



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS



# **ESTUDOS SOBRE A APLICAÇÃO DE GIROS COMO ATUADORES PARA SISTEMAS DE CONTROLE DE ATTITUDE DE SATÉLITES ÁGEIS**

**RELATÓRIO FINAL DE PROJETO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA  
(PIBIC/CNPq/INPE)**

Luiz Felipe de Carvalho Briedis (FATESF, Bolsista PIBIC/CNPq)  
E-mail: lfbriedis86@gmail.com

Mário César Ricci (DMC/ETE/INPE, Orientador)  
E-mail: mariocesarricci@uol.com.br

Julho de 2017

Briedis, L. F. C.

Estudos sobre aplicação de giros como atuadores para sistemas de controle de atitude de satélites àgeis  
/ Briedis, L. F. C. - São José dos Campos: INPE, 2017.

1. Satélite. 2. Controle. 3. Atitude. 4. Giros. 5. Atuador.  
6. Singularidade.

## **Agradecimentos**

Ao Dr. Mário César Ricci, pela orientação, apoio e dedicação em tirar minhas dúvidas referentes ao trabalho. Ao CNPq (Conselho Nacional de Pesquisa e Desenvolvimento) pelo apoio financeiro recebido através da Bolsa de Iniciação Científica junto ao Programa PIBIC do INPE (Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais). A minha família e esposa por fazerem parte da minha vida.

## Resumo

Os satélites de imageamento num futuro próximo terão como requisito agilidade rotacional, bem como precisão de apontamento em regime para captação de imagens de alta resolução. Ao invés de mover o sistema imageador dentro do satélite, é este último que vai girar rapidamente. O apontamento do satélite como um todo, em que o sistema de imageamento está fixo no corpo, permite alcançar uma definição mais elevada, melhorando a resolução das imagens. O desenvolvimento de um sistema de controle de atitude ágil para satélites de imageamento emprega CMGs (Control Moment Gyros), que possibilita rápido posicionamento, e é de importância prática, uma vez que o custo global e a eficiência dos satélites de imageamento ágeis são bastante afetados pelo tempo médio de redirecionamento. Um CMG é um poderoso atuador amplificador de torque; no entanto, os sistemas redundantes CMG têm um problema inerente de singularidade geométrica. Pretende-se com este projeto estudar vários aspectos da aplicação de CMGs como atuadores em sistemas de controle de atitude, que inclui um tratamento abrangente do problema da singularidade nos CMGs.

Palavras-chave: Satélite. Giro. Atuador. Controle. Atitude. Singularidade.

# **Studies on the Application of Gyro as Actuators in Satellite Agile Attitude Control System**

## **Abstract**

Imaging satellites in the near future will have a requirement of rapid rotational speed, as well as pointing accuracy in steady-state to capture high-resolution images. Instead of moving the imaging system within the satellite, it is the latter that will turn quickly. The satellite pointing as a whole in which the imaging system is fixed on the body, allows achieving a higher resolution, improving the resolution of images. The development of an agile attitude control system uses CMGs (Control Moment Gyros) which enables rapid positioning, since the overall cost and the efficiency of agile imaging satellites are greatly affected by the average retargeting time. A CMG is a powerful actuator torque amplifier; however, redundant systems CMGs have an inherent geometric singularity problem. The aim of this project is to study various aspects of CMGs application as actuators for attitude control systems, which includes a comprehensive treatment of the problem of singularity in the CMGs.

Keywords: Satellite. Gyro. Actuator. Control. Attitude. Singularity.

## Lista de Figuras

	<u>Pág.</u>
Figura 1.1 – BCP 5000 (WorldView 1) equipado com CMG de 1 cardan.....	2
Figura 1.2 – BCP 5000 (WorldView 2) equipado com CMG de 1 cardan.....	3
Figura 1.3 – Um sistema de controle de atitude para satélites de imageamento ágeis, baseado em CMGs.....	4
Figura 2.1 – CMG de 1 único eixo cardan .....	5
Figura 2.2 – CMGs de eixos cardan .....	6
Figura 3.1 – Arranjo da montagem piramidal de quatro CMGs de 1 eixo cardan .....	7
Figura 5.1 – Dois CMGs de 1 eixo cardan, com eixos dos cardans paralelos.....	12
Figura 6.1 – Superfície singular de momento angular de saturação 4H.....	16
Figura 6.2 – Superfície de singularidade interna 0H do sistema 2-SPEED consistindo de 4 CMGs de 1 cardan ( $\beta=90^\circ$ ).....	17
Figura 7.1 – Projeção do momento angular singular no plano ( $H_x, H_z$ ) para o caso 7 com $\beta = 54,7^\circ$ .....	23
Figura 8.1 – Singularidade elíptica interna em $x_s = [-90^\circ, 0^\circ, 90^\circ, 0^\circ]^T$ .....	29

## Sumário

	<u>Pág.</u>
1 INTRODUÇÃO.....	1
2 SISTEMAS CMGS COM UM E DOIS EIXOS CARDANS .....	5
3 Arranjo Piramidal de quatro CMGs de 1 Cardan .....	7
4 Dois Pares Ortogonais de CMGs de 1 Eixo Cardan.....	10
5 Configuração de dois e três CMGs de 1 Eixo Cardan com Eixos Paralelos .....	11
6 Singularidades de CMGs e Superfícies Singulares .....	13
7 Análise de Singularidade usando a Identidade de Binet-Cauchy.....	19
8 Movimentos Nulos dos CMGs .....	23
9 Teoria da Superfície da Geometria Diferencial.....	32
10 Padrão Pseudo-Inverso .....	40
11 Singularidade Robusta inversa generalizada .....	42
12 CONCLUSÃO.....	44
13 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	45

## 1 Introdução

As próximas gerações de *satélites de imageamento* terrestre requererão mais agilidade rotacional, além de apontamento preciso em regime para obtenção de imagens de alta resolução. Ao invés de varrer um sistema de imageamento, baseado em *cardans*, de um lado para outro, o corpo da nave é que girará rapidamente. Apontando a nave como um todo, o sistema de imageamento, fixo no corpo, permite alcançar uma definição mais elevada e melhora a resolução das imagens. O desenvolvimento de um sistema de controle de atitude ágil empregando CMGs é de importância prática atual, tendo em vista que o custo global e a eficiência dos satélites de imageamento ágeis são bastante afetados pelo tempo médio de redirecionamento.

Por exemplo, os satélites de imageamento Plêiades de alta resolução têm um requisito de varredura de 4 %/s. Os painéis solares são montados diretamente no corpo sem qualquer mecanismo de acionamento de painéis solares, para garantir máxima rigidez estrutural. Para aumentar ainda mais a rigidez, o desdobramento dos painéis usa juntas Carpentier, resultando numa frequência estrutural menor, de cerca de 120 Hz. Tal como descrito em Damilano (2001); Girouart et al. (2002); Defendini et al. (2002), os satélites de imageamento Plêiades são equipados com quatro pequenos CMGs de 1 cardan com o arranjo piramidal e com um ângulo de inclinação de 30°. Cada CMG tem momento angular de 15 Nms, velocidade máxima do cardan de 3 rd/s, um pico de torque de saída de 45 Nm, e um torque máximo médio de 20 Nm. Os satélites de imageamento Plêiades (1A e 1B) de alta resolução têm 1000 kg, cada, e momento de inércia de aproximadamente 800 kgm<sup>2</sup> em torno dos eixos de rolamento e arfagem e são capazes de executar uma manobra de rotação de 60° em torno do eixo de rolamento (varredura transversal) em menos de 25 s. A precisão de apontamento em regime é de ±0,03° durante a fase de imageamento, após completar a manobra de rotação. Contudo, durante as manobras de rotação de grandes ângulos, realizadas transversalmente ao movimento orbital, não é necessário o apontamento preciso do corpo satélite.

A Ball Aerospace Technologies Corporation unindo-se com Digital Globe, desenvolveu uma plataforma de satélite de imageamento ágil, denominada BCP 5000, para acomodar radares de abertura óptica e sintética (SAR), a próxima geração de cargas úteis de sensoriamento. Para maior agilidade, a BCP 5000 é equipado com CMGs de 1 cardan

para fornecer excelente capacidade de redirecionamento. Lançado com sucesso em 2007, o satélite de imageamento BCP 5000 (WorldView 1) de 2.500 kg, ilustrado na Figura 1.1, foi o primeiro satélite de imageamento comercial de alta resolução equipado com este tipo de tecnologia em CMGs de 1 cardan. É capaz de coletar imagens com resolução pancromática de 0,5 m e 2 m de resolução multiespectral<sup>1</sup>.

Figura 1.1 - BCP 5000 (WorldView 1) equipado com CMG de 1 cardan.



Fonte: Digital Globe.

A Figura 1.2 mostra o satélite BCP 5000 (WorldView 2). Lançado em 2009, incorpora o padrão da indústria de quatro bandas multiespectrais (vermelho, azul, verde e infravermelho próximo) e também inclui quatro novas bandas (costeira, amarelo, borda vermelha e infravermelho próximo 2). O WorldView 2 tem 2.800 kg e um telescópio de abertura de 110 cm, voando em uma altitude mais elevada de 770 km, proporciona as mesmas imagens pancromáticas com resolução de 0,5 m que o WorldView 1, além de imagens de resolução multiespectral de 1.8 m.

---

<sup>1</sup> [http://www.skyrocket.de/space/doc\\_sat/ball\\_bcp-5000.htm](http://www.skyrocket.de/space/doc_sat/ball_bcp-5000.htm).

Figura 1.2 - BCP 5000 (WorldView 2) equipado com CMG de 1 cardan.



Fonte: Digital Globe.

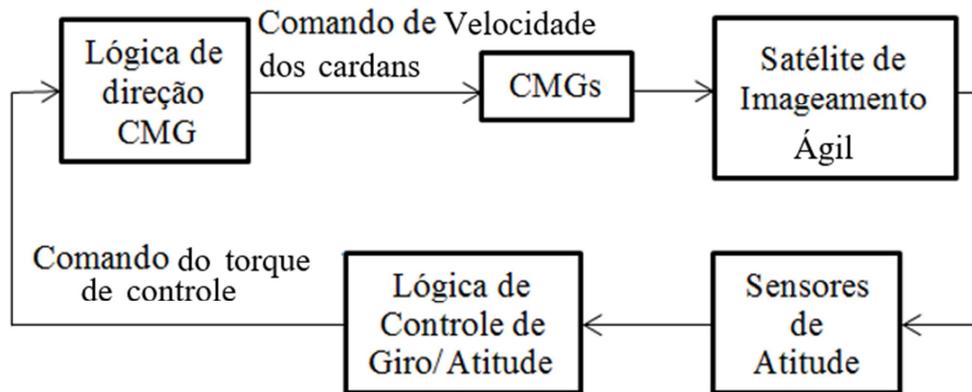
O satélite WorldView 3, praticamente idêntico ao WorldView 2, foi lançado em 2014 e tem uma capacidade de infra-vermelho adicional. Com órbita mais baixa (617 km), tem uma resolução no solo de 0,31 m.

Um CMG de 1 cardan (menor do que o CMG da Astrium 15-45S) com requisito de varredura de 6 °/s, está sendo desenvolvido no Centro Espacial de Surrey (LAPPAS; WIE, 2006; LAPPAS et al., 2002) que pode ser usado em futuras missões científicas, tais como aproximação e encontro com objetos próximos a Terra e observação terrestre de alta resolução usando satélites pequenos e ágeis (< 300 kg).

Uma representação simples do diagrama de blocos de um sistema de controle de atitude baseado em CMGs para satélites de imageamento ágeis é ilustrada na Figura 1.3. Este trabalho aborda um tratamento abrangente, mas sem pretender esgotar o tema, de problemas a serem resolvidos na análise e projeto de sistemas de controle de atitude baseados em CMGs para satélites ágeis de imageamento. O Capítulo 1 traz uma introdução sobre o assunto. A partir do capítulo 2, o trabalho aborda um resumo de

alguns sistemas representativos de CMGs com 1 eixo cardan. Sistemas CMGs de 1 eixo cardan são utilizados como exemplos em todo o trabalho para ilustrar os vários conceitos e abordagens úteis com o objetivo de caracterizar e analisar as singularidades dos CMGs.

Fig. 1.3 - Um sistema de controle de atitude para satélites de imageamento ágeis, baseado em CMGs.



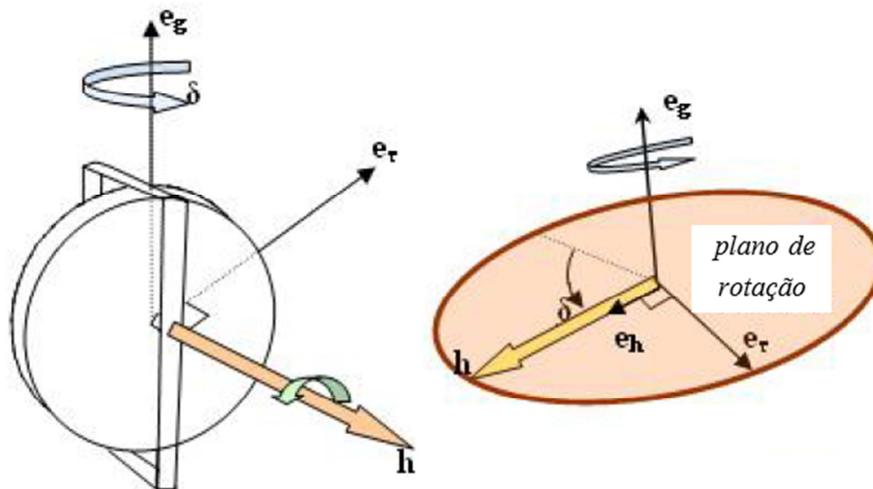
Fonte: Adaptado de Wie (2008).

## 2 Sistemas CMGs com um e dois Eixos Cardans

Um giro de controle de momento angular de 1 único eixo cardan (do inglês, *Single Gimbal Control Moment Gyro*), cuja sigla é SGCMG, é composto por um volante que gira a uma velocidade constante em torno de um eixo que é *cardanizado* em um eixo ortogonal ao eixo de rotação, como mostra a Figura 2.1. O volante montado no quadro do cardan produz momento angular de módulo constante que é restrito ao *plano de rotação*. O motor do eixo cardan gira o eixo cardan, o qual é fixo com relação ao satélite, e altera a direção do eixo de giro (momento angular). A modificação da orientação do eixo do rotor produz um torque de saída que é normal à ambos, eixo de rotação e eixo do cardan.

