erro ⁽²⁾ (%)
0,4	0,234979	0,236610	0,239087	1,718	1,036
0,6	0,286207	0,292135	0,291754	1,901	0,130
0,8	0,298040	0,307599	0,309421	3,678	0,589
1,0	0,281456	0,293292	0,295843	4,863	0,862

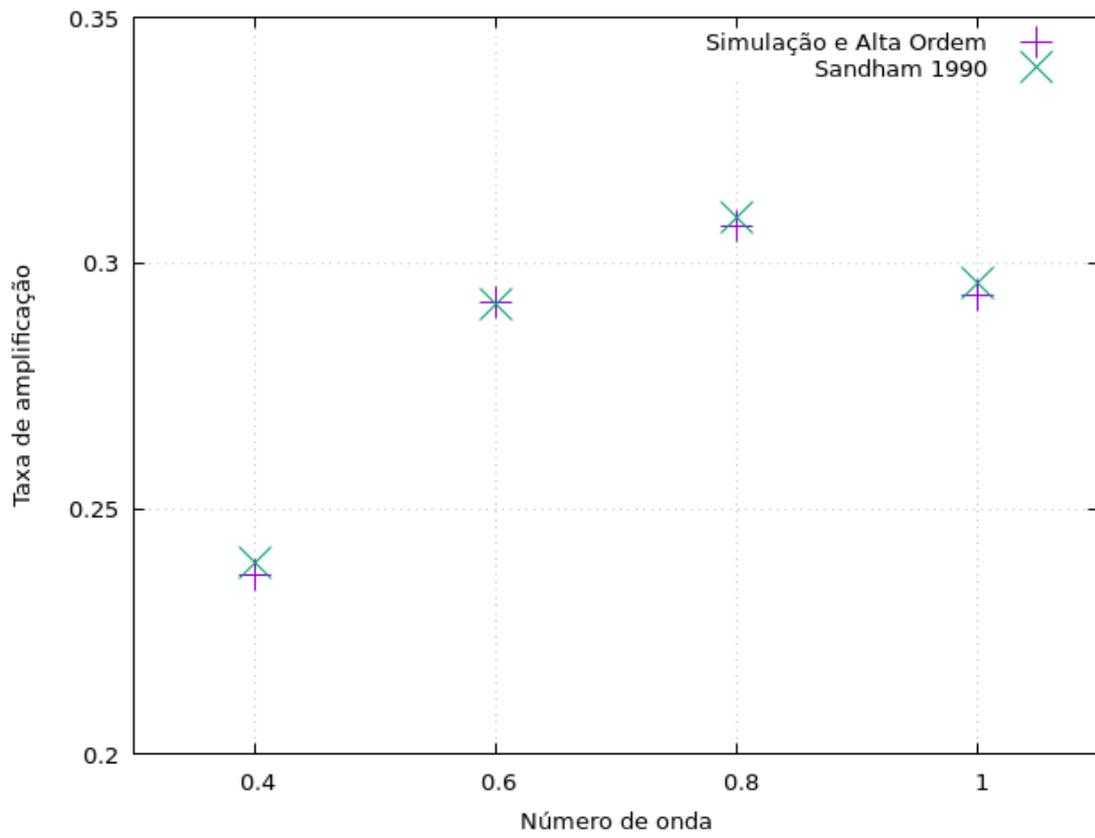
⁽¹⁾ para Re = 5000

⁽²⁾ para Re = 20000

Aumentou-se o número de Reynolds para 20000 na suposição que a diferença entre a literatura e a resposta obtida pela simulação foi causada pelos efeitos viscosos não estarem sendo completamente anulados para Reynolds 5000. A resposta obtida com Reynolds 20000, como mostra a coluna 3 da Tabela 4.4, é muito mais próxima do resultado da literatura, diminuindo assim o erro de entre 1,7% a 5 % para uma faixa de 0,1 % a 1%. Por final na Figura 4.4 mostra-se de forma gráfica a resposta da literatura e da simulação com Reynolds 20000.

Uma importante conclusão dessa validação é o valor do número de Reynolds necessário para que os termos viscosos sejam desprezados e possa haver uma comparação justa entre os códigos LST e SND. Sendo assim, para todos as simulações do capítulo de resultados se o número de Reynolds não é explicitamente declarado usou-se 20000.

Figura 4.4 - Validação do código SND.



Fonte: Produzido pelo Autor.

5 RESULTADO E ANÁLISE

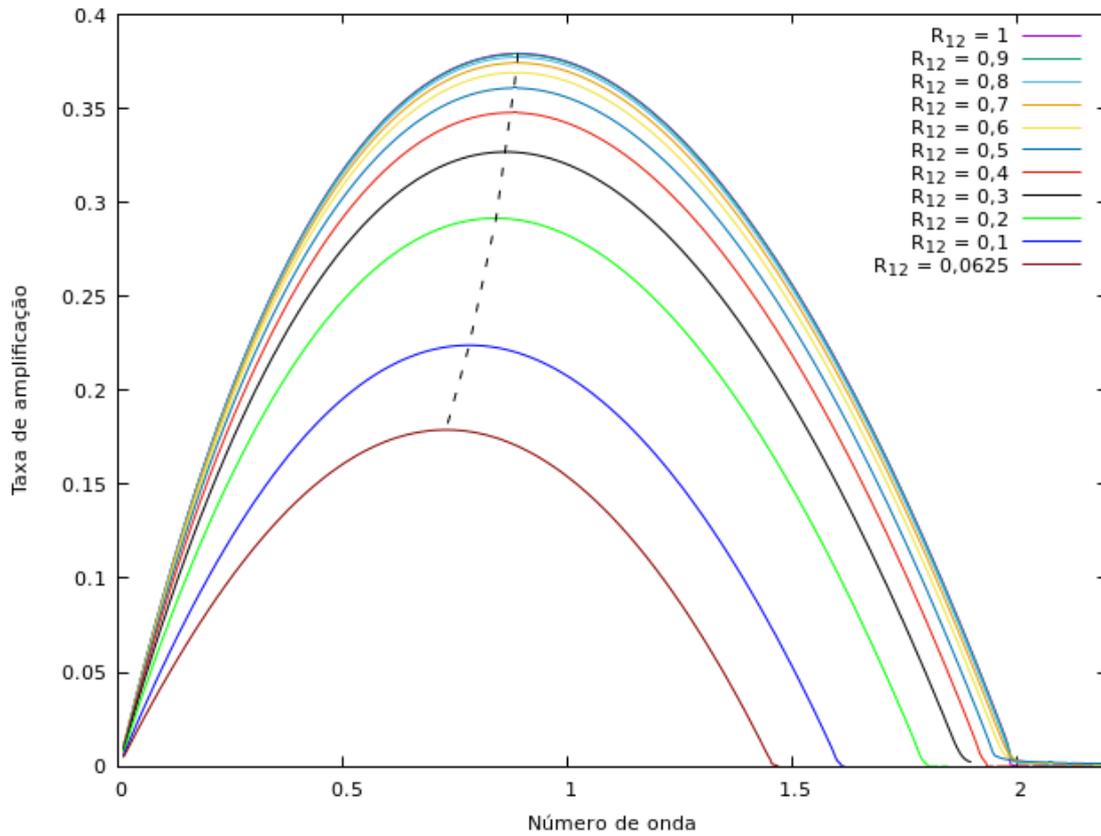
Este capítulo irá expôr todas as simulações e resultados obtidos durante a extensão desse projeto, que tem por objetivo analisar o problema de uma camada de mistura compressível binária e sob a influência da força de empuxo. Na Seção 5.1 é analisado o efeito que a estratificação da massa específica tem sobre as amplificações das perturbações, mostrando como extremos o caso homogêneo, onde a razão entre as massas específicas, R_{12} , das espécies é igual a 1,0, e o caso de H₂-O₂, $R_{12} = 0,0625$. Na Seção 5.2 o efeito da compressibilidade é brevemente mostrado dentro dos máximos e mínimos estipulados na análise dimensional previamente feita. Na Seção 5.3 analisa-se a influência da força de empuxo e da configuração do problema para diferentes regimes compressíveis através do código LST, usando a formulação mostrado na Capítulo 3. Por final a Seção 5.4 finaliza o capítulo de resultados mostrando as respostas encontradas através do código SND, que usa a formulação mostrada no Capítulo 2, servindo principalmente como uma comparação para as respostas encontradas pelo código LST e também para mostrar de forma mais clara a evolução do escoamento perturbado assim como o efeito do número de Reynolds.

5.1 Efeito da estratificação da massa específica.

Apesar de não ser o escopo desse trabalho dedica-se esta seção para mostrar qual o efeito da estratificação da massa específica no desenvolvimento da instabilidade de Kelvin-Helmholtz. Como o código LST tem-se a vantagem de não necessitar das características físicas de cada uma das espécies, como viscosidade e os calores específicos, só necessitando da razão entre as constantes específicas do gás da corrente inferior e da corrente superior, pode-se usá-la facilmente para investigar como a estratificação da massa específica afeta o problema. Sendo assim simula-se para vários valores de R_{12} , onde R_{12} é a razão entre a constante do gás da espécie na corrente inferior dividido pela constante do gás da espécie na corrente superior, sendo que $R_{12} = 1$ representa um caso homogêneo e $R_{12} = 0,0625$ representa o escoamento superior de hidrogênio e um escoamento inferior de oxigênio, o qual será estudado mais afundo no decorrer deste trabalho.

De maneira a testar como somente a diferença na estratificação da massa específica afeta a camada de mistura, nesse momento se simulará para todos os R_{12} testados casos sem o efeito da força de volume, ou seja com $Fr = 10^6$, e para somente um número de Mach convectivo de 0,01 que foi o valor usado para validar o código com a bibliografia na Seção 4.4.

Figura 5.1 - Efeito da estratificação da massa específica para um caso sem força de volume e $M_c = 0,01$.



Fonte: Produzido pelo Autor.

Na Figura 5.1 é visível o efeito amortizador que é causado devido estratificação da massa específica. Camadas de mistura binária na qual a estratificação da massa específica seja baixa, como é o caso do oxigênio e nitrogênio que tem uma razão de 0,875 pouco são afetadas, porém para casos com razões inferiores 0,5, ou obviamente em relação maiores que 2, tem um desenvolvimento das instabilidades de Kelvin-Helmholtz muito mais lenta. Pode-se notar também que ao aumentar a intensidade da estratificação da massa específica o número de onda responsável pela maior taxa de amplificação de cada uma das curvas se torna menor como é evidenciado mais claramente pela linha reta preta pontilhada que conecta as máximas taxas de amplificações de cada uma das curvas. Também nota-se que a faixa de número de onda das perturbações que geram instabilidade se reduz em cerca de 25 %, diminuindo a faixa de valores de 0 até 2 para o caso homogêneo, para 0 até 1,5 para o caso H₂-O₂.

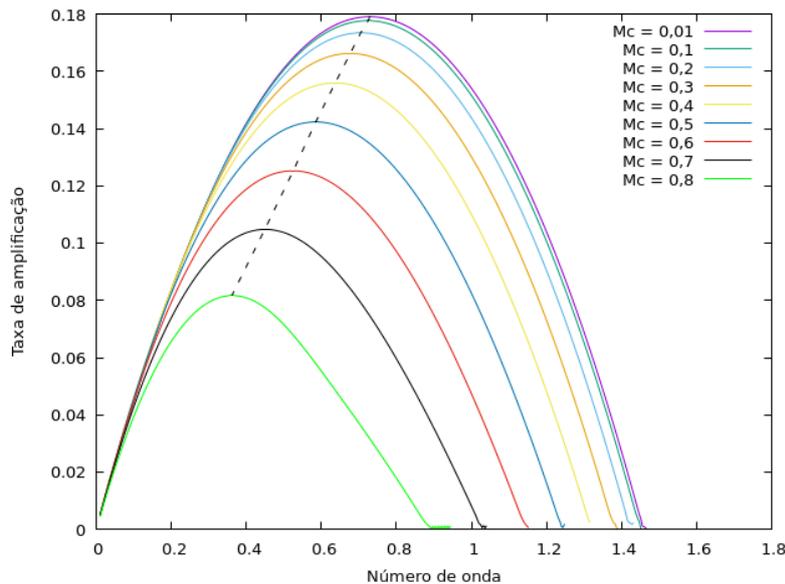
Para o caso mais crítico de uma camada de H₂-O₂ a diferença porcentual da máxima taxa de amplificação que é possível se atingir quando comparada com o caso homogêneo é de 52,79% o que mostra que camadas binária de hidrogênio e oxigênio tem o desenvolvimento das instabilidade de Kelvin-Helmholtz bem lenta.

5.2 Efeito da compressibilidade.

Na Seção [Seção 4.1](#) demonstrou-se que para uma camada de mistura binária a informação da compressibilidade do problema é dada pelo número de Mach convectivo porém ainda nada se comentou sobre qual o efeito da compressibilidade na camada de mistura. Como essa discussão já é bastante conhecida na literatura será dado uma breve análise nessa seção.

Foi testado o efeito da compressibilidade usando diferentes números de Mach convectivo, (Equação 2.42), de 0,01 a 0,8 para uma camada de mistura de hidrogênio e oxigênio usando somente o código LST. Nesse momento não se tem interesse analisar a força de empuxo, sendo assim o número de Froude usado é extremamente alto, $Fr = 10^6$, (Equação 2.47), e a configuração, que impõe que espécie está na camada superior, não importa.

Figura 5.2 - Efeito da compressibilidade nas taxas de amplificações para a camada de mistura H₂-O₂ sem força de volume.



Fonte: Produzido pelo Autor.

A Figura 5.2 mostra o resultado das curvas de taxa de amplificação para diferentes números de Mach convectivo, e mais uma vez confirma o que já foi demonstrado diversas vezes na literatura, que a compressibilidade tem um efeito de diminuir as taxas de amplificação de uma camada de mistura. É interessante notar que mesmo dentro do regime usualmente considerado incompressível na engenharia, para valores de Mach entre 0,0 e 0,3 a variação das curvas $\alpha - \omega$ são consideravelmente diferentes, o que justificaria uma análise compressível mesmo para esses caso.

Na Figura 5.2 também pode-se notar a linha pontilhada preta que liga as máximas taxas de amplificação de cada uma das curvas $\alpha - \omega$ mostrando que como no caso da estratificação de densidade, conforme as curvas se tornam menores com o aumento da compressibilidade, o número de onda que gera a máxima taxa de amplificação se torna menor.

É interessante notar que a literatura mostra que conforme a compressibilidade aumenta as maiores taxas de amplificação deixam de ser em perturbações planas, contidas no plano 2D analisado aqui, e passam a estarem nas ondas com componentes em 3 dimensões ou seja com um valor de β diferente de zero como foi mostrado no trabalho de Fedioun e Lardjane (2005). No presente trabalho está sendo imposto que $\beta = 0$, então cabe ressaltar que quando se refere as maiores taxas de amplificação está se referindo as curvas para perturbações planas.

5.3 Influência do número de Froude usando LST

Como visto na análise dimensional os valores mínimos possíveis de se utilizar para Froude variam extremamente com a compressibilidade, dessa maneira os valores referentes a compressibilidade que serão estudados na análise da força de empuxo serão os valores M_c igual a 0,01, 0,2, 0,4 e 0,8. Nos testes anteriores foi usado o valor de Froude exageradamente alto 10^6 para se garantir que o termo de empuxo não influenciaria o problema. Porém é esperado que ainda para valores muito menores de Froude a diferença seja insignificantes para as curvas de taxa de amplificação por número de onda.

Tabela 5.1 - Comparação entre $Fr = 3000$ e $Fr = 10^6$ para diferentes valores de M_c

M_c	$\omega_{max} - Fr = 10^6$	$\omega_{max} - Fr = 3000$	diferença (%)
0,01	0,17907422	0,17907886	0,00
0,2	0,17343839	0,17344235	0,00
0,4	0,15592686	0,15593536	0,00
0,8	0,08166719	0,08167263	0,00

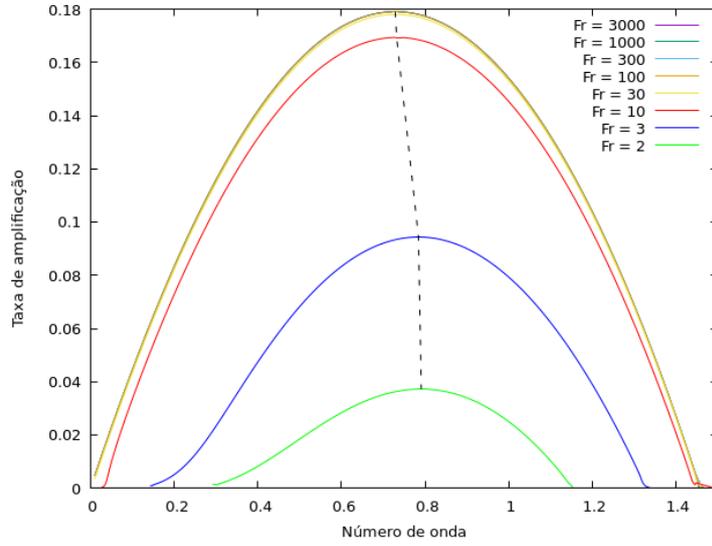
Sendo assim a Tabela 5.1 mostra a comparação da máxima taxa de amplificação obtida usando Froude como 10^6 e usando 3000 para os diferentes números de Mach. Pode-se perceber que independente da compressibilidade a redução do número de Froude para valores de 3000 causa uma diferença menor que 0,01 % nas máximas taxas de amplificação, o que já é uma percentagem bastante conservadora, sendo assim pode-se considerar com segurança que para valores de Froude igual ou superior a 3000 a força de empuxo pode ser considerada desprezível. Sendo assim será utilizado este como o valor máximo superior.

