

Dinâmica Caótica e Travamento de Frequência em Mapas Acoplados

Pedro Fernando Almeida Di Donato¹ (ITA, Bolsista PIBIC/CNPq)
Dr. Elbert Einstein Nehrer Macau² (LAC/INPE)

RESUMO

O principal objetivo do trabalho realizado durante o período de junho de 2003 a junho de 2004 foi aprender os fundamentos da teoria de sistemas dinâmicos caóticos e do fenômeno de travamento de frequência para, na próxima etapa do projeto, concentrar os esforços no estudo da sincronização de osciladores com auxílio de mapas acoplados. O estudo do comportamento caótico foi baseado na análise do sistema dinâmico formado por um pêndulo simples sujeito a uma força externa de módulo regido por uma função cossenoidal. Para se fazer tal análise foi construída uma ferramenta computacional na plataforma Visual Basic capaz de resolver numericamente o sistema de equações diferenciais que modelam o comportamento do pêndulo, e, com os resultados, construir os principais diagramas utilizados no estudo de sistemas dinâmicos. Com auxílio desse programa foi possível observar diferentes fenômenos: primeiramente a transição do comportamento periódico para o caótico através do mecanismo de dobra de períodos. Além disso, para alguns valores de parâmetros foram identificadas as formas e evoluções das bacias de atração. Com relação aos atratores, o estudo se deu de forma a caracterizá-los e relacioná-los com o comportamento do sistema. Isso foi realizado de duas maneiras principais: através de suas dimensões tanto de capacidade quanto de correlação, e através da avaliação de seu máximo expoente de Lyapunov. Ademais, fez-se a reconstrução dos atratores através de suas séries temporais, procedimento que é usado em situações mais comuns, em que não existe um modelo matemático do sistema, e os únicos dados são provenientes de situações experimentais. Por fim, o estudo evoluiu para o fenômeno de travamento de frequência, que no caso do pêndulo se caracteriza pelo travamento da média de sua velocidade angular em uma razão p/q da frequência da força externa aplicada, onde p e q são números inteiros. Tal razão conserva-se mesmo com a variação de alguns dos parâmetros, por isso recebe a denominação de travamento. Para esse estudo, fez-se o uso de uma outra construção matemática conhecida como mapa de círculo. O programa desenvolvido também foi usado para esse estudo, uma vez que é capaz de fazer iterações de condições iniciais desse mapa e construir diagramas relacionados denominados línguas de Arnold e escadaria do diabo. Como continuação do trabalho estão previstos primeiramente: o estudo e implementação de outras técnicas capazes de fornecer todos os expoentes de Lyapunov, estudo e comparação de resultados obtidos para dimensão e expoentes de Lyapunov através de séries temporais com os provenientes das equações diferenciais, e o estudo aprofundado do acoplamento de osciladores com o uso de mapas acoplados, visando principalmente o fenômeno de sincronização entre eles.

¹ Aluno do Curso de Engenharia Aeronáutica, ITA. E-mail: pfadidonato@uol.com.br

² Pesquisador Titular Laboratório Associado de Computação e Matemática Aplicada - LAC. E-mail: elbert@lac.inpe.br



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

INPE-11583-PRE/6968

**DINÂMICA CAÓTICA E TRAVAMENTO DE FREQUÊNCIA EM
MAPAS ACOPLADOS**

Pedro Fernando Almeida Di Donato

Relatório Final de Projeto de Iniciação Científica
(PIBIC/CNPq/INPE)

INPE
São José dos Campos
2004



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

DINÂMICA CAÓTICA E TRAVAMENTO DE FREQUÊNCIA EM MAPAS ACOPLADOS

**RELATÓRIO FINAL DE PROJETO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA
(PIBIC/CNPq/INPE)**

**Pedro Fernando Almeida Di Donato (ITA, Bolsista PIBIC/CNPq)
E-mail: pfadidonato@uol.com.br**

**Dr. Elbert Einstein Nehrer Macau (LAC/CTE/INPE, Orientador)
E-mail: elbert@lac.inpe.br**

Maiο de 2004

DINÂMICA CAÓTICA E TRAVAMENTO DE FREQUÊNCIA EM MAPAS ACOPLADOS

Pedro Fernando Almeida Di Donato¹ (ITA, Bolsista PIBIC/CNPq)

Dr. Elbert Einstein Nehrer Macau² (LAC/INPE)

RESUMO

O principal objetivo do trabalho realizado durante o período de junho de 2003 a junho de 2004 foi aprender os fundamentos da teoria de sistemas dinâmicos caóticos e do fenômeno de travamento de frequência para, na próxima etapa do projeto, concentrar os esforços no estudo da sincronização de osciladores com auxílio de mapas acoplados. O estudo do comportamento caótico foi baseado na análise do sistema dinâmico formado por um pêndulo simples sujeito a uma força externa de módulo regido por uma função cossenoidal. Para se fazer tal análise foi construída uma ferramenta computacional na plataforma Visual Basic capaz de resolver numericamente o sistema de equações diferenciais que modelam o comportamento do pêndulo, e, com os resultados, construir os principais diagramas utilizados no estudo de sistemas dinâmicos. Com auxílio desse programa foi possível observar diferentes fenômenos: primeiramente a transição do comportamento periódico para o caótico através do mecanismo de dobra de períodos. Além disso, para alguns valores de parâmetros foram identificadas as formas e evoluções das bacias de atração. Com relação aos atratores, o estudo se deu de forma a caracterizá-los e relacioná-los com o comportamento do sistema. Isso foi realizado de duas maneiras principais: através de suas dimensões tanto de capacidade quanto de correlação, e através da avaliação de seu máximo expoente de Lyapunov. Ademais, fez-se a reconstrução dos atratores através de suas séries temporais, procedimento que é usado em situações mais comuns, em que não existe um modelo matemático do sistema, e os únicos dados são provenientes de situações experimentais. Por fim, o estudo evoluiu para o fenômeno de travamento de frequência, que no caso do pêndulo se caracteriza pelo travamento da média de sua velocidade angular em uma razão p/q da frequência da força externa aplicada, onde p e q são números inteiros. Tal razão conserva-se mesmo com a variação de alguns dos parâmetros, por isso recebe a denominação de travamento. Para esse estudo, fez-se o uso de uma outra construção matemática conhecida como mapa de círculo. O programa desenvolvido também foi usado para esse estudo, uma vez que é capaz de fazer iterações de condições iniciais desse mapa e construir diagramas relacionados denominados línguas de Arnold e escadaria do diabo. Como continuação do trabalho estão previstos primeiramente: o estudo e implementação de outras técnicas capazes de fornecer todos os expoentes de Lyapunov, estudo e comparação de resultados obtidos para dimensão e expoentes de Lyapunov através de séries temporais com os provenientes das equações diferenciais, e o estudo aprofundado do acoplamento de osciladores com o uso de mapas acoplados, visando principalmente o fenômeno de sincronização entre eles.

¹ Aluno do Curso de Engenharia Aeronáutica, ITA. E-mail: pfadidonato@uol.com.br

² Pesquisador Titular Laboratório Associado de Computação e Matemática Aplicada - LAC. E-mail: elbert@lac.inpe.br

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO

CAPÍTULO 2 – FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

- 2.1 Modelamento matemático do pêndulo
- 2.2 Diagramas utilizados e conceitos básicos
- 2.3 Transição para o caos através da dobra de período
- 2.4 Dimensão do atrator
- 2.5 Expoente de Lyapunov
- 2.6 Mecanismo de “esticar e dobrar” e mapa de ferradura
- 2.7 Relação entre expoentes de Lyapunov e dimensão do atrator
- 2.8 Caracterização de Estados Caóticos por Reconstrução do Atrator
- 2.9 Travamento de frequência e mapa de círculo

CAPÍTULO 3 – PROGRAMA E ALGORÍTMOS UTILIZADOS

- 3.1 Descrição do programa desenvolvido e utilizado
- 3.2 Algoritmo para cálculo de dimensões
- 3.3 Algoritmo para cálculo do maior expoente de Lyapunov de atratores

CAPÍTULO 4 – RESULTADOS E ANÁLISES

- 4.1 Transição para o caos pela rota de dobra de período
- 4.2 Bacias de atração
- 4.3 Dimensões dos atratores
- 4.4 Máximo expoente de Lyapunov
- 4.5 Reconstrução do atrator a partir da série temporal
- 4.6 Mapa de círculo e travamento de frequência

CAPÍTULO 5 – CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

CAPÍTULO 6 – REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO

A grande maioria dos sistemas dinâmicos apresenta comportamento não-linear, ou seja, as equações diferenciais que regem seu movimento apresentam termos não lineares. Esses termos, entretanto, tornam sua solução extremamente complexa, em alguns casos possível apenas por métodos numéricos. A solução mais utilizada é a da linearização dessas equações, o que facilita em muito a solução omitindo, entretanto, importantes fenômenos observados experimentalmente que apenas são explicados considerando-se os termos não-lineares dessas equações.

Um dos comportamentos mais interessantes que um sistema dinâmico não-linear pode apresentar é o chamado caótico. Ele apresenta duas características principais: primeiro, o sistema não repete seu comportamento anterior com o avanço do tempo, sendo sua série temporal totalmente irregular; segundo, dadas duas condições iniciais muito próximas, após um pequeno intervalo de tempo o sistema apresenta um comportamento não correlacionado para as trajetórias que se iniciam nestes pontos, ou seja, as distâncias entre os pontos crescem em média exponencialmente com o tempo. Tal característica é conhecida como sensibilidade a condições iniciais.

Para o estudo de sistemas dinâmicos que apresentam estado caótico, várias construções matemáticas e parâmetros especiais são utilizados. Dentre as construções matemáticas, podemos destacar o espaço de fase, a secção de Poincaré, e o espectro de potência, enquanto dentre os parâmetros podemos citar a dimensão de um atrator, a entropia e o expoente de Lyapunov, sendo esse último o mais importante na caracterização de estados caóticos de sistemas dinâmicos.