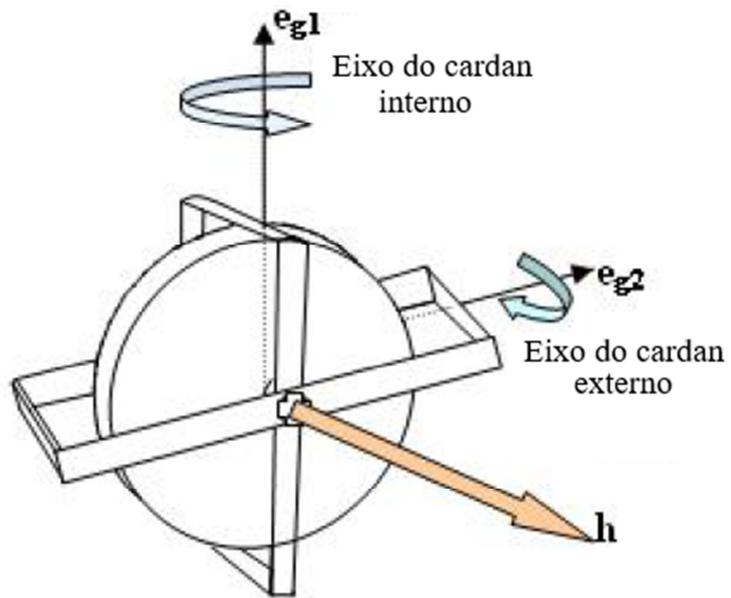
Se a roda é cardanizada em dois eixos, ao invés de um eixo apenas, é denominada de giro de controle de momento angular de 2 eixos cardans (do inglês, *Double Gimbal Control Moment Gyro*), cuja sigla é DGCMG. A Figura 2.2 mostra um DGCMG.

Fig. 2.1 – CMG de 1 único eixo cardan.



Fonte: Adaptado de Yavuzoğlu (2003).

Fig. 2.2 – CMG de 2 eixos cardans.



Fonte: Adaptado de Yavuzoğlu (2003).

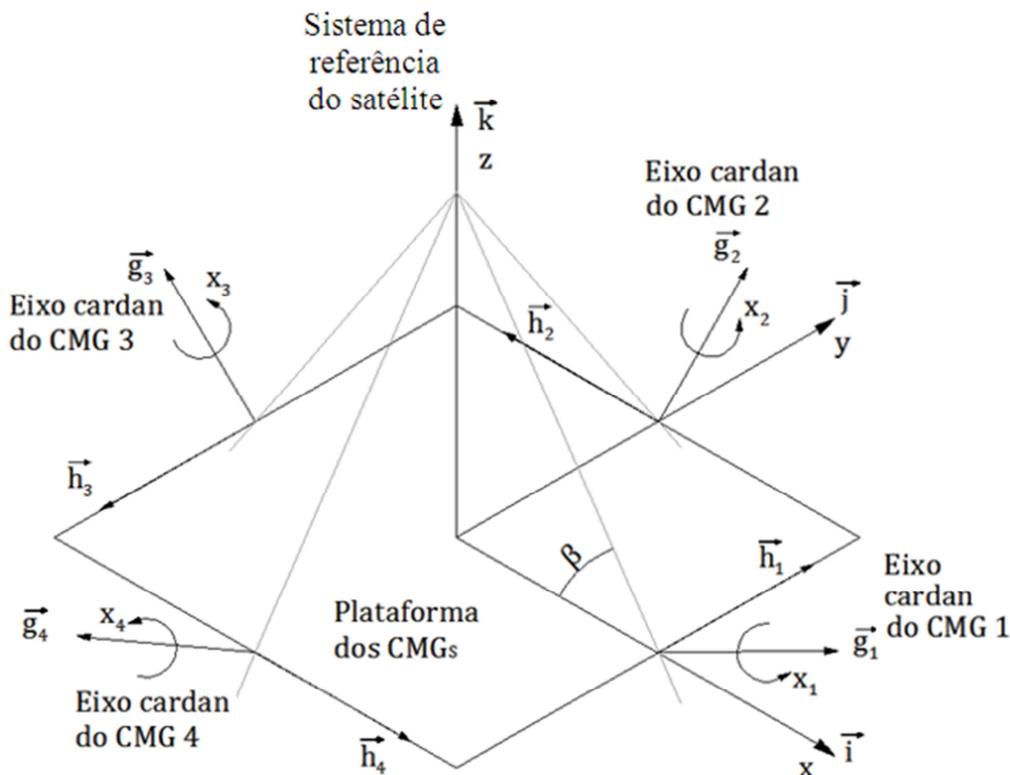
### 3 Arranjo Piramidal de quatro CMGs de 1 Cardan

Para efeitos físicos, o momento angular ou quantidade de movimento angular  $\mathbf{h}$  de uma partícula de massa  $m$ , em relação a um ponto arbitrário  $\mathbf{O}$ , é  $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$ , em que  $\mathbf{r}$  é o vetor posição que vai do ponto  $\mathbf{O}$  até a partícula e  $\mathbf{p}$  é o vetor quantidade de movimento linear. Para um corpo em rotação o vetor momento angular é dado pelo produto do momento de inércia em torno do eixo de giro e o vetor velocidade angular. Sabendo disso a Figura 3.1 mostra o arranjo piramidal típico de quatro CMGs de 1 eixo cardan. O vetor momento angular total dos quatro CMGs de 1 eixo cardan é dado por

$$\vec{H} = \sum_{i=1}^4 \vec{h}_i, \quad (3.1)$$

em que  $\vec{h}_i$  é o  $i$ -ésimo vetor momento angular, referente ao  $i$ -ésimo CMG. Considera-se, sem perda da generalidade, que  $|\vec{h}_i| = 1$ . O  $i$ -ésimo ângulo do cardan,  $x_i$ , descreve a rotação de  $\vec{h}_i$  em torno do vetor unitário que fornece a direção do eixo do cardan  $\vec{g}_i$  ( $|\vec{g}_i| = 1$ ); ou seja,  $\vec{h}_i \cdot \vec{g}_i = 0$  e  $\vec{h}_i = \vec{h}_i(x_i)$ .

Figura 3.1 - Arranjo da montagem piramidal de quatro CMGs de 1 eixo cardan.



Fonte: Adaptado de Wie (2002).

Na montagem piramidal de quatro CMGs com 1 eixo cardan, com ângulo de inclinação  $\beta$ , como ilustra a Figura 3.1, os vetores dos eixos dos cardans podem ser escritos em termos das componentes nas direções do sistema de referência fixo no corpo do satélite  $(x, y, z)$ , dadas pelo conjunto de vetores unitários ortogonais  $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ , como sendo,

$$\vec{g}_1 = \sin \beta \vec{i} + \cos \beta \vec{k},$$

$$\vec{g}_2 = \sin \beta \vec{j} + \cos \beta \vec{k},$$

$$\vec{g}_3 = -\sin \beta \vec{i} + \cos \beta \vec{k}$$

e

$$\vec{g}_4 = -\sin \beta \vec{j} + \cos \beta \vec{k}.$$

O vetor do momento angular total dos CMGs,  $\vec{H}$ , expresso no sistema fixo no satélite, é dado por

$$\begin{aligned} \vec{H} &= H_x \vec{i} + H_y \vec{j} + H_z \vec{k} \\ &= [i \ j \ k] \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_k \end{bmatrix} = [i \ j \ k] \mathbf{H}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

em que  $\mathbf{H} = (H_x, H_y, H_z) \equiv [H_x \ H_y \ H_z]^T$  é a representação do vetor  $\vec{H}$  em relação à base  $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ . De (3.2) observa-se que o vetor coluna  $\mathbf{H}$  difere do vetor  $\vec{H}$ . Apesar da diferença,  $\mathbf{H}$  também é frequentemente referenciado como sendo um vetor. Usar uma das duas representações vai depender obviamente do contexto.

Para montagem piramidal de quatro CMGs de 1 eixo cardan com ângulo de inclinação  $\beta$ , o vetor momento angular total dos CMGs pode ser representado na forma matricial por

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \sum_{i=1}^4 \mathbf{h}_i(x_i) \\ &= \begin{bmatrix} -c\beta \sin x_1 \\ \cos x_1 \\ s\beta \sin x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\cos x_2 \\ -c\beta \sin x_2 \\ s\beta \sin x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c\beta \sin x_3 \\ -\cos x_3 \\ s\beta \sin x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos x_4 \\ c\beta \sin x_4 \\ s\beta \sin x_4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -c\beta \sin x_1 - \cos x_2 + c\beta \sin x_3 + \cos x_4 \\ \cos x_1 - c\beta \sin x_2 - \cos x_3 + c\beta \sin x_4 \\ s\beta \sin x_1 + s\beta \sin x_2 + s\beta \sin x_3 + s\beta \sin x_4 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

em que  $c\beta \equiv \cos \beta$  e  $s\beta \equiv \sin \beta$ . Observe que  $\mathbf{h}_i$  é periódica em relação à  $x_i$  com período de  $2\pi$ , tal que

$$\frac{d^2 \mathbf{h}_i}{dx_i^2} = -\mathbf{h}_i \quad \text{ou} \quad \frac{d^2 \vec{h}_i}{dx_i^2} = -\vec{h}_i. \quad (3.4)$$

Derivando (3.3) com relação ao tempo, obtém-se

$$\dot{\mathbf{H}} = \mathbf{A}\dot{\mathbf{x}}, \quad (3.5)$$

em que  $\dot{\mathbf{H}} \equiv d\mathbf{H}/dt$ ,  $\dot{\mathbf{x}} \equiv \frac{d\mathbf{x}}{dt} = [\dot{x}_1 \quad \dot{x}_2 \quad \dot{x}_3 \quad \dot{x}_4]^T$  e

$$\mathbf{A} \equiv \begin{bmatrix} -c\beta \cos x_1 & \sin x_2 & c\beta \cos x_3 & -\sin x_4 \\ -\sin x_1 & -c\beta \cos x_2 & \sin x_3 & c\beta \cos x_4 \\ s\beta \cos x_1 & s\beta \cos x_2 & s\beta \cos x_3 & s\beta \cos x_4 \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

é a matriz jacobiana.

#### 4 Dois Pares Ortogonais de CMGs de 1 Eixo Cardan

Um caso especial com  $\beta = \pi/2$  foi empregado por Crenshaw (1973) para um sistema de controle com CMGs de 1 eixo cardan. Para esta configuração, têm-se dois pares ortogonais de dois CMGs de 1 eixo cardan com eixos de cardan paralelos, de forma que a matriz Jacobiana é dada por

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \sin x_2 & 0 & -\sin x_4 \\ -\sin x_1 & 0 & \sin x_3 & 0 \\ \cos x_1 & \cos x_2 & \cos x_3 & \cos x_4 \end{bmatrix}. \quad (4.1)$$

Esta configuração especial também é de importância prática. Muitas outras configurações de CMGs são, de fato, variações deste arranjo básico de dois pares ortogonais de dois CMGs paralelos, conhecido na literatura por 2-SPEED CMG (*two-scissored-pair-ensemble, explicit-distribution*).

## 5 Configuração de dois e três CMGs de 1 Eixo Cardan com Eixos Paralelos

Configurações de dois e três CMGs de 1 eixo cardan, com eixos de cardan paralelos, também foram estudadas para aplicações de controle em dois eixos por Cornick (1979); Margulies e Aubrun (1978). Considere primeiro um caso com apenas dois CMGs sem redundância. Os vetores momento angular  $\vec{H}_1$  e  $\vec{H}_2$  se movem no plano  $(x, y)$ , normal aos eixos dos cardans, tal como mostra a Figura 5.1. Para tais CMGs de 1 eixo cardan, cujos eixos de cardan são contrapostos, o vetor momento angular total dos CMGs pode ser representado na forma matricial por

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \cos x_1 + \cos x_2 \\ \sin x_1 + \sin x_2 \end{bmatrix}, \quad (5.1)$$

em que se considera que o momento angular de cada CMG tem módulo unitário.

Definindo uma nova configuração de ângulos dos cardans  $(\alpha, \beta)$  como sendo

$$\alpha \equiv \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad \beta \equiv \frac{x_2 - x_1}{2}, \quad (5.2)$$

em que  $\alpha$  é denominado de ângulo de *rotação* e  $\beta$  de ângulo de *tesoura* Crenshaw (1973), é possível expressar o vetor momento angular total dos CMGs por

$$\mathbf{H} = 2 \begin{bmatrix} \cos \alpha & \cos \beta \\ \sin \alpha & \cos \beta \end{bmatrix}. \quad (5.3)$$

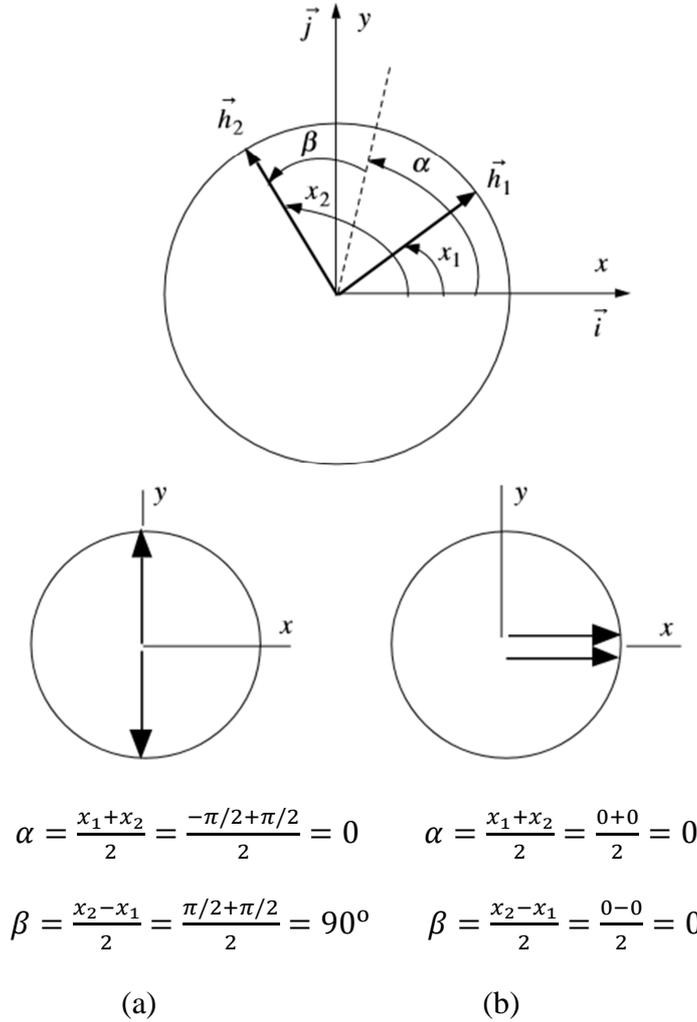
Derivando (5.3) com relação ao tempo, obtém-se

$$\dot{\mathbf{H}} = \mathbf{A}\dot{\mathbf{x}}, \quad (5.4)$$

em que  $\dot{\mathbf{H}} = (\dot{H}_x, \dot{H}_y)$ ,  $\dot{\mathbf{x}} = (\dot{\alpha}, \dot{\beta})$ , e  $\mathbf{A}$  é a matriz Jacobiana definida por

$$\mathbf{A} = 2 \begin{bmatrix} -\sin \alpha \cos \beta & -\cos \alpha \sin \beta \\ \cos \alpha \cos \beta & -\sin \alpha \sin \beta \end{bmatrix}. \quad (5.5)$$

Fig. 5.1 - Dois CMGs de 1 eixo cardan, com eixos dos cardans paralelos. Este sistema CMG permanece singular para qualquer movimento  $\alpha$  quando  $\beta = 0$  ou  $90^\circ$ ; a) singularidade antiparalela 0H; b) singularidade paralela 2H.



