

ESTUDO DA ESTABILIDADE DE UM SATÉLITE DUAL- SPIN CONTENDO UM AMORTECEDOR DE NUTAÇÃO TIPO MASSA-MOLA NA PLATAFORMA

**RELATÓRIO FINAL DE PROJETO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA
(PIBIC/CNPq/INPE)**

Renan Carlos de Castro (FATESF, Bolsista PIBIC/CNPq)
E-mail: renan_castro2005@hotmail.com

Mário César Ricci (DMC/ETE/INPE, Orientador)
E-mail: mario.ricci@inpe.br

Julho de 2014

Castro, R. C.

Estudo da estabilidade de um satélite dual-spin contendo um amortecedor de natação tipo massa-mola na plataforma / Castro, R. C. - São José dos Campos: INPE, 2014.

1. Satélite. 2. Controle. 3. Precessão. 4. Natação.

RESUMO

O objetivo final deste trabalho, o qual tem prazo para finalização em julho de 2015, é apresentar um estudo sobre a estabilidade de um satélite *dual-spin* contendo um amortecedor de nutação do tipo massa-mola na plataforma. O satélite *dual-spin* é de grande interesse para engenharia e tecnologia de satélites. Alguns satélites de sensoriamento remoto e de comunicação possuem partes rotativas que podem ser representadas pelo esquema *dual-spin*. Essa denominação é dada a satélites que combinam as vantagens de uma plataforma orientada e de um rotor encarregado de manter a rigidez giroscópica. Para efeito de estabilização em torno do eixo de menor momento de inércia um dispositivo dissipador de energia deve ser incluído na parte orientada. As equações do movimento podem ser obtidas pelo método direto de Newton ou pelo método indireto, através da energia cinética total do sistema e utilizando as equações de Lagrange para coordenadas generalizadas e para quase-coordenadas.

Até o presente momento foi obtida toda a base teórica necessária para o desenvolvimento do projeto, através de estudos preliminares. Também foram obtidas as três equações não lineares de movimento, para torque externo nulo, usando o método de Newton. O objetivo agora é obter as mesmas equações usando as equações de Lagrange para coordenadas generalizadas e para quase-coordenadas. Às três equações devem ser anexadas mais duas associadas com o torque sobre o rotor e com o balanço de forças no amortecedor, resultando um sistema com 5 equações e 5 incógnitas. A seguir serão obtidas as equações linearizadas em torno das condições nominais de operação. O método de Routh será utilizado para testar a estabilidade do sistema linear e as condições para a estabilidade serão obtidas.

Apesar de fornecer subsídios fundamentais para a compreensão da estabilidade em satélites *dual-spin* a análise desenvolvida até aqui é um pouco restritiva quanto a questão do amortecimento. Para finalizar o trabalho pretende-se, se o tempo assim o permitir, aplicar a abordagem do *sumidouro de energia* para obter as condições de estabilidade de um satélite *dual-spin* com dissipação de energia no rotor e na plataforma.

ABSTRACT

The final purpose of this work, which has time for finish in July 2015, is to present a study on the stability of a dual-spin satellite containing a damping nutation type spring-mass on the platform. The dual-spin satellite is of great interest to engineering and satellite technology. Some remote sensing satellites and communication have rotating parts that can be represented by dual-spin scheme. This description is given of satellites that combine the advantages of a oriented platform and a rotor responsible for maintaining gyroscopic rigidity. For stabilizing effect around the axis of least moment of inertia a sink device power must be included in the oriented part. The equations of motion can be obtained by direct Newton method or the indirect method, using the total kinetic energy of the system and using Lagrange's equations for generalized coordinates and quasi-coordinates.

To date all the necessary theoretical basis for the development of the project was obtained through preliminary studies. The three non-linear equations of motion for zero external torque were also obtained using Newton's method. The goal now is to obtain the same equations using Lagrange's equations for generalized coordinates and quasi-coordinates. The three equations should be attached on two more associated with the torque on the rotor and the balance of forces in the damper, resulting in a system with five equations and five unknowns. Then the linearized equations will be obtained around the nominal operating conditions. The Routh method will be used to test the stability of the linear system and the conditions for stability will be obtained.

Despite provide key elements for the understanding of stability in dual-spin satellite analysis developed here is somewhat restrictive as the issue of damping. To finish the job it is intended, if the time permits, apply the approach to energy sink for the conditions of stability of a dual-spin satellite with energy dissipation in the rotor and the platform.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO.....	1
CAPÍTULO 2 - DESENVOLVIMENTO.....	2
2.1- Princípios Físicos.....	2
2.1.1 Leis de Newton.....	2
2.1.2 Momento de Inércia.....	3
2.1.3 Momento Linear.....	4
2.1.4 Momento Angular.....	5
2.2 Atitude.....	7
2.3 Sistema de Referência Inercial.....	7
2.4 Transformações Fundamentais.....	7
2.5 Ângulos de Euler.....	8
2.6 Momento Angular de um Corpo Rígido.....	11
CAPÍTULO 3 - DISPOSITIVOS DE CONTROLE DE ATITUDE.....	14
3.1 Instrumentos Giroscópios.....	14
3.1.1 O Giroscópio Básico.....	14
3.1.2 Movimento de um Pião.....	16
3.1.3 Efeitos do Gimbal.....	27
3.2 Dual Spinners.....	32
CONCLUSÃO.....	36
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	37

LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
2.1 Movimento de uma partícula de massa m em relação a um referencial móvel x,y,z e em relação ao referencial inercial X,Y,Z	5
2.2 Construção dos ângulos de Euler.	8
2.3 Taxa de variação dos ângulos de Euler.	10
2.4 Momento angular de um corpo rígido	11
3.1 Configuração básica de um giroscópio	15
3.2 Rotação de um pião sobre um ponto fixo.	16
3.3 Gráfico qualitativo dos limites de um giroscópio	19
3.4 Ilustração da trajetória do eixo de rotação de um giroscópio ou pião	20
3.5 Movimento na extremidade de um giroscópio ou pião.	21
3.6 Caso da variação da precessão reversa.	21
3.7 Variação dos valores da precessão estável.	24
3.8 Transformação das coordenadas da estrutura	29
3.9 Dual spinner com amortecedor na plataforma.	33

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Esse projeto tem como objetivo fazer uma investigação sobre a estabilidade no movimento de um satélite dual-spin com um amortecedor de nutação axial, através de técnicas que utilizem o movimento do centro de massa (atitude).

CAPÍTULO 2

DESENVOLVIMENTO

2.1 Princípios Físicos

Para realizar o estudo sobre a estabilidade de um dual-spin foi necessário adquirir conhecimento sobre alguns princípios físicos de suma importância que terão uma breve base teórica introduzida no trabalho.

2.1.1 Leis de Newton

Newton foi responsável por formalizar as leis físicas que determinam completamente o movimento de um veículo espacial. Ele estabeleceu três leis de mecânica e uma de atração gravitacional. Dessas quatro, irei citar o conceito de apenas três:

1. A variação do momento linear de um corpo é igual à força aplicada,

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt} (m\mathbf{v}),$$

onde m é a massa e \mathbf{v} é o vetor velocidade. Se a massa for constante então isso se torna

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \tag{2.1}$$

onde $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$.

2. Aceleração apenas ocorre em pares. Em outras palavras, se existe uma força \mathbf{F}_{12} da partícula 2 imposta na 1, então também deve existir uma segunda força \mathbf{F}_{21} da partícula 1 se impondo na 2, em igual magnitude e com direções opostas.
3. Quaisquer duas partículas atraídas uma na outra com uma força de magnitude:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (2.2)$$

onde m_1 e m_2 são as massas das partículas, r é a distância entre elas e G é a constante universal gravitacional, $6,6695 \times 10^{-11} \text{m}^3/\text{kg} \cdot \text{s}^2$.

2.1.2 Momento de Inércia

Momento de inércia é um conhecimento de suma importância para o entendimento do estudo realizado nesse trabalho, mas antes de explicar o conceito de momento de inércia primeiramente darei uma breve explicação do conceito de inércia.

Inércia é a resistência de qualquer objeto físico a qualquer mudança no seu estado de movimento, incluindo mudanças na sua velocidade e direção. É a tendência de objetos para manter-se em movimento em linha reta com velocidade constante. O princípio da inércia é um dos princípios fundamentais da física clássica que são usados para descrever o movimento de objetos e como eles são afetados por forças aplicadas.

Agora que já temos alguma idéia do que seja inércia vamos ao conceito de momento de inércia.

Momento de inércia de massa é a propriedade de um corpo rígido que determina o torque necessário para uma aceleração angular desejada em torno de um eixo de rotação. O momento de inércia depende da forma do corpo e pode ser diferente em torno de eixos de rotação diferentes. Um momento maior de inércia em torno de um determinado eixo necessita de mais torque para aumentar a rotação, ou para parar a rotação, de um corpo em torno desse eixo. Momento de inércia depende da quantidade e distribuição da sua massa, e pode ser encontrado por meio da soma dos momentos de inércia das massas que formam todo o objeto, por exemplo, $m_a + m_b = m_c$ então $I_a + I_b = I_c$.

Para o movimento planar de um corpo, as trajetórias de todos os seus pontos estão em planos paralelos, e a rotação ocorre apenas em um eixo perpendicular a este plano. Neste

caso, o corpo possui apenas um único momento de inércia, o qual é medido em torno deste eixo.

Para o movimento espacial de um corpo, o momento de inércia é definido por uma matriz de inércia simétrica 3×3 . A matriz de inércia é frequentemente descrita como um tensor de segundo grau, com seis componentes independentes. A matriz de inércia inclui termos fora da diagonal chamados produtos de inércia que casam com o torque em torno de um eixo de aceleração sobre outro eixo. Cada corpo tem um conjunto de eixos perpendiculares entre si, chamado eixos principais, para que os termos fora da diagonal da matriz de inércia são zero, e um torque em torno de um eixo principal só afete a aceleração em torno desse eixo.

2.1.3 Momento Linear

Momento linear é o produto da massa e da velocidade de um objeto. Por exemplo, um carro em alta velocidade tem um valor alto de momento linear já que precisou de uma grande quantidade de força para chegar a essa velocidade e também precisará de uma grande quantidade de força para fazê-lo parar. Se o carro fosse mais leve ou estivesse a uma velocidade menor, ele teria um momento linear menor.

Da mesma maneira que a velocidade, o momento linear também é um vetor que possui direção e magnitude.

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$$

Em um sistema fechado, no qual não existem forças externas agindo no sistema, o momento linear total é constante.

Vamos supor, por exemplo, que duas partículas interagem entre si. De acordo com a terceira lei de Newton, as forças entre elas são iguais e opostas. Então a segunda lei de Newton nos dá que $F_1 = dp_1/dt$ e $F_2 = dp_2/dt$. Portanto,

$$\frac{dp_1}{dt} = -\frac{dp_2}{dt} \text{ ou } \frac{d}{dt}(p_1 + p_2) = 0$$

Se as velocidades das partículas antes da interação sejam \mathbf{u}_1 e \mathbf{u}_2 e depois da interação sejam \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 , então

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

Essa lei se mantém não importando qual complicado é a força entre as partículas. Igualmente, se existirem várias partículas, a troca de momento linear entre cada par de partículas se soma a zero, então a variação total do momento linear é zero.

2.1.4 Momento Angular

O conceito de momento angular é outro importante conhecimento necessário para o desenvolvimento tanto da dinâmica de corpos rígidos como na dinâmica de partículas.