Dentre os sistemas dinâmicos mais estudados estão os osciladores. Tais sistemas apresentam ainda um outro fenômeno interessante conhecido como travamento de frequência. Nele a frequência de oscilação natural do sistema trava-se em um valor correspondente a frequência da força externa atuante no oscilador multiplicada por um número racional. Uma consequência direta deste fenômeno é no acoplamento de osciladores, um fenômeno observado pela primeira vez no século XVII com relógios de pêndulo que, uma vez colocados na mesma parede, têm seus pêndulos sincronizados após algum tempo. Tal fenômeno é melhor observado com auxílio do chamado mapa de círculo no caso do pêndulo forçado.

O principal objetivo do trabalho realizado durante o ano foi aprender os fundamentos da teoria de sistemas dinâmicos caóticos e do fenômeno de travamento de frequência, tendo como base de estudo o sistema do pêndulo forçado e amortecido. Tal sistema foi estudado com o uso de cada uma das construções matemáticas descritas acima e avaliando-se seu comportamento com relação à variação da amplitude da força externa de forma a identificar dentre quais valores o sistema apresentava comportamento caótico, além de estudar as características básicas de seus atratores. Além disso, com auxílio do mapa de círculo foi estudado o fenômeno do travamento de frequência também em função da amplitude da força externa.

Para realização deste estudo optou-se pela construção de uma ferramenta computacional em plataforma Visual Basic® capaz de resolver numericamente a equação diferencial do sistema, construir cada um dos diagramas e calcular cada uma dos parâmetros já citados anteriormente.

CAPÍTULO 2 – FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 Modelamento matemático do pêndulo

O sistema estudado é constituído por um pêndulo simples em que atuam a força gravitacional exercida pela Terra, um amortecimento proporcional à velocidade angular e uma força externa de módulo regido por uma função cossenoidal. Desta forma, temos como resultado das forças atuando no sistema a seguinte equação:

$$ml^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} + \gamma \frac{d\theta}{dt} + W \text{sen}(\theta) = A \cos(\omega_D t)$$

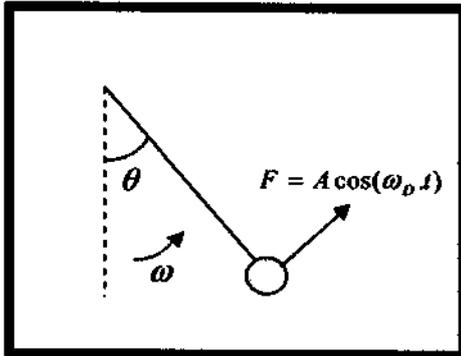


Figura 1: Esquema do Sistema

Em que: m é a massa do pêndulo (é desprezada a massa da barra que o segura), l é o comprimento da barra que o segura, γ é o coeficiente de amortecimento, W é a força peso atuando no pêndulo, A é a amplitude da força externa atuante e ω_D sua frequência considerada constante. De acordo com a figura 1 ao lado

Tal equação pode ser escrita como um sistema de três equações diferenciais tendo como variáveis independentes: θ ângulo que o pêndulo faz com a direção vertical, ω velocidade angular do pêndulo e φ fase da força externa aplicada. Assim temos o seguinte sistema já adimensionalizado:

$$\begin{cases} \frac{d\omega}{dt} = -\left(\frac{1}{q}\right)\omega - \text{sen}(\theta) + g \cos(\varphi) \\ \frac{d\theta}{dt} = \omega \\ \frac{d\varphi}{dt} = \omega_D \end{cases}$$

Para resolvê-lo usamos condições iniciais escolhidas para cada uma das variáveis independentes. Uma observação importante é que g representa o coeficiente adimensional da amplitude da força externa, sem relação com a aceleração gravitacional de um corpo.

2.2 Diagramas utilizados e conceitos básicos

As construções matemáticas mais utilizadas no estudo dos sistemas dinâmicos são: o espaço de fase, o diagrama de Poincaré e o espectro de potência. Nas subsecções seguintes discutiremos brevemente sobre cada uma delas:

2.2.1 Espaço de Fase e Atratores

O espaço de fase consiste em um diagrama em que nas direções ortonormais são colocadas as variáveis necessárias para descrever o estado de um sistema dinâmico em um determinado instante temporal. Como podemos escolher diferentes grupos de variáveis para representar um sistema como um todo, o espaço de fase pode ser

construído de diferentes formas. O caminho percorrido por um sistema sob certas condições em um espaço de fase é denominado órbita.

Existem duas propriedades importantes em um espaço de fase, a primeira é o fato de que, no caso de um sistema determinístico, não poder haver cruzamento entre duas órbitas nem de uma órbita consigo mesma. Isso decorre de um princípio básico desse tipo de sistema que estabelece que ele não pode apresentar duas respostas diferentes para as mesmas condições iniciais. Um caso de cruzamento implicaria que o sistema, uma vez no estado representado pelo ponto de cruzamento das órbitas, poderia evoluir de duas formas diferentes através dos dois caminhos que se cruzam.

A segunda propriedade ocorre no caso de sistemas conservativos, ou seja, em que a energia total do sistema não varia, e é chamada conservação de área. Se marcarmos uma área qualquer no diagrama e observarmos como ela se comporta com o passar do tempo observamos que ela pode se deformar, mas não tem sua área ou volume alterado. Sistemas em que temos redução da área são conhecidos como dissipativos, sendo sua energia total diminuída com o tempo. Um método analítico para avaliar se um sistema é ou não conservativo é a avaliação do seguinte termo:

$$\nabla \cdot F$$

Em que F é o vetor formado pelos termos a direita do sistema de equações diferenciais que representa o sistema como no caso do sistema acima. Pode ser provado que um sistema é conservativo se, e somente se, tal termo for nulo.

No caso de sistemas dissipativos, as órbitas ficam contidas numa região do espaço de fase em um movimento irregular, confinada a um conjunto invariante que é denominado *atrator*. Uma das questões mais importantes sobre atratores é em relação a sua estabilidade: dado uma pequena perturbação em um sistema inicialmente sobre tal atrator, ele evolui de forma a voltar para o atrator ou para distanciá-lo? Atratores cujas órbitas próximas convergem para ele são chamados estáveis, os outros, instáveis.

Devido à existência de diferentes atratores estáveis podemos dividir o espaço de fase em *bacias de atração*, que são regiões cujos pontos evoluem todos para um determinado atrator. As curvas que dividem duas bacias de atração são chamadas de *separatrix* e são conjuntos invariantes.

Na caso específico do pêndulo, temos um sistema dissipativo devido ao amortecimento, fato que pode ser comprovado facilmente com a avaliação do termo $\nabla \cdot F$. Apesar do espaço de fase nesse caso ser tridimensional, devido ao fato que a variável ϕ evoluir de forma linear com o tempo só dependendo do parâmetro ω_D , pode-se fazer a representação bidimensional de tal espaço de fase no plano velocidade angular x ângulo (ω x θ) sem perda de detalhes do comportamento do sistema. Tal projeção, entretanto, ocasiona a visualização de cruzamentos de órbitas que não existem uma vez que o espaço de fase real é tridimensional. Outro detalhe é que tal plano na verdade apresenta os limites $-\pi$ e π no eixo θ uma vez que ângulos maiores simplesmente significam que o pêndulo passou sobre o ponto mais alto da trajetória, no eixo ω tal plano não apresenta limites já que a velocidade angular pode assumir quaisquer valores.

2.2.2 Diagrama de Poincaré

O espaço de fase é uma ferramenta muito útil, mas tem a grande desvantagem de apresentar dificuldade de observação no caso de sistemas complexos que necessitam de mais de duas variáveis para determinarmos o seu estado. Uma solução foi inventada por Henri Poincaré, e consiste em construir um diagrama bidimensional como o espaço de fase, mas, ao contrário de se projetarem todos os pontos de uma órbita, projetar apenas pontos em certos intervalos de tempo determinados. Uma analogia simples é pensar no

diagrama como uma sobreposição de fotos tiradas de tempos em tempos do estado do sistema.

Com tal diagrama obtemos uma grande simplificação do espaço de fase, enquanto mantemos suas principais características. O diagrama resultante é totalmente dependente da frequência de amostragem que escolhemos. Caso o sistema esteja em um movimento periódico com frequência angular ω_s se a frequência de amostragem for de forma $(p/q)\omega_s$, onde p e q são inteiros então teremos q pontos no diagrama de Poincaré. O estudo de estados caóticos tem na análise da distribuição dos pontos sob o diagrama de Poincaré uma grande ferramenta.

2.2.3 Espectro de Energia

Existem duas formas principais de representação da evolução temporal de um sistema dinâmico: por sua série temporal, ou seja, como uma função do tempo; ou por sua série de frequências. A idéia de transformar uma série temporal em uma série de frequências vem do fato descoberto por Fourier que qualquer função pode ser representada como uma série de funções periódicas de diferentes frequências. A transformação de uma série temporal em uma série de frequências é realizada por um operador denominado transformada de Fourier:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\omega t}$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-in\omega t} d\omega$$

O gráfico de $a_n \times \omega$ é chamado *espectro de potência*.

No caso do pêndulo foi usada como série temporal básica a da velocidade angular. No caso de um comportamento periódico tem-se um grande pico no espectro de potência referente à frequência natural do sistema que nesse caso é igual à da força externa ω_D e picos de menor amplitude nos múltiplos dessa frequência. No comportamento caótico, por sua vez, tem-se um espectro de banda larga em quase todas as frequências apesar de um maior ainda estar presente na frequência correspondente a ω_D . Um espectro dessa forma *não* garante que o sistema esta em um estado caótico, mas pode servir para ajudar na análise.