A partir deste momento é esperado que a configuração do problema passe a alterar a resposta do sistema. Sendo assim quando declarado que uma simulação usa a configuração H2-O2 têm-se o hidrogênio na parte superior da camada de mistura e no caso O2H2 o oxigênio na parte superior na camada de mistura, sempre com o sentido da gravidade apontando para baixo.

O próximo passo é obter as curvas $\alpha - \omega$ para diferentes números de Froude para cada um dos valores de M_c estipulados, cuidando para não testar valores de Froude que resultam em comprimentos característicos de camada de mistura maiores que um metro, como estipulado na Seção 4.2. Dessa maneira pode-se perceber se há algum comportamento diferentes nas curvas de taxas de amplificação, indicando a possibilidade da presença de outros modos de instabilidade e permitindo comparar as curvas de diferentes números de Froude mostrando se realmente o empuxo tem um efeito amortizador ou amplificador das perturbações dependendo da configuração.

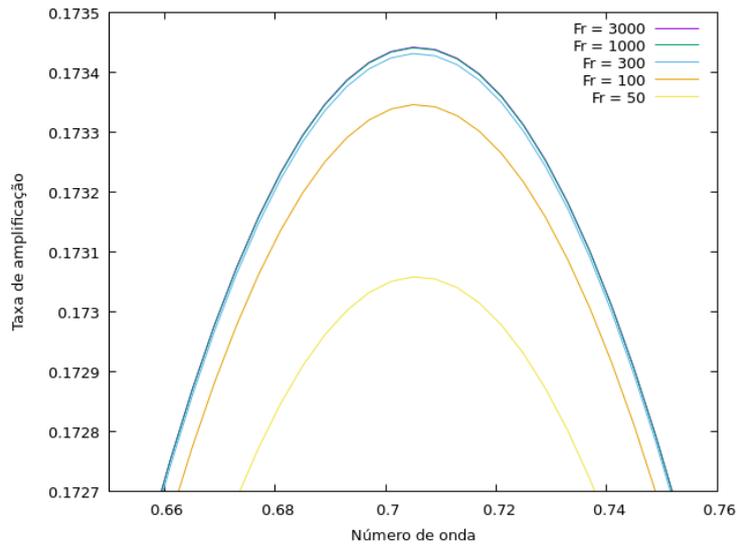
Nas Figuras de 5.3 à 5.6 mostram-se as diferentes curvas $\alpha - \omega$ para os números de Froude e Mach convectivos escolhidos para a configuração de H2O2. Nos gráficos onde as curvas para diferentes números de Froude testados ficam muito próximas entre si, tornando difícil a visualização da diferença existente entre elas por causa da escala dos eixos decidiu-se usar uma faixa menor nos eixos x e y para se aproximar da máxima taxa de amplificação das curvas, permitindo visualizar mais facilmente a existência da diferença causada pelo número de Froude apesar de baixa.

Figura 5.3 - Efeito da variação do número de Froude para configuração H2-O2 com $M_c = 0,01$.



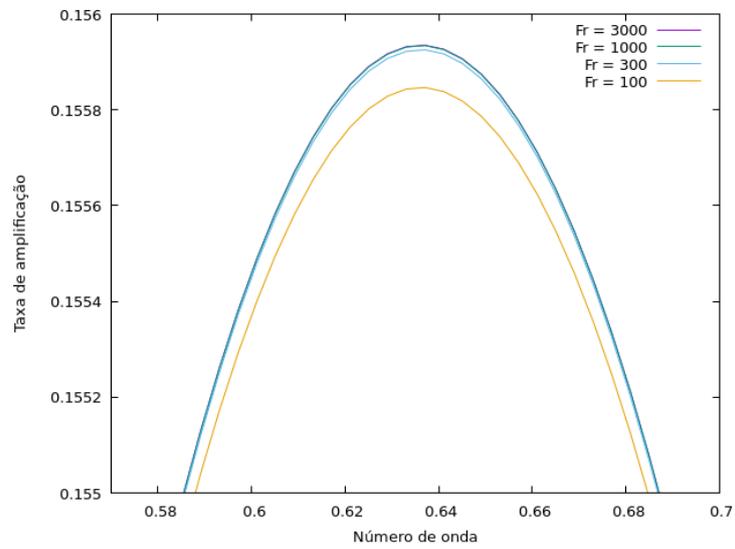
Fonte: Produzido pelo Autor.

Figura 5.4 - Efeito da variação do número de Froude para configuração H2-O2 com $M_c = 0,2$.



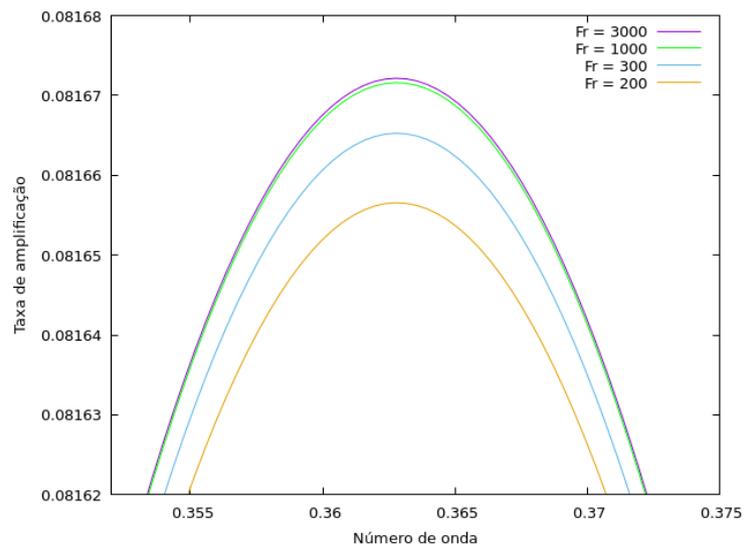
Fonte: Produzido pelo Autor.

Figura 5.5 - Efeito da variação do número de Froude para configuração H2-O2 com $M_c = 0,4$.



Fonte: Produzido pelo Autor.

Figura 5.6 - Efeito da variação do número de Froude para configuração H2-O2 com $M_c = 0,8$.



Fonte: Produzido pelo Autor.

Na Tabela 5.2 mostra-se o valor da maior taxa de amplificação para cada combinação de Froude e Mach convectivo testado, assim como a diferença apresentada em comparação ao caso sem força de empuxo, $Fr = 3000$. Como foi utilizado um código que parte da formulação linearizada das equações de Euler, ignorando assim os termos de maior ordem, será considerado somente diferenças de no mínimo 0,01 % como relevante. Apesar de 0,01 % ser baixo demais para ser considerado relevante em aplicações de engenharia, usa-se este valor para demonstrar as pequenas diferenças que estão presentes nessas escalas.

Pode-se perceber facilmente que a força de empuxo é mais relevantes para números bem baixos de Froude, na escala de 1 à 10, o que somente casos de baixíssima compressibilidade, da ordem de $M_c = 0,01$, são capazes de fornecer dentro das considerações estipuladas. Aparentemente valores de Froude inferiores a 30 mostram uma alteração de 1 % nas máximas taxas de amplificação. Em contrapartida pode-se considerar que em casos com valores de $Fr > 300$ pode-se desprezar o efeito da força de empuxo para um caso de estratificação de massa específica de 16 vezes, pois seu efeito é na escala de 0,01%. Ou seja, de forma geral se nota um crescimento exponencial da influência do número de Froude em relação ao crescimento das perturbações.

Também é possível notar na Figura 5.3 dois comportamentos interessantes. O primeiro deles é o fato de ao se diminuir o número de Froude o número de onda responsável por gerar a maior taxa de amplificação aumenta, como pode ser visto pela linha pontilhada preta que conecta as máximas taxas de amplificação de cada uma das curvas expostas no gráfico. Se comparado com a Figura 5.2, percebe-se que esta linha tem inclinação contrária, o que demonstra um comportamento diferente da compressibilidade, nela conforme a compressibilidade aumenta o α que gerava a máxima taxa de amplificação também era menor, ou seja as curvas aparentemente tinham um deslocamento para a esquerda, enquanto neste caso para o aumento do empuxo presencia-se um deslocamento da curva para a direita.

Nas curvas para $Fr = 2$ e $Fr = 3$ é possível ver um alongamento no início da curva para os valores de α entre 0,18 e 0,22 para $Fr = 3$ e entre 0,3 e 0,4 para a curva $Fr = 2$, isso pode estar ligado a um modo diferente de instabilidade começando a se tornar relevante. Sabe-se da literatura que para escoamentos onde a força de empuxo é muito relevante, como é o caso para líquidos, a instabilidade de Rayleigh-Taylor se torna presente podendo dominar o processo de transição a turbulência mesmo em casos onde a instabilidade de Kelvin-Helmholtz esteja presente.

Tabela 5.2 - Comparação das máximas taxas de amplificação para cada combinação de Fr e M_c testado para H2-O2.
Máxima taxa de amplificação

Fr	$M_c = 0, 01$	Dif. (%)	$M_c = 0, 2$	Dif. (%)	$M_c = 0, 4$	Dif. (%)	$M_c = 0, 8$	Dif. (%)
3000	0,179078624	-	0,173442110	-	0,155935168	-	0,081672147	-
1000	0,179077744	- 0,00	0,173441261	- 0,00	0,155934393	- 0,00	0,081671597	- 0,00
300	0,179067791	- 0,01	0,173431560	- 0,01	0,155925453	- 0,01	0,081665255	- 0,01
200	0,179054111	- 0,01	0,173418224	- 0,01	0,155913174	- 0,01	0,081656553	- 0,02
100	0,178980261	- 0,05	0,173346266	- 0,06	0,155846864	- 0,06	-	-
50	0,178685024	- 0,22	0,173058540	- 0,22	-	-	-	-
30	0,177986130	- 0,61	-	-	-	-	-	-
10	0,169375300	- 5,42	-	-	-	-	-	-
3	0,094354264	- 47,31	-	-	-	-	-	-
2	0,037242394	- 79,20	-	-	-	-	-	-

Fonte: Produzido pelo Autor.

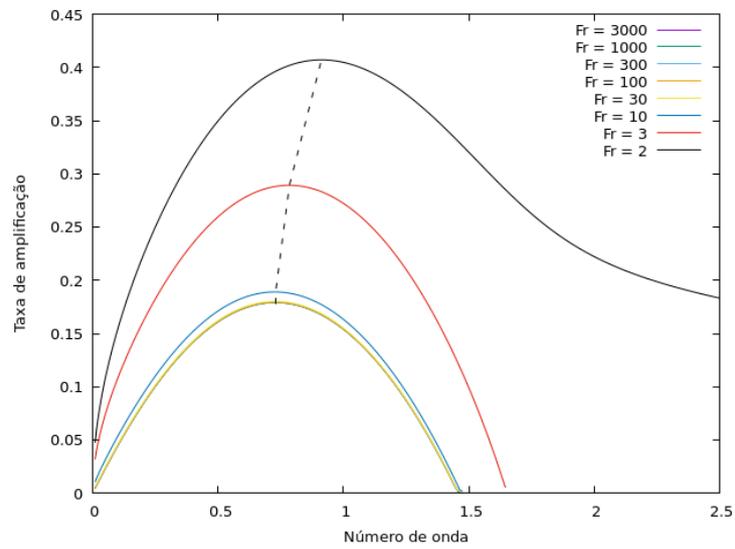
Uma outra consideração importante é que, conforme esperado pela intuição ao se colocar a espécie menos densa sobre a espécies mais densa as taxas de amplificação se tornam menores quando o empuxo é relevante, mostrando assim uma resistência natural do sistema em se perturbar.

Se realiza os mesmos testes porém para a configuração oposta, de O2-H2. As figuras de 5.7 a 5.10 mostram as curvas $\alpha - \omega$ mais uma vez se preocupando para a diferença entre as curvas ficarem o mais vizível possível, e como realizado anteriormente também se escreve a Tabela 5.3 com os resultados da máxima taxa de amplificação para cada combinação de Froude e Mach convectivo testados. Assim como na tabela anterior a mínima diferença considerada relevante é de 0,01 %.

Os mesmos efeitos demonstrados para o caso H2-O2 podem ser vistos para agora a configuração O2-H2, com algumas importantes distinções. Agora com a espécie mais densa escoando sobre a espécies menos densa, essa estratificação da massa específica, na presença da força de empuxo causa um aumento das taxas de amplificações.

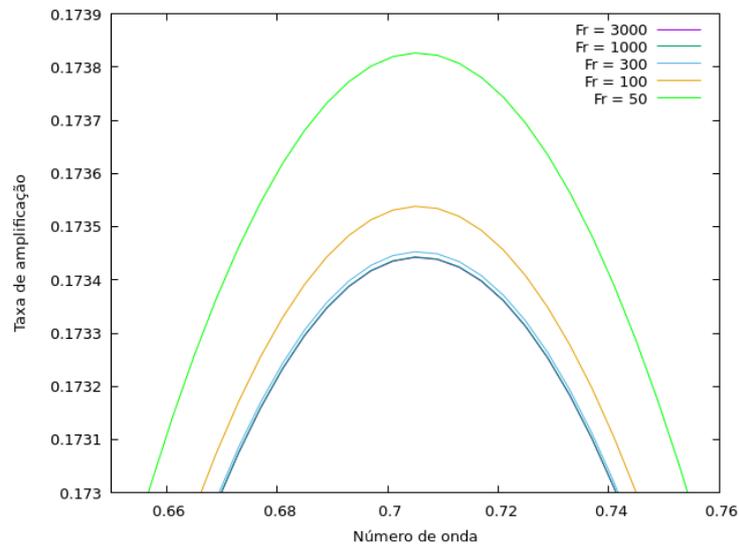
É possível notar tanto na Figura 5.7 quanto na primeira coluna da Tabela 5.3 a relevância quando Froude é da ordem de 3 ou 2, mostrando um aumento na máxima taxa de amplificação de 127% quando comparado ao caso sem empuxo. Também nota-se da figura através da linha preta que o aumento do efeito do empuxo é responsável também por um aumento no número de onda responsável pela maior taxa de amplificação, ou seja independente da configuração um aumento da relevância da força de empuxo faz com que as curvas se desloquem ligeiramente para a direita. Nota-se também que na curva para $Fr = 2$ a partir de $\alpha = 1,6$ onde se esperaria uma queda de ω de forma acentuada, como acontece nas outras curvas, está presente uma queda de forma quase linear, muito parecida com o alongamento apontado na Figura 5.3, sendo assim é possível também que a razão seja um novo modo instável se tornando relevante para o problema, no caso a instabilidade de Rayleigh-Taylor.

Figura 5.7 - Efeito da variação do número de Froude para configuração O2-H2 com $M_c = 0,01$.



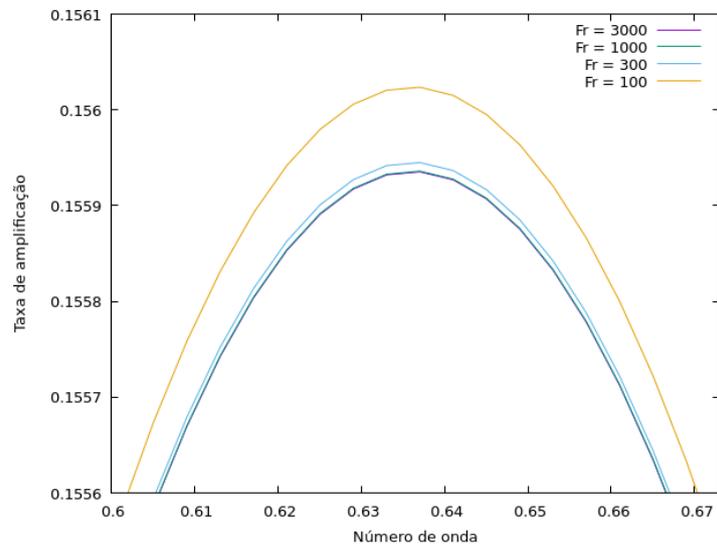
Fonte: Produzido pelo Autor.

Figura 5.8 - Efeito da variação do número de Froude para configuração O2-H2 com $M_c = 0,2$.



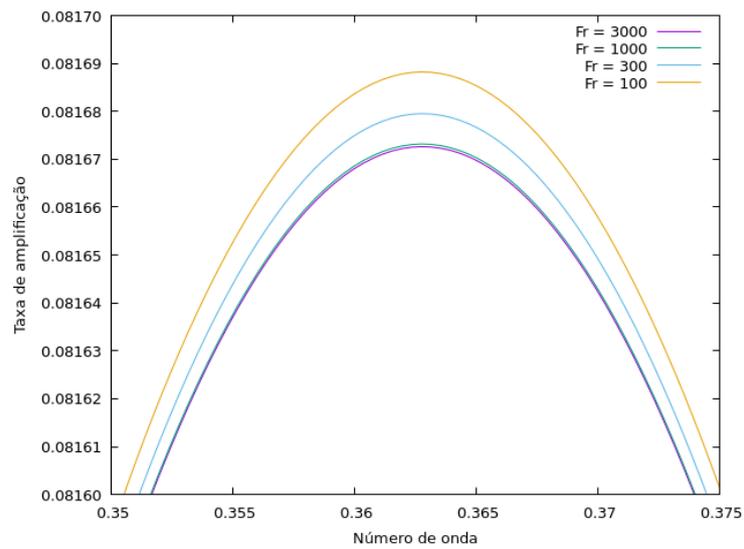
Fonte: Produzido pelo Autor.