Fonte: Wie (2008)

Para um sistema de três CMGs de 1 eixo cardan com eixos paralelos, o vetor momento angular total dos CMGs é dado por

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \cos x_1 + \cos x_2 + \cos x_3 \\ \sin x_1 + \sin x_2 + \sin x_3 \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

e a matriz Jacobiana de  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  é

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\sin x_1 & -\sin x_2 & -\sin x_3 \\ \cos x_1 & \cos x_2 & \cos x_3 \end{bmatrix}. \quad (5.7)$$

## 6 Singularidades de CMGs e Superfícies Singulares

Este capítulo apresenta brevemente um método desenvolvido por Margulies e Aubrun (1978) para analisar e visualizar as superfícies dos momentos angulares singulares. Exemplos Ilustrativos são apresentados com alguns novos resultados significativos.

Semelhante a  $\vec{H}$  expresso em (3.2), um vetor  $\vec{u}$  arbitrário também pode ser representado por

$$\begin{aligned}\vec{u} &= u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k} \\ &= [\vec{i} \quad \vec{j} \quad \vec{k}] \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} = [\vec{i} \quad \vec{j} \quad \vec{k}] \mathbf{u},\end{aligned}\quad (6.1)$$

em que  $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z) \equiv [u_x \quad u_y \quad u_z]^T$ .

Como Introduzido por Margulies e Aubrun (1978), seja  $\vec{u}$  um vetor unitário de uma esfera unitária perfurada definida por

$$S = \{\vec{u}: |\vec{u}| = 1, \vec{u} \neq \pm \vec{g}_i, i = 1, \dots, n\},$$

em que  $\vec{g}_i$  é o vetor dos eixos do cardan ( $|\vec{g}_i| = 1$ ). Tal vetor unitário ao longo de todas as direções possíveis no espaço tridimensional (exceto ao longo das direções dos eixos dos cardans) pode ser parametrizado por

$$\begin{aligned}\vec{u} &= u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k} \\ &= \sin \theta_2 \vec{i} - \sin \theta_1 \cos \theta_2 \vec{j} + \cos \theta_1 \cos \theta_2 \vec{k},\end{aligned}\quad (6.2)$$

em que  $\theta_1$  e  $\theta_2$  são os ângulos de duas rotações sucessivas em torno dos eixos  $x$  e  $y$ .

Tal parametrização, que aparece em Wie (2008) e não em Margulies e Aubrun (1978), é preferível, uma vez que os ângulos de latitude e longitude em coordenadas esféricas, comumente usados para descrever todas as direções possíveis de um vetor unitário ao longo das três dimensões espaciais, é numericamente inadequada para a visualização das superfícies singulares.

Para um sistema de  $n$  CMGs de 1 eixo cardan, o diferencial do vetor momento angular total dos CMGs torna-se

$$d\vec{H} = \sum_{i=1}^n d\vec{h}_i = \sum_{i=1}^n \frac{d\vec{h}_i}{dx_i} dx_i = \sum_{i=1}^n \vec{f}_i dx_i, \quad (6.3)$$

em que  $\vec{f}_i$  são vetores unitários tangenciais definidos por

$$\vec{f}_i = \vec{f}_i(x_i) \equiv \frac{d\vec{h}_i}{dx_i} = \vec{g}_i \times \vec{h}_i. \quad (6.4)$$

Observa-se que  $d\vec{H}$  e  $\vec{f}_i$  são representações vetoriais equivalentes de  $d\mathbf{H}$  e  $\mathbf{f}_i$ , respectivamente, esta última representando a coluna  $i$  de  $\mathbf{A}$  em (3.6). Os três vetores  $\{\vec{f}_i, \vec{g}_i, \vec{h}_i\}$  formam um conjunto ortogonal de vetores unitários girando em torno do eixo  $\vec{g}_i$ . Segundo Margulies e Aubrun (1978), este conjunto de vetores ortonormais desempenha um papel importante no desenvolvimento da teoria geométrica de CMGs redundantes, de 1 eixo cardan.

A matriz Jacobiana  $\mathbf{A}$ ,  $3 \times n$ , introduzida na seção anterior, tem posto máximo igual a 3. Quando os eixos dos cardans *não* são coplanares, o posto mínimo de  $\mathbf{A}$  é dois. No entanto, quando  $\text{posto}(\mathbf{A}) = 2$ , todos os  $\vec{f}_i$  tornam-se coplanares e há um vetor unitário  $\vec{u}$  normal a esse plano, isto é,

$$\vec{f}_i(x_i) \cdot \vec{u} \equiv \mathbf{f}_i^T \mathbf{u} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (6.5)$$

Conseqüentemente, para tal caso, tem-se, de (6.3),

$$d\vec{H} \cdot \vec{u} = 0 \quad (6.6)$$

e o conjunto de CMGs não pode produzir qualquer variação do momento angular (ou torque) ao longo da direção de  $\vec{u}$ , independentemente das velocidades dos cardans. Tal vetor unitário  $\vec{u}$  é denominado de *vetor singular* e o conjunto de ângulos dos cardans, quando  $\text{posto}(\mathbf{A}) = 2$  é chamado de *ângulos singulares dos cardans*.

Uma vez que  $\vec{f}_i$  também é ortogonal a  $\vec{g}_i$  e  $|\vec{f}_i| = 1$ , a condição de singularidade (6.5) pode ser reescrita por

$$\vec{f}_i = \pm \frac{\vec{g}_i \times \vec{u}}{|\vec{g}_i \times \vec{u}|}. \quad (6.7)$$

Uma vez que  $\vec{h}_i = \vec{f}_i \times \vec{g}_i$ , a condição de singularidade para  $\vec{h}_i(x_i)$  também pode ser escrita por

$$\vec{h}_i = \pm \frac{(\vec{g}_i \times \vec{u}) \times \vec{g}_i}{|\vec{g}_i \times \vec{u}|}, \quad (6.8)$$

que resulta no seguinte produto interno de  $\vec{h}_i$  e  $\vec{u}$ :

$$e_i \equiv \vec{h}_i \cdot \vec{u} = \pm |\vec{g}_i \times \vec{u}| \equiv \pm \sqrt{1 - (\vec{g}_i \cdot \vec{u})^2}. \quad (6.9)$$

O vetor momento angular singular, correspondente ao vetor singular  $\vec{u}$  e aos ângulos singulares dos cardans  $\mathbf{x}$ , é expresso por

$$\begin{aligned}\vec{H} &= \vec{H}[\mathbf{x}(\vec{u})] = \vec{H}(\vec{u}) \\ &= \sum_i \frac{1}{e_i} (\vec{g}_i \times \vec{u}) \times \vec{g}_i \\ &= \sum_i \frac{\epsilon_i [\vec{u} - \vec{g}_i (\vec{g}_i \cdot \vec{u})]}{\sqrt{1 - (\vec{g}_i \cdot \vec{u})^2}},\end{aligned}\quad (6.10)$$

em que  $\epsilon_i = \text{sign}(e_i) = \text{sign}(\vec{h}_i \cdot \vec{u}) = \pm 1$ . Observa-se que há  $2^n$  combinações de  $\epsilon_i$  para um grupo de  $n$  CMGs. Ver Margulies e Auburn (1978) para uma discussão detalhada destas  $2^n$  combinações.

Uma vez que  $\vec{u} = \vec{u}(\theta_1, \theta_2)$ , tem-se  $\vec{H} = \vec{H}(\theta_1, \theta_2)$ ; ou seja,  $\vec{H}$  também é parametrizado por  $\theta_1$  e  $\theta_2$ . Superfícies singulares de momento angular podem ser obtidas diretamente de (6.10), sem recorrer aos ângulos singulares dos cardans.

Como exemplo, pode-se obter o vetor momento angular singular para a configuração de dois CMGs de 1 único eixo cardan, com eixos de cardan paralelos, mostrada na Figura 5.1. De (6.10), para  $n = 2$ , tem-se

$$\begin{aligned}\vec{H} &= \sum_{i=1}^2 \frac{1}{e_i} (\vec{g}_i \times \vec{u}) \times \vec{g}_i \\ &= \epsilon_1 \vec{u} + \epsilon_2 \vec{u} = 0 \quad \text{ou} \quad \pm 2\vec{u}.\end{aligned}\quad (6.11)$$

O vetor momento angular singular pode ser descrito por

$$\begin{aligned}\vec{H} &= H_x \vec{i} + H_y \vec{j} \\ &= \pm 2\vec{u} = \pm 2(\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}); \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi\end{aligned}$$

ou

$$H_x^2 + H_y^2 = 4, \quad (6.12)$$

que representa um círculo no plano  $(H_x, H_y)$ .

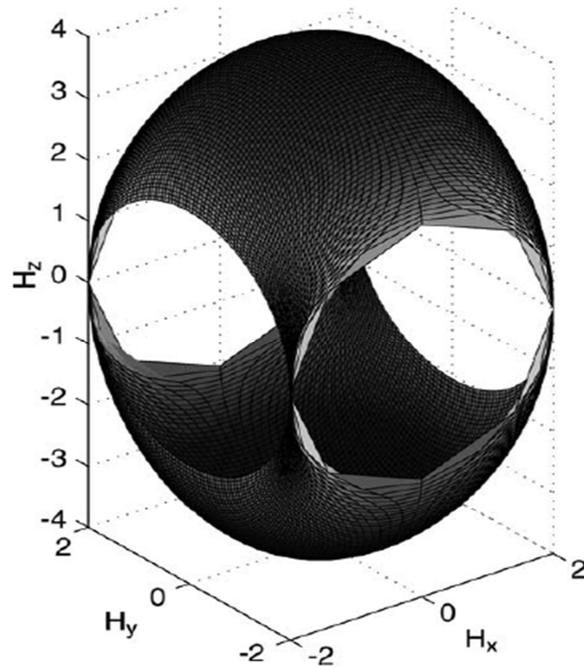
Considere um caso especial ( $\beta = 90^\circ$ ) da configuração piramidal de quatro CMGs de 1 eixo cardan, denominada de sistema 2-SPEED por Crenshaw (1973). Para tal dois pares ortogonais de dois CMGs de 1 cardan, com eixos de cardan paralelos, os vetores dos eixos dos cardans são representados por  $\vec{g}_1 = i$ ,  $\vec{g}_2 = j$ ,  $\vec{g}_3 = -i$  e  $\vec{g}_4 = -j$ .

O vetor momento angular singular pode ser obtido de (6.10), resultando, para todos  $\epsilon_i$  positivos,

$$\vec{H} = \vec{H}(\theta_1, \theta_2) = \frac{2(u_y \vec{j} + u_z \vec{k})}{\sqrt{u_y^2 + u_z^2}} + \frac{2(u_x \vec{i} + u_z \vec{k})}{\sqrt{u_y^2 + u_z^2}}, \quad (6.13)$$

em que onde  $u_x = \sin\theta_2$ ,  $u_y = -\sin\theta_1 \cos\theta_2$  e  $u_z = \cos\theta_1 \cos\theta_2$ . A superfície singular de momento angular de saturação, denominada 4H para este caso, quando todos os quatro  $\epsilon_i$  são positivos, pode, então, ser obtida e é mostrada na Figura 6.1. Observe que a superfície singular de saturação 4H não cobre o envelope de momento angular completo e tem quatro furos circulares causados pelas quatro condições  $\vec{u} \neq \vec{g}_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ).

Fig. 6.1 – Superfície singular de momento angular de saturação 4H.



Fonte: Wie (2008).

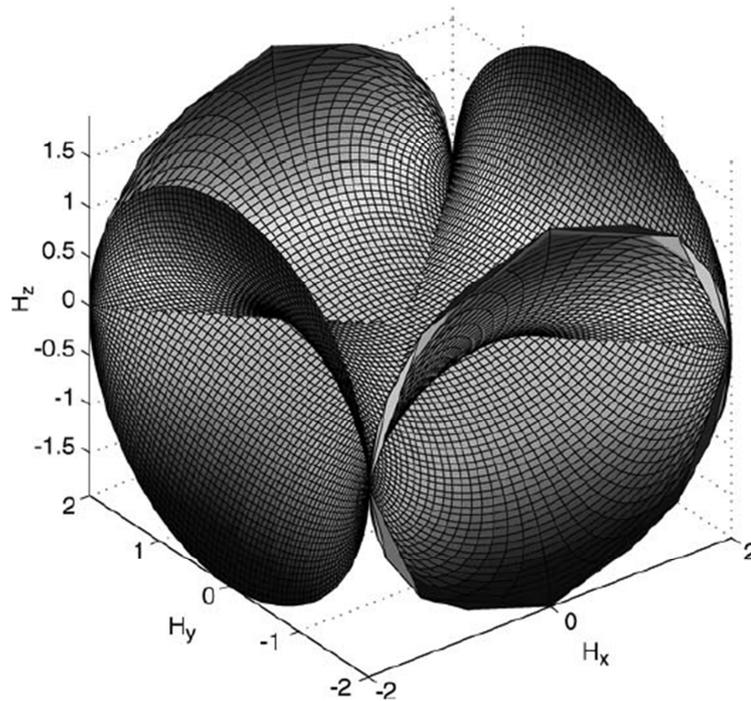
Um caso especial quando dois  $e_i$  são zeros e os outros dois  $e_i$  são +1 produz uma "janela" circular plana combinado com um furo circular mostrado na Figura 6.1. Há quatro janelas planas circulares, que são, de fato, superfícies de singularidade 2H. A superfície de saturação 4H e as quatro janelas circulares planas proporcionam o envelope de momento angular completo (área de trabalho). Há também curvas singulares 2H, dentro do envelope de momento angular, que consiste em dois círculos perpendiculares descritos por

$$H_x^2 + H_z^2 = 0 \quad (H_y = 0),$$

$$H_y^2 + H_z^2 = 0 \quad (H_x = 0).$$

Da mesma forma, também é possível obter a superfície singularidade 0H como mostra a Figura 6.2. A superfície 0H representa uma condição de singularidade em que dois CMGs estão alinhados ao longo do sentido desejado do vetor momento angular e os outros dois CMGs em sentido oposto. A superfície 0H não significa necessariamente um momento angular total zero. Só se eles são antiparalelos que o momento total tornar-se zero. Num gráfico de superfície de singularidade composta, que consiste de ambas as superfícies 0H e 4H, os quatro funis no formato de trombetas da superfície 0H ajustam-se suavemente à superfície de saturação 4H ao longo dos bordos das janelas circulares (superfícies 2H).