2.3 Transição Para o Caos Através da Dobra de Período

Um dos mecanismos de transição de um comportamento periódico para o caótico mais estudados é o de dobra de período. A razão de ser tão importante vem do fato de apesar de não ser a única, aparece em diferentes sistemas e é caracterizado por alguns números que não variam de sistema para sistema.

Para a explicação desse mecanismo fazemos uso de um diagrama de bifurcação, importante construção geométrica que nos permite uma visualização do comportamento do sistema com variações em um de seus parâmetros. Para construí-lo, usa-se uma variável que pode representar bem o comportamento do sistema, no caso do pêndulo foi usada a velocidade angular no início do ciclo da força externa. Além disso, define-se um dos três parâmetros cuja influência deseja-se estudar. Para cada valor desse parâmetro simula-se o comportamento do sistema, e após o término do comportamento transiente, representa-se em um gráfico os resultados para a variável escolhida durante algum tempo. O resultado é um diagrama que nos fornece as diferenças no comportamento do

sistema com relação ao parâmetro escolhido. Na figura 2 abaixo temos um exemplo do digrama de bifurcação para o pêndulo forçado e amortecido.

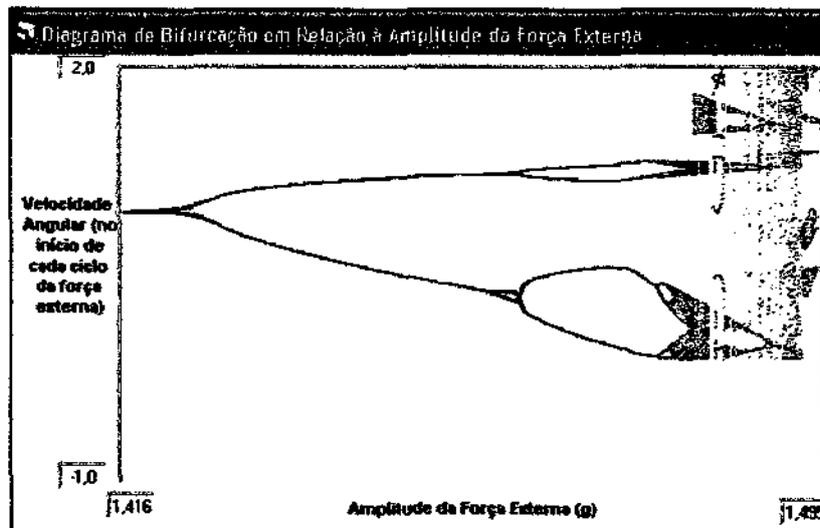


Figura 2: Exemplo de diagrama de bifurcação para o pêndulo para uma condição inicial

Tal diagrama é bastante complexo, com outros fenômenos além da dobra de período, por isso a explicação se concentra na sua metade a direita. Observa-se que para os menores valores de amplitude da força externa mostrados tem-se um comportamento único da variável, entretanto, com o aumento do valor da amplitude ocorre uma primeira bifurcação, também chamada dobra de período. Essa bifurcação ocorre porque agora tem-se a variável alternado entre dois valores sendo o período necessário para completar um ciclo dobrado. Um pouco mais adiante tem-se uma nova bifurcação, passando a variável a assumir quatro valores diferentes no mesmo intervalo de tempo. Mais a direita do gráfico nota-se um fato muito importante: tais bifurcação continuam acontecendo indefinidamente, entretanto o intervalo entre diferentes bifurcação diminui cada vez mais. O resultado após um certo ponto limite é um comportamento em que nossa variável apresenta período infinito, ou seja, assume todos os valores reais possíveis dentro do intervalo sem nunca se repetir, nesse ponto estamos em comportamento caótico.

Entretanto, existe ainda outro fenômeno associado a esse mecanismo muito interessante que são as janelas de periodicidade. Após atingir o comportamento caótico o sistema não permanece nele para todos os outros valores de g , no diagrama pode-se perceber que, em determinados momentos, a região caótica no diagrama de bifurcação representada por zonas cobertas por pontos, dá lugar a zonas onde novamente tem-se comportamento periódico, mas desta vez com períodos diferentes, essas são as chamadas janelas de periodicidade. Nelas podemos perceber que ocorre novamente o fenômeno de dobra de período resultando novamente em uma nova zona caótica.

Uma das constantes mais importantes no mecanismo de dobra de período é chamada de número de Feigenbaum em homenagem ao pesquisador que a definiu em 1978. Esse número mede a razão entre dois valores para os quais ocorre bifurcação e é definido da seguinte forma:

$$\delta = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{g_k - g_{k-1}}{g_{k+1} - g_k} = 4,6692016091029909.....$$

2.4 Dimensão do atrator

Muitos dos atratores apresentam geometria bastante complexa, tal fato pode ser ilustrado com as figuras da seção de Poincaré para estados caóticos do pêndulo. Tais figuras podem muitas vezes ser da forma de um fractal, uma estrutura primeiramente descrita por Cantor cuja principal característica é em caso planar apresentar área finita, mas perímetro infinito ou no caso espacial volume finito e área superficial infinita. Outra propriedade bastante comum em fractais é sua simetria consigo mesmo, ou seja, aplicando-se um chamado “zoom” em uma de suas partes observa-se que sua geometria se repete. Tal propriedade de fractais, entretanto, não ocorre necessariamente em todos eles.

Uma das formas mais importantes de classificação dessas estruturas complexas é através de sua dimensão. Tal conceito é conhecido de uma forma básica no caso de figuras simples que se apresentam geralmente em uma, duas ou três dimensões. Existem, entretanto, várias definições para definições, e todas devem apresentar as seguintes propriedades:

Dados dois conjuntos quaisquer A e B :

- Se $A \subset B \Rightarrow d(A) \leq d(B)$;
- O conjunto nulo tem dimensão zero;
- $d(A \times B) = d(A) + d(B)$;
- Se $f: A \rightarrow B$, f diferenciável e inversível $\Rightarrow d(f(A)) = d(A)$.

Estruturas fractais apresentam dimensões não-inteiras. Atratores de sistemas em comportamento caótico que não apresentam dimensão inteira são denominados atratores estranhos.

Além disso, outro fato importante é que em sistemas dinâmicos o atrator encontra-se envolvido em um espaço n dimensional, embora sua dimensão seja, por sua vez, menor. No caso de pêndulos, apesar do atrator estar em um espaço de fase tridimensional pode-se calcular sua dimensão diretamente através da seção de Poincaré e somar um ao resultado obtido. Tal adição se deve à dimensão correspondente a da variável φ , não representada na seção de Poincaré.

Nesse trabalho foram utilizadas apenas duas definições de dimensão: a de capacidade e a de correlação.

A dimensão de capacidade é definida da seguinte forma: supondo-se uma linha, ela pode ser dividida em $N(\xi)$ partes iguais de comprimento igual a ξ . Sendo L o comprimento total da linha temos:

$$N(\varepsilon) = L \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

No caso de uma área temos:

$$N(\varepsilon) = L^2 \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^2$$

Em um caso geral temos:

$$N(\varepsilon) = L^d \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^d$$

Isolando d e aplicando o limite temos a definição de dimensão de capacidade:

$$d_c = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}$$

A dimensão de correlação baseia-se na seguinte idéia: seja uma quantidade de pontos de um conjunto. O número de vizinhos de um ponto varia mais com o raio que se usa para identificar esse vizinho quanto maior for a dimensão desse conjunto. Matematicamente para obtém-se tal dimensão da seguinte forma: primeiro define-se a função de correlação:

$$C(R) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2}{N} \sum_{i,j=1}^N H(R - |x_i - x_j|)$$

Onde H é a função de Heaviside que simplesmente conta a uma distância menor ou igual a R de um outro ponto dado. Matematicamente é definida por:

$$H(y) = \begin{cases} 1, & y \geq 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases}$$

Por fim, temos a dimensão de correlação dada por:

$$d_G = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{\log C(R)}{\log(R)}$$

Pode-se demonstrar que essas duas definições de dimensão fornecem resultados iguais no caso de pontos uniformemente distribuídos pela figura geométrica analisada.

2.5 Expoentes de Lyapunov

2.5.1 Definição

Como já foi explicado na introdução, uma das principais características do comportamento caótico de sistemas dinâmicos é sua sensibilidade a condições iniciais. Trajetórias oriundas de duas condições próximas divergem em média exponencialmente com a evolução temporal. Para estudar essa dependência foi definida uma grandeza matemática denominada expoente de Lyapunov em homenagem ao seu criador.

Os expoentes de Lyapunov medem a média da razão de divergência ou convergência de órbitas próximas no espaço de fase. Todo sistema dinâmico apresenta um número de expoentes de Lyapunov igual ao número de variáveis que o descrevem. Para que um sistema seja considerado caótico basta que apenas um de seus expoentes seja maior do que um.

A soma dos expoentes de um sistema representa a taxa de variação de volume de um elemento de volume do espaço de fase. Dessa forma todos os sistemas dissipativos devem apresentar essa soma menor do que um. Assim o sistema do pêndulo forçado deve apresentar três expoentes de Lyapunov, sendo pelo menos um maior do que um e a soma dos três menor do que zero.

2.5.2 Definição matemática

Seja um sistema dinâmico com espaço de fase n -dimensional. Marca-se nesse espaço de fase uma esfera e avalia-se sua evolução temporal. Após um intervalo de tempo, tem-se um elipsóide n -dimensional devido às deformações do espaço de fase. O i -ésimo expoente de Lyapunov é então definido como:

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \frac{p_i(t)}{p_i(0)}$$

Onde p_i é o comprimento do i -ésimo eixo principal do elipsóide. Em geral, os expoentes são ordenados de forma decrescente.

2.6 Mecanismo de “Esticar e Dobrar” e o Mapa de Ferradura

Como já foi citado na subsecção anterior, um sistema dinâmico para ser dissipativo e caótico deve apresentar, necessariamente, expoentes de Lyapunov que satisfaçam a duas condições:

- Um deles deve ser maior do que um;
- A soma de todos deve ser menor do que zero.