Figura 5.9 - Efeito da variação do número de Froude para configuração O2-H2 com $M_c = 0,4$.



Fonte: Produzido pelo Autor.

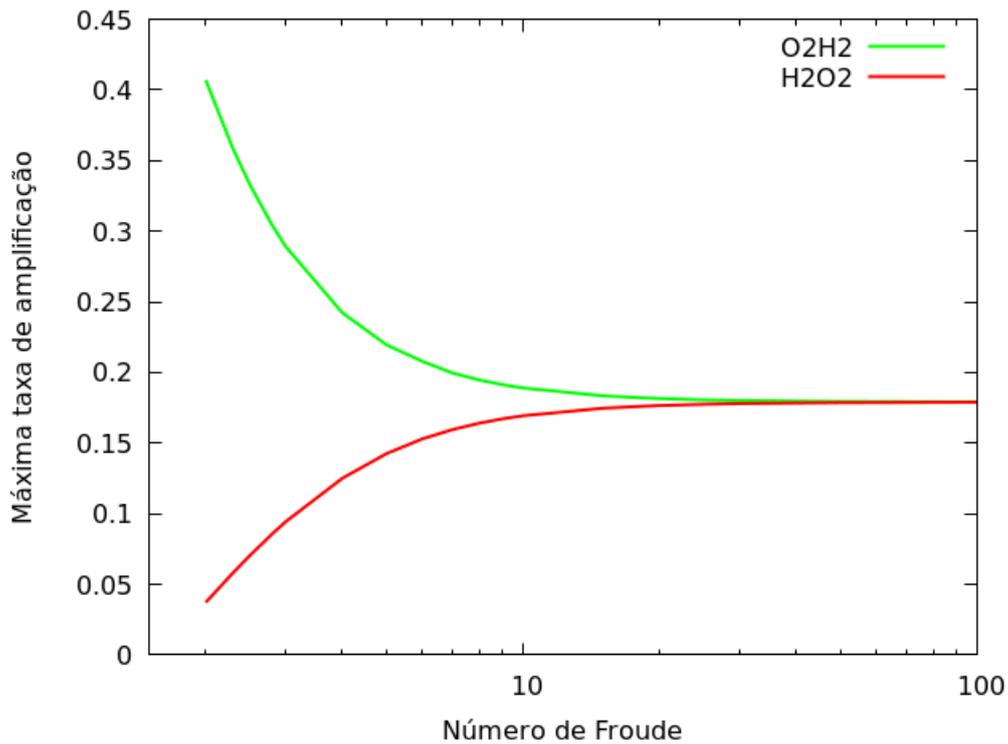
Figura 5.10 - Efeito da variação do número de Froude para configuração O2-H2 com $M_c = 0,8$.



Fonte: Produzido pelo Autor.

Quando comparado as diferenças percentuais dos caso H2-O2 e O2-H2 para os mesmos número de Fr e M_c mostrados nas tabelas nota-se que em geral a mudança percentual é exatamente o mesmo valor apesar de serem opostas, para os casos de $Fr > 10$ porém diferem significativamente para os valores de Froude 2, 3 e 10. A Figura 5.11 mostra como a máxima taxa de amplificação varia de acordo com o número de Froude para ambas as configurações para um M_c de 0,01. Nele é possível perceber a rápida alteração sofrida por ω_{max} conforme Fr diminui e como a escala x mostrada no gráfico é exponencial, pode-se notar que esta dependência não é simplesmente uma exponencial.

Figura 5.11 - Comparação do efeito de Fr na máxima taxa de amplificação para os casos H2-O2 e O2-H2 para $M_c = 0,01$.



Fonte: Produzido pelo Autor.

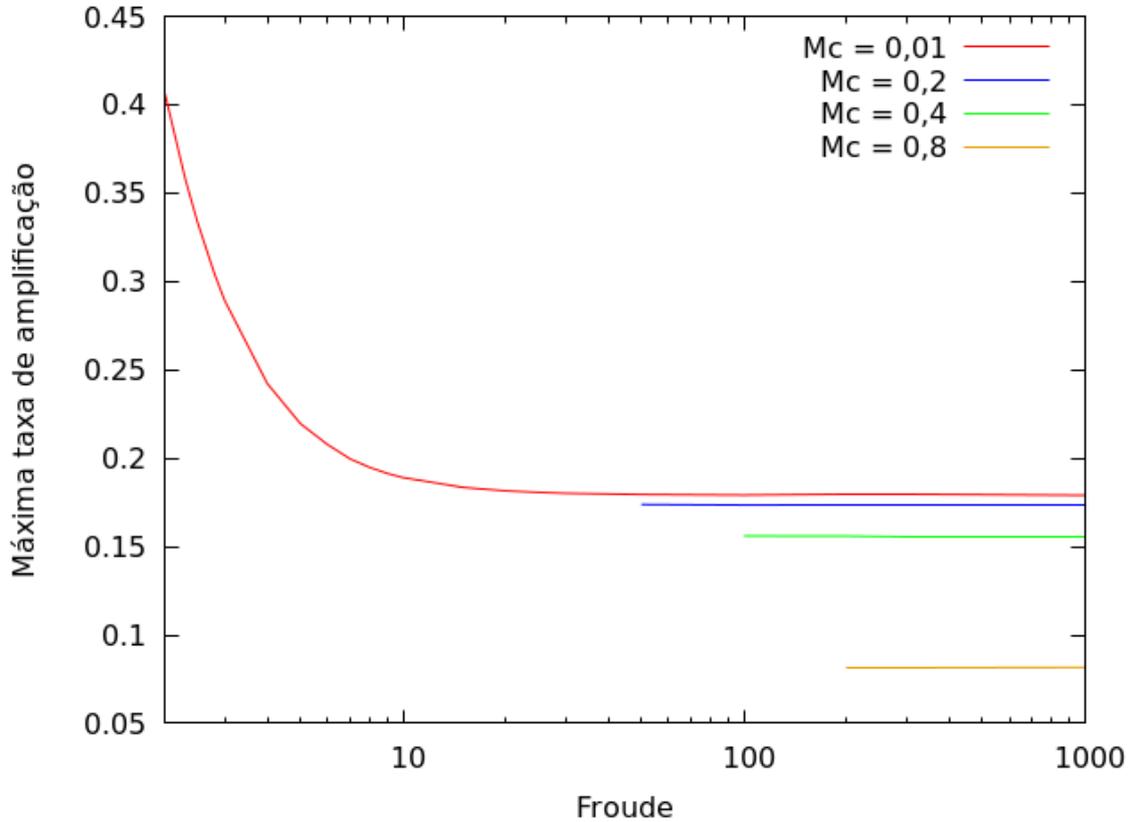
Mostra-se as curvas de máxima taxa de amplificação variando com Froude para diferentes valores de M_c testados para a configuração O2-H2 na Figura 5.12, e para H2O2 na Figura 5.13.

Tabela 5.3 - Comparação das máximas taxas de amplificação para cada combinação de Fr e M_c testado para O2-H2.

Fr	Máxima taxa de amplificação											
	$M_c = 0, 01$	Dif. (%)	$M_c = 0, 2$	Dif. (%)	$M_c = 0, 4$	Dif. (%)	$M_c = 0, 8$	Dif. (%)	$M_c = 0, 8$	Dif. (%)	$M_c = 0, 8$	Dif. (%)
3000	0,179078862	-	0,173442349	-	0,155935362	-	0,081672631	-	0,081672631	-	0,081672631	-
1000	0,179079741	+ 0,00	0,173443198	+ 0,00	0,155936152	+ 0,00	0,081673190	+ 0,00	0,081673190	+ 0,00	0,081673190	+ 0,00
300	0,179089695	+ 0,01	0,173452914	+ 0,01	0,155945092	+ 0,00	0,081679523	+ 0,01	0,081679523	+ 0,01	0,081679523	+ 0,01
200	0,179103374	+ 0,01	0,173466235	+ 0,01	0,155957371	+ 0,01	0,081688225	+ 0,01	0,081688225	+ 0,01	0,081688225	+ 0,02
100	0,179177240	+ 0,05	0,173538223	+ 0,06	0,156023696	+ 0,06	-	-	-	-	-	-
50	0,179472849	+ 0,22	0,173826307	+ 0,22	-	-	-	-	-	-	-	-
30	0,180174425	+ 0,61	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10	0,189036891	+ 5,56	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3	0,289228946	+ 61,51	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2	0,407037377	+ 127,30	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Fonte: Produzido pelo Autor.

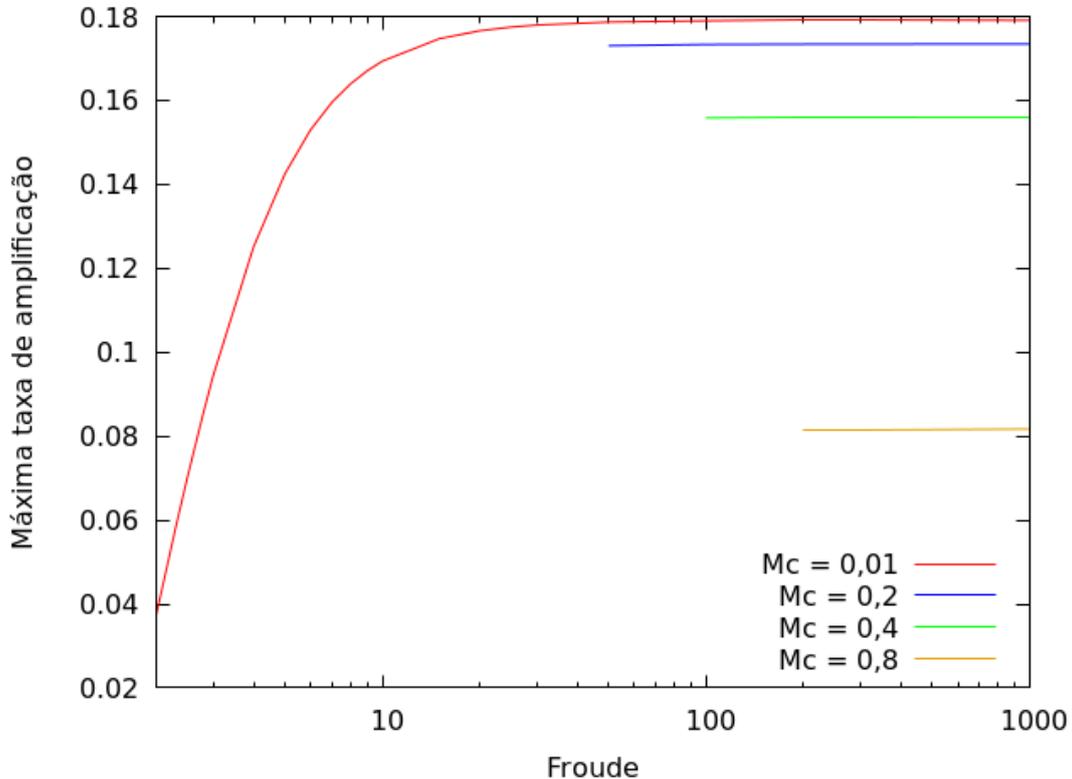
Figura 5.12 - Comparação do efeito de Fr na máxima taxa de amplificação para os casos O2-H2 com diferentes compressibilidades.



Fonte: Produzido pelo Autor.

Nessas imagens percebe-se mais uma vez que o aumento da compressibilidade está ligado a uma diminuição das taxas de amplificação enquanto independente da configuração enquanto o aumento da relevância da força de empuxo tem efeito dependente da configuração como comentado anteriormente. Também fica claro a limitação dos valores de Froude possíveis de se utilizar em cada uma das simulações, em razão da escala máxima adotado de 1 metro para a camada de mistura, e como dentro dessa consideração o empuxo não é relevante para problemas compressíveis. Ainda assim surge a dúvida, que não é explorada nesse trabalho, de se as curvas de maior compressibilidade se comportariam de forma similar ao caso $M_c = 0,01$ se fosse possível simular valores de Froude muito menores.

Figura 5.13 - Comparação do efeito de Fr na máxima taxa de amplificação para os casos H2-O2 com diferentes compressibilidades.



Fonte: Produzido pelo Autor.

5.4 Resultados do SND

O código SND tem limitações extras quando comparado com o código LST, além das do próprio modelo. A principal delas é o fato de técnicas numéricas que buscam a solução dependente do tempo para as equações de compressíveis de Navier-Stokes funcionam mal para valores de Mach extremamente baixos. Várias são as razões para isso na literatura. Essas razões incluem erro de arredondamento ou método computacional impreciso, erro de fatorização e inviabilidade de um passo de tempo condizente com ondas acústicas se transmitindo a uma velocidade muito alta (REED; ANDERSON, 1997). Além disso a estratégia desenvolvida para contornar o problema devido a velocidade do escoamento base, assim como a forma de se captar o valor da taxa de amplificação, compromete a exatidão de sua resposta não permitindo

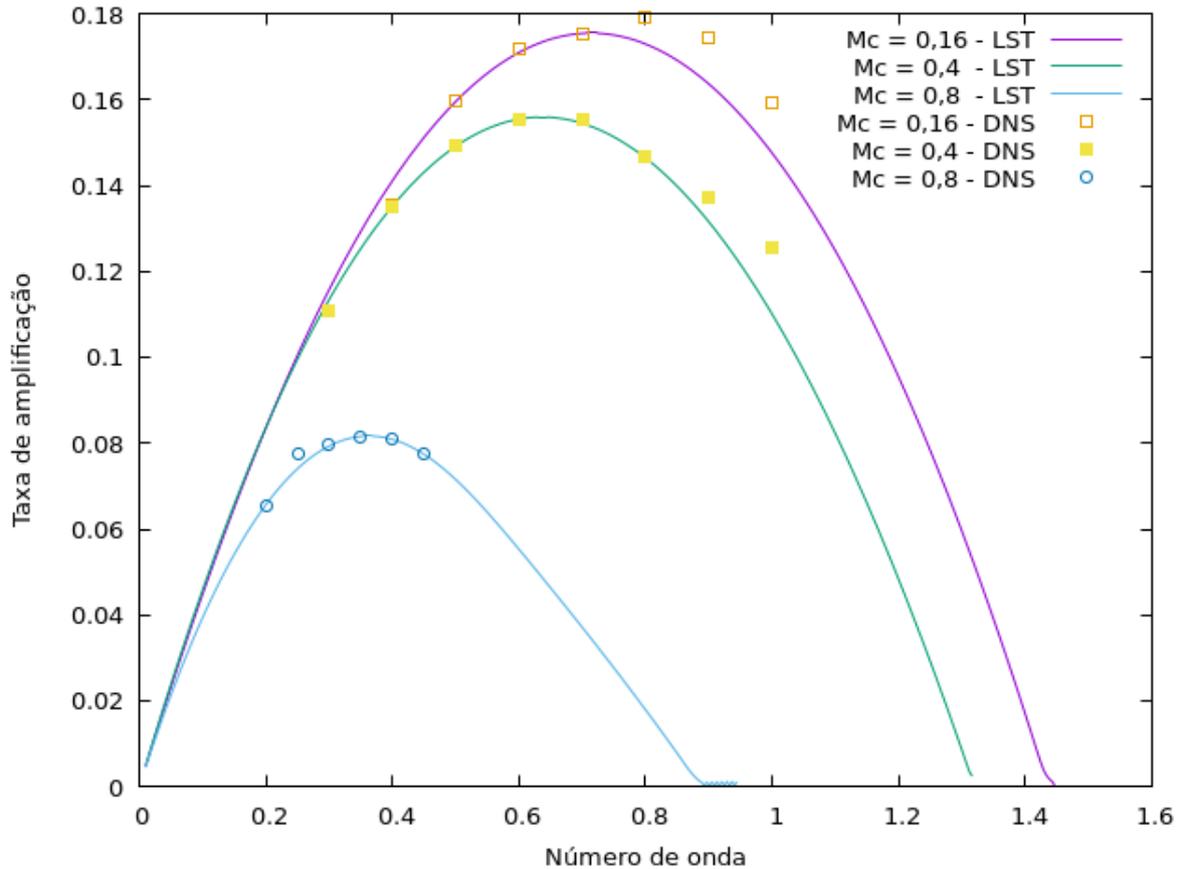
resultados confiáveis para mais que duas casas decimais, e como mostrado na seção anterior a alteração provocada a força de empuxo nos regimes compressíveis só é possível de ser identificada além da segunda casa decimal.

Sendo assim usa-se essa seção para primeiramente comparar os resultados do LST nos regimes de alto Froude e diferentes compressibilidade com o SND. Também será usada para mostrar que a técnica abordada para contornar o problema da velocidade na direção no escoamento base não compromete negativamente a solução do problema. Uma terceira razão é mostrar a evolução do escoamento sendo possível visualizar até mesmo a aparição dos vórtices de Kelvin-Helmholtz. Por final mostrar o efeito que o número de Reynolds tem sobre a evolução das perturbações.