Considere o movimento de uma partícula de massa m em relação a um referencial móvel x,y,z e em relação ao referencial inercial X,Y,Z , como mostra a Fig. 2.1. O momento linear é dado por

$$\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{R}}.$$

O *momento angular* em relação a um ponto qualquer O , origem do referencial x,y,z , é definido por

$$\mathbf{h}_O = \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{R}}. \quad (2.3)$$

Uma vez que $\dot{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{R}}_O + \dot{\mathbf{r}}$, (2.3) torna-se

$$\mathbf{h}_O = \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{R}}_O. \quad (2.4)$$

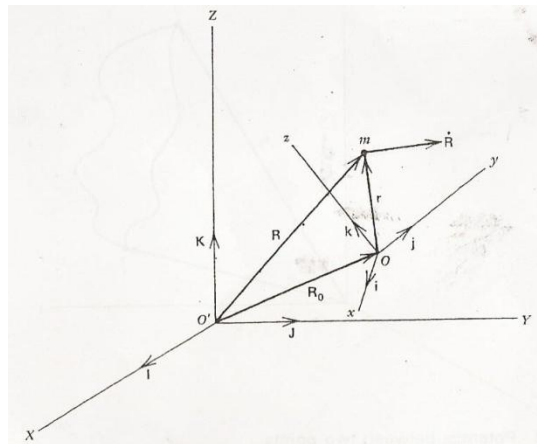


Fig. 2.1 – Movimento de uma partícula de massa m em relação a um referencial móvel x,y,z e em relação ao referencial inercial X,Y,Z .

O primeiro termo à direita em (2.4) é o momento angular aparente no sistema x,y,z , que está se movendo e o segundo termo à direita em (2.4) é a correção devido ao movimento do ponto O .

A taxa de variação de \mathbf{h}_O é de muita importância para o desenvolvimento das equações de movimento de atitude. Derivando a equação (2.4) em relação ao tempo tem-se

$$\dot{\mathbf{h}}_O = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{r}}) - \ddot{\mathbf{R}}_O \times m\mathbf{r} - \dot{\mathbf{R}}_O \times m\dot{\mathbf{r}}. \quad (2.5)$$

Cada termo do lado direito de (2.5) tem um significado físico. O primeiro é a taxa de variação do momento angular aparente no sistema x,y,z . O segundo termo representa o efeito da aceleração do ponto O e o último representa a correção devido à velocidade do ponto O . Essa taxa de variação do momento angular pode ser relacionada com um torque aplicado em relação ao ponto O definido como \mathbf{M}_O . O momento de uma força agindo sobre m , em relação ao ponto O , é definido por

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}, \quad (2.6)$$

onde $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{R}}$ para esse caso. Assim, \mathbf{M}_O resulta em

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times m\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{r} \times m(\ddot{\mathbf{R}}_O + \ddot{\mathbf{r}}). \quad (2.7)$$

Uma vez que $\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{0}$, a equação (2.7) torna-se

$$\mathbf{M}_O = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{r}}) - \ddot{\mathbf{R}}_O \times m\mathbf{r}. \quad (2.8)$$

Comparando as equações (2.8) e (2.5) tem-se

$$\mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{h}}_O + \dot{\mathbf{R}}_O \times m\dot{\mathbf{r}}. \quad (2.9)$$

Uma observação importante pode ser feita imediatamente desse resultado da equação (2.9). Se o ponto O é fixo no espaço ou \mathbf{r} é constante, então

$$\mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{h}}_O. \quad (2.10)$$

Da equação (2.10) conclui-se que se o torque aplicado for zero, o momento angular do sistema em relação ao ponto O é conservado, ou seja, isso indica que \mathbf{h}_O é constante sobre a condição de torques externos serem nulos.

2.2 Atitude

Atitude é definida de forma resumida como sendo qualquer rotação do corpo em torno do seu centro de massa causada por um torque externo. Sendo de extrema importância o conhecimento desse conceito para desenvolver um trabalho de controle de atitude, que é o controle de um objeto em relação a um sistema de referência inercial.

2.3 Sistema de Referência Inercial

Vários sistemas de coordenadas são usados neste trabalho. Cada um tem uma propriedade particular que o faz apropriado para um número limitado de aplicações. O sistema de coordenada fundamental que qualquer movimento deve pegar de referência é o sistema inercial. Em situações práticas o sistema inercial deve ser um conjunto de coordenadas de referência que garantiram a precisão necessária sobre o intervalo de tempo de interesse. Para a maioria dos problemas considerados aqui é suficiente selecionar um sistema de coordenadas que não esteja acelerando o suficiente para perturbar a solução do problema além de precisão desejada. Quando lidamos com vôos interplanetários no sistema solar, o sistema inercial apropriado é um com origem no centro do sol e com eixos que não rotacionam relacionados com as estrelas.

2.4 Transformações Fundamentais

Transformações entre sistemas de coordenadas serão necessárias para vários problemas. Tanto as componentes de posição como velocidade serão expressas em mais de um sistema de coordenada. Se considerarmos a posição absoluta da massa m na figura 2.1 e assumindo que os vetores unitários são \mathbf{I} , \mathbf{J} , \mathbf{K} e \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} para os sistemas X, Y, Z e x, y, z, respectivamente. Então a posição de m é $\mathbf{R} = \mathbf{R}_o + \mathbf{r}$, referindo-se ao sistema x, y, z. Esses vetores podem ser escritos na forma de componentes como

$$\mathbf{R} = X\mathbf{I} + Y\mathbf{J} + Z\mathbf{K}$$

$$\mathbf{R}_o = X_o\mathbf{I} + Y_o\mathbf{J} + Z_o\mathbf{K}$$

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

Cada componente de \mathbf{R} pode ser expresso em termos de x, y e z fazendo o produto escalar de \mathbf{R} com cada um dos vetores unitários \mathbf{I} , \mathbf{J} e \mathbf{K} . Assim

$$\left. \begin{aligned} R \cdot I &= X = X_o + xI \cdot i + yI \cdot j + zI \cdot k \\ R \cdot J &= Y = Y_o + xJ \cdot i + yJ \cdot j + zJ \cdot k \\ R \cdot K &= Z = Z_o + xK \cdot i + yK \cdot j + zK \cdot k \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

Os produtos escalares $I \cdot i, I \cdot j, I \cdot k, J \cdot i, J \cdot j, J \cdot k, K \cdot i, K \cdot j$ e $K \cdot k$ são os nove cossenos diretores que representam a orientação de cada eixo de um sistema em relação ao outro.

2.5 Ângulos de Euler

Quando definimos a orientação de um corpo em relação a um sistema de referência uma série de puras rotações é usada e isso resulta em uma transformação ortogonal. Esse grupo de rotações é chamado de ângulos de Euler e esses ângulos determinam exclusivamente a orientação do corpo. Se assumirmos que o sistema de referência X,Y,Z e o sistema do corpo fixo x,y,z coincidam, uma sequência conveniente de rotações é mostrada na figura 2.2 logo abaixo e pode ser listada como sendo:

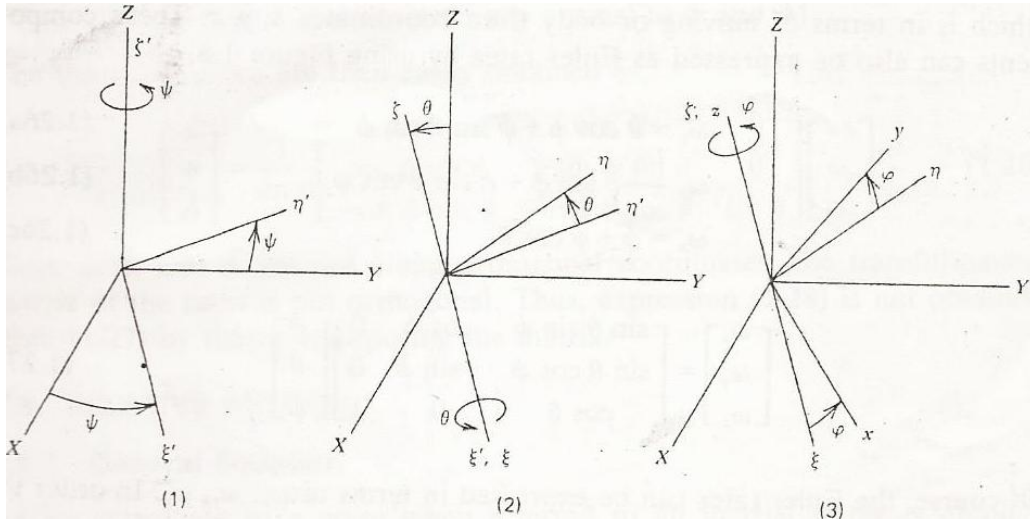


Fig. 2.2 – Construção dos ângulos de Euler.

FONTE: Kaplan, M. H., Modern Spacecraft Dynamics & Control, p. 11.

1. Rotação sobre o eixo Z através do ângulo ψ produz os eixos ξ', η' e ζ' .
2. Rotação sobre o eixo ξ' através do ângulo θ produz os eixos ξ, η e ζ .
3. Rotação sobre o eixo ζ através do ângulo ϕ produz os eixos x, y, z.

Cada rotação é caracterizada como uma transformação ortogonal:

$$\begin{bmatrix} \xi' \\ \eta' \\ \zeta' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \boldsymbol{\delta} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \quad (2.12a)$$

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi' \\ \eta' \\ \zeta' \end{bmatrix} = \boldsymbol{\gamma} \begin{bmatrix} \xi' \\ \eta' \\ \zeta' \end{bmatrix} \quad (2.12b)$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = \boldsymbol{\beta} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} \quad (2.12c)$$

O eixo ξ , que é conhecido como a *linha dos nós* é a intersecção dos planos X,Y,Z e x,y,z. Agora nós podemos fazer uma transformação direta de X,Y,Z para x,y,z pela combinação da seguinte sequência de rotações:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \boldsymbol{\beta} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\gamma} \begin{bmatrix} \xi' \\ \eta' \\ \zeta' \end{bmatrix} = \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\gamma} \boldsymbol{\delta} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

Mas para realizarmos essa manobra é necessário manter $\boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\gamma} \boldsymbol{\delta}$ nessa ordem, porque rotações finitas não podem ser representadas como vetores verdadeiros e também não são comutativos. Tendo isso em mente também devemos manter a sequência de rotação ψ, θ e ϕ nessa ordem. Então finalmente obteremos a matriz de transformação ortogonal de um sistema para outro através dessas rotações, que é representada da seguinte maneira: $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\gamma} \boldsymbol{\delta}$.

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} (\cos \phi \cos \psi - \sin \phi \cos \theta \sin \psi) & (\cos \phi \sin \psi + \sin \phi \cos \theta \cos \psi) & (\sin \phi \sin \theta) \\ (-\sin \phi \cos \psi - \cos \phi \cos \theta \sin \psi) & (-\sin \phi \sin \psi + \cos \phi \cos \theta \cos \psi) & (\cos \phi \sin \theta) \\ (\sin \theta \sin \psi) & (-\sin \theta \cos \psi) & (\cos \theta) \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Dessa maneira conseguimos transformar as componentes de um vetor expresso no sistema X,Y,Z em componentes expressas no sistema x,y,z:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \boldsymbol{\alpha} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Se nós conhecermos as componentes de x,y,z e precisamos determinar as componentes de X,Y,Z , podemos usar a seguinte propriedade: $\alpha^{-1} = \alpha^T$. E então determinar as componentes X,Y,Z .