Fig. 6.2 – Superfície de singularidade interna 0H do sistema 2-SPEED consistindo de 4 CMGs de 1 cardan ( $\beta = 90^\circ$ ).



Fonte: Wie (2008)

Considere, agora, a configuração típica piramidal de quatro CMGs de 1 eixo cardan com um ângulo de inclinação  $\beta$ . Tem-se

$$e_1 = \pm \sqrt{1 - (s\beta u_x + c\beta u_z)^2},$$

$$e_2 = \pm \sqrt{1 - (s\beta u_y + c\beta u_z)^2},$$

$$e_3 = \pm \sqrt{1 - (-s\beta u_x + c\beta u_z)^2},$$

$$e_4 = \pm \sqrt{1 - (-s\beta u_y + c\beta u_z)^2}.$$

Além disso, as expressões analíticas para as superfícies singulares de momento angular  $(H_x, H_y, H_z)$  podem ser obtidas por

$$H_x = \frac{c\beta(-s\beta u_z + c\beta u_x)}{e_1} + \frac{u_x}{e_2} + \frac{c\beta(s\beta u_z + c\beta u_x)}{e_3} + \frac{u_x}{e_4},$$

$$H_y = \frac{u_y}{e_1} - \frac{c\beta(s\beta u_z - c\beta u_y)}{e_2} + \frac{u_y}{e_3} + \frac{c\beta(s\beta u_z + c\beta u_y)}{e_4},$$

$$H_z = \frac{s\beta(-c\beta u_x + s\beta u_z)}{e_1} + \frac{s\beta(s\beta u_z - c\beta u_y)}{e_2} + \frac{s\beta(s\beta u_z + c\beta u_x)}{e_3} + \frac{s\beta(s\beta u_z + c\beta u_y)}{e_4},$$

em que  $u_x = \sin \theta_2$ ,  $u_y = -\sin \theta_1 \cos \theta_2$  e  $u_z = \cos \theta_1 \cos \theta_2$ .

Usando essas expressões podem-se obter as superfícies de singularidade 4H, 2H e 0H. Em um gráfico da superfície de singularidade composta, que consiste nas superfícies de singularidades 2H e 4H, os oito funis trombetas da superfície 2H são ajustam-se suavemente à superfície de saturação 4H ao longo dos bordos dos orifícios circulares, resultando num envelope de momento angular, mas com oito janelas não-lisas.

## 7 Análise de Singularidade usando a Identidade de Binet-Cauchy

No capítulo anterior foi utilizado um método desenvolvido por Margulies e Auburn (1978) para analisar e visualizar as superfícies singulares do momento angular. Uma abordagem diferente para determinar as superfícies singulares de momento angular, denominada de método *plano de corte*, é encontrada em Stocking e Meffe (1987). Estas duas técnicas não exigem explicitamente a informação dos ângulos singulares dos cardans para determinar as superfícies singulares de momento angular.

Entretanto, é preferível determinar todos os ângulos singulares possíveis dos cardans: 1) para caracterizar todas as singularidades dos sistemas de CMGs, 2) para ser usada em uma lógica de direção preventiva das singularidades, ou 3) para determinar indiretamente superfícies singulares de momento angular.

A condição de singularidade (6.5) pode ser reescrita na forma matricial por

$$\mathbf{A}^T \mathbf{u} = \mathbf{0}. \quad (7.1)$$

Ou seja, o vetor singular  $\mathbf{u}$  é vetor do espaço nulo da matriz  $\mathbf{A}^T$ ; isto é,  $\mathbf{u} = \text{null}(\mathbf{A}^T)$ . Há soluções não triviais,  $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ , para  $(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)\mathbf{u} = \mathbf{0}$  se e somente se  $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$  for singular. Isto é, se a condição de singularidade é da forma

$$\det(\mathbf{A}\mathbf{A}^T) = 0. \quad (7.2)$$

Em geral, a condição de singularidade define um conjunto de superfícies no espaço das variáveis  $\mathbf{x}$  ou, equivalentemente, no espaço das variáveis  $\mathbf{H}$ . O estado singular mais simples é a singularidade do momento angular de saturação, caracterizado por uma envoltória (envelope) de momento angular, que é uma superfície tridimensional que representa o máximo momento angular disponível dos CMGs ao longo de qualquer direção dada. Qualquer estado singular no qual o vetor momento angular total dos CMGs está dentro do envelope de momento angular, é denominado de estado singular “interno”.

A condição de singularidade pode ser escrita usando a identidade de Binet-Cauchy, dada por

$$\det(\mathbf{A}\mathbf{A}^T) \equiv \sum_{i=1}^n M_i^2 = 0, \quad (7.3)$$

em que  $M_i = \det(\mathbf{A}_i)$  são os jacobianos dos menores de ordem 3 e  $\mathbf{A}_i = \mathbf{A}$  com a  $i$ -ésima coluna removida.

As condições de singularidade (7.3), para uma montagem piramidal de quatro CMGs de 1 eixo cardan, tornam-se

$$M_1 = s\beta[(s_2s_3c_4 + c_2s_3s_4) + c\beta(c_2c_3s_4 - s_2c_3c_4) + 2(c\beta)^2c_2c_3c_4] = 0, \quad (7.4a)$$

$$M_2 = s\beta[(s_3s_4c_1 + c_3s_4s_1) + c\beta(c_3c_4s_1 - s_3c_4c_1) + 2(c\beta)^2c_3c_4c_1] = 0, \quad (7.4b)$$

$$M_3 = s\beta[(s_4s_1c_2 + c_4s_1s_2) + c\beta(c_4c_1s_2 - s_4c_1c_2) + 2(c\beta)^2c_4c_1c_2] = 0, \quad (7.4c)$$

$$M_4 = s\beta[(s_1s_2c_3 + c_1s_2s_3) + c\beta(c_1c_2s_3 - s_1c_2c_3) + 2(c\beta)^2c_1c_2c_3] = 0, \quad (7.4d)$$

em que  $s_i \equiv \sin x_i$  e  $c_i \equiv \cos x_i$ . Embora estas condições de singularidade, baseadas na identidade de Binet-Cauchy, tenham sido discutidas na literatura, é apresentada aqui uma nova forma de calcular as superfícies singulares de momento angular usando as condições de singularidade (7.1).

Uma vez que o posto mínimo da matriz Jacobiana  $\mathbf{A}$  é dois, as quatro condições,  $M_i = 0$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , não são independentes, apenas duas delas são independentes. Portanto, quaisquer duas das quatro condições podem ser utilizadas para encontrar os ângulos singulares dos cardans, como se segue.

Se  $c_i \neq 0$ , as condições singulares podem ser simplificadas para

$$\tan x_3 (\tan x_2 + \tan x_4) + c\beta(\tan x_4 - \tan x_2) = -2(c\beta)^2, \quad (7.5)$$

$$\tan x_4 (\tan x_3 + \tan x_1) + c\beta(\tan x_1 - \tan x_3) = -2(c\beta)^2, \quad (7.6)$$

$$\tan x_1 (\tan x_4 + \tan x_2) + c\beta(\tan x_2 - \tan x_4) = -2(c\beta)^2, \quad (7.7)$$

$$\tan x_2 (\tan x_1 + \tan x_3) + c\beta(\tan x_3 - \tan x_1) = -2(c\beta)^2. \quad (7.8)$$

As quatro equações (7.5 a 7.8) produzem seis combinações singulares de ângulos de cardans. Por exemplo, considere o caso (Caso 1) em que conhecidos  $(x_1, x_3)$ ,  $(x_2, x_4)$  podem ser determinados usando (7.6) e (7.8), como sendo

$$x_2 = \tan^{-1} \left( \frac{-2(c\beta)^2 - c\beta(\tan x_3 - \tan x_1)}{\tan x_1 + \tan x_3} \right), \quad (7.9)$$

$$x_4 = \tan^{-1} \left( \frac{-2(c\beta)^2 - c\beta(\tan x_1 - \tan x_3)}{\tan x_1 + \tan x_3} \right). \quad (7.10)$$

Os outros cinco casos podem ser encontrados em Dominguez e Wie (2002).

Há seis casos adicionais quando  $c_i = 0$ , (i.e.,  $\tan x_i = \pm\infty$ ). Ou seja,

$$\text{Caso 7: } \quad \sin(x_2 + x_4) = 0 \quad \text{quando} \quad \cos x_1 = \cos x_3 = 0, \quad (7.11)$$

$$\text{Caso 8: } \quad \sin(x_1 + x_3) = 0 \quad \text{quando} \quad \cos x_2 = \cos x_4 = 0, \quad (7.12)$$

$$\text{Caso 9: } \quad \tan x_2 = -\tan x_4 = c\beta \quad \text{quando} \quad \cos x_1 = 0 \ (\forall x_3), \quad (7.13)$$

$$\text{Caso 10: } \quad \tan x_3 = -\tan x_1 = c\beta \quad \text{quando} \quad \cos x_2 = 0 \ (\forall x_4), \quad (7.14)$$

$$\text{Caso 11: } \quad \tan x_4 = -\tan x_2 = c\beta \quad \text{quando} \quad \cos x_3 = 0 \ (\forall x_1), \quad (7.15)$$

$$\text{Caso 12: } \quad \tan x_1 = -\tan x_3 = c\beta \quad \text{quando} \quad \cos x_4 = 0 \ (\forall x_2). \quad (7.16)$$

Superfícies singulares no espaço tridimensional do vetor momento angular,  $\mathbf{H} = (H_x, H_y, H_z)$ , podem ser definidas como superfícies mapeada por

$$H_x = -c\beta \sin x_1 - \cos x_2 + c\beta \sin x_3 + \cos x_4, \quad (7.17a)$$

$$H_y = \cos x_1 - c\beta \sin x_2 - \cos x_3 + c\beta \sin x_4, \quad (7.17b)$$

$$H_z = s\beta \sin x_1 + s\beta \sin x_2 + s\beta \sin x_3 + s\beta \sin x_4. \quad (7.17c)$$

Como exemplo ilustrativo, a projeção do momento angular singular no plano  $(H_x, H_z)$  para o caso 7 (com  $\beta = 54,7^\circ$ ) é mostrado na Figura 7.1. Para este caso as condições de singularidade tornam-se

$$(x_1, x_3) = (\pm\pi/2, \pm\pi/2),$$

$$x_2 + x_4 = 0 \quad \text{ou} \quad x_2 + x_4 = \pi.$$

Para  $x_2 + x_4 = 0$ , há quatro linhas de singularidades que passam através dos pontos indicados por quatro asteriscos, como mostra a Figura 7.1. Para  $x_2 + x_4 = \pi$ , as quatro elipses no plano  $(H_x, H_z)$  com  $H_y \equiv 0$  podem ser determinadas por

$$H_x^2 + \frac{(H_z \pm 2 \sin \beta)^2}{\sin^2 \beta} = 4,$$

$$(H_x \pm 2 \sin \beta)^2 + \frac{H_z^2}{\sin^2 \beta} = 4.$$

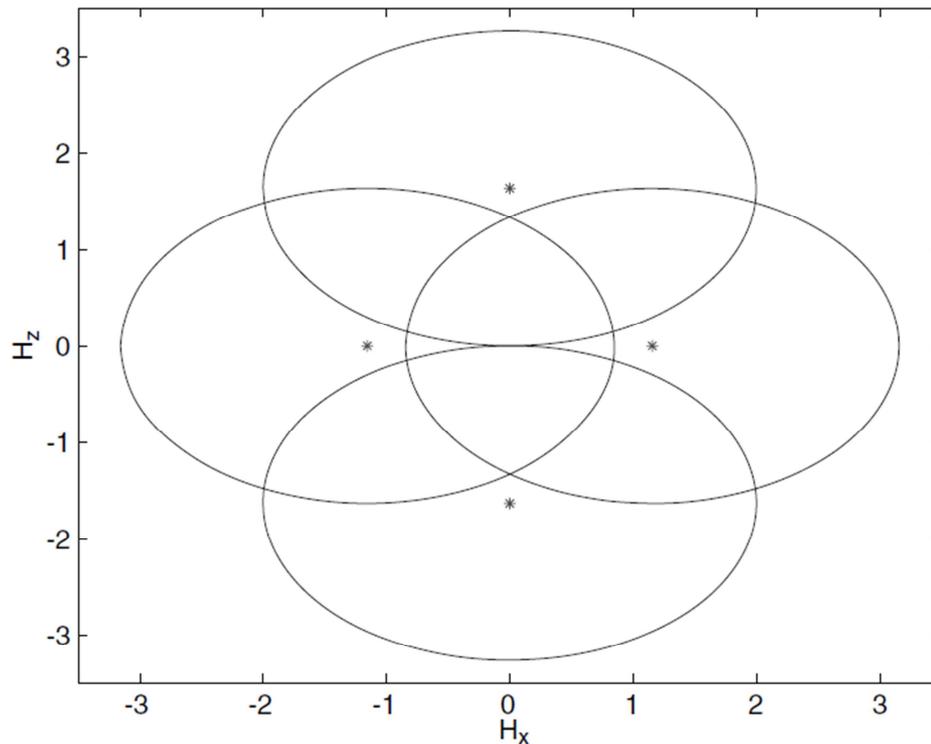
Resultados detalhados para cálculo de todos os ângulos singulares dos cardans e também visualização das superfícies singulares de momento angular, usando esta nova abordagem, podem ser encontrados em Dominguez e Wie (2002). O método proposto proporciona informações detalhadas sobre os ângulos singulares dos cardans e sua relação direta com as superfícies singulares de momento angular resultantes. Também

proporciona uma forma sistemática de determinar todos os possíveis ângulos singulares dos cardans, enquanto que o método de Margulies e Aubrun (1978) não faz.

## 8 Movimentos Nulos dos CMGs

Os chamados “movimentos nulos” dos CMGs são definidos como movimentos dos cardans que não geram torque líquido a partir dos CMGs. Uma das principais dificuldades no uso de CMGs para controle de atitude de satélites e gerenciamento de momento angular é o problema da singularidade geométrica, em que não é gerado nenhum torque de controle para o torque de controle comandado ao longo de uma determinada direção. Em uma singularidade, os torques dos CMGs são disponíveis em todas as direções, a menos de uma. Na prática, os movimentos nulos são em geral utilizados para evitar e/ou escapar de tal situação de singularidade.