Como não será possível simular casos no SND a ponto do empuxo influenciar consideravelmente o escoamento e como mostrado no Capítulo 4.4 quando o empuxo é desconsiderado a configuração do problema não altera a solução desde que o mesmo número de Mach convectivo seja utilizado, explicitar qual configuração esta sendo utilizada é irrelevante, sendo somente necessário informar o valor de M_c imposto. Sendo assim para cumprir o primeiro ponto simulou-se três casos, para $M_c = 0, 16, 0, 4$ e $0, 8$. Como o objetivo desses testes é uma comparação com os resultados LST para verificar se a implementação da parte binária no código foi bem sucedida, precisa-se que a viscosidade não afete a solução, sendo assim usa-se um $Re = 20000$ como mostrado na Seção 4.5. Como no código SND é necessário impor o número de onda, α , da perturbação e o tempo de simulação é alto, somente alguns valores de α foram testados.

Na Figura 5.14 mostra-se uma comparação entre os resultados obtidos pelo SND e pelo LST para os três valores de Mach convectivo testados. Nele é possível ver que os resultados obtidos pelo SND pra todos os casos testados concordam bem com os resultados obtidos no LST mostrando que a implementação da formulação binária para a camada de mistura no código SND foi um sucesso, e reforçando a ideia que para um valor de $Re = 20000$ pode-se desprezar os efeitos da viscosidade também em camadas binárias. Dentre as três curvas aquela que mais se distancia da resposta do LST é a simulação com a menor compressibilidade, o que é esperado uma vez que o código SND não foi programado para realizar simulações no regime incompressível. Os mesmos comportamentos da estabilidade da camada de mistura explicados na Seção 5.2 foram encontrados, a diminuição das taxas de amplificação com o aumento da compressibilidade e uma tendência a diminuição do número de onda responsável pela maior taxa de amplificação.

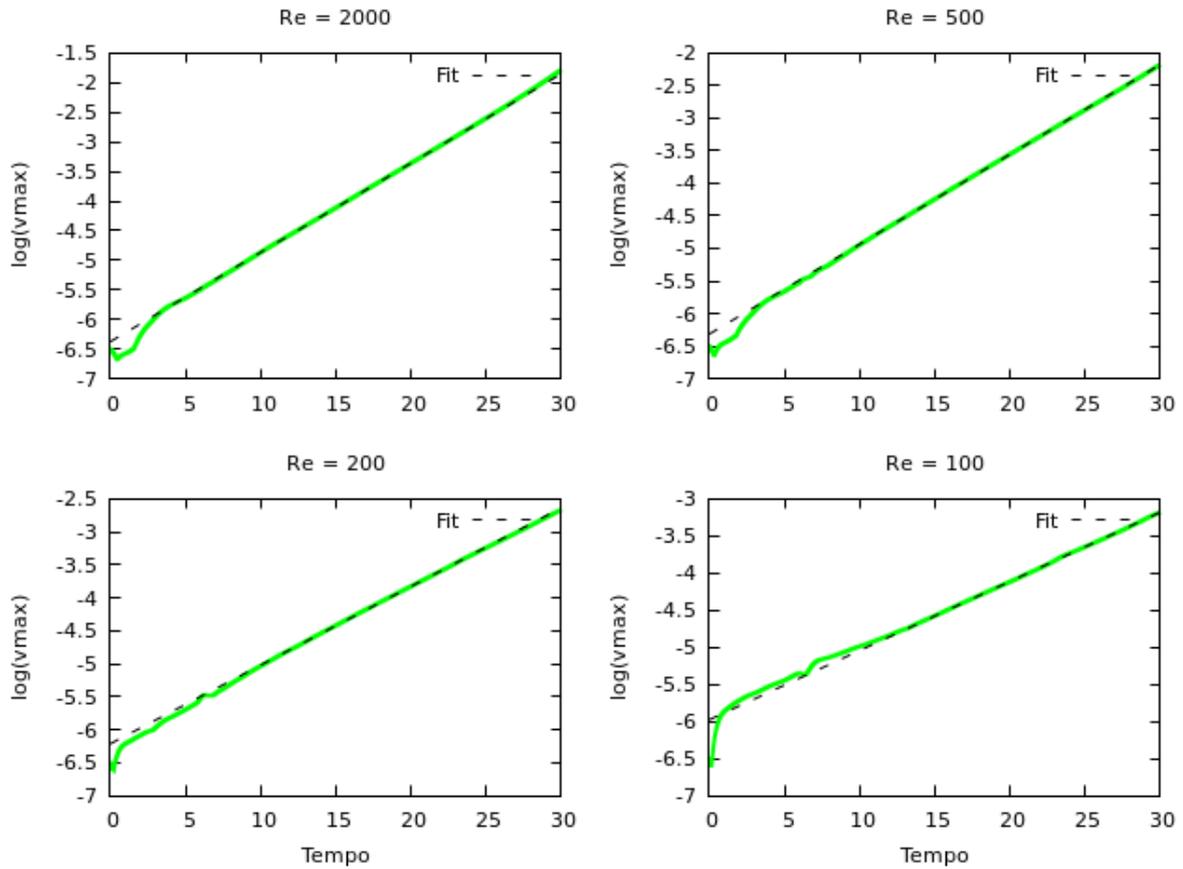
Figura 5.14 - Comparação entre as respostas do LST e do SND para três valores de Mach convectivo.



Fonte: Produzido pelo Autor.

Pra analisar o efeito das forças viscosas testou-se os casos, $M_c = 0,4$ excitada por uma perturbação com $\alpha = 0,65$, e $M_c = 0,8$ excitada por uma perturbação $\alpha = 0,35$. Os números de onda das perturbações escolhidas são aquelas que resultam na maior taxa de amplificação quando as forças viscosas são desprezíveis. Simula-se então para os seguintes valores de Reynolds: 2000, 500, 200 e 100. Na Figura 5.15, para $M_c = 0,4$, e na Figura 5.16 para $M_c = 0,8$, mostra-se o valor do logaritmo da amplitude da perturbação ao longo do tempo assim como o ajuste de curva, feito na zona com o comportamento linear mais longo de cada uma das curvas para retirada do valor da taxa de amplificação. Por final a Tabela 5.4 mostra os valores das taxas de amplificação para cada um dos casos testados

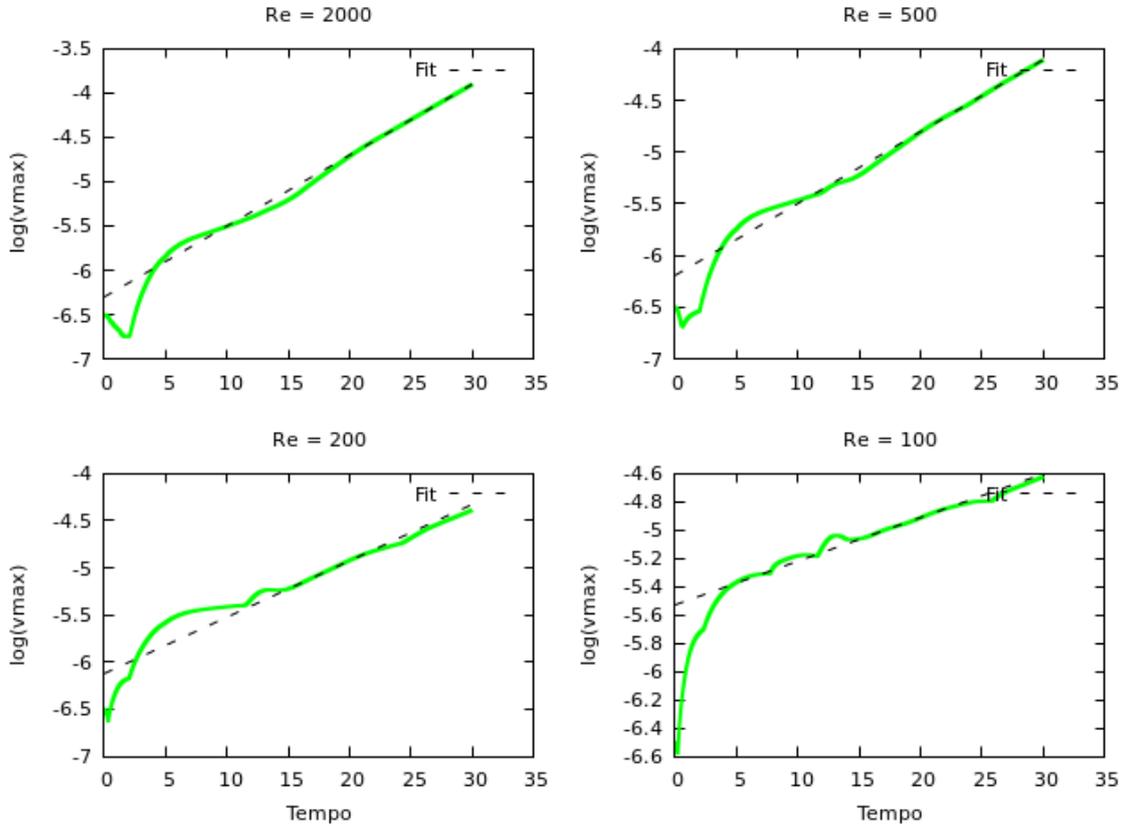
Figura 5.15 - Evolução da perturbação e ajuste de curva para diferentes números de Reynolds no caso $M_c = 0,4$.



Fonte: Produzido pelo Autor.

Percebe-se da Tabela 5.4 que a diminuição do número de Reynolds causa uma diminuição da taxa de amplificação, independente da compressibilidade do problema, mostrando que para o problema da camada de mistura a viscosidade age como um agente estabilizador. Percebe-se da Figura 5.16 que conforme o número de Reynolds diminui a curva da evolução da perturbação ao longo do tempo se torna menos comportada, tendo uma zona linear bem curta. Isto provavelmente está ligado as taxas de amplificações serem baixas, fazendo com que erros numéricos influenciem o resultado o que é reforçado pelo fato de as curvas para os valores Re baixos para $M_c = 0,4$ terem zonas lineares mais longas até mesmo que para o caso $Re = 2000$ e $M_c = 0,8$.

Figura 5.16 - Evolução da perturbação e ajuste de curva para diferentes números de Reynolds no caso $M_c = 0,8$.



Fonte: Produzido pelo Autor.

Por final mostra-se na imagem 5.17 a evolução temporal das perturbações até a saturação para três casos distintos. O caso 1 é um caso homogêneo com $M_c = 0,4$ e $\alpha = 0,8$ está representado pela curva vermelha. O caso 2 é de uma camada binária de O_2/H_2 com $M_c = 0,4$ e $\alpha = 0,65$, representado pela curva azul. O caso 3 é uma camada binária de O_2/H_2 porém com $M_c = 0,8$ e $\alpha = 0,35$, representado pela curva verde. Todos os casos usam o número de onda correspondente a sua máxima taxa de amplificação respectiva ao LST. Para obter as curvas dos casos binários foi necessário diminuir o número de Reynolds de maneira a usar a própria viscosidade natural do escoamento para dissipar os erros numéricos do código. Sendo assim a comparação entre elas não é perfeita uma vez que o número de Reynolds também está alterando. O caso homogêneo usa $Re = 20000$, e as curvas em azul e verde usam $Re = 200$.

Tabela 5.4 - Comparação das taxas de amplificações obtidas do SND entre $M_c = 0,4$ e $M_c = 0,8$ para diferentes valores de Reynolds.

<i>Reynolds</i>	$\omega^{(1)}$	$\omega^{(2)}$
20000	0,155	0,081
2000	0,151	0,080
500	0,138	0,069
200	0,120	0,060
100	0,093	0,031

⁽¹⁾ para $M_c = 0,4$

⁽²⁾ para $M_c = 0,8$

Pode-se perceber a diferença na inclinação de cada uma das curvas, o que mostra a diferença da taxa de amplificação. Mostra-se também os perfis de vorticidade, o que permite a visualização clara dos vórtices de Kelvin-Helmholtz para os três casos. O tempo escolhido para a retirada dos perfis para a confecção das figuras foram os tempos logo antes da saturação de cada um dos casos, ou seja, do caso 1 foi $t = 22$, caso 2 - $t = 40$ e do caso 3 $t = 90$.

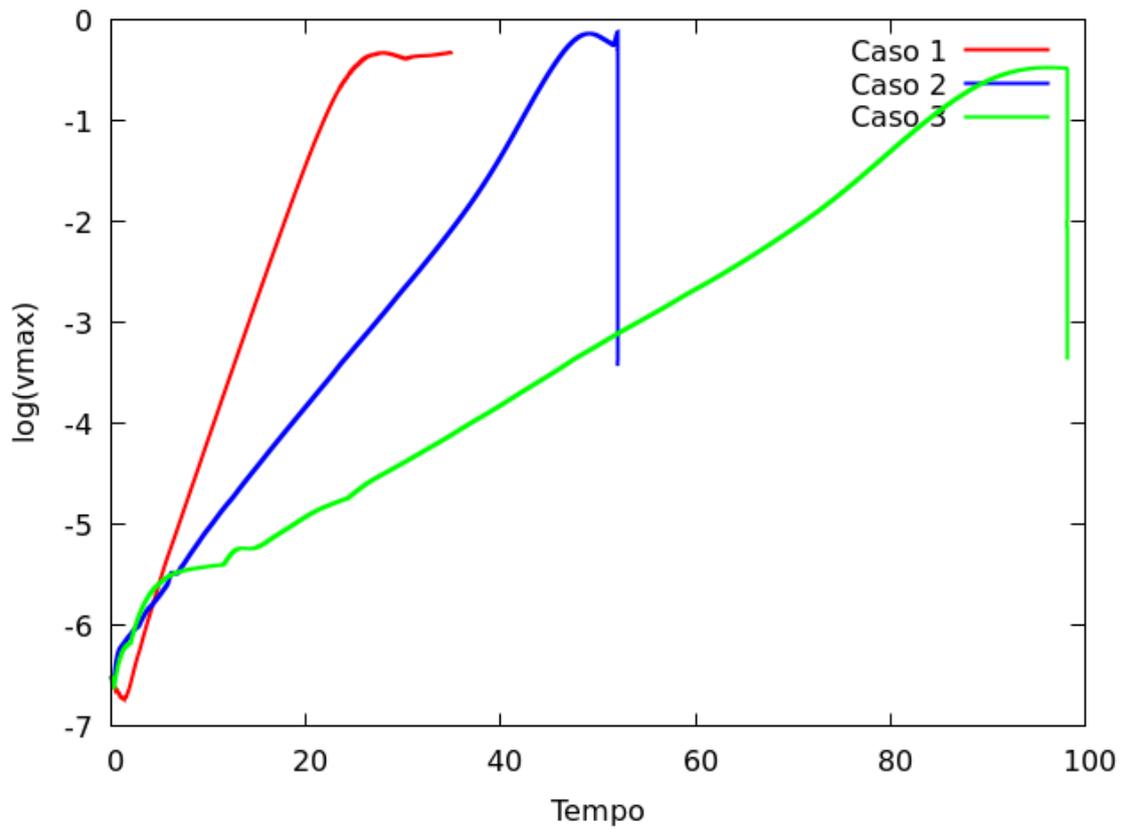
Por final a distribuição da vorticidade dos três casos no tempo correspondente a alguns instantes antes da saturação, ou da divergência, é mostrado na Figura 5.18 para o caso 1, na Figura 5.19 para o caso 2 e na Figura 5.20 para o caso 3. Nas três figuras nota-se a formação de dois vórtices, isso se dá devido a uma das perturbações utilizadas ter um número de onda correspondente a metade do tamanho do domínio, isso é feito pois caso a saturação seja atingida pode-se perceber um segundo mecanismo de emparalhamento de vórtices, como foi explicado no Capítulo 2.

Percebe-se uma diferença significativa entre cada uma dos perfis de vorticidade. Os vórtices de Kelvin-Helmholtz estão muito mais bem formados para o caso homogêneo que para ambos os caso binários, formando uma estrutura circular completa, enquanto que ambas as distribuições dos casos binários mostram um perfil muito mais similar a uma onda. Também há uma diferença entre os dois casos compressíveis do caso binário no qual a distribuição do caso mais compressível parece ter seus vórtices muito mais esticados.