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \alpha^T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

As taxas de variação dos ângulos de Euler são dadas pelo conjunto $\dot{\psi}$, $\dot{\theta}$ e $\dot{\phi}$. O vetor da velocidade angular ω é escrito na forma de componente abaixo:

$$\omega = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

Que possui seus termos de movimento ou corpo fixo no sistema x,y,z . Essas componentes também podem ser expressas com as taxas de variação dos ângulos de Euler de acordo com a figura 2.3.

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ \sin \theta \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \cos \theta & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

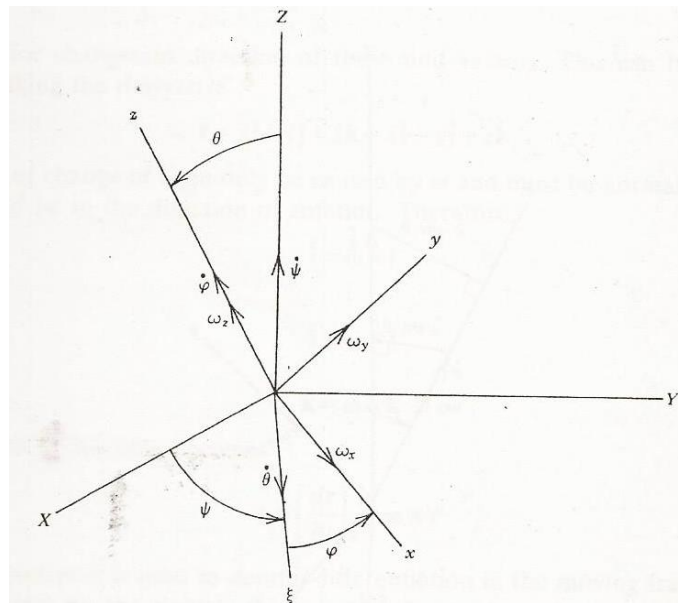


Fig. 2.3 – Taxa de variação dos ângulos de Euler.

FONTE: Kaplan, M. H., Modern Spacecraft Dynamics & Control, p. 13.

2.6 Momento Angular de um Corpo Rígido

Para realizarmos um tratamento básico no movimento de partículas no espaço é necessário equilibrarmos com uma introdução à dinâmica de atitude e as equações de movimento de um corpo rígido. Deve-se primeiramente desenvolver uma expressão para o momento angular de um corpo rígido em geral. Através da figura 2.4 poderemos entender melhor essa situação.

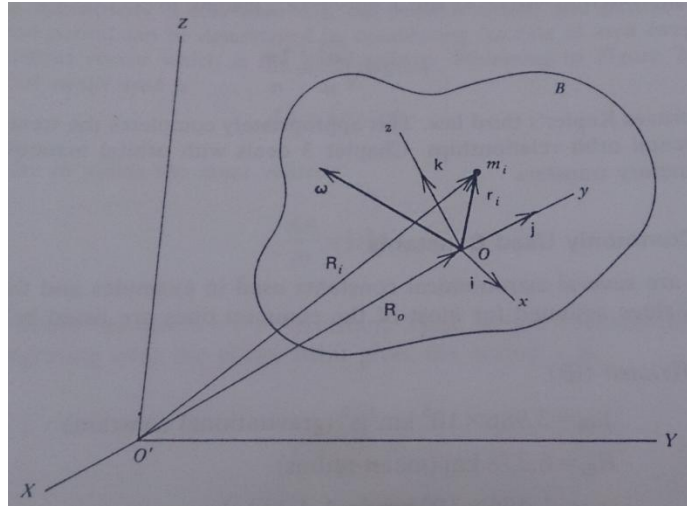


Fig. 2.4 – Momento angular de um corpo rígido.

FONTE: Kaplan, M. H., Modern Spacecraft Dynamics & Control, p. 38.

A figura 2.4 nos mostra o corpo B que contém seu sistema fixo de coordenadas em x, y, z tendo como referência seu centro de massa O . A partícula de massa m_i está localizada no corpo por \mathbf{r}_i e tem sua velocidade absoluta representada pela seguinte equação:

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_O + [\mathbf{v}_i]_B + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i \quad (2.17)$$

Onde $\mathbf{v}_O = \dot{\mathbf{R}}_O$, $\mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{R}}_i$ e $[\mathbf{v}_i]_B = \mathbf{0}$, uma vez que B é um corpo rígido. Aplicando a definição de momento angular em m_i sobre O temos

$$\mathbf{h}_{O_i} = \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i = \mathbf{r}_i \times m_i (\mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)$$

Se o corpo é considerado como um grande número de pequenas massas, o momento angular total sobre O do corpo B é

$$\mathbf{h}_O = \sum_i \mathbf{h}_{O_i} = \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i (\mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)$$

Que pode ser escrito de forma mais conveniente como sendo

$$\mathbf{h}_O = \sum_i \mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) m_i - \mathbf{v}_O \times \sum_i m_i \mathbf{r}_i$$

Entretanto, o centro de massa é definido como o ponto em que

$$\sum_i m_i \mathbf{r}_i = 0$$

Com isso podemos reescrever a equação da seguinte maneira

$$\mathbf{h}_O = \sum_i \mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) m_i \quad (2.18)$$

A equação (2.18) também é verdadeira para a condição $\mathbf{v}_O = 0$, que no caso seria se o ponto O estiver fixo no espaço. Agora, se m_i for menor e número de elementos de massa aumentar, a expressão (2.18) pode ser expressa na forma integral abaixo

$$\mathbf{h}_O = \int_B \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) dm \quad (2.19)$$

Desenvolvendo o termo $\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ em sua forma de componentes, $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ e $\boldsymbol{\omega} = \omega_x\mathbf{i} + \omega_y\mathbf{j} + \omega_z\mathbf{k}$, teremos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) &= [\omega_x(y^2 + z^2) - \omega_y(xy) - \omega_z(xz)]\mathbf{i} \\ &+ [-\omega_x(xy) + \omega_y(x^2 + z^2) - \omega_z(yz)]\mathbf{j} \\ &+ [-\omega_x(xz) - \omega_y(yz) - \omega_z(x^2 + y^2)]\mathbf{k} \end{aligned} \quad (2.20)$$

A forma integrada (2.20) sobre as dimensões do corpo é estritamente uma função de distribuição da massa, enquanto componentes da velocidade angular são independentes da forma do corpo e de sua localização interna. Assim, qualquer corpo rígido pode ser caracterizado por um conjunto de constantes para a finalidade de estudar o momento angular e, em última análise, o movimento de atitude. Essas constantes são definidas como:

$$I_x = \int_B (y^2 + z^2) dm, \quad I_y = \int_B (x^2 + z^2) dm, \quad I_z = \int_B (x^2 + y^2) dm \quad (2.21)$$

$$I_{xy} = \int_B (xy) dm, \quad I_{xz} = \int_B (xz) dm, \quad I_{yz} = \int_B (yz) dm \quad (2.22)$$

onde I_x, I_y, I_z são os momentos de inércia do corpo em relação aos eixos x, y, z , e respectivamente, I_{xy}, I_{xz}, I_{yz} são os produtos de inércia de B . Perceba que $I_{xy} = I_{yx}$, $I_{xz} = I_{zx}$ e $I_{yz} = I_{zy}$, e que os produtos de inércia podem ter tanto valores positivos como negativos enquanto os momentos de inércia nunca podem ser negativos. Finalmente, o momento angular do corpo B na equação (2.19) pode ser simplificado para

$$\mathbf{h}_O = h_x \mathbf{i} + h_y \mathbf{j} + h_z \mathbf{k} \quad (2.23)$$

onde as componentes desse vetor podem ser definidos como

$$h_x = I_x \omega_x - I_{xy} \omega_y - I_{xz} \omega_z \quad (2.24a)$$

$$h_y = -I_{xy} \omega_x + I_y \omega_y - I_{yz} \omega_z \quad (2.24b)$$

$$h_z = -I_{xz} \omega_x - I_{yz} \omega_y - I_z \omega_z \quad (2.24c)$$

Sua forma de matriz é expressa da seguinte forma

$$\mathbf{h}_O = \begin{bmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

A matriz contendo os momentos e os produtos de inércia é conhecida como *tensor de inércia* e é identificada como \mathbf{I} . Portanto, a expressão (2.25) tem a seguinte forma simplificada

$$\mathbf{h} = \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega} \quad (2.26)$$

Na qual o subscrito O é descartado e \mathbf{h} é considerado tendo como referência o centro de massa.

CAPÍTULO 3

DISPOSITIVOS DE CONTROLE DE ATITUDE

A maioria das missões espaciais requer que o veículo incorpore referências direcionais e métodos para aplicação de torques de controle de atitude. Para controle de atitude são necessários sensores que fornecem informações direcionais baseadas em fontes externas, tais como o Sol e a Terra, ou em referências inerciais, como os giros. Um dispositivo autônomo que fornece uma referência de direção orientada inercialmente, através da propriedade de rigidez dinâmica, é chamado geralmente de giro ou giroscópio. Tal dispositivo pode ser usado como um instrumento que abastece informações de atitude para um sistema de controle automático, ou pode gerar torques de controle pela troca de momento e técnicas de precessão. Outras opções de atuadores de atitude incluem dispositivos de movimento de massa, propulsores de torques magnéticos e dispositivos passivos. Critérios de estabilidade para configuração dual-spin são desenvolvidos pelo uso de ambas as abordagens: parâmetros discretos e dissipação de energia. Outros métodos de acionamento do controle de atitude incluem: movimento de massa, torque magnético e esquemas de gradiente de gravidade.

3.1 Instrumentos Giroscópios

A definição original do giroscópio deve ser creditada a Jean Bernard Léon *Foucault* (1852) como sendo um dispositivo possuindo uma grande quantidade de momento angular. Uma vez que o movimento livre de torque implica módulo e direção constantes inercialmente, para o momento angular, o giroscópio fornece uma excelente referência de atitude. A aplicação de um torque específico a um corpo girando causa uma mudança no vetor momento angular de maneira previsível. Essas propriedades dos giroscópios levam a várias aplicações práticas, incluindo a medição de ângulos e taxas de atitude.

3.1.1 O Giroscópio Básico

Uma configuração típica de um giroscópio básico é retratada na Fig. 3.1. Considera-se que as estruturas (*inner gimbal* e *outer gimbal*) têm massa desprezível e que não há atrito nos mancais. Uma vez que o rotor é simétrico, os dois ângulos importantes são ψ e θ , que correspondem aos ângulos das estruturas em relação ao sistema inercial X,Y,Z .

O movimento resultante pode ser descrito em termos do sistema formado pelos eixos ξ, η, ζ , que não rotacionam com o rotor, mas são ligados às estruturas interna e externa. As equações de movimento são conhecidas como *Equações Modificadas de Euler* para corpos de revolução, dadas por

$$M_{\xi} = \dot{h}_{\xi} + h_{\zeta} \omega_{\eta} - h_{\eta} \omega_{\zeta}, \quad (3.1a)$$

$$M_{\eta} = \dot{h}_{\eta} + h_{\xi} \omega_{\zeta} - h_{\zeta} \omega_{\xi}, \quad (3.1b)$$

$$M_{\zeta} = \dot{h}_{\zeta} + h_{\eta} \omega_{\xi} - h_{\xi} \omega_{\eta}. \quad (3.1c)$$

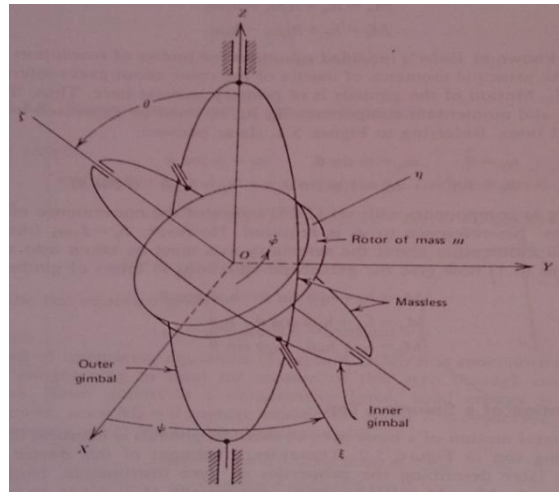


Fig. 3.1 – Configuração básica de um giroscópio.