No entanto, observa-se que dessas duas condições surge o seguinte problema: dada uma área ou volume no espaço de fase, com o passar do tempo essa área deve crescer em uma direção em média exponencialmente, mas ao mesmo tempo, seu volume sempre diminui. Dessa forma existe um confinamento de algo que se torna infinitamente maior em um espaço limitado. Tal fato, a primeira vista, pode parecer um paradoxo, mas é na verdade o responsável pela irregularidade e sensibilidade às condições iniciais do comportamento caótico em sistemas dissipativos.

Uma forma bastante simples de se observar tal fenômeno foi proposta por Smale em 1963 e é chamado mapa de ferradura. Tal mapa é constituído por uma seqüência de operações:

- Inicia-se com um quadrado com lado iguais a a ;
- Estica-se um lado do quadrado até que ele tenha o tamanho maior do que $2a$, enquanto o outro lado diminui para um tamanho menor que $a/2$;
- Agora dobra-se esse retângulo de forma a colocá-lo a área do quadrado inicial.
- Reinicia-se o processo.

A figura 3 abaixo, em sua parte esquerda, ilustra as primeiras duas etapas dessa operação:

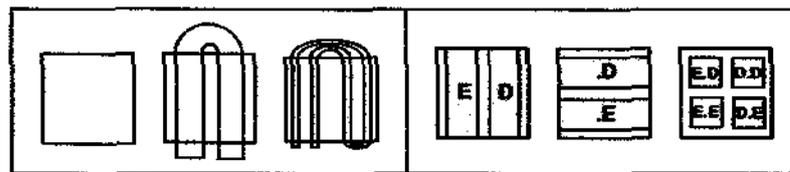


Figura 3: Mapa de Ferradura

Concentrando-se na parte esquerda da figura, a primeira figura tem destacada as áreas resultantes da primeira operação do processo. Esses dois retângulos foram denominados direito e esquerdo (D e E), observa-se que o retângulo foi dobrado em direção a direita. Uma questão natural que surge é de onde vieram os pontos destes dois retângulos. Para resolvê-la faz-se um processo inverso, nesse caso temos como resposta outros dois retângulos desta vez horizontais que recebem o nome de acordo se irão ser iterados para a faixa a direita (.D) ou a esquerda (.E).

Na verdade o interesse está em buscar conjuntos invariantes, ou seja, conjuntos de pontos tais que iterados tanto para frente quanto para trás mantenha-se no domínio em que o estudo está concentrado. No caso de apenas uma operação para frente e para trás, o resultado dos pontos invariantes é a intersecção das linhas verticais com as horizontais formando quatro quadrados mostrados na figura 3. Na verdade, no limite de infinitas operações temos como conjunto invariante um conjunto de infinitos pontos de forma a formar um conjunto de Cantor, de geometria fractal.

Nessa mapa, portanto, pode-se observar muito bem as conseqüências do fenômeno de esticar e dobrar. A sensibilidade às condições iniciais está principalmente fundada no fato de que, se escolhermos dois pontos, em algum momento um deles passará pela dobra e outro não, de forma a gerar grande discrepância entre as trajetórias. Além disso observa-se que o conjunto invariante em um comportamento caótico acaba apresentando uma geometria bastante complicada devido exatamente ao efeito de esticar e dobrar, sendo de geometria fractal.

No caso dos atratores do pêndulo ocorre algo análogo ao caso da ferradura. Em uma direção eles tendem a crescer infinitamente, mas como sua área tende a zero eles dobram-se sobre si mesmos de modo a conseguir satisfazer as duas propriedades.

A irregularidade e sensibilidade às condições iniciais agora são facilmente explicadas. Voltando ao mapa de ferradura, supondo dois pontos inicialmente próximos, devido ao constante estiramento, em pouco tempo eles estarão muito distantes, além disso, devido aos sucessivos dobramentos, após certo tempo ficaria extremamente complicado prever sua próxima posição.

2.7 Relação entre expoentes de Lyapunov e dimensão do atrator

A relação entre essas duas entidades matemáticas foi proposta pela primeira vez por Kaplan e Yorke em 1979, sua explicação é simplificada com o uso de um exemplo: seja uma região no espaço de fase sob a influência de um sistema dissipativo caótico bidimensional. Sendo uma área inicial marcada, após algum tempo, em uma das direções, pela definição de expoente de Lyapunov, tem-se um crescimento por um fator de $e^{\lambda_1 t}$, sendo λ_1 maior do que zero, enquanto na outra temos uma contração pelo fator $e^{\lambda_2 t}$ sendo λ_2 menor do que zero.

Da definição de dimensão capacitiva temos:

$$d_c = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\epsilon)}{\log(1/\epsilon)}$$

Agora simulando tal sistema como na figura 4 abaixo:

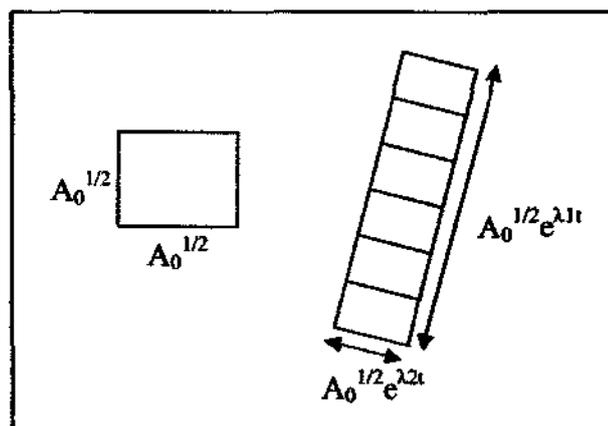


Figura 4: Relação entre dimensão capacitiva e expoente de Lyapunov

Pode-se agora escrever $N(\epsilon)$ e ϵ em função dos expoentes da seguinte forma:

$$N(\epsilon) = \frac{A_0 e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t}}{A_0 e^{2\lambda_2 t}} = e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t}$$

$$\epsilon = A_0^{1/2} e^{\lambda_2 t}$$

Aplicando na definição da dimensão de capacidade temos a relação Kaplan-Yorke:

$$d_c = 1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

Que pode ser generalizada para:

$$d_c = j - \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_j}{\lambda_{j+1}}$$

Onde j é o índice do menor expoente não-negativo.

Desta forma os expoentes de Lyapunov fazem a ligação entre a estrutura fractal e a propriedade de sensibilidade a condições iniciais.

2.8 Caracterização de Estados Caóticos por Reconstrução do Atrator

Na maioria das situações práticas não se tem conhecimento das equações diferenciais que regem o comportamento de um sistema dinâmico. Em muitos casos nem se sabe ao menos o número de graus de liberdade do sistema. Nesse caso, uma outra abordagem é necessária para realizar-se um estudo.

Podemos tirar grandes informações sobre o comportamento de um sistema através de séries temporais de uma determinada quantidade dinâmica do sistema, mesmo que tal quantidade não apareça explicitamente nas equações diferenciais do sistema.

O estudo das séries temporais poderia partir de duas formas. A primeira seria através do espectro de potência. Este, entretanto, apresenta difícil abordagem no caso não linear como já foi citado em sua descrição. No caso de comparação com outros dados colhidos experimentalmente, surge o problema da sensibilidade a condições iniciais que geraria grandes desvios com pequenas diferenças nas condições.

A solução mais usada atualmente é prosseguir da seguinte maneira: primeiro reconstrói-se o atrator estranho a partir da série temporal e depois analisa-se esse atrator reconstruído já que é possível demonstrar que certas propriedades suas, como dimensão e expoente de Lyapunov são iguais ao atrator verdadeiro.

Para reconstruir o atrator, deve-se aumentar a dimensão da série temporal. Para isso faz-se uso de coordenadas “time-delay” que são na verdade vetores com cada uma das coordenadas iguais a um valor da série temporal em um determinado tempo. Sendo os vetores da seguinte forma:

$$y_1 = (\omega(t_1), \omega(t_1 + \tau), \omega(t_1 + 2\tau), \dots, \omega(t_1 + (n-1)\tau))$$

$$y_2 = (\omega(t_2), \omega(t_2 + \tau), \omega(t_2 + 2\tau), \dots, \omega(t_2 + (n-1)\tau))$$

Em que τ é chamado de atraso temporal (“time-delay”).

Duas dificuldades principais surgem desse método: a escolha da dimensão de nossos vetores e a escolha do valor do atraso temporal.

A escolha da dimensão do vetor é difícil em casos em que não sabemos o número de dimensões totais envolvidas em nosso sistema. A solução para isso está em reconstruir atratores com várias dimensões de englobamento, até que a dimensões do atrator reconstruído se estabilize. No caso do pêndulo não temos esse problema uma vez que sabemos que o sistema é tridimensional.

Já para se encontrar um bom valor para o atraso temporal, a dificuldade é maior. Pequenos valores tornam as coordenadas muito próximas, fazendo com que todos os valores estejam contidos na diagonal principal. Já valores muito grandes fazem com que as coordenadas percam seu sentido devido às consequências do fenômeno de esticar e dobrar. Existem alguns métodos propostos na literatura para se encontrar um valor satisfatório de atraso temporal, mas nenhum deles encontra um verdadeiramente correto. O que ocorre na maioria dos experimentos é o uso de um desses métodos apenas para se encontrar um valor satisfatório e depois se busca um mais próximo do ideal através de tentativa e erro.