Nota-se também um aumento da intensidade da vorticidade do caso homogêneo, que tem como máximo 1,8, para o caso binário, tendo como máximo 10, indicando que o aumento da estratificação da massa específica gera um aumento da velocidade de rotação dos vórtices. Em compensação quando se olha ambas as imagens para os casos binários percebe-se um diminuição da intensidade da vorticidade para a Fi-

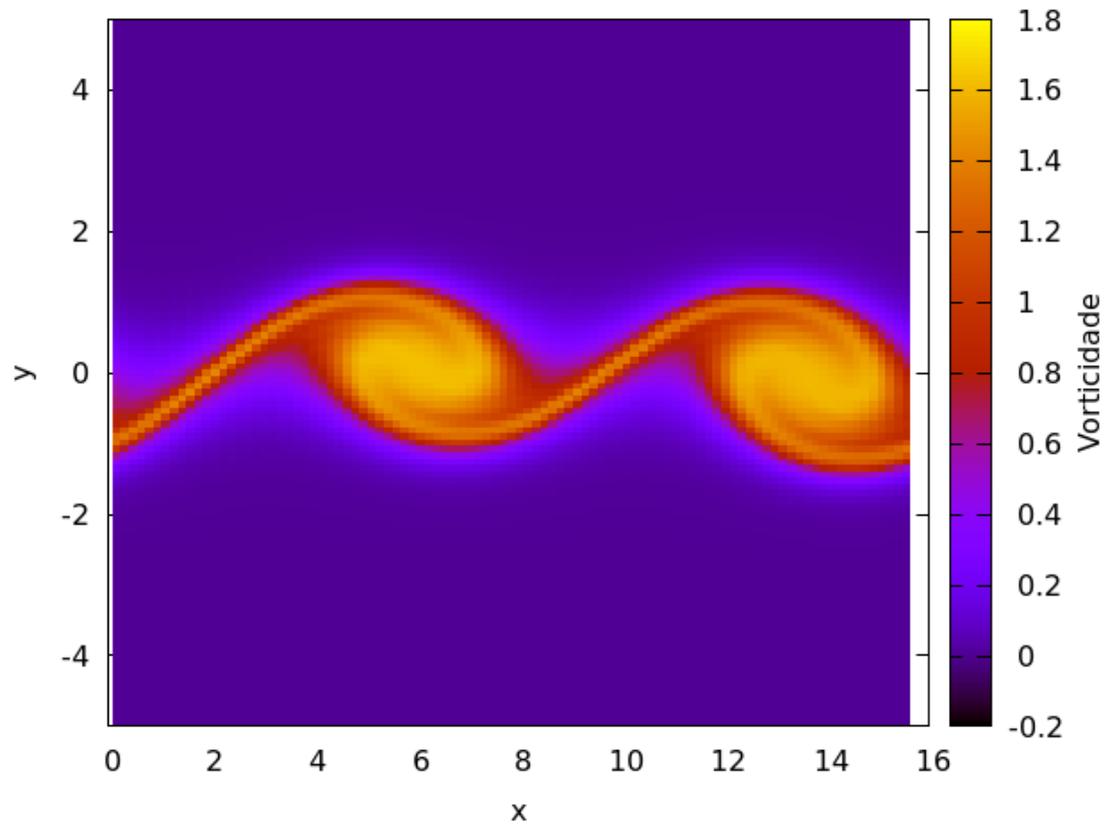
gura 5.20 indicando que a compressibilidade tem um efeito de diminuir a intensidade de rotação dos vórtices. Também percebe-se que em algumas regiões de ambas as figuras para o escoamento binário, temos uma vorticidade negativa, indicando uma possível formação de um vórtice contra rotativo, fenômeno até então não visto no caso homogêneo.

Figura 5.17 - Evolução da perturbação de três casos distintos até a saturação.



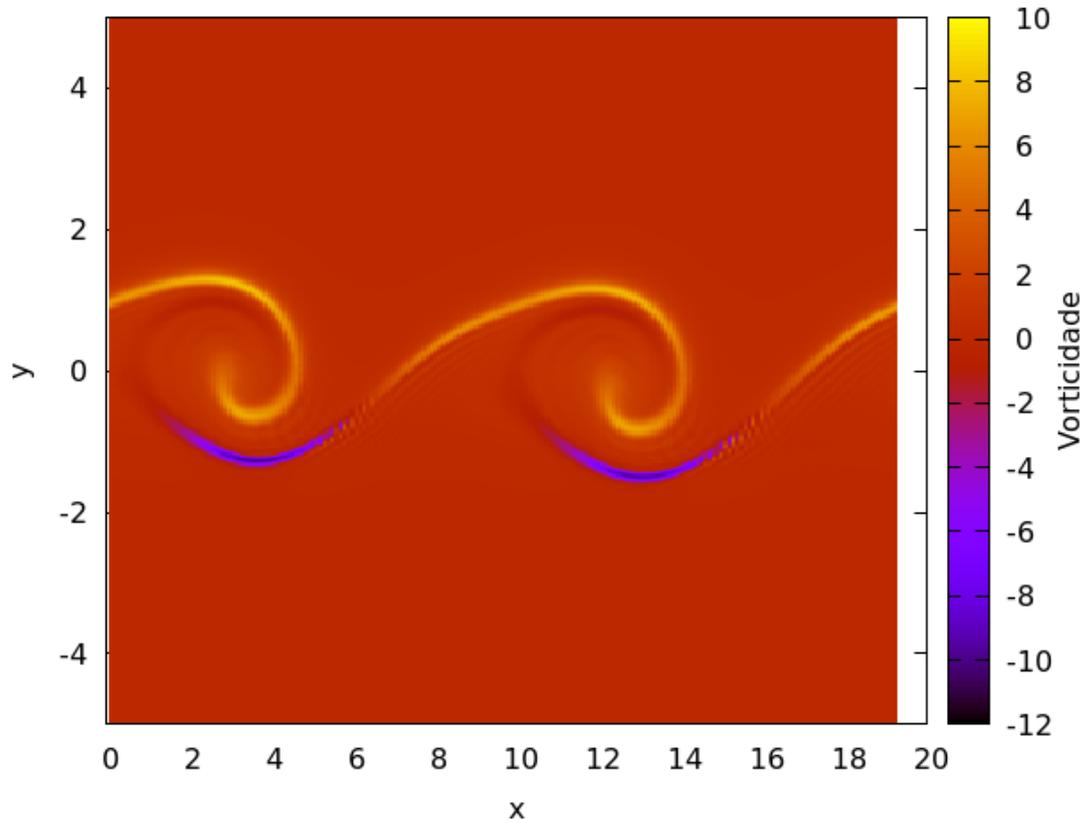
Fonte: Produzido pelo Autor.

Figura 5.18 - Distribuição da vorticidade para o caso homogêneo com $M_c = 0,4$.



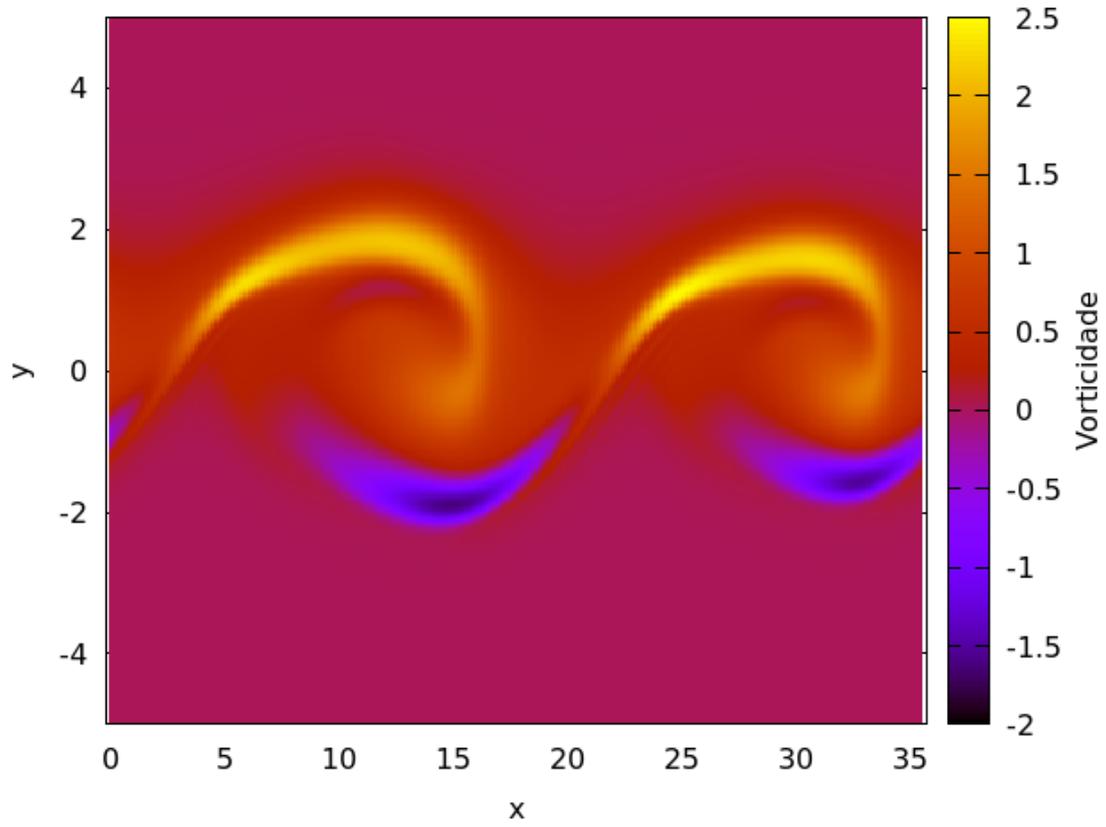
Fonte: Produzido pelo Autor.

Figura 5.19 - Distribuição da vorticidade para o caso binário H2-O2 com $M_c = 0,4$.



Fonte: Produzido pelo Autor.

Figura 5.20 - Distribuição da vorticidade para o caso binário H2-O2 com $M_c = 0,8$.



Fonte: Produzido pelo Autor.

6 CONCLUSÕES

Neste trabalho conseguiu-se encontrar uma equação que prevê a amplificação que uma perturbação terá em uma camada de mistura binária compressível e sobre o efeito do empuxo usando uma a teoria de estabilidade linear. A partir dessa equações criou-se um código computacional para testar os efeitos que a compressibilidade, a força de empuxo e a configuração do problema tem sobre a instabilidade de Kelvin-Helmholtz.

Mostrou-se que, diferente de uma camada de mistura homogênea, o parâmetro que detêm a informação da compressibilidade do problema em uma camada de mistura binária é o número de Mach convectivo. Usando este parâmetro no lugar do número de Mach de uma das correntes torna a a análise da camada de mistura independente da sua configuração, ou seja, o fato de termos oxigênio ou hidrogênio no escoamento superior da camada de mistura, para casos sem força de volume.

Como esperado pela literatura comprovou-se que um aumento na compressibilidade da problema gera um efeito amortizador nas taxas de amplificação. Como efeito secundário nota-se uma faixa menor de números de ondas que geram uma taxa de amplificação maiores que zero, e uma diminuição do número de onda responsável pela maior taxa de amplificação. Mostrou-se também que o efeito da razão entre as massas específicas da corrente superior e inferior age de forma similar a compressibilidade. O aumento de seu gradiente gera taxas de amplificação menores, uma faixa menor de números de onda que geram taxas de amplificação maiores que zero e uma redução do número de onda responsável pela maior taxa de amplificação.

Por final, usando o código LST, analisou-se os efeitos do empuxo e da configuração do problema. Mostrou-se que para número de Froude variando de 1000 à 30 gera-se alterações nas taxas de amplificação na ordem de 0,01 % à 1 %, e que casos onde a compressibilidade é relevante estão nessa faixa de valores. Notou-se também que o empuxo é um fator importante a ser considerado em problemas de camadas de mistura pouco espessas, somente para caso de compressibilidade da ordem de 0,01, gerando alterações nas taxas de amplificação de mais de 50 % nos casos de número de Froude mais baixo. Nota-se também que nos casos onde o empuxo é mais relevante há uma modificação nas curvas de taxa de amplificação por número de onda sugestionando um possível novo modo instável sobrepujando a instabilidade de Kelvin-Helmholtz, sendo possivelmente a instabilidade de Rayleigh-Taylor. Também

conclui-se que a configuração do problema em casos onde a força de empuxo é relevante determina se seu efeito é amortizador ou amplificador, porém independente dela há sempre um aumento no número de onda responsável pela maior taxa de amplificação.

Foi também desenvolvido um código SND que permite analisar a evolução de perturbação em uma camada de mistura binária a partir de uma análise temporal mostrando uma boa concordância com os resultados do código LST desenvolvido quando o número de Reynolds é igual ou superior a 20000. Também se criou uma rotina para se contornar o problema que a força de empuxo agindo sobre o escoamento base causa na análise das perturbações mostrando-se que o método não afeta negativamente as soluções. Os mesmos fenômenos encontrados em relação a amortização das perturbações devido ao aumento compressibilidade visto na solução LST também são encontrados pela solução SND.

Mostrou-se através do código SND o efeito amortecedor que a viscosidade tem no problema da camada de mistura, mostrando que a solução LST serve como um valor máximo no qual a taxa de amplificação pode chegar. Mostrou-se que o código SND temporal retorna curvas de evolução das perturbação piores para taxas de amplificações inferiores a 0,9. Por final viu-se que as topologias da vorticidade obtidas para o caso binário e comparou-se com o caso homogêneo, mostrando que a intensidade da vorticidad para o caso binário é cerca de 5 vezes maior, para a mesma compressibilidade. Quando a compressibilidade foi dobrado a intesidade do perfil de vorticidade diminuiu. Também presencia-se vorticidades negativas para os casos binários em ambas as compressibilidade, o que não ocorre no caso homogêneo.

7 TRABALHOS FUTUROS

Durante este trabalho foi feita a imposição de que a camada de mistura tenha que ser fina o suficiente de maneira que a pressão no escoamento base seja constante ao longo do domínio, ou seja desprezando o efeito da pressão hidrostática. Um próximo passo natural seria encontrar a solução para o problema de camada de mistura sem essa imposição, tornando assim possível a análise de camadas de mistura com espessuras de vorticidade muito maiores, e conseqüentemente podendo analisar valores para Froude muito menores. A aplicação para esses casos seria problemas atmosféricos e astronômicos

Outro ponto interessante seria o desenvolvimento de um código SND que usa a formulação perturbação no lugar da formulação total usada neste trabalho, o que geraria um custo computacional bem menor que o atual e possivelmente com a mesma ou até mesmo uma melhor precisão. Outro teste possível seria encontrar perfis do escoamento base que levam em consideração a pressão hidrostática e simular caso com espessuras de vorticidade bem maiores. Agora que sabe-se que código funciona bem para um caso binário das espécies O_2 e H_2 pode-se facilmente implementar uma biblioteca que descreve o comportamento das propriedades físicas de outros gases permitindo simular casos de camadas de misturas com quaisquer outros gases.

Por final pode-se tentar avançar a formulação usada para escrever o código SND porém agora considerando o termo de reação química. Este termo poderia ser simplificado usando uma análise de chama infinitamente rápida, ou um modelo de cinética química simples, podendo assim simular problemas de camada de mistura com combustão.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANDERSON, J. D. **Modern compressible flow with historical perspective**. [S.l.: s.n.], 2003. 24

BATCHELOR, G. K. **An introduction to fluid mechanics**. [S.l.: s.n.], 1965. (Cambridge Texts in Applied Mathematics). 7

BRIDE, B. J. M.; GORDON, S.; RENO, M. A. **Thermodynamic data for fifty reference elements**. 1993. Report N93-19977. 16, 18, 21

BROWN, G. L.; ROSHKO, A. On density effects and large structure in turbulent mixing layer. **Journal of Fluid Mechanics**, v. 64, n. 4, p. 775–816, 1974. 8, 9, 10

ÇENGEL, Y. A.; BOLES, M. A. **Termodinâmica**. [S.l.]: McGraw-Hill, 1996. 1. 15

DRAZIN, P. G. **Introduction to hydrodynamic stability**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2002. (Cambridge Texts in Applied Mathematics). 7

DUNN, D. W.; LINN, C. C. On the stability of the laminar boundary layer in a compressible fluid. **Journal of the Aeronautical Sciences**, v. 22, p. 455–477, jul. 1955. 6

FEDIOUN, I.; LARDJANE, N. Temporal linear stability analysis of three-dimensional compressible binary shear layers. **AIAA Journal**, v. 43, n. 1, p. 111–123, 2005. 1, 9, 15, 56, 62

FERZIGER, J. H.; PERIC, M. **Computational methods for fluid dynamics**. Berlin: Springer, 1997. 32

FJØRTOFT, R. **Application of integral theorems in deriving criteria of stability for laminar flows and for the baroclinic circular vortex, etc.** Oslo, 1950. ([Geofysiske publikasjoner. vol. 17. no. 6.], v. 17). Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=BbJbMwEACAAJ>>. 6

GHAZALI, B.; KELSO, R. The stability of viscosity stratified gas phase shear layer. In: AIAA COMPUTATIONAL FLUID DYNAMICS CONFERENCE, 15., 2001. **Proceedings...** [S.l.], 2001. p. 12. 10

GROPENGIESSER, H. **Study on the stability of boundary layers and compressible fluids**. 1970. Report TT F-12786. 11, 43

INCROPERA, F. P. **Fundamental of heat and mass transfer**. [S.l.]: LTC, 1994. 26

JACKSON, T. L.; GROSCHE, C. E. Inviscid spatial stability of a compressible mixing layer. **Journal of Fluid Mechanics**, v. 208, p. 609–637, 1989. 1, 9

KAUSHIK. **Kelvin helmholtz clouds**. 2012. 1 fotografia. 800 x 600. Disponível em: <<https://bitty.ch/t8w21>>. Acesso em: 19 jul 2019.