FONTE: Kaplan, M. H., *Modern Spacecraft Dynamics & Control*, p. 153.

Definindo a taxa de rotação de ζ em torno de Z como *precessão* $\dot{\psi}$, a taxa de rotação de ζ em torno de ξ como *nutação* $\dot{\theta}$, I_1, I_2 e I_3 , como sendo os momentos principais de inércia do rotor em torno da origem dos eixos em O , com $I_1 = I_2$, então, as velocidades angulares, $\omega_{\xi}, \omega_{\eta}, \omega_{\zeta}$, em torno dos eixos ξ, η, ζ , e os momentos angulares, $h_{\xi}, h_{\eta}, h_{\zeta}$, podem ser escritos em termos dos ângulos e taxas angulares das estruturas, como

$$\omega_{\xi} = \dot{\theta}, \quad \omega_{\eta} = \dot{\psi} \sin \theta, \quad \omega_{\zeta} = \dot{\psi} \cos \theta. \quad (3.2)$$

$$h_{\xi} = I_1 \dot{\theta}, \quad h_{\eta} = I_1 \dot{\psi} \sin \theta, \quad h_{\zeta} = I_3 (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta). \quad (3.3)$$

Substituindo (3.2) em (3.1), tem-se

$$M_{\xi} = \dot{h}_{\xi} + h_{\zeta} \dot{\psi} \sin \theta - h_{\eta} \dot{\psi} \cos \theta. \quad (3.4a)$$

$$M_{\eta} = \dot{h}_{\eta} + h_{\xi} \dot{\psi} \cos \theta - h_{\zeta} \dot{\theta}. \quad (3.4b)$$

$$M_{\zeta} = \dot{h}_{\zeta} + h_{\eta} \dot{\theta} - h_{\xi} \dot{\psi} \sin \theta. \quad (3.4c)$$

3.1.2 Movimento de um Pião

O movimento geral de um giroscópio básico cujas estruturas possuem massas desprezíveis é idêntico ao do pião da Fig. 3.2. Portanto, o tratamento desse dispositivo é de muita ajuda mais tarde para descrever as propriedades dos instrumentos giroscópios.

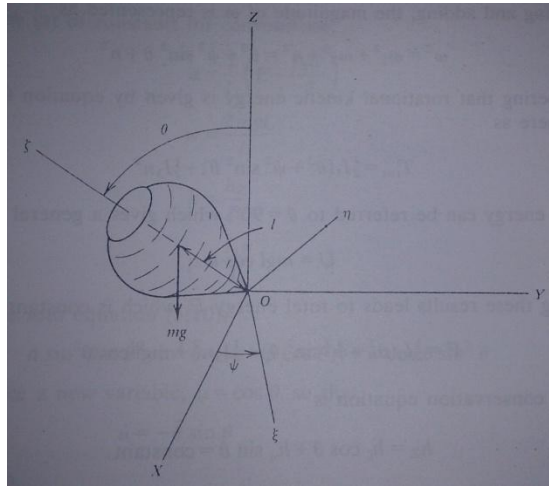


Fig. 3.2 – Rotação de um pião sobre um ponto fixo.

FONTE: Kaplan, M. H., Modern Spacecraft Dynamics & Control, p. 155.

Observando que $M_{\xi} = mgl \sin \theta$, $M_{\eta} = M_{\zeta} = 0$ e usando as expressões (3.3) conduz a um conjunto de equações diferenciais que descrevem a precessão e a nutação do topo devido ao seu próprio peso,

$$mgl \sin \theta = I_1 \ddot{\theta} + I_3 (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) \dot{\psi} \sin \theta - I_1 \dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta, \quad (3.5a)$$

$$0 = I_1 \frac{d}{dt} (\dot{\psi} \sin \theta) + I_1 \dot{\theta} \dot{\psi} \cos \theta - I_3 \dot{\theta} (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta), \quad (3.5b)$$

$$0 = I_3 \frac{d}{dt} (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta). \quad (3.5c)$$

De (3.5c), tem-se

$$\omega_3 = \dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta = \text{constante} = n. \quad (3.6)$$

Em vez de integrar as equações (3.5a) e (3.5b) é mais instrutivo e igualmente esclarecedor tratar o movimento desse giroscópio através dos princípios de conservação. Visto que a gravidade é uma força conservativa, a energia total é constante. Além disso, uma vez que $M_Z = 0$, o momento angular em torno de Z é conservado. Aplicando o conjunto de transformação (2.16) para essa situação temos

$$\omega_1 = \dot{\theta} \cos \phi + \dot{\psi} \sin \theta \sin \phi$$

$$\omega_2 = -\dot{\theta} \sin \phi + \dot{\psi} \sin \theta \cos \phi$$

$$\omega_3 = n.$$

Através da elevação ao quadrado e somas, a magnitude de $\boldsymbol{\omega}$ é representada como:

$$\omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 = \dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + n^2. \quad (3.7)$$

A energia cinética rotacional é dada por

$$T_{rot} = \frac{1}{2} I_1 (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} I_3 n^2.$$

A energia potencial tendo como referência $\theta = 90^\circ$ é dada por

$$U = mgl \cos \theta.$$

Combinando esses resultados nos leva a energia total E , que é constante,

$$E = \frac{1}{2} I_1 (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} I_3 n^2 + mgl \cos \theta. \quad (3.8)$$

A outra equação de conservação é

$$h_z = h_\zeta \cos \theta + h_\eta \sin \theta = \text{constante}.$$

Aplicação das expressões (3.3) e (3.6) conduz a

$$h_z = I_3 n \cos \theta + I_1 \dot{\psi} \sin^2 \theta,$$

ou

$$\dot{\psi} = \frac{h_z - I_3 n \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta}. \quad (3.9)$$

As equações (3.8) e (3.9) podem ser combinadas para eliminar $\dot{\psi}$,

$$E - \frac{I_3 n^2}{2} = \frac{I_1 \dot{\theta}^2}{2} + \frac{(\hbar z - I_3 n \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} + mgl \cos \theta. \quad (3.10)$$

Duas observações relevantes podem ser feitas até agora. Uma vez que $\theta \leq 90^\circ$ e $I_1 > 0$ o lado direito da equação (3.10) é positivo, exigindo que

$$E - \frac{I_3 n^2}{2} > 0.$$

Além disso, a expressão (3.10) representa uma equação diferencial, que pode ser resolvida, a princípio, para $\theta(t)$. Então $\psi(t)$ poderá ser obtida pela fórmula (3.9), e $\phi(t)$ por $\dot{\phi} = n - \dot{\psi} \cos \theta$. Contudo, a equação (3.10) é altamente não linear. Felizmente, ela não precisa ser resolvida para descrever o movimento de interesse.

Defina um novo conjunto de constantes por conveniência,

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{2}{I_1} \left(E - \frac{I_3 n^2}{2} \right), \\ w &= \frac{2mgl}{I_1}, \\ k &= \frac{\hbar z}{I_1}, \\ p &= \frac{I_3 n}{I_1}. \end{aligned}$$

E substitua na equação (3.10),

$$a \sin^2 \theta = \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta + (k - p \cos \theta)^2 + w \cos \theta \sin^2 \theta$$

Então introduza uma nova variável, $u = \cos \theta$, de modo que

$$\dot{u} = -\dot{\theta} \sin \theta.$$

Que leva para

$$\dot{u}^2 = (a - wu)(1 - u^2) - (k - pu)^2. \quad (3.11)$$

É possível integrar (3.2) em termos de funções elípticas, mas uma interpretação cuidadosa da expressão (3.11) e outras propriedades conhecidas de movimento permitem uma descrição geral da história da atitude (movimento do centro de massa) do giroscópio. Se o lado direito da equação (3.11) é visto como uma função de u , então

$$f(u) = (a - wu)(1 - u^2) - (k - pu)^2. \quad (3.12)$$

O gráfico qualitativo de (3.12) pode ser obtido constatando que em $u = \pm 1.0$, $f(u) < 0$. Além disso, limites físicos em θ implica que $0 \leq u \leq 1$ é a faixa de interesse. E também, uma vez que $f(u) = \dot{u}^2$, $f(u)$ deve se tornar positivo nessa faixa de interesse. A Fig. 3.3 mostra a ilustração da curva resultante de $f(u)$ em função de u . Os limites permitidos fisicamente de u são u_1 e u_2 correspondentes aos limites dos valores positivos de $f(u)$ entre $\theta = 0^\circ$ e $\theta = 90^\circ$. Lembrando que $f(u) = \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta$ e observando que $f(u_1) = f(u_2) = 0$, conduz à exigência de que $\dot{\theta} = 0$ em ambos u_1 e u_2 . Se o movimento do giroscópio é descrito pela trajetória de seu eixo de rotação em uma esfera unitária, então $u_1 = \cos \theta_1$ e $u_2 = \cos \theta_2$ representam dois círculos delimitadores. Um típico eixo de rotação é mostrado na Fig. 3.4. Esse movimento pode ser ainda definido por um dado conjunto de inércia e força considerando mudanças de sinal de $\dot{\psi}$ entre θ_1 e θ_2 . Reescrevendo a equação (3.4) em termos das novas constantes temos

$$\dot{\psi} = \frac{k - pu}{1 - u^2}. \quad (3.13)$$

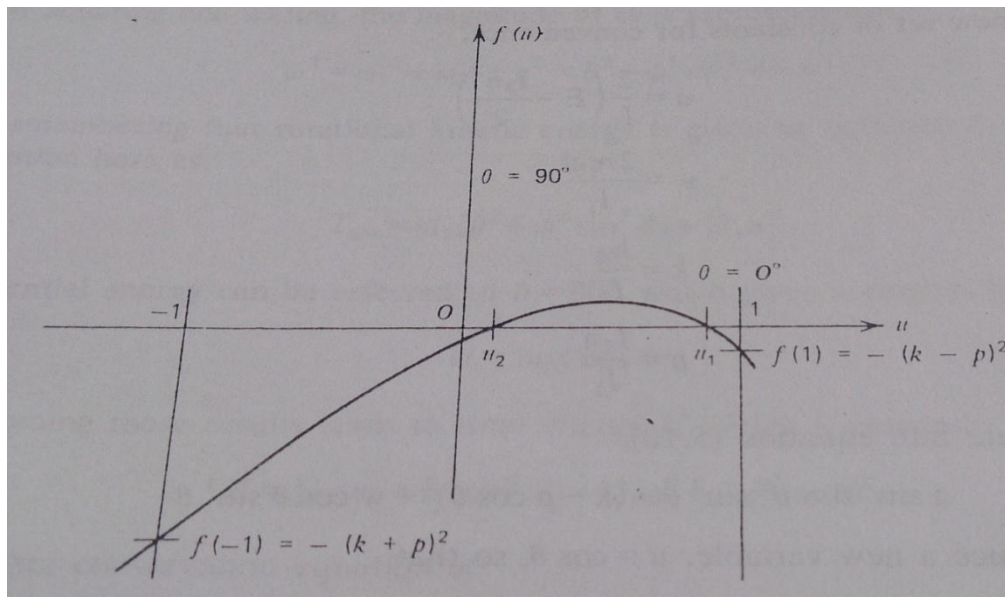


Fig. 3.3 – Gráfico qualitativo dos limites de um giroscópio.