Fig. 7.1 - Projeção do momento angular singular no plano  $(H_x, H_z)$  para o caso 7 com  $\beta = 54,7^\circ$



Fonte: Wie (2008).

Há dois tipos de estados singulares: o estado hiperbólico e estado elíptico. Às vezes é possível escapar dos estados singulares hiperbólicos através do movimento nulo, enquanto que não é possível escapar do estado singular elíptico através de qualquer movimento nulo. Apesar de se poder gerar o movimento nulo na singularidade hiperbólica, a mera existência de movimento nulo não garante a fuga da singularidade

hiperbólica. Este assim chamado problema do movimento nulo degenerado, foi brevemente mencionado no Bedrossian et al. (1990a,b), sem qualquer exemplo específico.

Neste capítulo, estabelece-se uma estrutura matemática para a análise de tais movimentos nulos e para determinar os tipos de singularidade, expandindo o trabalho anterior de Bedrossian et al. (1990a,b). Este capítulo também se destina a fornecer ao leitor uma nova luz nos movimentos nulos (em particular, os movimentos nulos degenerados). São apresentados vários exemplos ilustrativos com significativos novos resultados.

O vetor momento angular *virtual*  $\delta\vec{h}_i$ , associado ao  $i$ -ésimo CMG, é definido de tal forma que

$$\delta\vec{H} = \sum_{i=1}^n \delta\vec{h}_i = 0, \quad (8.1)$$

que na verdade é a condição para o movimento nulo, também chamado de movimento virtual ou movimento torque zero. O vetor momento angular virtual  $\delta\vec{h}_i$  é diferente do vetor momento angular *real*  $d\vec{h}_i$ , mas deve ser compatível com a restrição do movimento nulo, (8.1), independentemente do tempo.

O vetor momento angular *virtual*  $\delta\vec{h}_i$ , pode ser expandido em série de Taylor, resultando

$$\begin{aligned} \delta\vec{H} &= \sum_{i=1}^n \delta\vec{h}_i = 0 \\ &= \sum_{i=1}^n \left[ \frac{d\vec{h}_i}{dx_i} \delta x_i + \frac{1}{2!} \frac{d^2\vec{h}_i}{dx_i^2} \delta x_i^2 + \frac{1}{3!} \frac{d^3\vec{h}_i}{dx_i^3} \delta x_i^3 + \dots \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \left[ \vec{f}_i \delta x_i - \frac{1}{2!} \vec{h}_i \delta x_i^2 - \frac{1}{3!} \vec{f}_i \delta x_i^3 + \dots \right] = 0, \end{aligned} \quad (8.2)$$

em que  $\delta x_i$  são os deslocamentos virtuais dos ângulos dos cardans (movimento nulo) a partir de ângulos dos cardans arbitrários  $x_i$ , e  $\vec{f}_i = d\vec{h}_i/dx_i$ .

A condição necessária de primeira ordem para o movimento nulo é, então, dada por

$$\sum_{i=1}^n \vec{f}_i \delta x_i = 0, \quad (8.3)$$

que pode ser reescrita na forma matricial por

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{f}_i \delta x_i = \mathbf{A} \delta \mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad (8.4)$$

em que  $\delta \mathbf{x} = (\delta x_1, \dots, \delta x_n)$  é chamado de vetor deslocamento do movimento nulo e  $\mathbf{A}$  é a matriz Jacobiana definida em (3.6). Em outras palavras, o vetor nulo  $\delta \mathbf{x}$  é o vetor do espaço nulo de  $\mathbf{A}$ ; isto é,  $\delta \mathbf{x} = \mathbf{n} = \text{null}(\mathbf{A})$  e  $\mathbf{A} \mathbf{n} = \mathbf{0}$ . Um vetor do espaço nulo pode ser obtido por

$$\mathbf{n} = (C_1, C_2, C_3, C_4) = \text{vetor nulo Jacobiano}$$

$$C_i = (-1)^{i+1} M_i = \text{cofator Jacobiano de ordem 3}$$

$$M_i = \det(\mathbf{A}_i) = \text{menor Jacobiano de ordem 3}$$

$$\mathbf{A}_i = \mathbf{A} \text{ com a } i - \text{ésima coluna removida}$$

No entanto, a mera existência dos vetores nulos locais (a condição necessária de primeira ordem para o movimento nulo) não é suficiente para escapar da singularidade pelo movimento nulo. A condição necessária de segunda ordem precisa ser verificada.

Para testar se o movimento nulo é possível em uma determinada singularidade ou para determinar o tipo de singularidade (isto é, elíptica ou hiperbólica), considere a restrição de movimento nulo expresso na forma matricial por

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{H} &= \mathbf{H}(\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}) - \mathbf{H}(\mathbf{x}) \\ &= \sum_{i=1}^n \left[ \mathbf{f}_i \delta x_i - \frac{1}{2!} \mathbf{h}_i \delta x_i^2 - \frac{1}{3!} \mathbf{f}_i \delta x_i^3 + \dots \right] = 0, \end{aligned} \quad (8.5)$$

que é a representação matricial equivalente à (8.2).

Tomando o produto interno de  $\delta \mathbf{H}$  com um vetor arbitrário  $\mathbf{u}$ , tem-se

$$\mathbf{u}^T \delta \mathbf{H} = \mathbf{u}^T \left\{ \sum_{i=1}^n \left[ \mathbf{f}_i \delta x_i - \frac{1}{2!} \mathbf{h}_i \delta x_i^2 - \frac{1}{3!} \mathbf{f}_i \delta x_i^3 + \dots \right] \right\} = 0. \quad (8.6)$$

Uma vez que  $\mathbf{u}^T \mathbf{f}_i = 0$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , quando  $\mathbf{u}$  é a direção ao longo do vetor singular, obtém-se a equação de restrição de movimento nulo

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{u}^T \left\{ \sum_{i=1}^n \left[ -\frac{1}{2!} \mathbf{h}_i \delta x_i^2 + \frac{1}{4!} \mathbf{h}_i \delta x_i^4 + \dots \right] \right\} \\ &= \sum_{i=1}^n (\mathbf{u}^T \mathbf{h}_i) \left( -\frac{1}{2!} \delta x_i^2 + \frac{1}{4!} \delta x_i^4 - \dots \right) \\ &= \sum_{i=1}^n e_i (\cos \delta x_i - 1), \end{aligned} \quad (8.7)$$

em que  $e_i = \mathbf{u}^T \mathbf{h}_i = \vec{u} \cdot \vec{h}_i$ .

Considerando-se apenas os termos de segunda ordem, obtém-se a condição necessária de segunda ordem para o movimento nulo,

$$\sum_{i=1}^n e_i \delta x_i^2 = 0, \quad (8.8)$$

que pode ser reescrita por

$$\delta \mathbf{x}^T \mathbf{E} \delta \mathbf{x} = 0, \quad (8.9)$$

em que  $\delta \mathbf{x} = (\delta x_1, \dots, \delta x_n)$  e  $\mathbf{E}$  é a matriz diagonal definida como  $\mathbf{E} = \text{diag}(e_i)$ . Se  $\mathbf{E}$  é uma matriz de sinal definido, a única solução de (8.9) é  $\delta \mathbf{x} = \mathbf{0}$  e o movimento nulo não é possível. Contudo, a definição de sinal de  $\mathbf{E}$  é somente uma condição suficiente, mas não é uma condição necessária para a solução trivial,  $\delta \mathbf{x} = \mathbf{0}$ , de (8.9).

O movimento nulo virtual dos ângulos dos cardans pode ser expresso usando a condição necessária de primeira ordem, como sendo

$$\delta \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n-2} c_i \mathbf{n}_i = \mathbf{N} \mathbf{c}, \quad (8.10)$$

em que  $c_i$  é o  $i$ -ésimo coeficiente de ponderação,  $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_{n-2})$  e  $\mathbf{n}_i$  são os vetores da base do espaço nulo da matriz Jacobiana  $\mathbf{A}$ , tal que  $\mathbf{A} \mathbf{n}_i = \mathbf{0}$  ou  $\mathbf{N} = \text{null}(\mathbf{A})$ . Observe que, numa singularidade,  $\text{posto}(\mathbf{A}) = 2$  e a nulidade  $(\mathbf{A}) = n - \text{posto}(\mathbf{A})$ .

Substituindo (8.10) em (8.9), obtém-se a condição necessária de segunda ordem da forma:

$$\mathbf{c}^T \mathbf{M} \mathbf{c} = 0, \quad (8.11)$$

em que  $\mathbf{M} = \mathbf{N}^T \mathbf{E} \mathbf{N}$ .

Se  $\mathbf{M}$  é uma matriz de sinal definido a única solução de (8.11) é  $\mathbf{c} = \mathbf{0}$  e movimento nulo não é possível. Este tipo de singularidade é referida como uma singularidade elíptica e, conseqüentemente, não pode ser escapada por um movimento nulo. A outra possibilidade é  $\mathbf{M}$  ser de sinal indefinido (ou singular). Este tipo de singularidade é referida como uma singularidade hiperbólica. Como pode ser ilustrado para um sistema de dois CMGs de 1 eixo de cardan, no entanto, a mera possibilidade de movimento nulo não garante escapar da singularidade. Soluções de movimento nulo degenerados que não afetam o posto da matriz Jacobiana devem ser excluídas.

Como um exemplo de cálculo da dimensão e dos vetores da base do espaço nulo,

considere que a solução de (3.5) pode ser dividida em duas partes: a particular e a homogênea. A particular envolve a obtenção da matriz pseudo-inversa de More Penrose, como mostra (7.2). A homogênea não produz torque, daí os movimentos dos eixos dos cardans serem denominados de movimentos nulos. As soluções homogêneas são descritas pelos vetores do espaço nulo da matriz Jacobiana. A dimensão do espaço nulo pode ser calculada, como já foi mencionado, por  $n - \text{posto}(\mathbf{A})$ . Considerando a configuração piramidal com quatro giroscópios ( $n = 4$ ), portanto, quando  $\mathbf{A}$  é não singular, a dimensão do espaço nulo é 1. Por outro lado, quando  $\mathbf{A}$  é singular, a dimensão do espaço nulo é 2. Em qualquer caso, os vetores da base do espaço nulo podem ser determinados usando o produto vetorial generalizado ou pelo método que já foi descrito no capítulo (através dos menores do Jacobiano).

Para uma matriz Jacobiana não singular, os métodos podem ser utilizados diretamente. No entanto, quando o Jacobiana é singular há apenas duas linhas (colunas) linearmente independentes. Isto implica que todos os cofatores vão para zero quando a medida da singularidade se aproxima de zero. Para determinar vetores da base do espaço nulo numa configuração singular descreve-se aqui o procedimento proposto por Yavuzoğlu (2003).

Passo 1:

Determinar os dois vetores linhas linearmente independentes da jacobiana. Substituir uma das linhas dependentes por um dos seguintes vetores para a obtenção da matriz jacobiana com três vetores linhas linearmente independentes:

$$\{[1, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 0], [0, 0, 1, 0] \text{ e } [0, 0, 0, 1]\}$$

Passo 2:

Usando

$$\mathbf{n} = \frac{\partial h_1}{\partial \mathbf{x}} \wedge \frac{\partial h_2}{\partial \mathbf{x}} \wedge \frac{\partial h_3}{\partial \mathbf{x}} = \det \left\{ \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_4 \end{bmatrix} \right\},$$

em que

$$\mathbf{h} = [h_1, h_2, h_3]^T,$$

$$\frac{\partial h_l}{\partial \mathbf{x}} = \left[ \frac{\partial h_l}{\partial x_1}, \frac{\partial h_l}{\partial x_2}, \frac{\partial h_l}{\partial x_3}, \frac{\partial h_l}{\partial x_4} \right] \quad \text{para } l = 1, 2, 3,$$

$$[e_1, e_2, e_3, e_4]^T \equiv \text{espaço 4-dimensional dos ângulos dos eixos dos cardans,}$$

$\mathbf{A}_i = \mathbf{A}$  com a  $i$ -ésima coluna removida,

ou o método descrito que envolve os menores do Jacobiano e calcule o primeiro vetor nulo para a nova matriz jacobiana.

Passo 3:

Uma vez que a dimensão do espaço nulo para a configuração singular é 2 é necessário encontrar mais um vetor da base do espaço nulo. O segundo vetor pode ser encontrado repetindo os passos anteriores utilizando um vetor linha diferente.

Passo 4:

Verifique se os vetores nulos encontrados são linearmente independentes. Se não são linearmente independentes, repita o passo 3, selecionando diferentes vetores linha.

Pode-se verificar se os vetores encontrados satisfazem a seguinte relação proveniente da homogeneidade solução:

$$\mathbf{A}\mathbf{n} = 0.$$

Um exemplo de singularidade elíptica interna é abordado a seguir.  $\mathbf{x}_s = [-90^\circ, 0^\circ, 90^\circ, 0^\circ]^T$  corresponde à um dos piores casos de singularidade (Figura 8.1). Os momentos angulares individuais e o momento angular total do sistema é calculado a partir de (3.1), como sendo

$$\mathbf{H} = \sum_{i=1}^n \mathbf{h}_i(x_i) = \begin{bmatrix} 0,5774 \\ 0 \\ -0,8164 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,5774 \\ 0 \\ 0,8164 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,1549 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (8.12)$$

A matriz Jacobiana dada por (3.5) é repetida aqui, como sendo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -c\beta \cos x_1 & \sin x_2 & c\beta \cos x_3 & -\sin x_4 \\ -\sin x_1 & -c\beta \cos x_2 & \sin x_3 & c\beta \cos x_4 \\ s\beta \cos x_1 & s\beta \cos x_2 & s\beta \cos x_3 & s\beta \cos x_4 \end{bmatrix}. \quad (8.13)$$

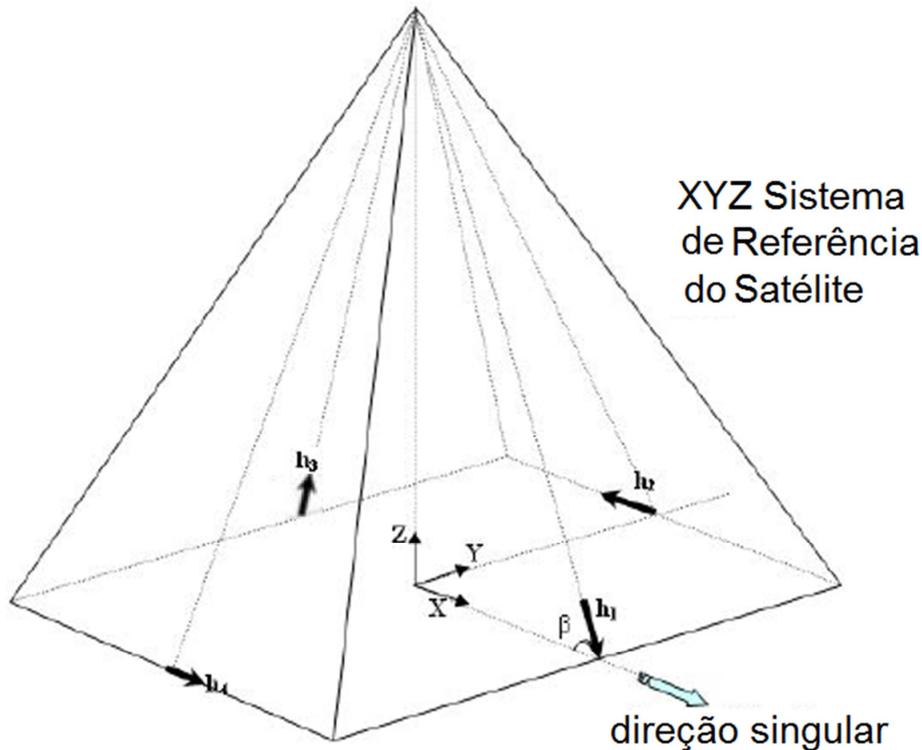
Adota-se aqui a inclinação piramidal de  $\beta = 54.73^\circ$  com a horizontal. Conforme Wie (1998) e Paradiso (1992), este ângulo de inclinação fornece quase igual capacidade momento angular nos três eixos e, portanto, um envelope de momento angular quase esférico.