KOZUSKO, F.; LASSEIGNE, D. G.; GROSCHE, C. E.; JACKSON, T. L. The stability of compressible mixing layer in binary gases. **Physics of Fluid Mechanics**, v. 8, n. 7, p. 1954–1963, 1996. 1, 9, 14, 25

KUO, K. K. **Principle of combustion**. [S.l.]: Wiley, 1986. 17

LELE, S. K. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution. **Journal of Computational Physics**, v. 103, n. 1, p. 16–42, 1992. 32

LINDZEN, R. S. Stability of a helmholtz velocity profile in a continuously stratified, infinite boussinesq fluid applications to clear air turbulence. **Journal of the Atmospheric Sciences**, v. 31, p. 1507–1514, 1974. 10

MAHESH, K. A family of high order finite difference schemes with good spectral resolution. **Journal Computational Physics**, v. 145, p. 332–358, 1998. 32

MANCO, J. A.; FREITAS, R. B.; FERNANDES, L. M.; MENDONÇA, M. T. Stability of compressible mixing layers modified by wakes and jets. **Procedia IUTAM**, v. 14, p. 129 – 136, 2015. 10

MARTINEZ, D. M. V.; SCHETTINI, E. B. C.; SILVESTRINI, J. H. The influence of stable stratification on the transition to turbulence in a temporal mixing layer. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, v. 28, n. 2, p. 242–252, 2006. 10

MENDONÇA, M. T. Linear stability analysis of binary compressible mixing layers modified by a jet or a wake deficit. In: AIAA AEROSPACE SCIENCES MEETING AND EXHIBIT, 52. 2014. **Proceedings...** National Harbor, Maryland, 2014. p. 1–13. 10

METCALFE, R. W.; ORZAG, S. A.; BRACHET, M. E.; MENON, S.; RILEY, J. J. Secondary instabilities of a temporally growing mixing layer. **Journal of Fluid Mechanics**, v. 184, p. 207–243, 1987. 8

NASA. **The great red spot**. 2007. 1 fotografia. 730 x 588. Disponível em: <<https://bit.ly/2Tp8Nzu>>. Acesso em: 19 jul 2019.

OKONG'O, N.; BELLAN, J. Real-gas effects on mean flow and temporal stability of binary-species mixing layers. **AIAA Journal**, v. 41, p. 2429–2443, 2003. 10

PAPAMOSCHOU, D. **Experimental investigation of heterogeneous compressible shear layers**. Thesis (PhD in Engineering and Applied Science) — California Institute of Technology, Pasadena, 1987. 9

QUIRINO, S. F. **Simulação numérica direta de camada cisalhante compressível com fonte de calor**. 104 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia e Tecnologia Espaciais) — Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE), São José dos Campos, 2006. 1, 11, 34, 56

RAMBALDI, S.; SALUSTRI, G. Nonlinear growth of kelvin helmholtz waves for a boussinesq fluid. **Il Nuovo Cimento C**, v. 4, p. 75–92, 1981. 10

RAYLEIGH, L. On the stability, or instability, of certain fluid motions. **Proceedings of the London Mathematical Society**, s1-11, n. 1, p. 57–72, 11 1879. ISSN 0024-6115. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1112/plms/s1-11.1.57>>. 6

REED, C. L.; ANDERSON, D. A. Low speed preconditioning applied to the compressible navier-stokes equations. In: AIAA AEROSPACE SCIENCES MEETING AND EXHIBIT, 35. 1997. **Proceedings...** [S.l.], 1997. 74

REID, R. C.; PRAUSNITZ, J. H.; SHERWOOD, T. K. **The properties of gases and liquids**. [S.l.]: McGraw-Hill Education, 1977. 3. 19, 20

SALEMI, L. C. **Análise de estabilidade linear de camada de mistura compressível binária**. 216 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia e Tecnologia Espaciais) — Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE), São José dos Campos, 2006. 1, 7, 11, 44, 53

SANDHAM, N. D. **A numerical investigation of the compressible mixing layer**. 244 p. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) — Stanford University, USA, Stanford, 1990. 1, 11, 34, 44, 45, 54, 56

SHIN, D. S.; FERZIGER, J. H. Linear stability of the reacting mixing layer. **AIAA Journal**, v. 29, p. 1634–1642, 1991. 14

SOARES, M.; MENDONCA, M. T.; FACHINI, F. F. Effect of thickness ratio on the stability of mixing layers with a wake component. In: ESCOLA DE PRIMAVERA DE TRANSIÇÃO E TURBULÊNCIA (EPTT), 9., 2014. **Anais...** São Leopoldo, RS, 2014. p. 7. 10

SQUIRE, H. B. On the stability for three-dimensional disturbances of viscous fluid flow between parallel walls. **Proceedings of the Royal Society of London Series A**, v. 142, p. 621–628, nov. 1933. 6

URNS, S. R. **A introduction to combustion**. [S.l.]: McGraw-Hill Science/Engineering/Math, 1993. 24

APÊNDICE A - DEDUÇÃO DETALHADA

Esta exposta em detalhe o passo a passo matemático de linearização e dedução da equação condensada apresentada no Capítulo 4, assim como as equações para as condições de contorno e para os perfis de perturbação das variáveis.

Primeiro escreve-se as equações de Euler na forma diferencial e a equação da conservação de espécies já no formato adimensional.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0, \quad (\text{A.1})$$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} + \rho w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\gamma Ma_1^2} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (\text{A.2})$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} + \rho w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\gamma Ma_1^2} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\rho}{Fr^2}, \quad (\text{A.3})$$

Onde:

$$\frac{1}{Fr^2} = \frac{g\delta}{U_1^2}, \quad (\text{A.4})$$

$$\rho \frac{\partial w}{\partial t} + \rho u \frac{\partial w}{\partial x} + \rho v \frac{\partial w}{\partial y} + \rho w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\gamma Ma_1^2} \frac{\partial p}{\partial z}, \quad (\text{A.5})$$

$$\rho \frac{\partial T}{\partial t} + \rho u \frac{\partial T}{\partial x} + \rho v \frac{\partial T}{\partial y} + \rho w \frac{\partial T}{\partial z} = -\frac{-p(\gamma - 1)}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right), \quad (\text{A.6})$$

$$\rho \frac{\partial Y_1}{\partial t} + \rho u \frac{\partial Y_1}{\partial x} + \rho v \frac{\partial Y_1}{\partial y} + \rho w \frac{\partial Y_1}{\partial z} = 0, \quad (\text{A.7})$$

$$p = \rho RT. \quad (\text{A.8})$$

Sendo a constante do gás:

$$R = Y_1 + (1 - Y_1)R_{ratio}. \quad (\text{A.9})$$

É bom notar que a equação de conservação da quantidade movimento na direção y tem o termo de Froude com sinal negativo, isso se dá devido ao sinal da gravidade ser para baixo e na adimensionalização o sentido da gravidade já é levada em consideração.

Cada um destas equações precisa ser linearizada. Primeiro dividimos cada uma das variáveis uma parte base e uma parte perturbada, da seguinte maneira.

$$\phi(x, y, z, t) = \bar{\phi}(y) + \phi'(x, y, z, t). \quad (\text{A.10})$$

Sendo que as variáveis base são:

$$\bar{\phi}(y) = [\bar{\rho}(y), \bar{U}(y), 0, 0, \bar{P} = 1, \bar{T}(y), \bar{Y}_1(y), \bar{R}(y)]. \quad (\text{A.11})$$

E as perturbadas são:

$$\phi'(x, y, z, t) = [\rho', u', v', w', P', T', Y_1', R']. \quad (\text{A.12})$$

Sendo que através da consideração de modos normais podemos escrever cada uma das variáveis perturbadas da seguinte maneira:

$$\Phi'(x, y, t) = \mathbb{R}\{\hat{\Phi}(y)\exp[i(\alpha x + \beta z - \omega t)]\}. \quad (\text{A.13})$$

Então para todas as equações de conservação precisamos separar as variáveis em sua parte base mais a parte perturbada, desprezar os termos onde duas partes perturbadas se multiplicam, devido ao valor ser muito menor que os outros termos, e aplicar modos normais.

A.1 Equação da Continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0, \quad (\text{A.14})$$

Separando as variáveis em base mais perturbação temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \rho'}{\partial t} + (\bar{u} + u')\left(\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} + \frac{\partial \rho'}{\partial x}\right) + v'\left(\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial y} + \frac{\partial \rho'}{\partial y}\right) + w'\left(\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} + \frac{\partial \rho'}{\partial z}\right) \\ (\bar{\rho} + \rho')\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial x}\right) + (\bar{\rho} + \rho')\frac{\partial v'}{\partial y} + (\bar{\rho} + \rho')\frac{\partial w'}{\partial z} = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Manipulando os termos e os classificando:

$$\begin{aligned} \underbrace{\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} + \bar{\rho}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}}_{\text{cons.laminar}} + \underbrace{u'\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} + \rho'\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + w'\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z}}_{=0} + \\ \underbrace{u'\frac{\partial \rho'}{\partial x} + v'\frac{\partial \rho'}{\partial y} + w'\frac{\partial \rho'}{\partial z} + \rho'\frac{\partial u'}{\partial x} + \rho'\frac{\partial v'}{\partial y} + \rho'\frac{\partial w'}{\partial z}}_{\text{Termos não-lineares}} \\ + \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial \rho'}{\partial x} + v'\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial y} + \bar{\rho}\frac{\partial u'}{\partial x} + \bar{\rho}\frac{\partial v'}{\partial y} + \bar{\rho}\frac{\partial w'}{\partial z} = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Resultando na seguinte equação:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial \rho'}{\partial x} + v'\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial y} + \bar{\rho}\frac{\partial u'}{\partial x} + \bar{\rho}\frac{\partial v'}{\partial y} + \bar{\rho}\frac{\partial w'}{\partial z} = 0. \quad (\text{A.17})$$

Aplicando os modos normais em cada um dos termos acima individualmente:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} = -\hat{\rho}i\omega \exp[i(\alpha x + \beta z - \omega t)], \quad (\text{A.18})$$

$$\bar{u}\frac{\partial \rho'}{\partial x} = \bar{u}\hat{\rho}i\alpha \exp[i(\alpha x + \beta z - \omega t)], \quad (\text{A.19})$$

$$v'\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial y} = \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial y}\hat{v} \exp[i(\alpha x + \beta z - \omega t)], \quad (\text{A.20})$$

$$\bar{\rho}\frac{\partial u'}{\partial x} = \bar{\rho}\hat{u}i\alpha \exp[i(\alpha x + \beta z - \omega t)], \quad (\text{A.21})$$

$$\bar{\rho} \frac{\partial v'}{\partial y} = \bar{\rho} \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} \exp[i(\alpha x + \beta z - \omega t)], \quad (\text{A.22})$$

$$\bar{\rho} \frac{\partial w'}{\partial y} = \hat{w} i \beta \bar{\rho} \exp[i(\alpha x + \beta z - \omega t)]. \quad (\text{A.23})$$

Dividindo todos os termos por $\exp[i(\alpha x + \beta z - \omega t)]$ e manipulando-se a equação resultando obtem-se:

$$\hat{\rho} i(\alpha \bar{u} - \omega) + \hat{v} \frac{d\bar{\rho}}{dy} + \bar{\rho} \left[i(\alpha \hat{u} + \beta w') + \frac{d\hat{v}}{dy} \right] = 0. \quad (\text{A.24})$$

Sendo esta a mesma equação da continuidade para análise de estabilidade linear mostrada também no capítulo 4.

A.2 Conservação da quantidade de movimento na direção x.

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} + \rho w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\gamma Ma_1^2} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (\text{A.25})$$

Separando as variáveis em base mais perturbação temos:

$$\begin{aligned} (\bar{\rho} + \rho') \frac{\partial(\bar{u} + u')}{\partial t} + (\bar{\rho} + \rho')(\bar{u} + u') \frac{\partial(\bar{u} + u')}{\partial x} + (\bar{\rho} + \rho')v' \frac{\partial(\bar{u} + u')}{\partial y} \\ + (\bar{\rho} + \rho')w' \frac{\partial(\bar{u} + u')}{\partial z} + = -\frac{1}{\gamma Ma_1^2} \frac{\partial p'}{\partial x}. \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

Manipulando os termos e os classificando:

$$\begin{aligned}
& \underbrace{\bar{\rho} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{\rho} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{\rho} \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}}_{\text{cons.laminar}} + \underbrace{\rho' \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{\rho} u' \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \rho' \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \rho' u' \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{\rho} w' \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \rho' w' \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}}_{=0} \\
& \underbrace{\rho' \frac{\partial u'}{\partial t} + \rho' \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} + \bar{\rho} u' \frac{\partial u'}{\partial x} + \rho' u' \frac{\partial u'}{\partial x} + \bar{\rho} v' \frac{\partial u'}{\partial y} + \rho' v' \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \rho' v' \frac{\partial u'}{\partial y} + \bar{\rho} w' \frac{\partial u'}{\partial z} + \rho' w' \frac{\partial u'}{\partial z}}_{\text{Termos não-lineares}} + \\
& \qquad \qquad \qquad \bar{\rho} \frac{\partial u'}{\partial t} + \bar{\rho} \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} + \bar{\rho} v' \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{1}{\gamma Ma_1^2} \frac{\partial p'}{\partial x}.
\end{aligned} \tag{A.27}$$

Resultando na seguinte equação:

$$\bar{\rho} \frac{\partial u'}{\partial t} + \bar{\rho} \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} + \bar{\rho} v' \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{1}{\gamma Ma_1^2} \frac{\partial p'}{\partial x}. \tag{A.28}$$

Aplicando a consideração de modos normais de cada um dos termos da equação acima:

$$\bar{\rho} \frac{\partial u'}{\partial t} = -\bar{\rho} i \omega \hat{u} \exp[i(\alpha x + \beta z - \omega t)], \tag{A.29}$$

$$\bar{\rho} \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} = \bar{\rho} \bar{u} i \alpha \hat{u} \exp[i(\alpha x + \beta z - \omega t)], \tag{A.30}$$

$$\bar{\rho} v' \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \bar{\rho} \frac{d\bar{u}}{dy} \hat{v} \exp[i(\alpha x + \beta z - \omega t)], \tag{A.31}$$

$$-\frac{1}{\gamma Ma_1^2} \frac{\partial p'}{\partial x} = -\frac{i\alpha}{\gamma Ma_1^2} \hat{p} \exp[i(\alpha x + \beta z - \omega t)]. \tag{A.32}$$

Dividindo todos os termos por $\exp[i(\alpha x + \beta z - \omega t)]$ e manipulando-se a equação resultando obtem-se:

$$\hat{u} i(\alpha \bar{u} - \omega) + \hat{v} \frac{d\bar{u}}{dy} + \frac{i\alpha \hat{p}}{\bar{\rho} \gamma Ma_1^2} = 0. \tag{A.33}$$

Sendo esta a mesma equação da conservação da quantidade de movimento na direção x para análise de estabilidade linear mostrada também no capítulo 4.

A.3 Conservação da quantidade de movimento na direção y.

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} + \rho w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\gamma Ma_1^2} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\rho}{Fr^2}. \quad (\text{A.34})$$

Separando as variáveis em base mais perturbação temos:

$$\begin{aligned} (\bar{\rho} + \rho') \frac{\partial v'}{\partial t} + (\bar{\rho} + \rho')(\bar{u} + u') \frac{\partial v'}{\partial x} + (\bar{\rho} + \rho')v' \frac{\partial v'}{\partial y} \\ + (\bar{\rho} + \rho')w' \frac{\partial v'}{\partial y} = -\frac{1}{\gamma Ma_1^2} \frac{\partial p'}{\partial y} + \frac{(\bar{\rho} + \rho')}{Fr^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

Manipulando os termos e os classificando:

$$\begin{aligned} \underbrace{\rho' \frac{\partial v'}{\partial t} + \bar{\rho} u' \frac{\partial v'}{\partial x} + \rho' \bar{u} \frac{\partial v'}{\partial x} + \rho' u' \frac{\partial v'}{\partial x} + \bar{\rho} v' \frac{\partial v'}{\partial y} + \rho' v' \frac{\partial v'}{\partial y} + \bar{\rho} w' \frac{\partial v'}{\partial z} + \rho' w' \frac{\partial v'}{\partial z}}_{\text{Termos não-lineares}} \\ + \underbrace{\frac{\bar{\rho}}{Fr^2}}_{\text{cons.laminar}} + \bar{\rho} \frac{\partial v'}{\partial t} + \bar{\rho} \bar{u} \frac{\partial v'}{\partial x} = -\frac{1}{\gamma Ma^2} \frac{\partial p'}{\partial t} - \frac{\rho'}{Fr^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

Resultando na seguinte equação:

$$\bar{\rho} \frac{\partial v'}{\partial t} + \bar{\rho} \bar{u} \frac{\partial v'}{\partial x} = -\frac{1}{\gamma Ma_1^2} \frac{\partial p'}{\partial t} - \frac{\rho'}{Fr^2}. \quad (\text{A.37})$$

Aplicando a consideração de modos normais de cada um dos termos da equação acima:

$$\bar{\rho} \frac{\partial v'}{\partial t} = -\bar{\rho} i \omega \hat{v} \exp[i(\alpha x + \beta z - \omega t)], \quad (\text{A.38})$$

$$\bar{\rho} \bar{u} \frac{\partial v'}{\partial x} = \bar{\rho} \bar{u} i \alpha \hat{v} \exp[i(\alpha x + \beta z - \omega t)], \quad (\text{A.39})$$

$$-\frac{1}{\gamma Ma_1^2} \frac{\partial p'}{\partial y} = -\frac{1}{\gamma Ma_1^2} \frac{d\hat{p}}{dy} \exp[i(\alpha x + \beta z - \omega t)], \quad (\text{A.40})$$

$$\frac{\rho'}{Fr^2} = \frac{\hat{\rho}}{Fr^2} \exp[i(\alpha x + \beta z - \omega t)]. \quad (\text{A.41})$$

Dividindo todos os termos por $\exp[i(\alpha x + \beta z - \omega t)]$ e manipulando-se a equação resultando obtem-se:

$$\hat{v}i(\alpha \bar{u} - \omega) + \frac{1}{\bar{\rho}\gamma Ma_1^2} \frac{d\hat{p}}{dy} + \frac{\hat{\rho}}{\bar{\rho}Fr^2} = 0. \quad (\text{A.42})$$

Sendo esta a mesma equação da conservação da quantidade de movimento na direção y e para análise de estabilidade linear mostrada também no capítulo 4.