FONTE: Kaplan, M. H., Modern Spacecraft Dynamics & Control, p. 158.

Note que $u < 1$ entre u_1 e u_2 , o sinal de $\dot{\psi}$ depende apenas dos tamanhos relativos de k e pu . Se, por exemplo, $k > pu_1$, então $\dot{\psi} > 0$ para todos os valores de θ entre θ_1 e θ_2 , porque $u_1 > u_2$. Essa situação é mostrada na Fig. 3.4. Se $k = pu_1$, então $\dot{\psi} = 0$ em $\theta = \theta_1$ e $\dot{\psi} > 0$ para todos os valores de $\theta > \theta_1$. Esse movimento é ilustrado na Fig. 3.5. Como um último exemplo, considere o caso em que $k = pu_1$ onde $u_2 < u_i < u_1$. Então $\dot{\psi}$ muda de sinal entre θ_1 e θ_2 como mostrado na Fig. 3.6. Esse tipo de movimento que o giroscópio ou o pião exibe é puramente uma função das condições iniciais. Por exemplo, supondo que em $t = 0$, $\theta = \theta_0$ e $\dot{\theta} = \dot{\psi} = 0$. Isso nos leva para valores constantes

$$h_z = I_3 n \cos \theta_0,$$

$$E - \frac{1}{2} I_3 n^2 = mgl \cos \theta_0.$$

Substituindo nas expressões (3.9) e (3.10), respectivamente, nos leva a

$$\dot{\psi} = \frac{p(\cos \theta_0 - \cos \theta)}{\sin^2 \theta}. \quad (3.14)$$

$$\dot{\theta}^2 = (\cos \theta_0 - \cos \theta) \left[w - \frac{p^2}{\sin^2 \theta} (\cos \theta_0 - \cos \theta) \right]. \quad (3.15)$$

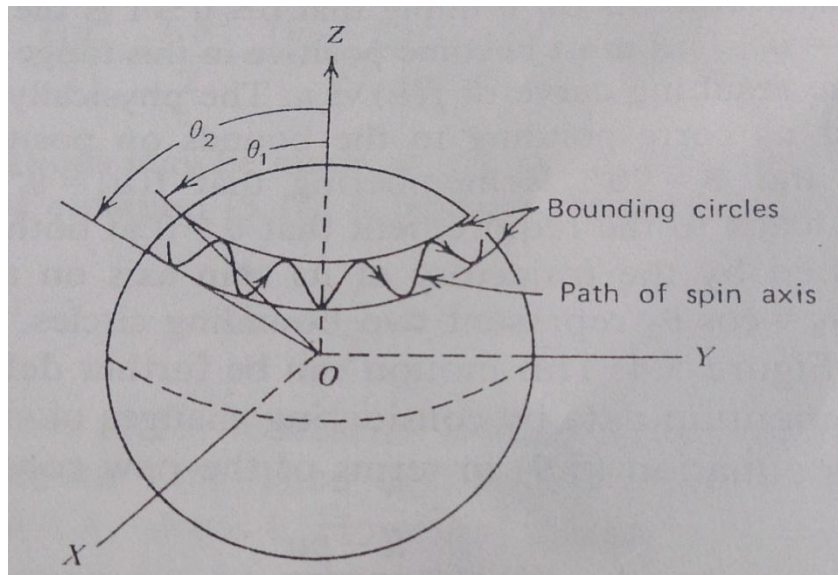


Fig. 3.4 – Ilustração da trajetória do eixo de rotação de um giroscópio ou pião.

FONTE: Kaplan, M. H., Modern Spacecraft Dynamics & Control, p. 158.

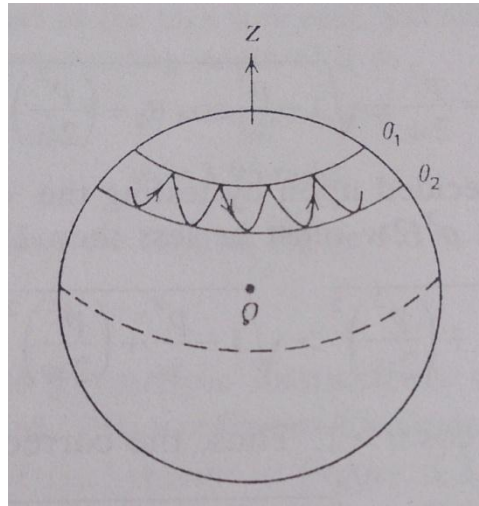


Fig. 3.5 – Movimento na extremidade de um giroscópio ou pêlo.

FONTE: Kaplan, M. H., Modern Spacecraft Dynamics & Control, p. 159.

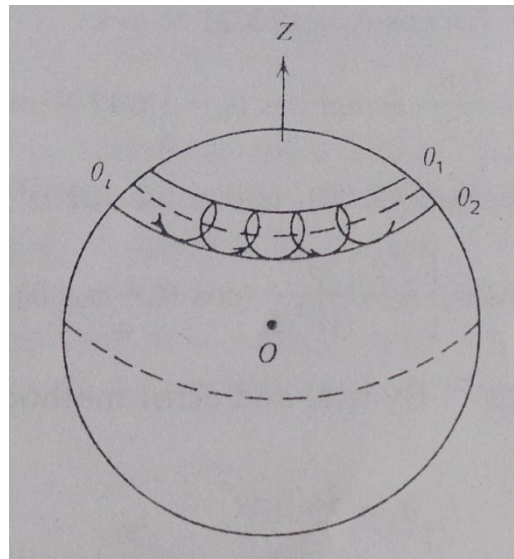


Fig. 3.6 – Caso da variação da precessão reversa.

FONTE: Kaplan, M. H., Modern Spacecraft Dynamics & Control, p. 159.

Uma vez que $\theta = 0$ em $t = 0$, o giroscópio deve estar inicialmente num dos círculos de limitação correspondente a θ_1 ou θ_2 . A equação (3.15) indica qual é fisicamente aceitável. Se θ_0 for igual a θ_2 , então $(\cos \theta_0 - \cos \theta)$ é negativo e o lado direito deve ser negativo. Já

que isso não é permitido, $\theta_0 = \theta_1$. O valor de θ_2 pode ser determinado pela equação (3.15) definindo $\dot{\theta} = 0$ e resolvendo para $\cos \theta$:

$$\cos \theta = \frac{p^2}{2w} \pm \sqrt{1 - \frac{p^2}{w} \cos \theta_1 + \left(\frac{p^2}{2w}\right)^2}.$$

O valor correto pode ser decidido testando o sinal + e construindo uma desigualdade. Observando que $p^2/2w$ deve ser menor que 1 nesse caso,

$$\sqrt{1 - \frac{p^2}{w} \cos \theta_1 + \left(\frac{p^2}{2w}\right)^2} > \sqrt{1 - \frac{p^2}{w} + \left(\frac{p^2}{2w}\right)^2} = 1 - \frac{p^2}{2w}.$$

Isso leva para uma condição, $\cos \theta > 1$. Assim, o valor correto é

$$\cos \theta_2 = \frac{p^2}{2w} - \sqrt{1 - \frac{p^2}{w} \cos \theta_1 + \left(\frac{p^2}{2w}\right)^2}$$

O movimento resultante foi retratado na Fig. 3.5. Soluções como as mostradas nas Fig. 3.4 e 3.6 requerem condições iniciais diferentes. Por exemplo, se em $t = 0$, $\theta = \theta_0$, $\dot{\theta} = 0$, $\dot{\psi} = \dot{\psi}_0 > 0$, então o movimento ilustrado na Fig. 3.4 seria esperado.

Para ilustrar o uso dos resultados para um pião, considere o caso onde as quantidades a seguir são observadas em um instante,

$$\dot{\psi} = 0, \quad \dot{\phi} = 100 \text{ rd/s}, \quad \dot{\theta} = 2 \text{ rd/s}, \quad \theta = 30^\circ$$

O pião com

$$\begin{aligned} I_1 &= 1 \text{ Nms}^2, & I_3 &= 2 \text{ Nms}^2 \\ m &= 1 \text{ kg}, & l &= 0.2 \text{ m} \end{aligned}$$

Para determinar θ_1 , θ_2 , e a forma do caminho do eixo de rotação na esfera unitária, inicie com a expressão (3.6) que indica que $n = 100 \text{ rd/s}$. Então as formas (3.9) e (3.10) dão

$$h_z = I_3 n \cos \theta_0 = 173.21 \text{ Nms},$$

$$E - \frac{I_3 n^2}{2} = \frac{I_1 \dot{\theta}_0^2}{2} + mgl \cos \theta_0 = 3.697 \text{ Nm}.$$

Substituindo essas formas na expressão (3.10), e solucionando por $\dot{\theta}^2$, obtém-se

$$\dot{\theta}^2 = (\cos \theta_0 - \cos \theta) \left[w - \frac{p^2}{\sin^2 \theta} (\cos \theta_0 - \cos \theta) \right] + \dot{\theta}_0^2,$$

em que $p = 200 \text{ rd/s}$ e $w = 3.92 \text{ s}^{-2}$. Por método de tentativa e erro de valores limites são

$$\theta_1 = 29.43^\circ,$$

$$\theta_2 = 30.58^\circ.$$

Que estão muito perto devido a alta taxa de rotação e rigidez desse pião. Aplicando a equação (3.9) dá os valores correspondentes de $\dot{\psi}$ como

$$\dot{\psi}_1 = -4.08 \text{ rd/s},$$

$$\dot{\psi}_2 = 3.95 \text{ rd/s}.$$

Portanto, o eixo de rotação segue a forma da Fig. 3.6 em uma banda muito estreita entre θ_1 e θ_2 .