Resultando a seguinte matriz  $\mathbf{A}$ ,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -c54,73 \cos(-90) & \sin 0 & c54,73 \cos 90 & -\sin 0 \\ -\sin(-90) & -c54,73 \cos 0 & \sin 90 & c54,73 \cos 0 \\ s54,73 \cos(-90) & s54,73 \cos 0 & s54,73 \cos 90 & s54,73 \cos 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -c\beta & 1 & c\beta \\ 0 & s\beta & 0 & s\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -0,5774 & 1 & 0,5774 \\ 0 & 0,8164 & 0 & 0,8164 \end{bmatrix}. \quad (8.14)$$

Fig. 8.1 – Singularidade elíptica interna em  $\mathbf{x}_s = [-90^\circ, 0^\circ, 90^\circ, 0^\circ]^T$ .



Fonte: Yavuzoğlu (2003).

O posto da matriz  $\mathbf{A}$  é dois. Os autovalores da matriz  $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$  são 0, 1,3331 e 2,6668. O autovetor correspondente ao autovalor mínimo, o qual é zero, é  $[1 \ 0 \ 0]^T$ . Esta direção é a direção singular, àquela na qual o torque não pode ser produzido.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -0,5774 & 1 & 0,5774 \\ 0 & 0,8164 & 0 & 0,8164 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0,5774 & 0,8164 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0,5774 & 0,8164 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2,6668 & 0 \\ 0 & 0 & 1,3331 \end{bmatrix}.$$

As projeções dos vetores momento angular individuais ao longo da direção singular exibem o seguinte padrão de sinais:  $[+, -, +, +]$ . Portanto, este singular estado corresponde à singularidade 2H de acordo com o classificação *plano de corte*.

A medida Singularity  $m$ , calculada usando o software MATLAB, fornece  $m = 8,8893 \times 10^{-33}$ .

Para realizar o teste nulo descrito no Capítulo 3, primeiramente devem ser calculados os vetores da base do espaço nulo. A matriz Jacobiana desta configuração é:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -0,5774 & 1 & 0,5774 \\ 0 & 0,8164 & 0 & 0,8164 \end{bmatrix}.$$

Substituindo a primeira linha de zeros da matriz Jacobiana por  $[1 \ 0 \ 0 \ 0]$ , tem-se

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -0,5774 & 1 & 0,5774 \\ 0 & 0,8164 & 0 & 0,8164 \end{bmatrix}.$$

Calculando os cofatores  $\mathbf{C}_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ . Para calcular  $\mathbf{C}_i$  elimine a  $i$ -ésima coluna e calcule o determinante da matriz  $3 \times 3$  multiplicado por  $(-1)^{i+1}$ , ou seja,

$$\mathbf{C}_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0,5774 & 1 & 0,5774 \\ 0,8164 & 0 & 0,8164 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\mathbf{C}_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0,5774 \\ 0 & 0 & 0,8164 \end{vmatrix} = -0,8164.$$

$$\mathbf{C}_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -0,5774 & 0,5774 \\ 0 & 0,8164 & 0,8164 \end{vmatrix} = -0,9428.$$

$$\mathbf{C}_{41} = (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -0,5774 & 1 \\ 0 & 0,8164 & 0 \end{vmatrix} = 0,8164.$$

Substituindo a primeira linha de zeros da matriz Jacobiana por  $[0 \ 1 \ 0 \ 0]$ , tem-se

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -0,5774 & 1 & 0,5774 \\ 0 & 0,8164 & 0 & 0,8164 \end{bmatrix}.$$

Calculando os cofatores  $\mathbf{C}_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ . Para calcular  $\mathbf{C}_i$  elimine a  $i$ -ésima coluna e calcule o determinante da matriz  $3 \times 3$  multiplicado por  $(-1)^{i+1}$ , ou seja,

$$\mathbf{C}_{12} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0,5774 & 1 & 0,5774 \\ 0,8164 & 0 & 0,8164 \end{vmatrix} = 0,8164.$$

$$\mathbf{c}_{22} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0,5774 \\ 0 & 0 & 0,8164 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\mathbf{c}_{32} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -0,5774 & 0,5774 \\ 0 & 0,8164 & 0,8164 \end{vmatrix} = -0,8164.$$

$$\mathbf{c}_{42} = (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -0,5774 & 1 \\ 0 & 0,8164 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

A matriz cujas colunas são os vetores da base do espaço nulo são, portanto,

$$\mathbf{N} = [\mathbf{n}_1 \quad \mathbf{n}_2] = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{11} & \mathbf{c}_{12} \\ \mathbf{c}_{21} & \mathbf{c}_{22} \\ \mathbf{c}_{31} & \mathbf{c}_{32} \\ \mathbf{c}_{41} & \mathbf{c}_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0,8164 \\ -0,8164 & 0 \\ -0,9428 & -0,8164 \\ 0,8164 & 0 \end{bmatrix}.$$

## 9 Teoria da Superfície da Geometria Diferencial

Neste capítulo, o problema de singularidade da superfície é aprofundado através da aplicação da teoria da superfície geométrica diferencial proposta por Guggenheimer (1963) e Kreyszig (1991). Sendo de importância prática para uma melhor compreensão dos sistemas de CMG e até mesmo para o desenvolvimento de leis de direção CMG, sendo testado por muitos pesquisadores, como Margulies e Aubrun (1978).

Este método pode ser utilizado para analisar, calcular e visualizar as superfícies singulares sem a utilização da teoria de superfície diferencial, como demonstrado nos capítulos anteriores. No entanto, destina-se a fornecer com o uso da matemática básica da teoria da geometria diferencial a formulação da aplicação da teoria geométrica dos sistemas de CMG. Um estudo adicional é necessário para explorar plenamente a teoria geometria da superfície diferencial e certamente auxiliando a avançar ainda mais neste assunto.

Um vetor unitário ao longo de todas as direções possíveis no espaço tridimensional (exceto ao longo das direções dos eixos cardans) pode ser parametrizado como

$$\begin{aligned}\vec{u} &= u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k} \\ &= \sin \theta_2 \vec{i} - \sin \theta_1 \cos \theta_2 \vec{j} + \cos \theta_1 \cos \theta_2 \vec{k},\end{aligned}\quad (9.1)$$

que foi previamente mostrado na Eq. (6.2). Em seguida, obtém-se o diferencial de  $\vec{u}$  como

$$d\vec{u} = \vec{u}_1 d\theta_1 + \vec{u}_2 d\theta_2, \quad (9.2)$$

em que

$$\begin{aligned}\vec{u}_1 &\equiv \frac{\partial \vec{u}}{\partial \theta_1} = -\cos \theta_1 \cos \theta_2 \vec{j} - \sin \theta_1 \cos \theta_2 \vec{k}, \\ \vec{u}_2 &\equiv \frac{\partial \vec{u}}{\partial \theta_2} = \cos \theta_2 \vec{i} + \sin \theta_1 \sin \theta_2 \vec{j} - \cos \theta_1 \sin \theta_2 \vec{k}.\end{aligned}$$

Note que  $|\vec{u}_1| = \cos^2 \theta_2$ ,  $|\vec{u}_2| = 1$ , e  $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$ .

Da mesma forma, o diferencial do vetor de momento angular singular ou vetor da superfície singular  $\vec{H}(\theta_1, \theta_2)$  pode ser representado como

$$d\vec{H} = \frac{\partial \vec{H}}{\partial \theta_1} d\theta_1 + \frac{\partial \vec{H}}{\partial \theta_2} d\theta_2 = \vec{H}_1 d\theta_1 + \vec{H}_2 d\theta_2, \quad (9.3)$$

onde

$$\vec{H}_i \equiv \frac{\partial \vec{H}}{\partial \theta_i} = \frac{\partial \vec{H}_x}{\partial \theta_i} \vec{i} + \frac{\partial \vec{H}_y}{\partial \theta_i} \vec{j} + \frac{\partial \vec{H}_z}{\partial \theta_i} \vec{k}.$$

A primeira forma fundamental do vetor da superfície singular  $\vec{H}$  é dada por

$$\begin{aligned} I &\equiv d\vec{H} \cdot d\vec{H} = (\vec{H}_1 d\theta_1 + \vec{H}_2 d\theta_2) \cdot (\vec{H}_1 d\theta_1 + \vec{H}_2 d\theta_2) \\ &= \sum_{i,j=1}^2 G_{ij} d\theta_i d\theta_j = d\boldsymbol{\theta}^T \mathbf{G} d\boldsymbol{\theta} \\ &= [d\theta_1 \quad d\theta_2] \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{12} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\theta_1 \\ d\theta_2 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (9.4)$$

em que  $d\boldsymbol{\theta} = (d\theta_1, d\theta_2)$ ,  $\mathbf{G} = [G_{ij}] = \mathbf{G}^T > 0$ , e

$$G_{ij} \equiv \vec{H}_i \cdot \vec{H}_j = \frac{\partial \vec{H}_x}{\partial \theta_i} \frac{\partial \vec{H}_x}{\partial \theta_j} + \frac{\partial \vec{H}_y}{\partial \theta_i} \frac{\partial \vec{H}_y}{\partial \theta_j} + \frac{\partial \vec{H}_z}{\partial \theta_i} \frac{\partial \vec{H}_z}{\partial \theta_j}.$$

Neste capítulo, emprega-se a seguinte operação utilizando o produto escalar da matriz:

$$\begin{bmatrix} \vec{H}_1 \\ \vec{H}_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{H}_1 & \vec{H}_2 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \vec{H}_1 \cdot \vec{H}_1 & \vec{H}_1 \cdot \vec{H}_2 \\ \vec{H}_2 \cdot \vec{H}_1 & \vec{H}_2 \cdot \vec{H}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{G}. \quad (9.5)$$

O quadrado de um elemento de comprimento de arco  $ds^2$  é também muitas vezes utilizado para designar a primeira forma fundamental da superfície como

$$ds^2 = G_{11}(d\theta_1)^2 + 2G_{12}d\theta_1 d\theta_2 + G_{22}(d\theta_2)^2 \quad (9.6)$$

e  $G_{ij}$  são os componentes do chamado tensor métrico ou tensor fundamental da geometria bidimensional Riemanniana. A primeira forma fundamental nos permite medir comprimentos, ângulos e áreas em uma superfície.

A segunda forma fundamental do vetor da superfície singular  $\vec{H}$  é dado por

$$\begin{aligned} II &\equiv -d\vec{H} \cdot d\vec{u} = -(\vec{H}_1 d\theta_1 + \vec{H}_2 d\theta_2) \cdot (\vec{u}_1 d\theta_1 + \vec{u}_2 d\theta_2) \\ &= \sum_{i,j=1}^2 B_{ij} d\theta_i d\theta_j = d\boldsymbol{\theta}^T \mathbf{B} d\boldsymbol{\theta} \\ &= [d\theta_1 \quad d\theta_2] \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{12} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\theta_1 \\ d\theta_2 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (9.7)$$

em que  $B_{ij} \equiv -\vec{H}_i \cdot \vec{u}_j$ .

Diferenciando a relação de ortogonalidade  $\vec{H}_i \cdot \vec{u} = 0$ , obtem-se

$$\vec{H}_{ij} \cdot \vec{u} + \vec{H}_i \cdot \vec{u}_j = 0, \quad (9.8)$$

em que  $H_{ij} \equiv \partial^2 \vec{H} / \partial \theta_i \partial \theta_j$ . Consequentemente obtendo

$$B_{ij} \equiv -\vec{H}_i \cdot \vec{u}_j = \vec{H}_{ij} \cdot \vec{u} \quad (9.9)$$

e  $\mathbf{B} = \mathbf{B}^T$  por que  $\vec{H}_{ij} = \vec{H}_{ji}$ .

A terceira forma fundamental da superfície é dada por

$$\begin{aligned} \text{III} \equiv d\vec{u} \cdot d\vec{u} &= (\vec{u}_1 d\theta_1 + \vec{u}_2 d\theta_2) \cdot (\vec{u}_1 d\theta_1 + \vec{u}_2 d\theta_2) \\ &= \sum_{i,j=1}^2 C_{ij} d\theta_i d\theta_j = d\boldsymbol{\theta}^T \mathbf{C} d\boldsymbol{\theta} \\ &= [d\theta_1 \quad d\theta_2] \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{12} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\theta_1 \\ d\theta_2 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (9.10)$$

em que  $C_{ij} = \vec{u}_i \cdot \vec{u}_j$  e  $\mathbf{C} = \mathbf{C}^T > 0$ .