2.9 Travamento de Frequência e Mapa de Círculo

O fenômeno travamento de frequência é ilustra um dos mais interessantes fatos observados em sistemas dinâmicos não-lineares que é a sincronização de osciladores, algo notado pela primeira vez por Huygens no século dezessete quando observou a sincronização de dois relógios de pêndulo colocados na mesma parede. No caso do pêndulo sob ação de uma força externa, tal fenômeno se manifesta para alguns conjuntos de parâmetros, fazendo com que a frequência natural de oscilação do sistema torne-se “travada” como um produto entre uma razão de números inteiros e a frequência

de oscilação da força externa aplicada ao sistema. Tal travamento permanece forte mesmo quando submetemos alguns dos parâmetros a alguma variação.

Para um estudo mais profundo fazemos uso de uma construção conhecida como mapa de círculo ou mapa padrão construído a partir da seguinte idéia. A seção de Poincaré pode ser modelada como um mapa bidimensional:

$$\theta_{n+1} = G_1(\theta_n, \omega_n)$$

$$\theta_{n+2} = G_2(\theta_n, \omega_n)$$

Após o término do período transiente pode-se estudar o mapa como se fosse unidimensional:

$$\theta_{n+1} = G_1(\theta_n, f(\theta_n)) = F(\theta_n)$$

Em que F é chamada de mapa do círculo sendo $F: [0,1] \rightarrow [0,1]$

Para um certo intervalo de amplitudes e frequências de força externa podemos considerar o mapa de círculo uma boa aproximação para o pêndulo forçado. A equação de diferenças conhecida como mapa padrão é dada por:

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \Omega - \left(\frac{K}{2\pi} \right) \text{sen}(2\pi\theta_n) \quad \text{mod } 1$$

Onde temos: Ω frequência de rotação na ausência da não-linearidade, e K fator de acoplamento devido exatamente a não-linearidade. Com auxílio desse mapa observa-se os seguintes comportamentos:

- Se $K = 0$ e Ω racional tem-se um movimento periódico;
- Se $K = 0$ e Ω irracional tem-se um comportamento denominado quase-periódico, caracterizado por θ assumir todos os valores reais possíveis sem, entretanto, apresentar sensibilidade a condições iniciais;
- Se K diferente que zero, observa-se que mesmo usando Ω irracional temos, para alguns valores, um movimento periódico, esse é o chamado fenômeno do travamento de frequência.

Ainda em relação à esse comportamento do mapa de círculo é definido uma quantidade denominada número de rotação que mede a mudança média de fase em cada iteração. Matematicamente define-se:

$$W = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\theta_n - \theta_0}{n} \right)$$

Como existem vários intervalos que apresentam o fenômeno de travamento de frequência, é necessária uma nova construção matemática de forma a podermos visualizá-los. Tal construção é denominada Línguas de Arnold em homenagem ao pesquisador que a inventou, e consistem em um diagrama plano tendo nas direções ortonormais os valores de K e Ω . Para cada uma das combinações itera-se o mapa padrão e, caso, o resultado seja um comportamento periódico o ponto é marcado no gráfico.

Quando observamos tal diagrama construído temos, para o valor de $K=1$ temos travamento de frequência para todos os números de rotação racionais. Isso é melhor visualizado com um diagrama de $W \times \Omega$ denominado Escadaria do Diabo. Para valores de K maiores do que um, tem-se um mapa de círculo não-inversível, uma condição necessária para se verificar comportamento caótico.

No caso do pêndulo, por sua vez, observa-se tal fenômeno quando a média das velocidades angulares do pêndulo torna-se uma razão entre números inteiros da frequência da força externa. Um gráfico dessa quantidade em função da amplitude da força externa pode nos revelar áreas como bases, em que ocorre um travamento desse valor com relação à frequência da força externa. Uma outra abordagem pode ser feita avaliando-se diretamente os valores do número de rotação, de acordo com sua definição.

CAPÍTULO 3 – PROGRAMA E ALGORÍTMOS UTILIZADOS

Nesse capítulo será apresentada uma breve descrição da ferramenta computacional construída para estudo do comportamento do sistema dinâmico do pêndulo forçado e amortecido, com ênfase em alguns dos algoritmos utilizados.

3.1 Descrição do programa desenvolvido e utilizado

Como base para o estudo do comportamento de nosso sistema dinâmico optou-se por construir uma ferramenta computacional nova sob a plataforma Visual Basic®. Tal opção teve como principal objetivo um melhor aprendizado, não apenas com os resultados obtidos, mas também com os algoritmos a serem usados para o estudo de um sistema dinâmico, suas dificuldades e limitações.

Tal software foi construído a medida que o estudo se aprofundava e não tinha como objetivo principal uma otimização de esforço e tempo computacional. Além disso, não houve uma preocupação inicial em criar mecanismos de integração com outros softwares com objetivo de se importar ou exportar dados.

Sua principal função é resolver, através do método numérico conhecido por Runge-Kutta de quarta ordem, o sistema de equações diferenciais que rege o sistema estudado e, com os resultados, montar todos os diagramas citados no capítulo 2. O usuário tem de fornecer todos os parâmetros do sistema, além das condições iniciais e condições de iteração para o método numérico. As opções de saída se apresentam em “janelas” diferentes e são ativadas e desativadas através de um menu. A figura 5 abaixo apresenta uma tela normal do programa em funcionamento:

O programa está habilitado a fornecer os seguintes diagramas e dados de saída:

- Simulação do sistema físico;
- Espaço de fase;
- Diagrama de Poincaré;
- Séries temporais do ângulo θ e velocidade angular ω do pêndulo;
- Diagrama das bacias de atração;
- Diagrama de bifurcação;
- Diagrama de $\langle \omega \rangle \times g$ para observação do travamento de frequência;
- Espectro de potência;
- Maior expoente de Lyapunov de um atrator
- Dimensões de capacidade e de correlação para atratores

Além disso, através de um menu específico, existe a opção de estudo do mapa de círculo. O programa pode não apenas iterá-lo, mas também fornecer os diagrama de línguas de Arnold e escadaria do diabo.

A seguir, a tela padrão do programa com o espaço de fase e simulação do sistema físico para as condições escolhidas pelo usuário à direita no “painel de controle”.

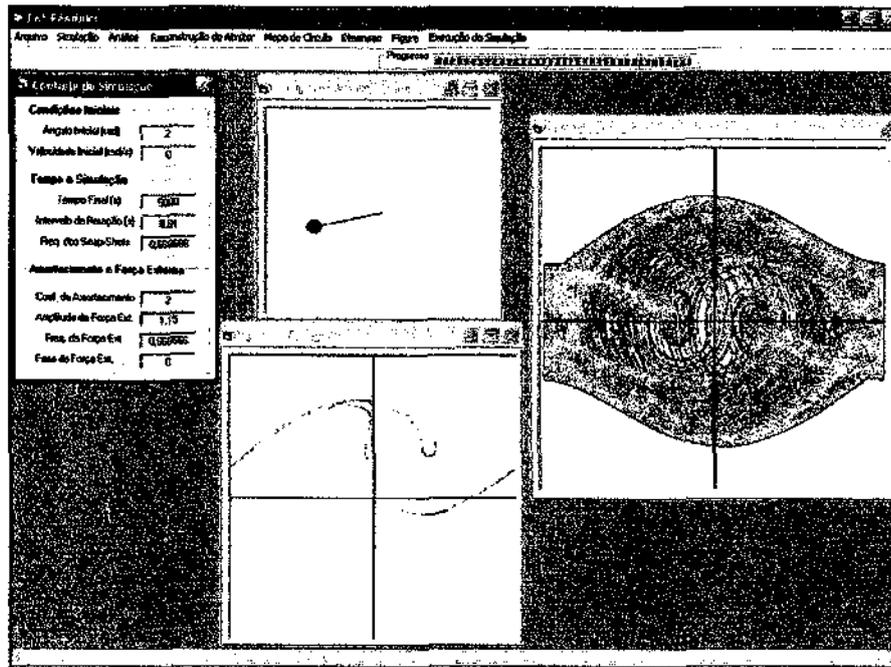


Figura 5: Exemplo de uso do programa

Os algoritmos para construção de cada um dos diagramas se baseiam totalmente nas definições de cada um deles, sem grandes detalhes que mereçam ser mais detalhados com exceção dos que estão descritos nas próximas seções.

3.2 Algoritmo para cálculo de dimensões

Como já mencionado no capítulo dois, tem-se interesse em calcular a dimensão dos atratores estranhos a partir da seção de Poincaré. Na verdade, se usa duas definições diferentes de dimensões: de capacidade e de correlação.

Para efetuar o cálculo destas duas quantidades, o programa, quando requisitado a desenhar o diagrama de Poincaré, guarda em memória todos os pontos de tal diagrama.

A partir desse ponto, quando requisitado a calcular dimensão no menu apropriado o programa realiza um cálculo bastante similar as idéias de cada definição de dimensão.

No caso da dimensão de capacidade, o programa cria um quadrado virtual em torno do primeiro ponto armazenado com lado igual a ϵ e busca, dentre os outros pontos, quais estão contidos nesse quadrado, sendo tais pontos, além do ponto inicial, são marcado virtualmente. O programa passa, então, ao próximo ponto não marcado e assim por diante até que todos os pontos estejam marcados. Ao final, conta-se o número de quadrados necessários para se cobrir todos os pontos. Tal operação repete-se para diferentes valores de ϵ , enquanto os resultados de $\log(N(\epsilon))$ e $\log(1/\epsilon)$ são colocados na forma de um gráfico. Ao final o usuário deve optar dentre quais pontos no gráfico ele deseja fazer um ajuste linear pelo método das diferenças quadradas a fim de calcular o melhor valor para a dimensão.

No caso da dimensão de correlação, por sua vez, mede-se o resultado para a função de correlação para diferentes valores de R de modo a construir o gráfico de $\log(C(R)) \times \log(R)$. O usuário novamente é perguntado de forma a escolher os pontos para um melhor ajuste linear e conseqüente cálculo das dimensões.

3.3 Algoritmo para cálculo do maior expoente de Lyapunov de atratores

Para tal cálculo foi utilizado o algoritmo descrito na referência [2], sendo adaptado apenas da linguagem Java para Visual Basic. Seu princípio está explicado nos próximos parágrafos.