Em várias aplicações de instrumentos giroscópios e dispositivos de torque giroscópio, é requerido uma precessão estável. As condições para tal movimento podem ser estabelecidas pela consideração da curva de $f(u)$ mostrada na Fig. 3.3. Se essa curva for tangente à linha de $f(u) = 0$ então $u_1 = u_2$ e $\theta_1 = \theta_2$. Essa situação corresponde a um ângulo de nutação constante, θ_s . A expressão (3.9) então implica uma variação da precessão constante, $\dot{\psi}_s$. As condições iniciais para isso são $\theta = \theta_s$, $\dot{\theta} = 0$, $\dot{\psi} = \dot{\psi}_s$ para $t = 0$. Entretanto, o valor de $\dot{\psi}_s$ que satisfaz a situação física é determinado pela equação de momento especializada (3.5a),

$$mgl \sin \theta_s = I_3 n \dot{\psi}_s \sin \theta_s - I_1 \dot{\psi}_s^2 \sin \theta_s \cos \theta_s. \quad (3.16)$$

Que se torna quadrática em $\dot{\psi}_s$,

$$\dot{\psi}_s^2 - \left(\frac{I_3 n}{I_1 \cos \theta_s} \right) \dot{\psi}_s + \frac{mgl}{I_1 \cos \theta_s} = 0.$$

As duas possíveis soluções são

$$\dot{\psi}_s = \frac{I_3 n}{2I_1 \cos \theta_s} \pm \sqrt{\left(\frac{I_3 n}{2I_1 \cos \theta_s} \right)^2 - \frac{mgl}{I_1 \cos \theta_s}}. \quad (3.17)$$

Uma observação de importância é que $\dot{\psi}_s$ é real apenas se a quantidade no radical não for negativa. Assim, a precessão estável é possível apenas se

$$n^2 \geq \frac{4I_1 mgl \cos \theta_s}{I_3^2}. \quad (3.18)$$

Assumindo que essa condição é satisfeita, então tanto o sinal + ou - na equação (3.17) é matematicamente válida. Em ordem para explicar a situação, um gráfico qualitativo de $M_\xi = mgl \sin \theta_s$ em função de $\dot{\psi}_s$ é apresentado na Fig. 3.7. Observe que para qualquer valor dado de M_ξ , abaixo de $M_{\xi_{max}}$, dois valores de $\dot{\psi}_s$ são possíveis. Valores acima de $\dot{\psi}_p$ são chamados de variação de precessão rápida e abaixo corresponde a variação de precessão devagar. Para $M_{\xi_{max}}$ na condição (3.18) e $\dot{\psi}_s = \dot{\psi}_p = I_3 n / 2I_1 \cos \theta_s$. Isso também leva a

$$M_{\xi_{max}} = \frac{I_3^2 n^2}{4I_1} \tan \theta_s. \quad (3.19)$$

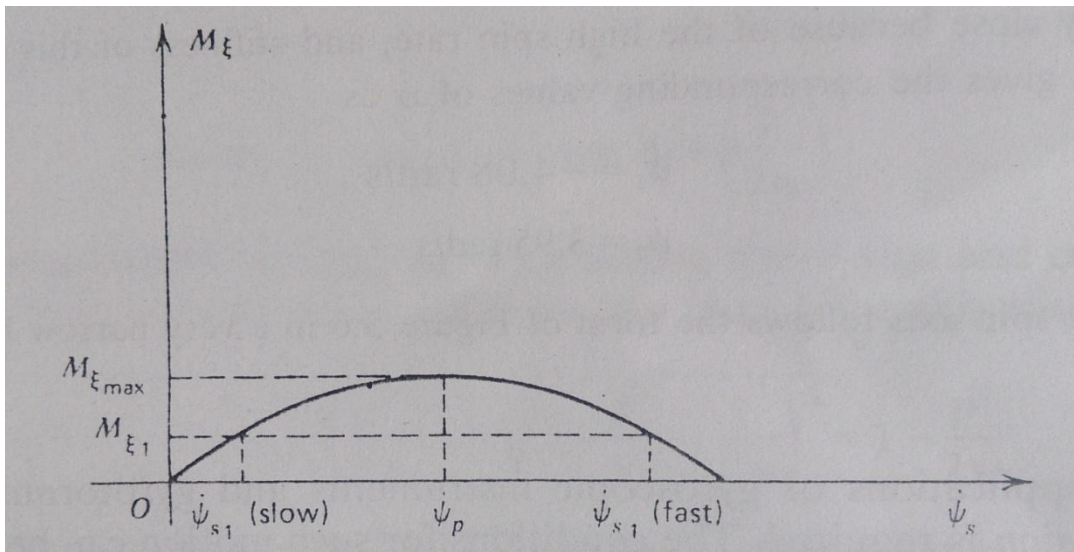


Fig. 3.7 – Variação dos valores da precessão estável.

FONTE: Kaplan, M. H., Modern Spacecraft Dynamics & Control, p. 162.

Se o momento devido à gravidade é maior que isso, uma precessão constante não é possível a menos que η seja aumentado para determinadas inércias giroscópicas e θ_s . Na prática, a precessão rápida é muito difícil de alcançar por causa dos altos valores requeridos de

energia cinética. Assim, a precessão devagar é considerada em todos os casos e a equação (3.17) deve assumir a seguinte forma:

$$\dot{\psi}_s = \frac{I_3 n}{2I_1 \cos \theta_s} - \sqrt{\left(\frac{I_3 n}{2I_1 \cos \theta_s}\right)^2 - \frac{mgl}{I_1 \cos \theta_s}}. \quad (3.20)$$

Um caso especial de precessão constante ocorre quando $\theta_s = 0$. Então, de acordo com a expressão (3.18), a taxa de rotação requerida é

$$n \geq \frac{2}{I_3} \sqrt{mglI_1}$$

para manter o eixo de rotação do pião coincidindo com o eixo Z , assim parecendo que ele está dormindo. Assim, um pequeno torque perturbando essa estabilidade induzindo a precessão constante a um pequeno valor de θ_s . Esse princípio é usado para lançamentos de foguetes tipo sonda e pequenos mísseis. Uma alta taxa de rotação é induzida a permitir uma estabilização passiva para pequenos vôos. Se o movimento do centro de massa é perturbado longe do vetor velocidade, um torque irá aparecer devido aos resultados do arrasto. O veículo reage com uma precessão firme em volta do vetor velocidade. Assim, o percurso não muda o resultado.

Um giroscópio com uma precessão estável pode sofrer uma perturbação em ambas: precessão e nutação. É importante antecipar efeitos resultantes em um movimento nominal. A perturbação pode ser modelada por pequenas variações do ângulo de nutação e da taxa de precessão, θ_d e $\dot{\psi}_d$, respectivamente. Portanto, valores gerais desses parâmetros tornam-se

$$\theta = \theta_0 + \theta_d, \quad \dot{\psi} = \dot{\psi}_0 + \dot{\psi}_d.$$

Observe que $\dot{\theta} = \dot{\theta}_d$, $\ddot{\psi} = \ddot{\psi}_d$, desde que θ_0 e $\dot{\psi}_0$ sejam considerados constantes. Limitando a análise para efeitos de ordem primária permite várias simplificações, tal como

$$\left. \begin{aligned} \dot{\theta} \dot{\psi} &= \dot{\theta}_d (\dot{\psi}_0 + \dot{\psi}_d) \cong \dot{\theta}_d \dot{\psi}_0 \\ \sin \theta &= \sin \theta_0 \cos \theta_d + \cos \theta_0 \sin \theta_d \cong \sin \theta_0 + \theta_d \cos \theta_0 \\ \cos \theta &\cong \cos \theta_0 - \theta_d \sin \theta_0 \end{aligned} \right\}. \quad (3.21)$$

Primeiro considere o eixo de movimento η dado pela equação (3.5b). Incorporando essas identidades e ignorando os termos de segunda e maior ordem nos parâmetro da perturbação nos leva para

$$I_1 \sin \theta_0 \frac{d\dot{\psi}_d}{dt} = (I_3 n - 2I_1 \dot{\psi}_0 \cos \theta_0) \frac{d\theta_d}{dt}.$$

Isso pode ser diretamente integrado, assumindo que $\dot{\psi}_d$ é zero quando θ_d é zero,

$$I_1 \dot{\psi}_d \sin \theta_0 = (I_3 n - 2I_1 \dot{\psi}_0 \cos \theta_0) \theta_d. \quad (3.22)$$

Logo em seguida, devemos substituir as identidades (3.21) na equação (3.5a) para obter o movimento perturbado sobre ξ ,

$$I_1 \ddot{\theta}_d - I_1 (\dot{\psi}_0^2 + 2\dot{\psi}_0 \dot{\psi}_d) (\sin \theta_0 \cos \theta_0 - \theta_d \sin^2 \theta_0 + \theta_d \cos^2 \theta_0) + I_3 n (\dot{\psi}_0 + \dot{\psi}_d) (\sin \theta_0 + \theta_d \cos \theta_0) = mgl (\sin \theta_0 + \theta_d \cos \theta_0) \quad (3.23)$$

Visto que o movimento de interesse é aquele que é sobreposto a precessão constante nominal, extraíndo a expressão que $\ddot{\theta}_d = 0$, $\dot{\psi}_d = 0$, $\dot{\psi} = \dot{\psi}_0$ e $\theta = \theta_0$ da equação (3.23),

$$-I_1 \dot{\psi}_0^2 \cos \theta_0 + I_3 n \dot{\psi}_0 = mgl,$$

que é equivalente a forma (3.16). Agora subtraia isso da expressão (3.23) para descrever o movimento perturbado com relação à precessão constante,

$$I_1 \ddot{\theta}_d - I_1 (2\dot{\psi}_0 \dot{\psi}_d \sin \theta_0 \cos \theta_0 - \dot{\psi}_0^2 \theta_d \sin^2 \theta_0 + \dot{\psi}_0^2 \theta_d \cos^2 \theta_0) + I_3 n (\dot{\psi}_0 \theta_d \cos \theta_0 + \dot{\psi}_d \sin \theta_0) = mgl \theta_d \cos \theta_0 \quad (3.24)$$

Eliminando $\dot{\psi}_d$ e combinando isso com a expressão (3.22) nos dá uma equação diferencial para nutação perturbada,

$$I_1 \ddot{\theta}_d + [(I_3 n)^2 - 4I_1 mgl \cos \theta_0 + I_1^2 \dot{\psi}_0^2 \sin^2 \theta_0] \theta_d = 0. \quad (3.25)$$

Isso tem a forma

$$\ddot{\theta}_d + \omega_\xi^2 \theta_d = 0,$$

em que

$$\omega_\xi = \frac{\sqrt{(I_3 n)^2 - 4I_1 mgl \cos \theta_0 + I_1^2 \dot{\psi}_0^2 \sin^2 \theta_0}}{I_1}. \quad (3.26)$$

Assim, o eixo de rotação acena com frequência $\omega_\xi/2\pi$. Se n é muito grande, que é típica de giroscópios, então a expressão (3.26) pode ser simplificada para

$$\omega_{\xi} \cong \frac{I_3 n}{I_1},$$

que indica que a taxa de nutação é maior que a taxa de rotação porque $I_3 > I_1$. Os efeitos da precessão podem ser determinados pela equação (3.22) reescrita como

$$\dot{\psi}_d = \left(\frac{I_3 n - 2I_1 \dot{\psi}_0 \cos \theta_0}{I_1 \sin \theta_0} \right) \theta_d. \quad (3.27)$$

Definindo λ por

$$\lambda^2 = \frac{I_3 n - 2I_1 \dot{\psi}_0 \cos \theta_0}{I_1 \sin \theta_0}$$

para reescrever a equação (3.27) como

$$\dot{\psi}_d = \lambda^2 \theta_d. \quad (3.28)$$

Derivando duas vezes e percebendo que $\ddot{\theta}_d = -\omega_{\xi}^2 \theta_d$, obtém-se

$$\ddot{\psi}_d = -\lambda^2 \omega_{\xi}^2 \theta_d.$$

Usando novamente a equação (3.28) permite eliminar θ_d ,

$$\ddot{\psi}_d + \omega_{\xi}^2 \dot{\psi}_d = 0. \quad (3.29)$$

Portanto, a frequência da taxa de precessão é a mesma como a do ângulo de nutação e o período de oscilação $\dot{\psi}_d$ é igual ao período de θ_d . Assim, uma perturbação para um giroscópio ou pião com precessão constante resulta em oscilações delimitadas sobre o estado constante. Isso é movimento estável. Se o amortecimento é presente no suporte da estrutura interna sobre ξ , então essas oscilações se dissiparam e a precessão constante irá retornar. Isso é chamado de estabilidade assintótica.