A.4 Conservação da quantidade de movimento na direção z

$$\rho \frac{\partial w}{\partial t} + \rho u \frac{\partial w}{\partial x} + \rho v \frac{\partial w}{\partial y} + \rho w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\gamma Ma_1^2} \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (\text{A.43})$$

Separando as variáveis em base mais perturbação temos:

$$\begin{aligned} (\bar{\rho} + \rho') \frac{\partial w'}{\partial t} + (\bar{\rho} + \rho')(\bar{u} + u') \frac{\partial w'}{\partial x} + (\bar{\rho} + \rho')v' \frac{\partial w'}{\partial y} + \\ (\bar{\rho}\rho')w' \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\gamma Ma_1^2} \frac{\partial p'}{\partial z}. \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

Manipulando os termos e os classificando:

$$\begin{aligned} \underbrace{\rho' \frac{\partial w'}{\partial t} + \bar{\rho}u' \frac{\partial w'}{\partial x} + \rho'\bar{u} \frac{\partial w'}{\partial x} + \rho'u' \frac{\partial w'}{\partial x} + \bar{\rho}v' \frac{\partial w'}{\partial y} + \rho'v' \frac{\partial w'}{\partial y} + \bar{\rho}w' \frac{\partial w'}{\partial z} + \rho'w' \frac{\partial w'}{\partial z}}_{\text{Termos não-lineares}} \\ + \bar{\rho} \frac{\partial w'}{\partial t} + \bar{\rho}\bar{u} \frac{\partial w'}{\partial z} = -\frac{1}{\gamma Ma_1^2} \frac{\partial p'}{\partial z}. \end{aligned} \quad (\text{A.45})$$

Resultando na seguinte equação:

$$\bar{\rho} \frac{\partial w'}{\partial t} + \bar{\rho} \bar{u} \frac{\partial w'}{\partial z} = -\frac{1}{\gamma M a_1^2} \frac{\partial p'}{\partial z}. \quad (\text{A.46})$$

Aplicando a consideração de modos normais de cada um dos termos da equação acima:

$$\bar{\rho} \frac{\partial w'}{\partial t} = -\bar{\rho} \hat{w} i \omega \exp[i(\alpha x + \beta z - \omega t)], \quad (\text{A.47})$$

$$\bar{\rho} \bar{u} \frac{\partial w'}{\partial x} = \bar{\rho} \bar{u} \hat{w} i \alpha \exp[i(\alpha x + \beta z - \omega t)], \quad (\text{A.48})$$

$$-\frac{1}{\gamma M a_1^2} \frac{\partial p'}{\partial z} = -\frac{1}{\gamma M a_1^2} i \beta \hat{p} [(\alpha x + \beta z - \omega t)]. \quad (\text{A.49})$$

Dividindo todos os termos por $\exp[i(\alpha x + \beta z - \omega t)]$ e manipulando-se a equação resultando obtém-se:

$$\hat{w} i (\alpha \bar{u} - \omega) + \frac{i \beta \hat{p}}{\bar{\rho} \gamma M a_1^2} = 0. \quad (\text{A.50})$$

Sendo esta a mesma equação da conservação da quantidade de movimento na direção z para análise de estabilidade linear mostrada também no capítulo 4.

A.5 Conservação da energia

$$\rho \frac{\partial T}{\partial t} + \rho u \frac{\partial T}{\partial x} + \rho v \frac{\partial T}{\partial y} + z w \frac{\partial T}{\partial z} = -\frac{-p(\gamma - 1)}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right). \quad (\text{A.51})$$

Separando as variáveis em base mais perturbação temos:

$$\begin{aligned} & (\bar{\rho} + \rho') \frac{\partial(\bar{T} + T')}{\partial t} + (\bar{\rho} + \rho')(\bar{u} + u') \frac{\partial(\bar{T} + T')}{\partial x} + (\bar{\rho} + \rho')v' \frac{\partial(\bar{T} + T')}{\partial y} \\ & + (\bar{\rho} + \rho')w' \frac{\partial(\bar{T} + T')}{\partial z} = -\frac{(1 + p')(\gamma - 1)}{R} \left(\frac{\partial(\bar{u} + u')}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.52})$$

Manipulando os termos e os classificando:

$$\begin{aligned}
& \underbrace{\bar{\rho} \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \bar{\rho} \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \frac{(\gamma - 1) \partial \bar{u}}{R \partial x}}_{\text{cons.laminar}} \\
& + \underbrace{\rho' \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \bar{\rho} u' \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \rho' \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \rho' u' \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \bar{\rho} w' \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} + \rho' w' \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} + \frac{p'(\gamma - 1) \partial \bar{u}}{R \partial x}}_{=0} \\
& + \underbrace{\rho' \frac{\partial T'}{\partial t} + \bar{\rho} u' \frac{\partial T'}{\partial x} + \rho' \bar{u} \frac{\partial T'}{\partial x} + \rho' u' \frac{\partial T'}{\partial x} + \bar{\rho} v' \frac{\partial T'}{\partial y} + \rho' v' \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} + \rho' v' \frac{\partial T'}{\partial y}}_{\text{Termos não-lineares}} \quad (\text{A.53}) \\
& + \underbrace{\bar{\rho} w' \frac{\partial T'}{\partial z} + \rho' w' \frac{\partial T'}{\partial z} + \frac{p'(\gamma - 1) \partial u'}{R \partial x} + \frac{p'(\gamma - 1) \partial v'}{R \partial y} + \frac{p'(\gamma - 1) \partial w'}{R \partial z}}_{\text{Termos não-lineares}} \\
& + \bar{\rho} \frac{\partial T'}{\partial t} + \bar{\rho} \bar{u} \frac{\partial T'}{\partial x} + \bar{\rho} v' \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = - \frac{(\gamma - 1) \partial u'}{R \partial x} - \frac{(\gamma - 1) \partial v'}{R \partial y} - \frac{(\gamma - 1) \partial w'}{R \partial z}.
\end{aligned}$$

Resultando na seguinte equação:

$$\bar{\rho} \frac{\partial T'}{\partial t} + \bar{\rho} \bar{u} \frac{\partial T'}{\partial x} + \bar{\rho} v' \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = - \frac{(\gamma - 1) \partial u'}{R \partial x} - \frac{(\gamma - 1) \partial v'}{R \partial y} - \frac{(\gamma - 1) \partial w'}{R \partial z}. \quad (\text{A.54})$$

Aplicando a consideração de modos normais de cada um dos termos da equação acima:

$$\bar{\rho} \frac{\partial T'}{\partial t} = -\bar{\rho} \hat{T} i \omega \exp[i(\alpha x + \beta z - \omega t)], \quad (\text{A.55})$$

$$\bar{\rho} \bar{u} \frac{\partial T'}{\partial x} = \bar{\rho} \bar{u} \hat{T} i \alpha \exp[i(\alpha x + \beta z - \omega t)], \quad (\text{A.56})$$

$$\bar{\rho} v' \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = \bar{\rho} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \hat{v} \exp[i(\alpha x + \beta z - \omega t)], \quad (\text{A.57})$$

$$- \frac{(\gamma - 1) \partial u'}{R \partial x} = - \frac{(\gamma - 1)}{R} i \alpha \hat{u} \exp[i(\alpha x + \beta z - \omega t)], \quad (\text{A.58})$$

$$-\frac{(\gamma-1)}{R}\frac{\partial v'}{\partial y} = -\frac{(\gamma-1)}{R}\frac{\partial \hat{v}}{\partial y} \exp[i(\alpha x + \beta z - \omega t)], \quad (\text{A.59})$$

$$-\frac{(\gamma-1)}{R}\frac{\partial w'}{\partial z} = -\frac{(\gamma-1)}{R}i\beta\hat{w} \exp[i(\alpha x + \beta z - \omega t)]. \quad (\text{A.60})$$

Dividindo todos os termos por $\exp[i(\alpha x + \beta z - \omega t)]$ e manipulando-se a equação resultando obtem-se:

$$\hat{T}i(\alpha\bar{u} - \omega) + \hat{v}\frac{d\bar{T}}{dy} + \frac{(\gamma-1)}{\bar{\rho}R} \left[i(\alpha\hat{u} + \beta\hat{w}) + \frac{d\hat{v}}{dy} \right] = 0. \quad (\text{A.61})$$

Sendo esta a mesma equação da conservação da energia para análise de estabilidade linear mostrada também no capítulo 4.

A.6 Conservação da espécie

$$\rho\frac{\partial Y_1}{\partial t} + \rho u\frac{\partial Y_1}{\partial x} + \rho v\frac{\partial Y_1}{\partial y} + \rho w\frac{\partial Y_1}{\partial z} = 0. \quad (\text{A.62})$$

Separando as variáveis em base mais perturbação temos:

$$\begin{aligned} (\bar{\rho} + \rho')\frac{\partial(\bar{Y}_1 + Y_1')}{\partial t} + (\bar{\rho} + \rho')(\bar{u} + u')\frac{\partial(\bar{Y}_1 + Y_1')}{\partial x} + (\bar{\rho} + \rho')v'\frac{\partial(\bar{Y}_1 + Y_1')}{\partial y} \\ + (\bar{\rho} + \rho')w'\frac{\partial(\bar{Y}_1 + Y_1')}{\partial z} = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.63})$$

Manipulando os termos e os classificando:

$$\begin{aligned}
& \underbrace{\bar{\rho} \frac{\partial \bar{Y}_1}{\partial t} + \bar{\rho} \bar{u} \frac{\partial \bar{Y}_1}{\partial x}}_{\text{cons.laminar}} + \underbrace{\rho' \frac{\partial \bar{Y}_1}{\partial t} + \bar{\rho} u' \frac{\partial \bar{Y}_1}{\partial x} + \rho' \bar{u} \frac{\partial \bar{Y}_1}{\partial x} + \rho' u' \frac{\partial \bar{Y}_1}{\partial x} + \bar{\rho} w' \frac{\partial \bar{Y}_1}{\partial z} + \rho' w' \frac{\partial \bar{Y}_1}{\partial z}}_{=0} \\
& + \underbrace{\rho' \frac{\partial Y_1'}{\partial t} + \rho' \bar{u} \frac{\partial Y_1'}{\partial x} + \bar{\rho} u' \frac{\partial Y_1'}{\partial x} + \rho' u' \frac{\partial Y_1'}{\partial x} + \bar{\rho} v' \frac{\partial Y_1'}{\partial y} + \rho' v' \frac{\partial Y_1'}{\partial y} + \rho' v' \frac{\partial \bar{Y}_1}{\partial y} + \bar{\rho} w' \frac{\partial Y_1'}{\partial z} + \rho' w' \frac{\partial Y_1'}{\partial z}}_{\text{Termos não-lineares}} \\
& \qquad \qquad \qquad + \bar{\rho} \frac{\partial Y_1'}{\partial t} + \bar{\rho} \bar{u} \frac{\partial Y_1'}{\partial x} + \bar{\rho} v' \frac{\partial \bar{Y}_1}{\partial y} = 0.
\end{aligned} \tag{A.64}$$

Resultando na seguinte equação:

$$\bar{\rho} \frac{\partial Y_1'}{\partial t} + \bar{\rho} \bar{u} \frac{\partial Y_1'}{\partial x} + \bar{\rho} v' \frac{\partial \bar{Y}_1}{\partial y} = 0. \tag{A.65}$$

Aplicando a consideração de modos normais de cada um dos termos da equação acima:

$$\bar{\rho} \frac{\partial Y_1'}{\partial t} = -\bar{\rho} \hat{Y}_1 i \omega \exp[i(\alpha x + \beta z - \omega t)], \tag{A.66}$$

$$\bar{\rho} \bar{u} \frac{\partial Y_1'}{\partial x} = -\bar{\rho} \bar{u} \hat{Y}_1 i \alpha \exp[i(\alpha x + \beta z - \omega t)], \tag{A.67}$$

$$\bar{\rho} v' \frac{\partial \bar{Y}_1}{\partial y} = -\bar{\rho} \hat{v} \frac{\partial \bar{Y}_1}{\partial y} \exp[i(\alpha x + \beta z - \omega t)], \tag{A.68}$$

Dividindo todos os termos por $\exp[i(\alpha x + \beta z - \omega t)]$ e manipulando-se a equação resultando obtem-se:

$$\hat{Y}_1 i(\alpha \bar{u} - \omega) + \hat{v} \frac{d\bar{Y}_1}{dy} = 0. \tag{A.69}$$

Sendo esta a mesma equação da conservação das espécies usada para análise de estabilidade linear mostrada também no capítulo 4.

A.7 Lei do gás ideal

$$p = \rho RT. \quad (\text{A.70})$$

Separando as variáveis em base mais perturbação temos:

$$1 + p' = (\bar{\rho} + \rho')(\bar{R} + R')(\bar{T} + T'). \quad (\text{A.71})$$

Manipulando os termos e os classificando:

$$1 + p' = \underbrace{\bar{\rho}\bar{R}\bar{T}}_{=1} + \underbrace{\rho'R'\bar{T} + \rho'\bar{R}T' + \bar{\rho}R'T' + \rho'R'T'}_{\text{Termos não-lineares}} + \bar{\rho}\bar{R}T' + \bar{\rho}R'\bar{T} + \rho'\bar{R}\bar{T}. \quad (\text{A.72})$$

Resultando na seguinte equação:

$$p' = \bar{\rho}\bar{R}T' + \bar{\rho}R'\bar{T} + \rho'\bar{R}\bar{T}. \quad (\text{A.73})$$

Aplicando a consideração de modos normais de cada um dos termos da equação acima:

$$p' = \hat{p} \exp[i(\alpha x + \beta z - \omega t)], \quad (\text{A.74})$$

$$\bar{\rho}\bar{R}T' = \bar{\rho}\hat{R}\bar{T} \exp[i(\alpha x + \beta z - \omega t)], \quad (\text{A.75})$$

$$\bar{\rho}R'\bar{T} = \bar{\rho}\hat{R}\bar{T} \exp[i(\alpha x + \beta z - \omega t)], \quad (\text{A.76})$$

$$\rho'\bar{R}\bar{T} = \hat{\rho}\bar{R}\bar{T} \exp[i(\alpha x + \beta z - \omega t)]. \quad (\text{A.77})$$

Dividindo todos os termos por $\exp[i(\alpha x + \beta z - \omega t)]$ e manipulando-se a equação

resultando obtem-se:

$$\hat{p} = \hat{\rho}\bar{R}\bar{T} + \bar{\rho}\hat{R}\bar{T} + \bar{\rho}\bar{R}\hat{T}. \quad (\text{A.78})$$

Sendo esta a mesma lei de estado usada para análise de estabilidade linear mostrada também no capítulo 4.

A.8 Constante do gás

Por final precisa-se também da equação da constante do gás para finalizar o grupo de equações

$$R = Y_1 + (1 - Y_1)R_{ratio}. \quad (\text{A.79})$$

Separando as variáveis em base mais perturbação temos:

$$\bar{R} + R' = \bar{Y}_1 + Y'_1 + (1 - Y'_1 - \bar{Y}_1)R_{ratio}. \quad (\text{A.80})$$

Manipulando os termos e os classificando:

$$\underbrace{\bar{R} - \bar{Y}_1 + (1 - \bar{Y}_1)R_{ratio}}_{partelaminar} + R' = Y'_1 - Y'_1 R_{ratio}. \quad (\text{A.81})$$

Resultando na seguinte equação:

$$R' = Y'_1(1 - R_{ratio}). \quad (\text{A.82})$$

Aplicando a consideração de modos normais de cada um dos termos da equação acima:

$$R' = \hat{R} \exp[i(\alpha x + \beta z - \omega t)], \quad (\text{A.83})$$

$$Y'_1(1 - R_{ratio}) = \hat{Y}'_1(1 - R_{ratio}) \exp[i(\alpha x + \beta z - \omega t)]. \quad (\text{A.84})$$

Dividindo todos os termos por $\exp[i(\alpha x + \beta z - \omega t)]$ e manipulando-se a equação resultando obtém-se:

$$\hat{R} = \hat{Y}_1(1 - R_{ratio}). \quad (\text{A.85})$$

Sendo esta a equação que representa a constante do gás para mistura de gases linearizada usada para análise de estabilidade linear mostrada também no Capítulo 4.

A.9 Dedução da equação condensada.