Definindo a chamada transformação de Weingarten como

$$\begin{bmatrix} \vec{u}_1 \\ \vec{u}_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{12} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{H}_1 \\ \vec{H}_2 \end{bmatrix} = -\mathbf{D} \begin{bmatrix} \vec{H}_1 \\ \vec{H}_2 \end{bmatrix}, \quad (9.11)$$

simplesmente adquire-se

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &\equiv - \begin{bmatrix} \vec{H}_1 \\ \vec{H}_2 \end{bmatrix} \cdot [\vec{u}_1 \quad \vec{u}_2] \\ &= - \begin{bmatrix} \vec{H}_1 \\ \vec{H}_2 \end{bmatrix} \cdot [\vec{H}_1 \quad \vec{H}_2] \mathbf{D}^T = \mathbf{G} \mathbf{D}^T. \end{aligned} \quad (9.12)$$

A matriz de transformação de Weingarten é então obtida como

$$\mathbf{D} = \mathbf{G}^{-1} \mathbf{B} = \mathbf{B} \mathbf{G}^{-1} \quad (9.13)$$

e  $\mathbf{D} = \mathbf{D}^T$ . Também tem-se

$$\mathbf{C} \equiv \begin{bmatrix} \vec{u}_1 \\ \vec{u}_2 \end{bmatrix} \cdot [\vec{u}_1 \quad \vec{u}_2] = \mathbf{D} \begin{bmatrix} \vec{H}_1 \\ \vec{H}_2 \end{bmatrix} \cdot [\vec{H}_1 \quad \vec{H}_2] \mathbf{D}^T$$

$$= \mathbf{DGD}^T = \mathbf{DB} = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{B}^2 = \mathbf{B}^2\mathbf{G}^{-1}. \quad (9.14)$$

Semelhante a transformação de Weingarten, considere uma transformação congruente da forma

$$\begin{bmatrix} d\theta_1 \\ d\theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{12} & E_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix}, \quad (9.15)$$

ou  $d\boldsymbol{\theta} = \mathbf{E}\boldsymbol{\omega}$ , em que  $\mathbf{E} = [E_{ij}]$  é uma matriz não singular, que diagonaliza a primeira forma fundamental como

$$\begin{aligned} \text{I} &\equiv d\vec{H} \cdot d\vec{H} = d\boldsymbol{\theta}^T + \mathbf{G}d\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{E}^T \mathbf{G} \mathbf{E} \boldsymbol{\omega} \\ &= \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} = \omega_1^2 + \omega_2^2, \end{aligned} \quad (9.16)$$

em que  $\mathbf{I}$  é uma matriz identidade. A forma diferencial  $d\vec{H}$  pode então ser simplesmente escrita em termos das formas diferenciais lineares,  $\omega_1$  e  $\omega_2$ , como

$$d\vec{H} = \omega_1 \vec{e}_1 + \omega_2 \vec{e}_2, \quad (9.17)$$

onde  $\vec{e}_1$  e  $\vec{e}_2$  são vetores unitários ortogonais, isto é,  $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$ .

Ao aplicar a congruente transformação  $d\boldsymbol{\theta} = \mathbf{E}\boldsymbol{\omega}$ , pode-se reescrever a segunda forma fundamental como

$$\begin{aligned} \text{II} &\equiv -d\vec{H} \cdot d\vec{u} = d\boldsymbol{\theta}^T + \mathbf{B}d\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{E}^T \mathbf{B} \mathbf{E} \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{L} \boldsymbol{\omega} \\ &= [\omega_1 \quad \omega_2] \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{12} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (9.18)$$

em que  $\mathbf{L} = \mathbf{E}^T \mathbf{B} \mathbf{E}$  é conhecida como matriz de mapeamento de Weingarten na teoria da geometria diferencial. Segundo a Lei de Inercia de Silvester, os sinais dos autos-valores de  $\mathbf{B}$  são preservados por uma transformação congruente causada pelo  $\det \mathbf{L} = \det \mathbf{B} (\det \mathbf{E})^2$ . Note que a simetria de  $\mathbf{B}$  é também preservada por uma transformação congruente tal que,  $\mathbf{L} = \mathbf{L}^T$ .

Além disso, a segunda forma fundamental pode ser diagonalizada como

$$\begin{aligned} \text{II} &\equiv -d\vec{H} \cdot d\vec{u} = [\omega_1 \quad \omega_2] \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{12} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} \\ &= [\omega'_1 \quad \omega'_2] \Phi^T \mathbf{L} \Phi \begin{bmatrix} \omega'_1 \\ \omega'_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= [\omega'_1 \quad \omega'_2] \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega'_1 \\ \omega'_2 \end{bmatrix}, \quad (9.19)$$

onde  $k_1$  e  $k_2$  são os autos-valores de  $\mathbf{L}$  e  $\Phi$  é uma matriz de transformação similar defenida como

$$d\vec{H} = \omega_1 \vec{e}_1 + \omega_2 \vec{e}_2 = \omega'_1 \vec{e}'_1 + \omega'_2 \vec{e}'_2, \quad (9.20)$$

em que

$$\begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}'_1 \\ \vec{e}'_2 \end{bmatrix} = \Phi \begin{bmatrix} \vec{e}'_1 \\ \vec{e}'_2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega'_1 \\ \omega'_2 \end{bmatrix} = \Phi \begin{bmatrix} \omega'_1 \\ \omega'_2 \end{bmatrix},$$

$$\tan 2\phi = \frac{2L_{12}}{L_{11} - L_{22}}. \quad (9.21)$$

Note que  $\Phi$  é uma matriz ortonormal com  $\Phi^T = \Phi^{-1}$  e o  $\det \Phi = 1$ , isto é,  $\Phi$  é uma matriz de rotação para  $\Phi^T \mathbf{L} \Phi = \text{diag}\{k_1, k_2\}$  e o  $\det \mathbf{L} = L_{11} L_{22} - L_{12}^2 = k_1 k_2$ .

A curvatura normal  $k_n$ , curvatura de Gauss  $k$  e a curvatura média  $\tilde{k}$  são definidas como

$$k_n = k_1 \cos^2 \phi + k_2 \sin^2 \phi = \frac{\text{II}}{\text{I}}, \quad (9.22a)$$

$$k = k_1 k_2 = \det \mathbf{L} = L_{11} L_{22} - L_{12}^2, \quad (9.22b)$$

$$\tilde{k} = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = \frac{1}{2} \text{tr } \mathbf{L} = \frac{1}{2}(L_{11} + L_{22}). \quad (9.22c)$$

A curvatura principal  $k_1$  e  $k_2$  são as raízes da seguinte equação característica:

$$\det(\mathbf{L} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \quad \text{ou} \quad \det(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{G}) = 0. \quad (9.23)$$

Além disso, temos a seguinte relação de Guggenheimer (1963) e Kreyszig (1991):

$$k\mathbf{I} - 2\tilde{k}\text{II} + \text{III} = 0 \quad (9.24)$$

em que  $\text{I} = \omega^T \mathbf{I} \omega$ ,  $\text{II} = \omega^T \mathbf{L} \omega$  e  $\text{III} = \omega^T \mathbf{L}^2 \omega$ . Equivalentemente tem-se

$$k\mathbf{G} - 2\tilde{k}\mathbf{B} + \mathbf{C} = 0. \quad (9.25)$$

Para superfícies conhecidas, o ângulo  $\psi$  entre as linhas de parâmetro, o vetor normal unitário  $\vec{u}$  e  $B_{ij}$  podem ser obtidos da seguinte relação:

$$\cos \psi = \frac{\vec{H}_1 \cdot \vec{H}_2}{|\vec{H}_1| |\vec{H}_2|} = \frac{G_{12}}{\sqrt{G_{11} G_{22}}}, \quad (9.26a)$$

$$\vec{u} = \frac{\vec{H}_1 \times \vec{H}_2}{|\vec{H}_1 \times \vec{H}_2|} = \frac{\vec{H}_1 \times \vec{H}_2}{\sqrt{\det \mathbf{G}}}, \quad (9.26b)$$

$$B_{ij} = -\vec{H}_i \cdot \vec{u}_j = \vec{H}_{ij} \cdot \vec{u} = \frac{\vec{H}_{ij} \cdot \vec{H}_1 \times \vec{H}_2}{\sqrt{\det \mathbf{G}}}. \quad (9.26c)$$

Note que  $\mathbf{G} > 0$  por ser uma matriz positiva definida.

Tendo o diferencial da condição de ortogonalidade  $d\vec{H} \cdot \vec{u} = 0$  pode-se obter

$$d^2 \vec{H} \cdot \vec{u} + d\vec{H} \cdot d\vec{u} = 0 \quad (9.27)$$

e a segunda forma fundamental pode ser escrita como

$$\Pi = d^2 \vec{H} \cdot \vec{u} = \frac{d^2 \vec{H} \cdot \vec{H}_1 \times \vec{H}_2}{\sqrt{\det \mathbf{G}}}, \quad (9.28)$$

em que

$$d^2 \vec{H} \equiv \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial \theta_1^2} (d\theta_1)^2 + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} d\theta_1 d\theta_2 + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial \theta_2^2} (d\theta_2)^2. \quad (9.29)$$

Usando uma notação diádica, pode-se reescrever o vetor de momento angular singular da Eq.(6.10) como

$$\vec{H} = \vec{H}(\vec{u}) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{e_i} (\hat{I} - \vec{g}_i \vec{g}_i) \cdot \vec{u}, \quad (9.30)$$

onde  $\hat{I}$  é uma diádica unidade e  $e_i = \vec{h}_i \cdot \vec{u} = \pm |\vec{g}_i \times \vec{u}|$ . O diferencial do vetor de momento angular singular de Margulies e Aubrun (1978) é então escrito como

$$d\vec{H} = \hat{j} \cdot d\vec{u}, \quad (9.31)$$

em que

$$\hat{j} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{e_i} \vec{f}_i \vec{f}_i. \quad (9.32)$$

Por conta  $\vec{f}_i \cdot \vec{u} = 0$  na singularidade, tem-se  $\hat{j} \cdot \vec{u} = 0$ . Assim, afirma-se que  $\hat{j}$  é singular de rank 2 e uma diádica planar simétrica no plano ortogonal tangente a  $\vec{u}$ .

Representando a diádica planar simétrica  $\hat{j}$  como

$$\hat{j} \equiv [\vec{u}_1 \quad \vec{u}_2] \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{12} & J_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{u}_1 \\ \vec{u}_2 \end{bmatrix} = \sum_{i,j=1}^2 J_{ij} \vec{u}_i \vec{u}_j, \quad (9.33)$$

em que  $\vec{u}_i \equiv \partial \vec{u} / \partial \theta_i$  e  $J_{ij} = \vec{u}_i \cdot \hat{j} \cdot \vec{u}_j$ , pode-se também obter as duas formas fundamentais da superfície singular como

$$\begin{aligned} I &\equiv d\vec{H} \cdot d\vec{H} = d\vec{u} \cdot \hat{j}^2 d\vec{u} \\ &= d\theta^T \mathbf{C} \mathbf{J} \mathbf{C} d\theta = d\theta^T \mathbf{G} d\theta, \end{aligned} \quad (9.34)$$

$$\begin{aligned} II &\equiv -d\vec{H} \cdot d\vec{u} = -d\vec{u} \cdot \hat{j} \cdot d\vec{u} \\ &= -d\theta^T \mathbf{C} \mathbf{J} \mathbf{C} d\theta = d\theta^T \mathbf{B} d\theta \end{aligned} \quad (9.35)$$

tem-se

$$\mathbf{B} = -\mathbf{C} \mathbf{J} \mathbf{C}, \quad (9.36)$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{B} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{B}. \quad (9.37)$$

Note-se que a matriz  $\mathbf{C}$ , que não é uma matriz identidade, não sendo parametrizada em Margulies e Aubrun (1978).

Em Suma, tem-se  $\mathbf{E}^T \mathbf{G} \mathbf{E} = \mathbf{I}$ ,  $\mathbf{E}^T \mathbf{B} \mathbf{E} = \mathbf{L}$ ,  $\mathbf{E}^T \mathbf{C} \mathbf{E} = \mathbf{L}^2$ ,  $\mathbf{C} = \mathbf{B}^2 \mathbf{G}^{-1}$  e  $\mathbf{D} = \mathbf{B} \mathbf{G}^{-1}$ . Consequentemente, obtém-se

$$\det \mathbf{C} = \frac{\det \mathbf{B}^2}{\det \mathbf{G}}, \quad (9.38)$$

$$\det \mathbf{D} = \frac{\det \mathbf{B}}{\det \mathbf{G}} \quad (9.39)$$

e

$$\begin{aligned} k &\equiv k_1 k_2 = \det \mathbf{L} = L_{11} L_{22} - L_{12}^2 \\ &= \det \mathbf{D} = \frac{\det \mathbf{B}}{\det \mathbf{G}} = \frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2}{G_{11} G_{22} - G_{12}^2} \\ &= \frac{1}{\det \mathbf{J}} \frac{1}{\det \mathbf{C}} = \frac{1}{J_{11} J_{22} - J_{12}^2} \frac{1}{\det \mathbf{C}} \\ &= \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} \frac{1}{\det \mathbf{C}}, \end{aligned} \quad (9.40)$$

em que  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são os autos-valores de  $\mathbf{J}$  e  $\det \mathbf{C} > 0$ . Finalmente, tem-se

$$\begin{aligned} \text{sinal}(k) &= \text{sinal}(\det \mathbf{L}) = \text{sinal}(\det \mathbf{D}) \\ &= \text{sinal}(\det \mathbf{B}) = \text{sinal}(\det \mathbf{J}). \end{aligned} \quad (9.41)$$

O sinal de  $k$  fornece informações importantes sobre a forma da superfície em torno de um determinado ponto  $\vec{H}^*$ . Se  $k(\vec{H}^*) > 0$ , então  $\vec{H}^*$  é um ponto da superfície elíptica. Se  $k(\vec{H}^*) = 0$ , então  $\vec{H}^*$  é um ponto parabólico ou um ponto oblíquo no plano da superfície. Se  $k(\vec{H}^*) < 0$ , então  $\vec{H}^*$  é um ponto hiperbólico da superfície. As duas superfícies locais são ditas isométricas se e somente se elas tiverem curvaturas idênticas de Gauss. A superfície fechada sempre terá pontos elípticos. Uma linha para o qual a segunda forma fundamental torna-se diagonal é uma direção principal. Uma curva cuja totalidade das tangentes estão em direções principais é uma linha de curvatura. A curvatura normal de uma linha de curvatura é uma curvatura principal da superfície.