3.1.3 Efeitos do Gimbal

Infelizmente, a maioria dos dispositivos giroscópios em uso tem estruturas mecânicas com massas finitas e momentos de inércia. Os efeitos dessas estruturas no movimento do giroscópio podem ser prejudiciais e danosos e devem ser antecipados. Considere o caso que o centro de massa do giroscópio coincida com o centro geométrico da estrutura, com nomenclatura definida na Fig. 3.1. As variações da estrutura sobre cada grau de liberdade

da estrutura são ω_ξ , ω_ζ e $\dot{\psi}$. Principais momentos de inércia apropriados para a estrutura interna e externa são definidos como:

I_ξ^i = momento de inércia da estrutura interna em torno de ξ

I_η^i = momento de inércia da estrutura interna em torno de η

I_ζ^i = momento de inércia da estrutura interna em torno de ζ

I_Z^o = momento de inércia da estrutura externa em torno de Z

A elaboração de equações apropriadas de movimento é realizada em várias etapas. As inércias combinadas do giroscópio e da estrutura interna são:

$$I_\xi = I_1 + I_\xi^i$$

$$I_\eta = I_1 + I_\eta^i$$

$$I_\zeta = I_\zeta^i$$

Observe que I_ζ inclui apenas I_ζ^i porque o giroscópio não é afetado pela rotação da estrutura sobre ζ . O momento de inércia sobre o giroscópio e a estrutura interna sobre o eixo Z é necessário para incluir os efeitos da estrutura externa. Usando a fórmula:

$$I_\xi = I_{\xi 1}^2 I_1 + I_{\xi 2}^2 I_2 + I_{\xi 3}^2 I_3$$

podemos determinar a inércia sobre o eixo de rotação:

$$I_Z = I_\xi I_{Z\xi}^2 + I_\eta I_{Z\eta}^2 + I_\zeta I_{Z\zeta}^2 + I_Z^o$$

onde $I_{Z\xi} = 0$, $I_{Z\eta} = \sin \theta$, $I_{Z\zeta} = \cos \theta$. Com essas substituições, I_Z se torna,

$$I_Z = (I_1 + I_\eta^i) \sin^2 \theta + I_\zeta^i \cos^2 \theta + I_Z^o. \quad (3.30)$$

Os momentos angulares das componentes sobre o eixo da estrutura são:

$$h_\xi = (I_1 + I_\xi^i) \dot{\theta}. \quad (3.31a)$$

$$h_\eta = (I_1 + I_\eta^i) \dot{\psi} \sin \theta. \quad (3.31b)$$

$$h_\zeta = I_\zeta^i \dot{\psi} \cos \theta + I_3 (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta). \quad (3.31c)$$

Uma vez que a estrutura externa pode apenas rodar em torno de Z e a estrutura interna em torno de ξ , então é conveniente escrever as equações de movimento sobre esses dois eixos. Isso é realizado pela transformação das componentes de momento dos eixos ξ, η, ζ para um novo conjunto ξ', η', ζ' definido na Fig. 3.8.

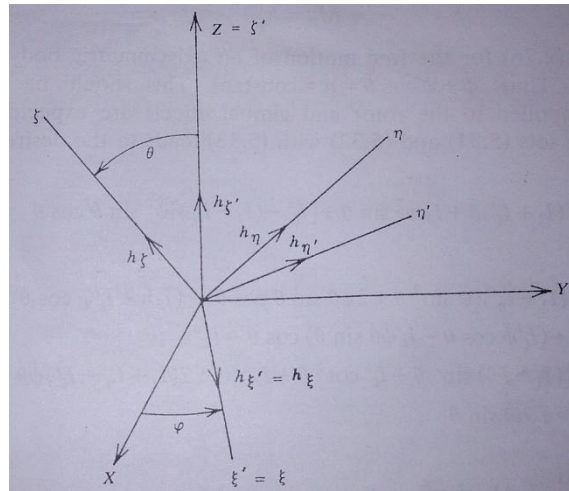


Figura 3.8 – Transformação das coordenadas da estrutura.

FONTE: Kaplan, M. H., Modern Spacecraft Dynamics & Control, p. 165.

As equações transformadas são dadas por:

$$\begin{aligned}\xi' &= \xi \\ \eta' &= \eta \cos \theta - \zeta \sin \theta \\ \zeta' &= \eta \sin \theta + \zeta \cos \theta\end{aligned}$$

Assim, as componentes do momento tornam-se

$$h_{\xi'} = h_{\xi}. \quad (3.32a)$$

$$h_{\eta'} = h_{\eta} \cos \theta - h_{\zeta} \sin \theta. \quad (3.32b)$$

$$h_{\zeta'} = h_{\eta} \sin \theta + h_{\zeta} \cos \theta + I_z^o \dot{\psi}. \quad (3.32c)$$

As duas equações apropriadas de movimento são agora obtidas pela transformação do conjunto (3.4) em novas coordenadas, e lembrando-se de incluir a estrutura externa:

$$\begin{aligned}
M_{\xi'} &= M_{\xi} = \dot{h}_{\xi} + h_{\zeta} \dot{\psi} \sin \theta - h_{\eta} \dot{\psi} \cos \theta \\
M_{\zeta'} &= M_Z = M_{\eta} \sin \theta + M_{\zeta} \cos \theta + I_Z^o \ddot{\psi} \\
&= (\dot{h}_{\eta} + h_{\xi} \dot{\psi} \cos \theta - h_{\zeta} \dot{\theta}) \sin \theta \\
&\quad + (\dot{h}_{\zeta} + h_{\eta} \dot{\theta} - h_{\xi} \dot{\psi} \sin \theta) \cos \theta + I_Z^o \ddot{\psi}
\end{aligned}$$

Combinando isso com o conjunto (3.32) permite reduzir para

$$\left. \begin{aligned}
M_{\xi} &= \dot{h}_{\xi'} - h_{\eta'} \dot{\psi} \\
M_Z &= \dot{h}_{\zeta'}
\end{aligned} \right\} \quad (3.33)$$

A condição $\omega_3 = n = \text{constante}$ para o movimento livre de um corpo com eixo simétrico é assumida aqui. Assim, $\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta = n = \text{constante}$. Isso deve ser válido, uma vez que o torque aplicado ao rotor e os efeitos da estrutura são esperados para serem pequenos. Combinando (3.31) e (3.32) com (3.33) nos leva as equações desejadas de movimento,

$$M_{\xi} = (I_1 + I_{\xi}^i) \ddot{\theta} + I_3 n \dot{\psi} \sin \theta + [I_{\zeta}^i - (I_1 + I_{\eta}^i)] \dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta \quad (3.34)$$

e

$$\begin{aligned}
M_Z &= (I_1 + I_{\eta}^i) (\ddot{\psi} \sin^2 \theta + 2 \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta) - (I_3 n + I_{\zeta}^i \dot{\psi} \cos \theta) \dot{\theta} \sin \theta \\
&\quad + (I_{\zeta}^i \ddot{\psi} \cos \theta - I_{\zeta}^i \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta) \cos \theta + I_Z^o \ddot{\psi} \\
&= [(I_1 + I_{\eta}^i) \sin^2 \theta + I_{\zeta}^i \cos^2 \theta + I_Z^o] \ddot{\psi} + 2(I_1 + I_{\eta}^i - I_{\zeta}^i) \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta \\
&\quad - I_3 n \dot{\theta} \sin \theta
\end{aligned}$$

ou

$$M_Z = \frac{d}{dt} (I_Z \dot{\psi}) - I_3 n \dot{\theta} \sin \theta. \quad (3.35)$$

Está implícito no desenvolvimento dessas equações que $M_{\xi} = M_Z = 0$. Existem casos que o atrito do rolamento da estrutura é importante. Para estudar esses casos não podemos assumir que $n = \text{constante}$, e uma terceira equação para M_{ζ} deve ser adicionada. Entretanto, essa última equação é simples:

$$M_{\zeta} = I_3 \frac{d}{dt} (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta).$$

As equações diferenciais (3.34) e (3.35) geralmente não são resolvidas analiticamente, porque elas são altamente não-lineares. Como uma ilustração dessa dificuldade e os efeitos da massa da estrutura, uma típica situação é apresentada. Comece definindo $M_{\xi} = M_Z = 0$ com as estruturas em repouso em $t = 0$, e $\theta(0) = \theta_0$. Um momento impulsivo é aplicado em torno de ξ e requer-se um tempo finito para acoplamento em Z. Nenhuma suposição pode ser feita ainda com respeito da magnitude de $\dot{\psi}$, porque esse é o objeto da análise. Assim, a equação (3.35) torna-se

$$d(I_Z \dot{\psi}) = I_3 n \sin \theta d\theta,$$

que pode ser integrada entre os limites correspondentes para $t = 0$ e algum tempo depois

$$I_Z \dot{\psi} = -I_3 n (\cos \theta - \cos \theta_0). \quad (3.36)$$

São consideradas oscilações pequenas em torno do eixo ξ , permitindo o uso de

$$\theta = \theta_0 + \theta_d$$

e as aproximações do conjunto (3.21) em relação a θ , além de

$$\sin \theta \cos \theta \cong \sin \theta_0 \cos \theta_0 + \theta_d (\cos^2 \theta_0 - \sin^2 \theta_0)$$

Fazendo as substituições apropriadas na expressão (3.30), I_Z se torna

$$I_Z = I_Z(0) + 2\theta_d (I_1 + I_{\eta}^i - I_{\zeta}^i) \sin \theta_0 \cos \theta_0, \quad (3.37)$$

em que

$$I_Z(0) = (I_1 + I_{\eta}^i) \sin^2 \theta_0 + I_{\zeta}^i \cos^2 \theta_0 + I_Z^o.$$

A equação (3.36) agora pode ser escrita como

$$I_Z(0) \dot{\psi} - (I_3 n \sin \theta_0) \theta_d + 2\theta_d \dot{\psi} (I_1 + I_{\eta}^i - I_{\zeta}^i) \sin \theta_0 \cos \theta_0 = 0. \quad (3.38)$$

e a equação (3.34) torna-se

$$(I_1 + I_{\xi}^i) \ddot{\theta}_d + (I_3 n \sin \theta_0) \dot{\psi} + \{(I_3 n \cos \theta_0) \theta_d \dot{\psi} - (I_1 + I_{\eta}^i - I_{\zeta}^i) [\sin \theta_0 \cos \theta_0 + \theta_d (\cos^2 \theta_0 - \sin^2 \theta_0)] \dot{\psi}^2\} = 0. \quad (5.39)$$

Essas duas equações representam o movimento perturbado do giroscópio. Entretanto, ambas são não-lineares no último termo porque os produtos de θ_x e $\dot{\psi}$ são mantidos. Técnicas de perturbação foram aplicadas para esse problema e foi obtida uma solução aproximada. Detalhes não foram apresentados aqui, mas são prontamente disponíveis na literatura. Resultados indicam que a precessão da estrutura, $\dot{\psi}$ pode ser vista como pequena, sobreposta periodicamente de oscilações de frequência ω onde

$$\omega^2 = \frac{(I_3 n \sin \theta_0)^2}{I_Z(0)(I_1 + I_\xi^i)}$$

mais a constante $\dot{\psi}_s$ dada como

$$\dot{\psi}_s = -\frac{\alpha^2 I_3 n}{2\omega^2 I_Z^2(0) \sin \theta_0} [(I_1 + I_\eta^i - I_\xi^i) \sin^3 \theta_0 \cos \theta_0 - I_Z(0) \sin \theta_0 \cos \theta_0].$$

Assim, a estrutura externa oscila e se movimenta na direção oposta a rotação. Esse movimento é conhecido como o *andar da estrutura*, e isso é acompanhado pela alta velocidade de oscilação da nutação, que não é associada com a rede de movimento em θ .