Reproduzindo todas as equações linearizadas abaixo para facilitar o leitor:

Continuidade

$$\hat{\rho}i(\alpha\bar{u} - \omega) + \hat{v}\frac{d\bar{\rho}}{dy} + \bar{\rho}\left[i(\alpha\hat{u} + \beta w') + \frac{d\hat{v}}{dy}\right] = 0. \quad (\text{A.86})$$

Conservação do momento na direção x:

$$\hat{u}i(\alpha\bar{u} - \omega) + \hat{v}\frac{d\bar{u}}{dy} + \frac{i\alpha\hat{p}}{\bar{\rho}\gamma Ma_1^2} = 0. \quad (\text{A.87})$$

Conservação do momento na direção y:

$$\hat{v}i(\alpha\bar{u} - \omega) + \frac{1}{\bar{\rho}\gamma Ma_1^2}\frac{d\hat{p}}{dy} + \frac{\hat{p}}{\bar{\rho}Fr^2} = 0. \quad (\text{A.88})$$

Conservação do momento na direção z:

$$\hat{w}i(\alpha\bar{u} - \omega) + \frac{i\beta\hat{p}}{\bar{\rho}\gamma Ma_1^2} = 0. \quad (\text{A.89})$$

Conservação da energia

$$\hat{T}i(\alpha\bar{u} - \omega) + \hat{v}\frac{d\bar{T}}{dy} + \frac{(\gamma - 1)}{\bar{\rho}\bar{R}}\left[i(\alpha\hat{u} + \beta\hat{w}) + \frac{d\hat{v}}{dy}\right] = 0. \quad (\text{A.90})$$

Conservação das espécies:

$$\hat{Y}_1 i(\alpha\bar{u} - \omega) + \hat{v} \frac{d\bar{Y}_1}{dy} = 0. \quad (\text{A.91})$$

Lei do gás ideal:

$$\hat{p} = \bar{\rho}\bar{R}\hat{T} + \bar{\rho}\hat{R}\bar{T} + \hat{\rho}\bar{R}\bar{T}. \quad (\text{A.92})$$

Constante do gás

$$\hat{R} = \hat{Y}_1(1 - R_{ratio}). \quad (\text{A.93})$$

Primeiramente substitui-se a equação da continuidade, [A.86](#), na equação da quantidade de movimento na direção y e de maneira a eliminar o \hat{p} e na equação do estado:

$$\hat{p} = \frac{\hat{v}}{(\alpha\bar{u} - \omega)} \frac{d\bar{\rho}}{dy} + \frac{i\bar{\rho}}{(\alpha\bar{u} - \omega)} \left[i(\alpha\hat{u} + \beta w') + \frac{d\hat{v}}{dy} \right], \quad (\text{A.94})$$

$$\hat{v}i(\alpha\bar{u} - \omega) + \frac{1}{\bar{\rho}\gamma Ma_1^2} \frac{d\hat{p}}{dy} + \frac{i}{\bar{\rho}(\alpha\bar{u} - \omega)Fr^2} \left[\hat{v} \frac{d\bar{\rho}}{dy} + \bar{\rho} \left[i(\alpha\hat{u} + \beta w') + \frac{d\hat{v}}{dy} \right] \right] = 0, \quad (\text{A.95})$$

$$\hat{p} = \bar{\rho}\bar{R}\hat{T} + \bar{\rho}\hat{R}\bar{T} + \frac{\bar{R}\bar{T}i}{(\alpha\bar{u} - \omega)} \left[\hat{v} \frac{d\bar{\rho}}{dy} + \bar{\rho} \left[i(\alpha\hat{u} + \beta w') + \frac{d\hat{v}}{dy} \right] \right]. \quad (\text{A.96})$$

Usando a Equação [A.93](#) para eliminar a variável \hat{R} da equação acima:

$$\hat{p} = \bar{\rho}\bar{R}\hat{T} + \bar{\rho}\bar{T}\hat{Y}_1(1 - R_{ratio}) + \frac{\bar{R}\bar{T}i}{(\alpha\bar{u} - \omega)} \left[\hat{v} \frac{d\bar{\rho}}{dy} + \bar{\rho} \left[i(\alpha\hat{u} + \beta w') + \frac{d\hat{v}}{dy} \right] \right]. \quad (\text{A.97})$$

Usando a equação da conservação da energia, [A.90](#) na equação do estado de maneira a eliminar o termo \hat{T} têm-se:

$$\hat{T} = \frac{i}{(\alpha\bar{u} - \omega)} \left[\hat{v} \frac{d\bar{T}}{dy} + \frac{(\gamma - 1)}{\bar{\rho}\bar{R}} \left[i(\alpha\hat{u} + \beta\hat{w}) + \frac{d\hat{v}}{dy} \right] \right], \quad (\text{A.98})$$

$$\begin{aligned} \hat{p} &= \frac{i\bar{\rho}\bar{R}}{(\alpha\bar{u} - \omega)} \left[\hat{v} \frac{d\bar{T}}{dy} + \frac{(\gamma - 1)}{\bar{\rho}\bar{R}} \left[i(\alpha\hat{u} + \beta\hat{w}) + \frac{d\hat{v}}{dy} \right] \right] \\ &+ \bar{\rho}\bar{T}\hat{Y}_1(1 - R_{ratio}) + \frac{\bar{R}\bar{T}i}{(\alpha\bar{u} - \omega)} \left[\hat{v} \frac{d\bar{\rho}}{dy} + \bar{\rho} \left[i(\alpha\hat{u} + \beta w') + \frac{d\hat{v}}{dy} \right] \right], \end{aligned} \quad (\text{A.99})$$

Para eliminar o \hat{Y}_1 usa-se a Equação A.91 na equação acima:

$$\hat{Y}_1 = \frac{i}{(\alpha\bar{u} - \omega)} \hat{v} \frac{d\bar{Y}_1}{dy}, \quad (\text{A.100})$$

$$\begin{aligned} \hat{p} &= \frac{i\bar{\rho}\bar{R}}{(\alpha\bar{u} - \omega)} \left[\hat{v} \frac{d\bar{T}}{dy} + \frac{(\gamma - 1)}{\bar{\rho}\bar{R}} \left[i(\alpha\hat{u} + \beta\hat{w}) + \frac{d\hat{v}}{dy} \right] \right] \\ &+ \bar{\rho}\bar{T} \frac{i}{(\alpha\bar{u} - \omega)} \hat{v} \frac{d\bar{Y}_1}{dy} (1 - R_{ratio}) + \frac{\bar{R}\bar{T}i}{(\alpha\bar{u} - \omega)} \left[\hat{v} \frac{d\bar{\rho}}{dy} + \bar{\rho} \left[i(\alpha\hat{u} + \beta w') + \frac{d\hat{v}}{dy} \right] \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.101})$$

Pode-se derivar a parte laminar da Equação A.81 de maneira a obter a seguinte relação:

$$\frac{d\bar{R}}{dy} = (1 - R_{ratio}) \frac{d\bar{Y}_1}{dy}. \quad (\text{A.102})$$

Usando a equação acima podemos eliminar completamente a variável \bar{Y}_1 da Equação A.101, obtendo assim:

$$\begin{aligned} \hat{p} &= \frac{i\hat{v}}{(\alpha\bar{u} - \omega)} \left[\bar{\rho}\bar{R} \frac{d\bar{T}}{dy} + \bar{\rho}\bar{T} \frac{d\bar{R}}{dy} + \bar{R}\bar{T} \frac{d\bar{\rho}}{dy} \right] + \frac{\bar{\rho}\bar{R}i}{(\alpha\bar{u} - \omega)} \left[\frac{(\gamma - 1)}{\bar{\rho}\bar{R}} \left[i(\alpha\hat{u} + \beta\hat{w}) + \frac{d\hat{v}}{dy} \right] \right] \\ &+ \frac{\bar{R}\bar{T}i}{(\alpha\bar{u} - \omega)} \left[\bar{\rho} \left[i(\alpha\hat{u} + \beta w') + \frac{d\hat{v}}{dy} \right] \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.103})$$

Nesta equação pode-se notar que o primeiro termo entre colchetes é simplesmente a lei do estado derivada em y :

$$\frac{dp}{dy} = \bar{\rho}\bar{R}\frac{d\bar{T}}{dy} + \bar{\rho}\bar{T}\frac{d\bar{R}}{dy} + \bar{R}\bar{T}\frac{d\bar{\rho}}{dy}. \quad (\text{A.104})$$

E como:

$$1 = \bar{\rho}\bar{R}\bar{T}. \quad (\text{A.105})$$

Pode-se então simplificar a Equação A.103 com as considerações acima e após algum manipulação matemática para:

$$\hat{p} = \frac{\gamma i}{(\alpha\bar{u} - \omega)} \left[i(\alpha\hat{u} + \beta\hat{w}) + \frac{d\hat{v}}{dy} \right]. \quad (\text{A.106})$$

Reduzindo assim então para somente quatro equações linearizadas:

Conservação da quantidade de movimento em x :

$$\hat{u}i(\alpha\bar{u} - \omega) + \hat{v}\frac{d\bar{u}}{dy} + \frac{i\alpha\hat{p}}{\bar{\rho}\gamma Ma_1^2} = 0. \quad (\text{A.107})$$

Conservação da quantidade de movimento em y :

$$\hat{v}i(\alpha\bar{u} - \omega) + \frac{1}{\bar{\rho}\gamma Ma_1^2} \frac{d\hat{p}}{dy} + \frac{i}{\bar{\rho}(\alpha\bar{u} - \omega)Fr^2} \left[\hat{v}\frac{d\bar{\rho}}{dy} + \bar{\rho} \left[i(\alpha\hat{u} + \beta\hat{w}') + \frac{d\hat{v}}{dy} \right] \right] = 0. \quad (\text{A.108})$$

Conservação da quantidade de movimento em z :

$$\hat{w}i(\alpha\bar{u} - \omega) + \frac{i\beta\hat{p}}{\bar{\rho}\gamma Ma_1^2} = 0. \quad (\text{A.109})$$

E a equação condensada da conservação de energia:

$$\hat{p}i(\alpha\bar{u} - \omega) = -\gamma \left[i(\alpha\hat{u} + \beta\hat{w}) + \frac{d\hat{v}}{dy} \right]. \quad (\text{A.110})$$

Para eliminar as variáveis \hat{u} e \hat{w} da equação acima pode-se usar as equações de conservação da quantidade de movimento na direção x e z manipuladas da seguinte forma:

$$\hat{u} = \frac{1}{(\alpha\bar{u} - \omega)} \left[i\hat{v} \frac{d\bar{u}}{dy} - \frac{\alpha\hat{p}}{\bar{\rho}\gamma Ma_1^2} \right], \quad (\text{A.111})$$

$$\hat{w} = -\frac{1}{(\alpha\bar{u} - \omega)} \frac{\beta\hat{p}}{\bar{\rho}\gamma Ma_1^2}. \quad (\text{A.112})$$

Substituindo na Equação A.110:

$$\hat{p}i(\alpha\bar{u} - \omega) = -\gamma \left[i\alpha \left[\frac{1}{(\alpha\bar{u} - \omega)} \left[i\hat{v} \frac{d\bar{u}}{dy} - \frac{\alpha\hat{p}}{\bar{\rho}\gamma Ma_1^2} \right] \right] - \beta \frac{1}{(\alpha\bar{u} - \omega)} \frac{\beta\hat{p}}{\bar{\rho}\gamma Ma_1^2} \right] + \frac{d\hat{v}}{dy}. \quad (\text{A.113})$$

Manipulando-se a equação acima de maneira que os termos de derivada fiquem isolados no lado esquerdo podemos obter a seguinte equação:

$$(\alpha\bar{u} - \omega) \frac{d\hat{v}}{dy} - \alpha\hat{v} \frac{d\bar{u}}{dy} = \frac{i\alpha^2\hat{p}}{\gamma Ma_1^2} \left[\frac{(\alpha^2 + \beta^2)}{\bar{\rho}\alpha^2} - \frac{Ma_1^2(\alpha\bar{u} - \omega)^2}{\alpha^2} \right]. \quad (\text{A.114})$$

Define-se então a variável auxiliar G com intuito de facilitar a dedução.

$$G = \frac{(\alpha^2 + \beta^2)}{\bar{\rho}\alpha^2} - \frac{Ma_1^2(\alpha\bar{u} - \omega)^2}{\alpha^2}. \quad (\text{A.115})$$

Usando a variável G, simplificamos a Equação A.114 para:

$$(\alpha\bar{u} - \omega) \frac{d\hat{v}}{dy} - \alpha\hat{v} \frac{d\bar{u}}{dy} = \frac{i\alpha^2 G \hat{p}}{\gamma Ma_1^2}. \quad (\text{A.116})$$

Define-se então a variável de Gropengiesser, χ , definida pela primeira vez em cite-Gropengiesser, assim como sua derivada:

$$\chi = \frac{i\alpha\hat{p}}{\gamma Ma_1^2 \hat{v}}, \quad (\text{A.117})$$

$$\frac{d\chi}{dy} = \frac{i\alpha}{\gamma Ma_1^2 \hat{v}} \frac{d\hat{p}}{dy} - \frac{i\alpha\hat{p}}{\gamma Ma_1^2 \hat{v}^2} \frac{d\hat{v}}{dy}. \quad (\text{A.118})$$

Utilizando então a variável χ e manipulando-se a Equação A.116 escreve-se a mesma da seguinte forma:

$$\frac{d\hat{v}}{dy} = \frac{1}{(\alpha\bar{u} - \omega)} \left[\alpha\hat{v} \frac{d\bar{u}}{dy} + \alpha G\hat{v}\chi. \right] \quad (\text{A.119})$$

Multiplicando-se a Equação A.88 por $-\rho i\alpha/\hat{v}$ e isolando-se $d\hat{p}/dy$ obtêm-se:

$$\frac{i\alpha}{\hat{v}\gamma Ma_1^2} \frac{d\hat{p}}{dy} = \bar{\rho}\alpha(\alpha\bar{u} - \omega) + \frac{\alpha}{\hat{v}(\alpha\bar{u} - \omega)Fr^2} \left[\hat{v} \frac{d\bar{\rho}}{dy} + \bar{\rho} \left[i(\alpha\hat{u} + \beta\hat{w}) + \frac{d\hat{v}}{dy} \right] \right]. \quad (\text{A.120})$$

Pode-se então substituir a Equações A.119 e A.120 na Equação A.118 de maneira a obter:

$$\begin{aligned} \frac{d\chi}{dy} = & \bar{\rho}\alpha(\alpha\bar{u} - \omega) + \frac{\alpha}{\hat{v}(\alpha\bar{u} - \omega)Fr^2} \left[\hat{v} \frac{d\bar{\rho}}{dy} + \bar{\rho} \left[i(\alpha\hat{u} + \beta\hat{w}) + \frac{d\hat{v}}{dy} \right] \right] \\ & - \frac{i\alpha\hat{p}}{\gamma Ma_1^2 \hat{v}^2} \frac{1}{(\alpha\bar{u} - \omega)} \left[\alpha\hat{v} \frac{d\bar{u}}{dy} + \alpha G\hat{v}\chi \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.121})$$

Mais uma vez precisa-se eliminar as variáveis perturbadas \hat{u} e \hat{w} usando as equações A.111 e A.112 pode-se escrever:

$$\alpha\hat{u} + \beta\hat{w} = \frac{\alpha i\hat{v}}{(\alpha\bar{u} - \omega)} \frac{d\bar{u}}{dy} - \frac{(\alpha^2 + \beta^2)}{(\alpha\bar{u} - \omega)} \frac{\hat{p}}{\bar{\rho}\gamma Ma_1^2}. \quad (\text{A.122})$$

E substituindo a equação acima em A.121 e simplificando obtêm-se:

$$\begin{aligned}
& \frac{d\chi}{dy} = \bar{\rho}\alpha(\alpha\bar{u} - \omega) + \frac{\alpha}{(\alpha\bar{u} - \omega)Fr^2} \frac{d\bar{\rho}}{dy} \\
& + \frac{\bar{\rho}\alpha}{(\alpha\bar{u} - \omega)Fr^2} \left[\frac{-\alpha}{(\alpha\bar{u} - \omega)} \frac{d\bar{u}}{dy} - \frac{(\alpha^2 + \beta^2)}{(\alpha\bar{u} - \omega)} \frac{\chi}{\alpha\bar{\rho}} + \frac{1}{\hat{v}} \frac{d\hat{v}}{dy} \right] - \frac{\alpha\chi}{(\alpha\bar{u} - \omega)} \left[\frac{d\bar{u}}{dy} + G\chi \right].
\end{aligned} \tag{A.123}$$

A única variável perturbada ainda presente na equação acima é a \hat{v} sendo assim com o objetivo de eliminá-la utilizamos a Equação A.119 repetida e manipulada aqui para facilitar o entendimento:

$$\frac{1}{\hat{v}} \frac{d\hat{v}}{dy} = \frac{\alpha}{(\alpha\bar{u} - \omega)} \left[\frac{d\bar{u}}{dy} + G\chi \right]. \tag{A.124}$$

Substituindo a equação acima na equação condensada A.123 e manipulando os termos de maneira a manter os termos contendo Froude juntos obtêm-se a equação condensada apresentada no Capítulo 4.

$$\begin{aligned}
\frac{d\chi}{dy} = \bar{\rho}\alpha(\alpha\bar{u} - \omega) + \frac{\alpha}{(\alpha\bar{u} - \omega)Fr^2} \left[\frac{\bar{\rho}\alpha G\chi}{(\alpha\bar{u} - \omega)} - \frac{(\alpha^2 + \beta^2)}{(\alpha\bar{u} - \omega)} \frac{\chi}{\alpha} + \frac{d\bar{\rho}}{dy} \right] \\
- \frac{\alpha\chi}{(\alpha\bar{u} - \omega)} \left[\frac{d\bar{u}}{dy} + G\chi \right].
\end{aligned} \tag{A.125}$$