Da definição de expoente de Lyapunov tem-se que dado duas condições iniciais e sua distância representada pela função $\delta x(t)$ evolui da seguinte forma:

$$\|\delta x(t)\| \approx e^{\lambda t} \|\delta x(0)\|$$

Admite-se que tal equação seja válida uma vez que o maior expoente é o maior responsável pelo aumento da distância entre dois pontos com o tempo. Assim temos:

$$\lambda_1 = \left(\frac{1}{t} \right) \log \frac{\|\delta x(t)\|}{\|\delta x(0)\|}$$

Dessa forma para o cálculo do maior expoente de Lyapunov, o que fazemos é determinar um vetor ligando dois pontos do diagrama de Poincaré e o tamanho dessa distância. A seguir, mede-se essa mesma distância após uma certa variação de tempo. Com esses dois dados calcula-se uma primeira parcela da equação acima. O próximo passo é encontrarmos um novo vetor menor e ver a evolução deste e sua contribuição. Prosseguindo tal método para vários vetores tem-se um valor médio para o maior expoente de Lyapunov do sistema.

CAPÍTULO 4 – RESULTADOS E ANÁLISES

Assim como descrito na introdução, o objetivo principal do trabalho foi aprender os principais conceitos da dinâmica caótica, exemplificando com um estudo do comportamento do sistema do pêndulo forçado. As próximas seções discutem cada um dos aspectos mais importantes da teoria descrita no capítulo dois que foram observados com auxílio do programa explicado no capítulo três.

4.1 Transição para o caos pela rota de dobra de período

A primeira investigação feita no sistema de pêndulo foi com relação ao seu comportamento em relação à amplitude da força externa. Para isso, a principal ferramenta utilizada foi o diagrama de bifurcação. Com ele, foi feito um estudo do comportamento do pêndulo para cada uma das situações usando a simulação do sistema físico além do espaço de fase e seção de Poincaré.

A mais importante observação se deu no sentido de ver o mecanismo de transição de um sistema periódico para o caótico através da dobra de período. As figuras de 6 a 9 que se seguem ilustram bem esse mecanismo:

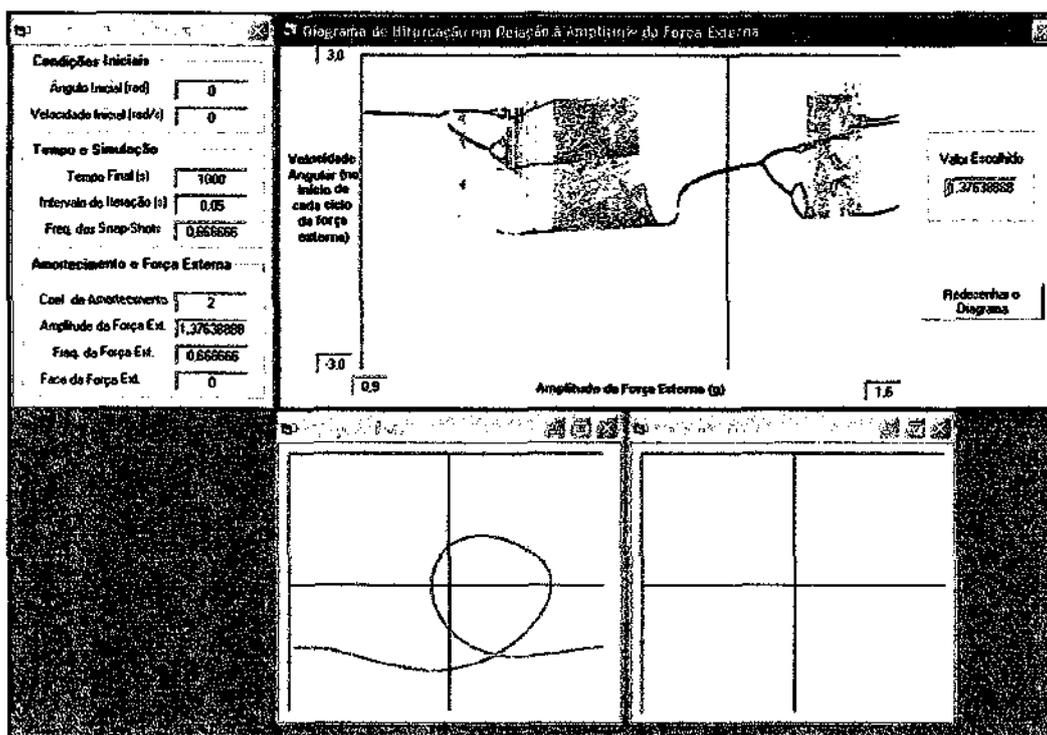


Figura 6: Situação de período 1

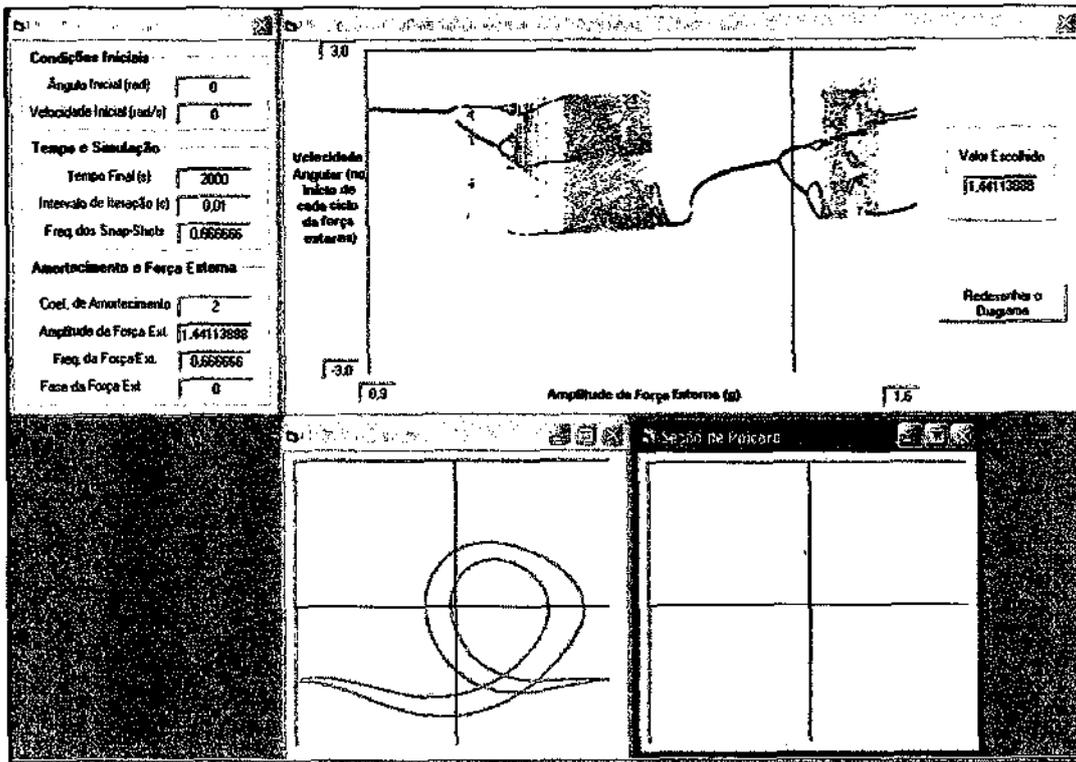


Figura 7: Situação de período 2

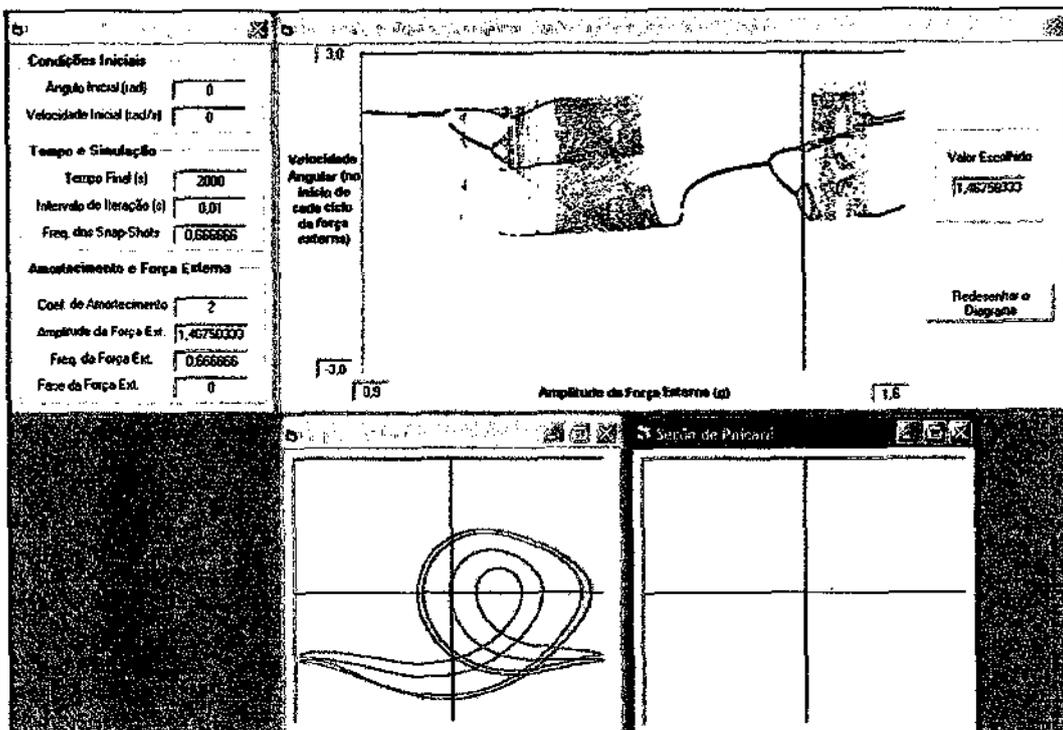


Figura 8: Situação de período igual a 4

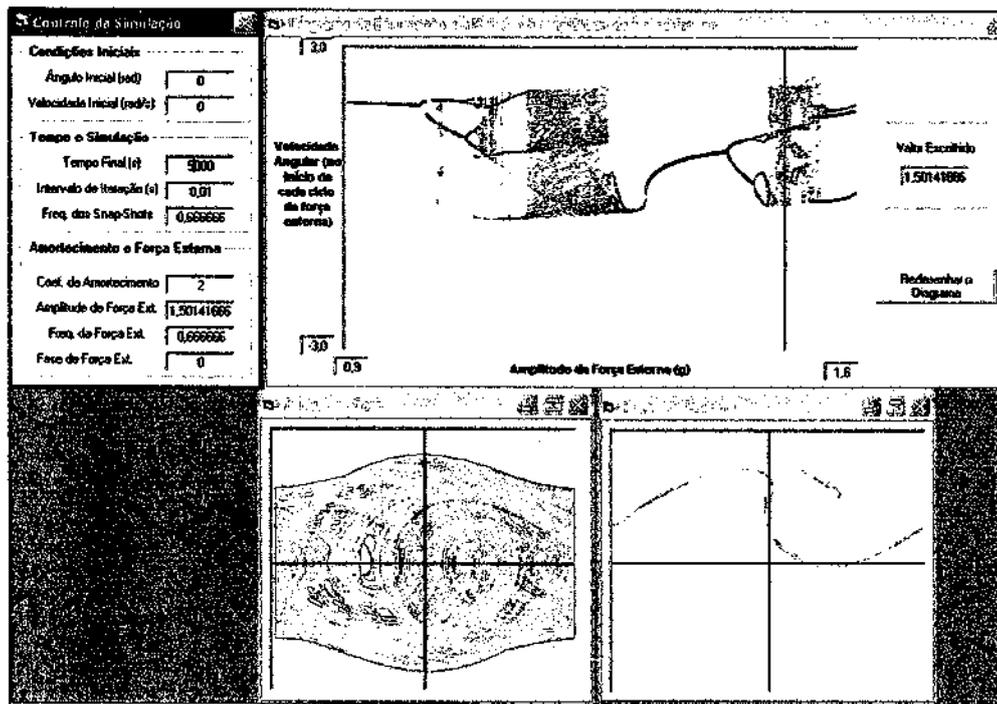


Figura 9: Situação de comportamento caótico

Como se pode observar a partir das figuras que são as telas de saída do programa, a diferença entre elas está apenas na amplitude da força externa aplicada, os outros parâmetros não variam: $q = 2$ e $\omega_D = 2/3$, nem as condições iniciais, $\theta = 0$, $\omega = 0$.

No caso da figura 6, tem-se um comportamento periódico de frequência igual a frequência da força externa. Dessa forma, observa-se um espaço de fase como apenas uma linha e, conseqüentemente o diagrama de Poincaré como apenas um ponto. Aumentando um pouco a amplitude da força externa tem-se uma primeira dobra de período, figura 7, o espaço de fase como uma curva dupla e o diagrama de Poincaré como dois pontos. Na figura 8, tem-se o período igual a quatro vezes o período inicial e quatro pontos na seção de Poincaré. Para o último caso, já na figura 9, temos um comportamento caótico, que se apresenta com o espaço de fase totalmente preenchido e o diagrama de Poincaré como um conjunto de pontos.

Com auxílio do diagrama de bifurcação tentou-se obter a constante de Feigenbaum, entretanto não foram obtidos resultados satisfatórios uma vez que, a complexibilidade da dinâmica do pêndulo e a erros do método numérico tornam possíveis apenas a obtenção dos valores para as primeiras bifurcações e não para as seguintes, que forneceriam um valor melhor, uma vez que a constante é definida para um limite.

4.2 Bacias de atração

Para valores de g maiores do que 1,3 tem-se duas principais bacias de atração (1). Elas podem ser diferenciadas pela média de velocidade angular do pêndulo, fisicamente isso pode ser visualizado da seguinte forma, para esses parâmetros o pêndulo segue um comportamento em que realiza voltas completas todas no mesmo sentido: ou horário, ou anti-horário, daí as diferentes bacias de atração. Tal comportamento é ilustrado pela figura 10, em que aparece o espaço de fase para duas condições iniciais de bacias diferentes sobrepostas, cada uma pertencente a uma bacia.



Figura 10: Esquema dos dois possíveis atratores e bacias de atração para g valendo 1,3 e 1,48 respectivamente

Ao lado aparecem as bacias de atração calculadas para pontos pertencentes ao espaço $[-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$, para dois valores de amplitude da força externa, 1,3 e 1,48, respectivamente. Deve se observar a fragmentação da fronteira entre as duas bacias com o aumento desse parâmetro, á medida que se aproxima um comportamento caótico. De fato, no caso de um comportamento caótico temos fronteiras de geometria fractal.

Devido à existência dessas diferentes bacias de atração, deve-se observar que os diagramas de bifurcação variam de acordo com as condições iniciais mostradas. No caso do presente trabalho todos os diagramas estão construídos para apenas uma condição inicial. Isso foi feito principalmente para evitar equívocos, uma vez que quando sobrepõe-se diagramas de diferentes condições iniciais, análises equivocadas podem ser feitas. Um exemplo simples é no caso da área do diagrama de bifurcação próximo a $g = 1,3$, em que temos um movimento periódico de frequência igual à da força externa. Se houvesse sobreposição do diagrama poderia haver uma interpretação errônea de que o comportamento seria na verdade periódico com o dobro da frequência, uma vez que apareceria duas linhas, uma para cada bacia de atração.

4.3 Dimensões dos atratores

Assim como foi explicado nos diagramas anteriores foram calculadas as dimensões de capacidade e de correlação para diferentes atratores apresentados nas seções de Poincaré. A figura 11 abaixo, mostra um exemplo do programa após esses cálculos:

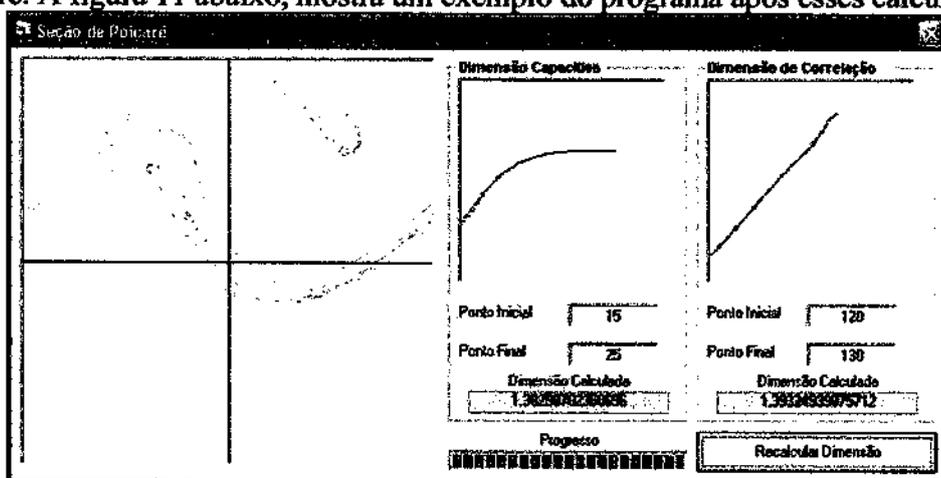


Figura 11: Dimensões para o atrator com $g = 1,4954$, $q = 4$, $\omega_D = 2/3$

No caso apresentado temos um resultado que bate com o da literatura (1). Tais experiências foram muito válidas no sentido de ilustrar as diferentes dimensões de figuras como fractais, principalmente o fato de não serem inteiras. Os resultados,

entretanto, são bastante limitados no sentido de fornecer valores numéricos precisos. Tal meta não era o objetivo do trabalho, entretanto os principais fatores são: em primeiro lugar a limitação do número de pontos, quanto maior a exatidão requerida maior deve ser o número de pontos do atrator considerado, isso representa o uso de uma grande quantidade de memória; outro fator de limitação é o ajuste linear no sentido de se escolher o melhor intervalo de valores para realizá-lo, um algoritmo que calculasse vários ajustes e escolhesse o melhor seria mais indicado.

4.4 Máximo Expoente de Lyapunov

Foram feitos cálculos com o algoritmo descrito no capítulo três. Um exemplo está na figura 12 abaixo. Não se pode ignorar, entretanto a dependência desse resultado com os pontos iniciais usados e o critério de definição do que é uma distância grande o suficiente de modo a se renormalizar o vetor que estamos acompanhando. Resultados mais precisos seriam obtidos com um teste abrangendo diferentes condições iniciais e tamanho dos vetores considerados, mas os obtidos por sua vez são suficientes para os objetivos previstos.

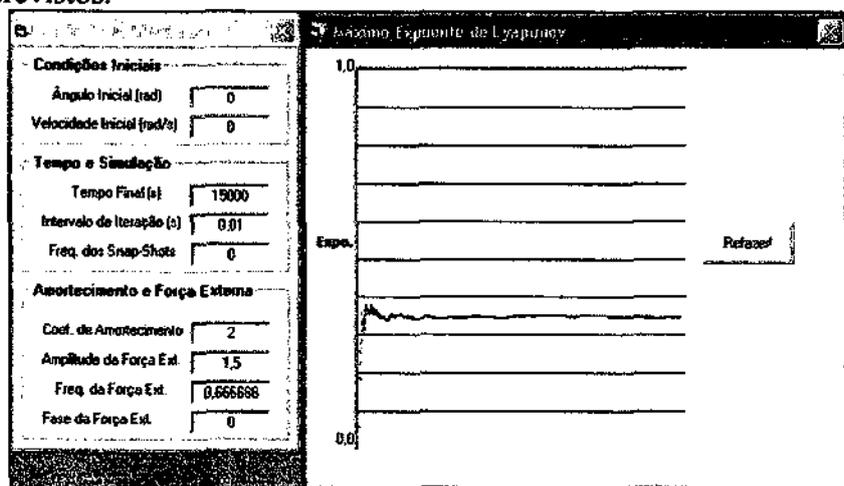


Figura 12: Exemplo do cálculo do maior expoente de Lyapunov a partir das equações diferenciais

4.5 Reconstrução do atrator a partir da série temporal

Foram feitas apenas reconstruções geométricas dos atratores, sem preocupações iniciais em se medir suas propriedades topológicas e compará-las aos dos atratores verdadeiros sendo essas próximas etapas a serem realizadas.