O problema do mapeamento inverso é para determinar a direção  $d\vec{u}$  de tal modo que  $\hat{j} \cdot d\vec{u} = d\vec{H}$  onde  $d\vec{H}$  é dado. Se o sentido da tangente da superfície da singularidade é dada por

$$d\vec{H} = \hat{j} \cdot d\vec{u}, \quad (9.42)$$

onde  $\vec{u}$  é um vetor arbitrário definido sobre a superfície da singularidade, em seguida, o teorema de mapeamento inverso mostrado em Margulies e Aubrun (1978) é dado

$$d\vec{u} = k\hat{j} \cdot d\vec{H}, \quad (9.43)$$

em que  $k = k(\vec{u})$  é a curvatura de Gauss dada por

$$k = 2 \sum_{i,j=1}^n \frac{e_i e_j}{(\det[\mathbf{f}_i, \mathbf{f}_j, \mathbf{u}])^2}. \quad (9.44)$$

$$e_i \equiv \vec{h}_i \cdot \vec{u} \text{ e } \det[\mathbf{f}_i, \mathbf{f}_j, \mathbf{u}] \equiv \vec{f}_i \times \vec{f}_j \cdot \vec{u}.$$

## 10 Padrão Pseudo-Inverso

Considere um modelo de torque dos CMG dado simplesmente por

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\tau}, \quad (10.1)$$

em que  $\mathbf{A}$  é uma matriz Jacobiana  $3 \times n$ ,  $\dot{\mathbf{x}} = (\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n)$ , e  $x_i$  é o  $i$ ésimo ângulo do eixo cardan. Para o dado comando de torque de controle  $\boldsymbol{\tau}$ , um comando de taxa do cardan  $\dot{\mathbf{x}}$ , muitas vezes referida como a lógica de direção pseudo-inversa sendo obtida como

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^+ \boldsymbol{\tau}, \quad (10.2)$$

em que

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^T (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}. \quad (10.3)$$

Esta pseudo-inversa é a solução mínima de duas normas do seguinte problema de minimização com restrições:

$$\min_{\dot{\mathbf{x}}} \|\dot{\mathbf{x}}\|^2 \quad \text{sujeito a} \quad \mathbf{A}\dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\tau} \quad (10.4)$$

em que  $\|\dot{\mathbf{x}}\|^2 = \dot{\mathbf{x}}^T \dot{\mathbf{x}}$ . A maioria das leis de direção CMG determinam os comandos de rotação dos cardan com alguma variação da pseudo-inversa.

A pseudo-inversa é um caso especial da solução de no mínimo duas normas ponderadas

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^+ \boldsymbol{\tau}, \quad (10.5)$$

em que  $\mathbf{A}^+ = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A}^T (\mathbf{A}\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A}^T)^{-1}$ , referente ao seguinte problema de minimização com restrições:

$$\min_{\dot{\mathbf{x}}} \|\dot{\mathbf{x}}\|_{\mathbf{Q}}^2 \quad \text{sujeito a} \quad \mathbf{A}\dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\tau}, \quad (10.6)$$

em que  $\|\dot{\mathbf{x}}\|_{\mathbf{Q}}^2 = \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{Q} \dot{\mathbf{x}}$  e  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T > 0$ .

Se o rank de  $(\mathbf{A}) < m$  para determinados conjuntos de ângulos dos cardan, ou rank equivalente  $(\mathbf{A}\mathbf{A}^T) < m$ , onde  $\mathbf{A}$  é uma matriz  $m \times n$ , a pseudo-inverso não existe, e pode se dizer que a lógica de direção pseudo-inversa encontra estados singulares. Esta situação singular ocorre quando todos os vetores de saída dos torques dos CMG individuais são perpendiculares à direção do torque ordenado. Equivalentemente, a

situação singular ocorre quando todos os vetores de momento angular individuais dos CMGs tem projeções extremas para o torque ordenado  $\boldsymbol{\tau}$ .

Por conta da pseudo-inversa  $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}$ , ser a solução mínima de duas norma das taxas dos cardans sujeita à restrição  $\mathbf{A}\dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\tau}$ , a lógica da direção pseudo-inversa e qualquer outra lógica de direção com base pseudo-inversa tendem a isolar os CMGs ineficientemente posicionados fazendo com que os ângulos dos cardans eventualmente, sejam desligados em arranjos singulares antiparalelos. Ou seja, eles tendem a orientar os cardans em direção de estados singulares antiparalelos. Apesar desta deficiência, a lógica da direção pseudo-inversa, ou alguma variante da pseudo-inversa, é comumente utilizada para a maioria dos sistemas de CMG devido à sua simplicidade de bordo de implementação em tempo real.

## 11 Singularidade Robusta inversa generalizada

A maioria das bases pseudo-inversas existentes, metodos tangentes ou inversão local, incluindo a lógica de singularidade robusta (SR) inversa de Nakamura e Hanafusa (1986) da forma

$$\delta = \mathbf{A}^\# \mathbf{u} \quad \text{em que} \quad \mathbf{A}^\# = \mathbf{A}^T (\mathbf{A}\mathbf{A}^T + \lambda \mathbf{I})^{-1}, \quad (11.1)$$

nem sempre garantem evitar e muitas vezes restringir desnecessariamente o envelope de momento angular de sistemas CMGs de um eixo cardan. Um sistema CMG de um eixo cardan com a lógica SR inversa pode tornar-se singular mesmo na presença dos ruídos dos sensores. Além disso, se tornar-se singular e um torque de controle for comandado ao longo da direção singular, o sistema se torna preso em um estado singular por conta da incapacidade da lógica SR inversa comandar variações dos cardans diferentes de zero.

Uma maneira simples, mas eficaz de escapar ou contornar quaisquer singularidades internas foi desenvolvida em Wie et al. (2001) e Wie et al. (2002). A lógica de direção proposta destina-se principalmente a manobras de reorientação típicas nas quais a precisão ou rastreo do apontamento não são necessários durante as manobras de reorientação e utiliza completamente o espaço do momento angular dos CMGs na presença de quaisquer singularidades. Embora existam missões nas quais as trajetórias de atitude prescritas devam ser exatamente rastreadas na presença de quaisquer singularidades, a maioria dos casos práticos, no entanto, exigirá uma compensação entre a passagem ou escape da SR e os erros de apontamento transientes resultantes.

A generalização da SR inversa proposta em Wie et al. (2001) e Wie et al. (2002) é descrita por

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^\# &= [\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} + \lambda \mathbf{I}_4]^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \\ &= \mathbf{A}^T [\mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{A}^T + \lambda \mathbf{I}_3]^{-1} \mathbf{P} \\ &= \mathbf{A}^T [\mathbf{A} \mathbf{A}^T + \lambda \mathbf{P}^{-1}]^{-1} \\ &= \mathbf{A}^T [\mathbf{A} \mathbf{A}^T + \lambda \mathbf{E}]^{-1}, \end{aligned} \quad (11.2)$$

em que

$$\mathbf{P}^{-1} \equiv \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & \epsilon_3 & \epsilon_2 \\ \epsilon_3 & 1 & \epsilon_1 \\ \epsilon_2 & \epsilon_1 & 1 \end{bmatrix} > 0, \quad (11.3)$$

O escalar  $\lambda$  e os elementos fora da diagonal de  $\epsilon_i$  devem ser adequadamente selecionados de modo que  $\mathbf{A}^\# \mathbf{u} \neq 0$  para qualquer constante  $\mathbf{u}$  diferente de zero.

Observe que sempre existe um vetor nulo de  $\mathbf{A}^\#$  porque o rank  $(\mathbf{A}^\#) < 3$  para qualquer  $\lambda$  e  $\epsilon_i$  quando a matriz jacobiana  $\mathbf{A}$  é singular. Consequentemente, uma maneira simples de garantir que  $\mathbf{A}^\# \mathbf{u} = 0$  para qualquer constante  $\mathbf{u}$  diferente de zero é modular continuamente  $\epsilon_i$ , por exemplo, da seguinte maneira:

$$\epsilon_i = \epsilon_0 \sin(\omega t + \phi_i), \quad (11.4)$$

em que a amplitude  $\epsilon_0$ , a frequência de modulação  $\omega$  e as fases  $\phi_i$  precisam ser adequadamente selecionado segundo Wie et al. (2001) e Wie et al. (2002).

A SR inversa generalizada baseia-se na mistura de duas normas, a ponderação da minimização dos mínimos quadrados, embora o efeito resultante seja um pouco semelhante ao do desalinhamento artificial do vetor de torque de controle comandado a partir das direções dos vetores singulares. Pois a lógica de direção proposta baseia-se na solução mínima de duas normas, a pseudo-inversa não evita explicitamente os encontros de singularidade, mas antes se aproxima e transita rapidamente as singularidades inevitáveis sempre que necessário. A lógica proposta efetivamente gera determinados sinais tremor quando o sistema se torna quase singular. Qualquer singularidade interna pode ser escapada para qualquer comando de torque constante diferente de zero usando a lógica de direção proposta.

## 12 Conclusão

Este trabalho abordou um tratamento, sem a pretensão de esgotar o tema, de problemas a serem resolvidos na análise e projeto de sistemas de controle de atitude baseados em CMGs para satélites ágeis de imageamento. Após uma introdução sobre o assunto foi apresentado um resumo de alguns sistemas representativos de CMGs com 1 eixo cardan. A seguir foram descritos métodos abordados na literatura para analisar e visualizar as superfícies singulares de momento angular. Após foram descritos métodos para obter a dimensão e os vetores da base para o espaço nulo da matriz jacobiana. O espaço nulo determina os movimentos dos eixos dos cardans dos CMGs que não geram torque líquido a partir dos CMGs. Em seguida foram realizados estudos com relação a aplicação da teoria da superfície geométrica diferencial, sendo utilizada para analisar, calcular e visualizar as superfícies singulares sem a utilização da teoria de superfície diferencial. A utilização da lógica de direção pseudo-inversa mostrou-se atraente para encontrar estados singulares, sua utilização ou qualquer outra lógica de direção com base pseudo-inversa tendem a isolar e posicionar os CMGs ineficientes fazendo com que os ângulos dos cardans eventualmente sejam desligados em arranjos singulares antiparalelos. Apesar desta deficiência, a lógica da direção pseudo-inversa, ou alguma variante da pseudo-inversa, é comumente utilizada para a maioria dos sistemas de CMG devido à sua simplicidade de bordo de implementação em tempo real. Um sistema CMG de um eixo cardan com a lógica SR inversa pode tornar-se singular mesmo na presença dos ruídos dos sensores, porém, se tornar-se singular e um torque de controle for comandado ao longo da direção singular, o sistema se torna preso em um estado singular por conta da incapacidade da lógica SR inversa comandar variações dos cardans diferentes de zero, caracterizando a necessidade de adquirir uma maneira simples, mas eficaz de escape ou contorno de quaisquer singularidades internas. A lógica de direção de SR inversa generalizada destinou-se principalmente a manobras de reorientação típicas nas quais a precisão ou rastreamento do apontamento não são necessários durante as manobras de reorientação e utiliza completamente o espaço do momento angular dos CMGs na presença de quaisquer singularidades. Pretende-se em trabalhos futuros apresentar exemplos de aplicação de fórmulas para encontrar estados de singularidade em sistemas representativos de CMGs com 1 eixo cardan.

### 13 Referências Bibliográficas

BEDROSSIAN, N. S.; PARADISO, J.; BERGMANN, E. V.; ROWELL, D. Steering Law Design for Redundant Single-Gimbal Control Moment Gyroscope Singularity Analysis. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, v.13, n.6, p.1096 - 1101, 1990.

CORNICK, D. E. **Singularity Avoidance Control Laws for Single Gimbal Control Moment Gyros**. Colorado: AIAA, 1979. Paper 79-1698. CRENSHAW, J. **2-SPEED, A Single-Gimbal Control Moment Gyro Attitude Control System**. Alabama: AIAA, 1973. Paper 73-895.

DAMILANO, P. **Pleiades High Resolution Satellite: a Solution for Military and Civilian Needs is Metric-Class Optical Observation**. Toulouse: Astrium and Eads Company, 2001. 9 p. Disponível em: <<http://digitalcommons.usu.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1959&context=smallsat>> Acesso em: 05 abr. 2016.

DEFENDINI, A.; FAUCHEUX, P.; GUAY, P.; MORAND, J.; HEIMEL, H. A Compact CMG Products for Agile Satellites. In: INTERNATIONAL ESA CONFERENCE ON SPACECRAFT GUIDANCE, NAVIGATION AND CONTROL SYSTEMS, 5, 2002, Frascati, Italia. **Proceedings...** Frascati: ESA, 2002. p. 27 – 32.

DOMINGUEZ, J.; WIE, B. **Computation and Visualization of Control Moment Gyroscope Singularities**. California: AIAA, 2002. Paper 2002-4570.

GIROUART, B.; SEBBAG, I.; LACHIVER, J. M. Performances of the Pleiades-HR Agile Attitude Control System. In: INTERNATIONAL ESA CONFERENCE ON SPACECRAFT GUIDANCE, NAVIGATION AND CONTROL SYSTEMS, 5, 2002, Frascati, Italia. **Proceedings...** Frascati: ESA, 2002. p.497 – 500.

GUGGENHEIMER, H.W. **Differential Geometry**. New York: Dover. 1963.

KREYSZIG, E. **Differential Geometry**. New York: Dover. 1991.

LAPPAS, V. J.; STEYN, W. H.; UNDERWOOD, C. I. Attitude Control Systems for Agile Small Satellites Using Control Moment Gyros. Surrey: Acta Astronautica, 2002. 7 p. Disponível em: <<http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.461.4629&rep=rep1&type=pdf>> Acesso em: 07 jan. 2016.

LAPPAS, V.; WIE, B.; **Robust CMG Steering Logic with Gimbal Angle Constraints**. Keystone: AIAA, 2006. Paper 2006-6651.

MARGULIES, G.; AUBRUN, J. N. Geometric Theory of Single-Gimbal Control Moment Gyro Systems. **Journal of the Astronautical Sciences**, v. 26, n. 2, p. 159 – 191, 1978.

NAKAMURA, Y., e HANAFUSA, H. Inverse Kinematic Solutions with Singularity Robustness for Robot Manipulator Control. **Journal of Dynamic Systems, measurement, and Control**, v.108, p.163–171, 1986.

PARADISO, J. Global Steering of Single Gimbaled Control Moment Gyroscopes Using a Directed Search. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, v.15, n.5, p.1236 - 1244, 1992.

STOCKING, G.; MEFFE, M. **Momentum Envelope Topology of Single-Gimbal CMG Arrays for Space Vehicle Control**. Colorado: American Astronomical Society, 1987. Paper 87-002.

WIE, B., HEIBERG, C., and BAILEY, D. Singularity Robust Steering Logic for Redundant Single-Gimbal Control Moment Gyros. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, v.24, n.5, p. 865–872, 2001.

WIE, B., HEIBERG, C., and BAILEY, D. Rapid Multi-Target Acquisition and PointingControl of Agile Spacecraft. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, v.25, n.1, p. 96–104, 2002.

WIE, B. *Space Vehicle Dynamics and Control: Control Moment Gyros for Agile Imaging Satellite*. 2 edição. Iowa: AIAA, 2008. 863 p.

YAVUZOĞLU, E. **Steering Laws for Control Moment Gyroscope Systems Used in Spacecraft Attitude Control**. 208 f. Tese (Mestrado em Engenharia Espacial) – (*The Middle East Technical University*), Ankara, 2003. Disponível em: <<http://etd.lib.metu.edu.tr/upload/1098441/index.pdf>> Acesso em: 17 fev. 2016.