3.2 Dual Spinners

Existe um caso especial em que o movimento interno toma o lugar que é de grande interesse para o projetista de satélites. Essa é a situação quando um giroscópio interno ou um rotor é usado para redistribuir momento tanto pela mudança de velocidade como através do fenômeno do giro-torque. Tais técnicas incluem o uso do momento de rotação para manter o momento para rigidez, controle dos giroscópios para aplicar torques controlados quando necessário e rodas de reação que mantêm momento em zero, mas altera a velocidade para aplicar torques sobre seus eixos de rotação. Estes serão considerados em conexão com o projeto do sistema de controle. A técnica particular de interesse aqui evoluiu da ideia do simple spinner usada originalmente no Explorer I. Uma limitação primária desses satélites é que nenhuma antena ou sensores orientados podem ser empregados, porque todas as partes rotacionam junto sobre o eixo de rotação. O próximo passo lógico na evolução de tal aeronave era combinar uma plataforma orientada e um rotor. Esse conceito apareceu para preservar a vantagem da rigidez do giroscópio e permitir uma plataforma orientada para instrumentos científicos, antenas, etc. Aeronaves com rotores grandes e plataformas orientadas são chamadas dual spinners.

A análise de estabilidade rigorosa segue um parâmetro discreto para descrever o amortecedor. Considere um satélite dual-spin, ilustrado na Figura 2.13, com uma plataforma assimétrica P ligada a um rotor R que é simétrico. Um amortecedor de plataforma é adotado com a forma de um amortecedor massa-mola. Os resultados da estabilidade devem ser independentes do tipo do amortecedor, desde que o amortecimento ocorra para qualquer movimento nutacional. Entretanto, constante de tempo irá variar.

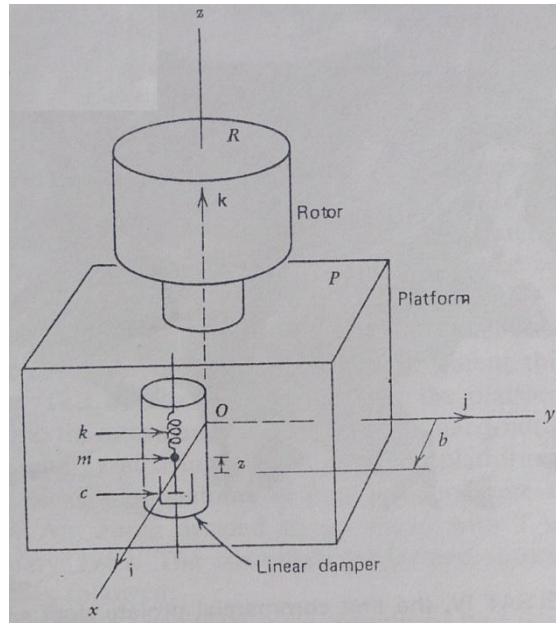


Figura 3.9 – Dual spinner com amortecedor na plataforma.

FONTE: Kaplan, M. H., Modern Spacecraft Dynamics & Control, p. 178.

O rotor é centralizado em z e a rotação é permitida apenas sobre z . O amortecedor é centralizado sobre o eixo x e o movimento da massa é paralelo a z a uma distancia b . A mola tem uma constante k e o amortecedor uma constante c . O centro de massa do veículo (incluindo rotor e plataforma) é no ponto O quando $z = 0$ e I_x, I_y, I_z serão os momentos principais de inércia da aeronave inteira quando $z = 0$. Em geral ($z \neq 0$), o tensor inércia é

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_x + mz^2 & 0 & -mbz \\ 0 & I_y + mz^2 & 0 \\ -mbz & 0 & I_z \end{bmatrix}. \quad (3.49)$$

O vetor da equação de movimento é dado pela expressão (3.47), quando a posição do centro de massa não deformado ($z = 0$) é pego como ponto de referência. Assim, O e A coincidem quando $z = 0$. Para esse caso o momento angular sobre o ponto de referência é expresso sem subscrito como

$$\mathbf{h} = \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega} - mb\dot{z}\mathbf{j} + I_z^R \Omega \mathbf{k}. \quad (3.50)$$

onde I_z^R é o momento de inércia do rotor sobre o eixo de rolamento e Ω é usado aqui como a velocidade angular do rotor em relação a plataforma. Observe que $\boldsymbol{\omega}$ é a velocidade angular da plataforma. Também,

$$\mathbf{r}_A = \mu z \mathbf{k}$$

e o momento estático é

$$\mathbf{S} = (m + M_P + M_R)\mu z \mathbf{k}$$

onde M_P, M_R são as massas da plataforma e do rotor, respectivamente, e μ é definido como

$$\mu = \frac{m}{m + M_P + M_R}. \quad (3.51)$$

Isso nos leva a uma forma simples de \mathbf{S} ,

$$\mathbf{S} = m z \mathbf{k}. \quad (3.52)$$

A aceleração absoluta do ponto de referência é apenas $-\ddot{\mathbf{r}}_A$, assim,

$$\mathbf{a} = -\mu \frac{d^2}{dt^2} (z \mathbf{k})$$

que dá

$$\mathbf{a} = -\mu [(2\omega_y \dot{z} + \dot{\omega}_y z + \omega_x \omega_z z) \mathbf{i} - (2\omega_x \dot{z} + \dot{\omega}_x z - \omega_y \omega_z z) \mathbf{j} + (\ddot{z} - \omega_y^2 z - \omega_x^2 z) \mathbf{k}]. \quad (3.53)$$

Combinando as expressões (3.52) e (3.53) nos dá o termo correto

$$\mathbf{S} \times \mathbf{a} = (-m\mu \dot{\omega}_x z^2 + m\mu \omega_y \omega_z z^2 - 2m\mu \omega_x z \dot{z}) \mathbf{i} \\ + (-m\mu \dot{\omega}_y z^2 - m\mu \omega_x \omega_z z^2 - 2m\mu \omega_y z \dot{z}) \mathbf{j}$$

A realização das operações indicadas na equação (5.50) resulta

$$\mathbf{h} = [(I_x + mz^2)\omega_x - mb\omega_z z]\mathbf{i} + [(I_y + mz^2)\omega_y - mbz]\mathbf{j} + [-mb\omega_x z + I_z\omega_z + I_z^R\Omega]\mathbf{k} \quad (3.54)$$

As situações de interesse excluem torques externos, assim, $\mathbf{M}_A = \mathbf{0}$. As equações de movimento de Euler para um dual spinner com amortecedor na plataforma, como descritas a seguir, tornam-se

$$I_x \dot{\omega}_x - \omega_y \omega_z (I_y - I_x) + I_z^R \Omega \omega_y + m(1 - \mu) \dot{\omega}_x z^2 - m(1 - \mu) \omega_y \omega_z z^2 + 2m(1 - \mu) \omega_x z \dot{z} - mb \dot{\omega}_z z - mb \omega_x \omega_y z = 0 \quad (3.55)$$

$$I_y \dot{\omega}_y - \omega_z \omega_x (I_z - I_x) - I_z^R \Omega \omega_x + m(1 - \mu) \dot{\omega}_y z^2 + m(1 - \mu) \omega_x \omega_z z^2 + 2m(1 - \mu) \omega_y z \dot{z} - mb \ddot{z} + mb \omega_x^2 z - mb \omega_z^2 z = 0 \quad (3.56)$$

$$I_z \dot{\omega}_z - \omega_x \omega_y (I_x - I_y) + I_z^R \dot{\Omega} + mb \omega_y \omega_z z - 2mb \omega_x \dot{z} - mb \dot{\omega}_x z = 0. \quad (3.57)$$

Essas três equações com cinco variáveis desconhecidas, ω_x , ω_y , ω_z , Ω e z irão precisar de duas relações adicionais associadas com torque rotacional e equilíbrio da força de amortecimento. Desde que $I_z^R \dot{\omega}_z^R = T$ e $\omega_z^R = \omega_z + \Omega$, uma dessas equações é

$$I_z^R (\dot{\omega}_z + \dot{\Omega}) = T. \quad (3.58)$$

onde T é a magnitude do torque aplicado sobre o eixo do rotor. O atrito do rolamento é ignorado aqui. O equilíbrio da força de aceleração da massa do amortecedor dá

$$m(1 - \mu) \ddot{z} + c \dot{z} + kz - m(1 - \mu) (\omega_x^2 + \omega_y^2) z + mb \omega_x \omega_z - mb \dot{\omega}_y = 0. \quad (3.59)$$

que é obtida no movimento centralizado do sistema em A. O conjunto (3.55) para (3.59) constitui uma descrição completa do movimento de centro de massa para esse tipo de dual spinner. As primeiras três delas são declarações de conservação do momento. A equação (3.58) pode representar mudanças da energia devido à variação do rotor e velocidade da plataforma, e a fórmula (3.59) para dissipação de energia. Se o rotor tiver um pequeno momento de rotação, então essas equações representam o movimento de uma estrutura fixa, momento de um satélite com amortecimento. Elas são usadas no projeto de sistemas automáticos de controle do movimento de centro de massa de tais veículos.

CONCLUSÃO

Ao final deste um ano de estudo pude compreender que vários princípios físicos são de grande importância para o desenvolvimento de qualquer trabalho mais avançado na área científica, seja ela engenharia espacial ou qualquer outra, e que sem eles não é possível seguir em frente corretamente. Graças a um tempo dedicado para estudar o giroscópio que pude começar a entender o que era momento angular, torque, precessão e nutação. Todos são conceitos necessários para o entendimento da estabilidade de um satélite dual-spin. E que na estabilidade de um satélite dual-spin com um amortecedor de nutação axial é preciso analisar a plataforma com amortecedor que será anexada ao rotor, pois deveremos saber a posição do centro de massa do corpo (incluindo rotor e plataforma), a distância que o amortecedor estará do eixo de rotação do rotor, a constante da mola, a constante de amortecimento e outros fatores. Com isso será necessário mais um ano de estudo para analisar e compreender totalmente todos os fatores que contribuem e que perturbam a estabilidade desse modelo de satélite.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Kaplan, M. H. *Modern Spacecraft Dynamics & Control.* John Wiley & Sons, 1976.

Wikipedia, the free encyclopedia – Attitude Control. Disponível em:

<http://en.wikipedia.org/wiki/Aircraft_attitude> Acesso em 10 de junho de 2014.

Wikipedia, the free encyclopedia – Precession. Disponível em:

<<http://en.wikipedia.org/wiki/Precession>> Acesso em 10 de junho de 2014.

Wikipedia, the free encyclopedia – Inertia. Disponível em:

<<http://en.wikipedia.org/wiki/Inertia>> Acesso em 10 de junho de 2014.

Wikipedia, the free encyclopedia – Momentum. Disponível em:

<<http://en.wikipedia.org/wiki/Momentum>> Acesso em 10 de junho de 2014.

Wikipedia, the free encyclopedia – Moment of Inertia. Disponível em:

<http://en.wikipedia.org/wiki/Moment_of_inertia> Acesso em 10 de junho de 2014.

Wikipedia, the free encyclopedia – Angular Velocity. Disponível em:

<http://en.wikipedia.org/wiki/Angular_velocity> Acesso em 10 de junho de 2014.