Na figura 13 abaixo estão dois exemplos de reconstrução dos atratores para um comportamento periódico e caótico. Observa-se que tais atratores realmente não se apresentam de forma geométrica similar aos verdadeiros, mas estão conforme os previstos pela literatura (1), isto é, no caso de órbitas periódicas como linhas fechadas, uma vez que o atrator real tem dimensão igual a um, e no caso caótico como um conjunto de linhas que devem apresentar dimensão fracionária assim como o atrator. Cruzamentos aparecem a primeira vista, mas deve se levar em conta que está é uma representação de atratores tridimensionais, não existindo tais cruzamentos na verdade.

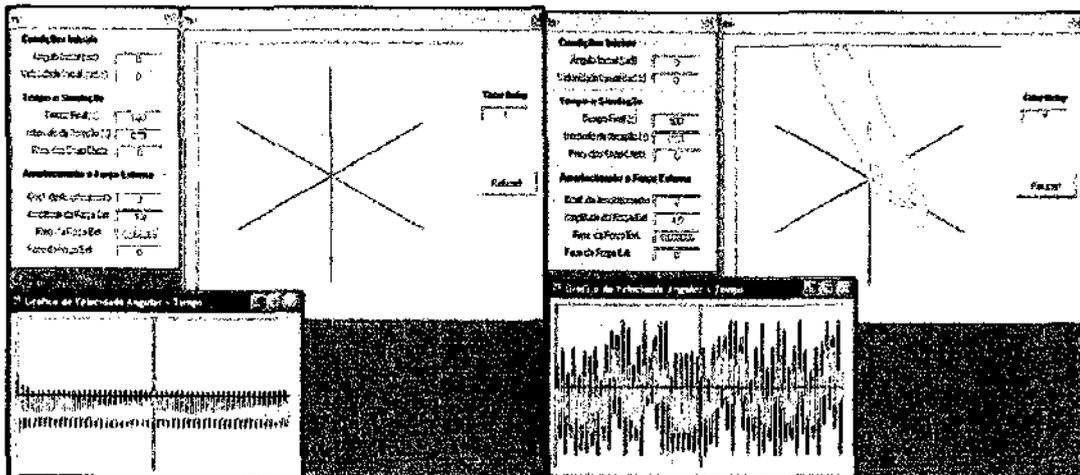


Figura 13: Reconstrução de atrator da série temporal

4.6 Mapa de Círculo e Travamento de Freqüência

O mapa de círculo foi estudado de forma a se verificar as três situações de comportamento possíveis no caso de um mapa inversível: periódica, quase-periódica e de travamento de freqüência. As duas situações finais, que são as mais importantes estão ilustradas na figura 14 abaixo:

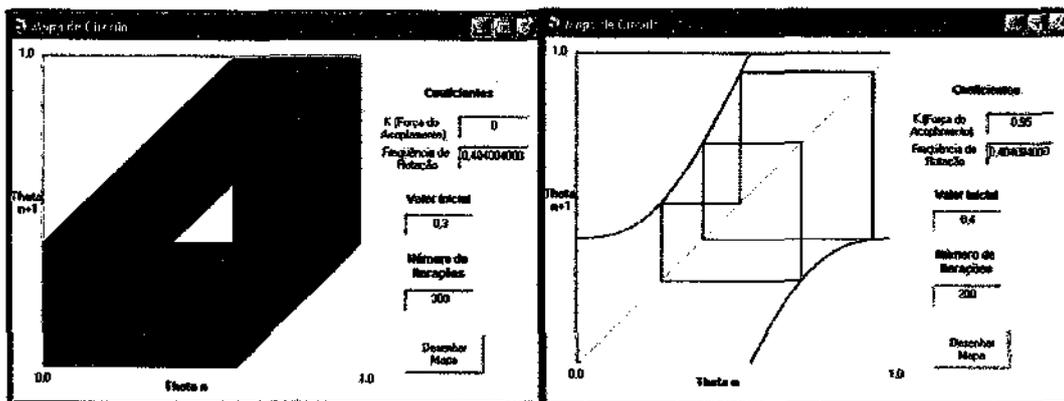


Figura 14: Mapa de círculo em dois comportamentos: quase-periódico (esquerda) e com travamento de freqüência(direita)

Podemos observar na figura a direita exatamente o caso de travamento de freqüência, com um valor de K diferente de zero e de Q irracional e comportamento periódico.

Para uma visualização mais completa do fenômeno de travamento de freqüência estão na figura 15 os diagramas de línguas de Arnold e escadaria do diabo obtidos.

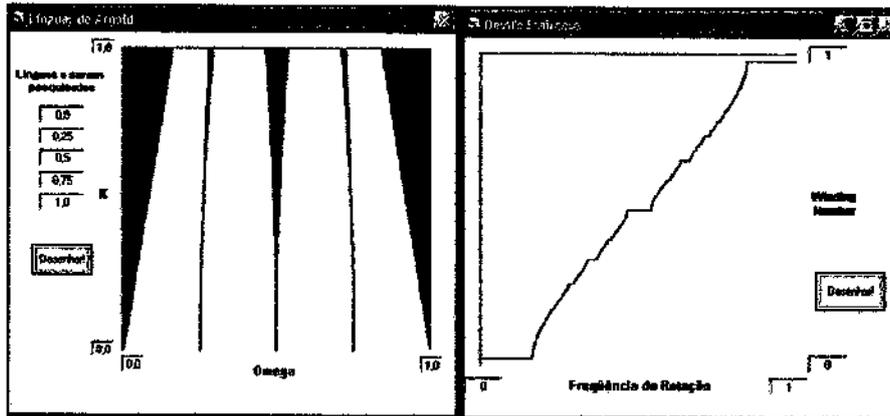


Figura 15: Línguas de Arnold e escadaria do diabo

No caso do pêndulo, foram realizados os diagramas descritos no capítulo dois, exemplificados com a figura 16 abaixo:

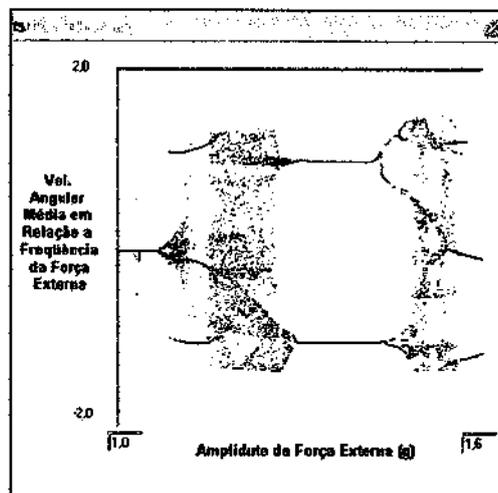


Figura 16: Diagrama evidenciando o travamento de frequência

Um observação importante é que nesse caso temos tal diagrama com sobreposição de resultados para duas condições iniciais diferentes, afim de se visualizar o comportamento como um todo. Nele é notável o aparecimento de dois patamares, cada um referente a uma condição inicial, onde a velocidade média angular permanece travada em relação à amplitude da força externa, exemplificando bem o fenômeno de travamento de frequência para o pêndulo.

CAPÍTULO 5 – CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Os resultados encontrados até o presente momento representam a primeira etapa no estudo maior que deve se concentrar no fenômeno de travamento de frequência utilizando mapas de acoplamento.

A escolha desse método de estudo aliado com investigação do sistema do pêndulo foi bastante proveitoso principalmente no fato de não só fixar e buscar pelos fenômenos, mas também na experiência com problemas enfrentados quando usamos simulações numéricas e ferramentas computacionais.

Grande parte dos fenômenos pôde ser bem observada como a dobra de período e dimensão do atrator, mesmo que com algumas limitações, entretanto outros ainda necessitam de mais desenvolvimento.

Entre os desenvolvimentos mais importantes estão com relação à algoritmos para cálculo de todos os expoentes de Lyapunov não apenas das equações diferenciais, mas também de séries temporais, algo de fundamental importância no caso de estudo futuros previstos em sistemas em que não se tem um modelo matemático conhecido.

Por fim, como já se foi dito o estudo seqüente se aprofundará no caso de acoplamento de dois osciladores como os estudados nesse trabalho, buscando principalmente entender o fenômeno de sincronização. Para isso serão usados principalmente mapas de círculos acoplados.

CAPÍTULO 6 – REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Baker G. L. & Gollub, J. P. *Chaotic Dynamics: An Introduction*, 2nd ed., Cambridge, 1996
2. Devaney R. L. *Chaos, Fractals, and Dynamics, computer Experiments in mathematics*, Adison-Wesley.
3. Knudsen C. *Lyapunov Exponents*, Department of Physics, Technical University of Denmark, 1999.
4. Wolf A., Swift J. B., Swinney H. L. & Vastano J. A., *Determining Lyapunov Exponents from a Time Series*, Physica 16D (1985) p.285-317.
5. Macau E. E. N. & Baroni M. P. A. *Uma Relação entre Sincronização no mapa de Círculo e os Números Racionais*.