



MINISTÉRIO DA  
CIÊNCIA, TECNOLOGIA,  
INOVAÇÕES E COMUNICAÇÕES



sid.inpe.br/mtc-m21c/2020/02.07.21.44-TDI

**FERRAMENTA COMPUTACIONAL PARA ANÁLISE  
DE RISERS FLEXÍVEIS DISPOSTOS EM CATENÁRIA  
COM UM ESCOAMENTO INTERNO BIFÁSICO  
GÁS-LÍQUIDO EM PADRÃO GOLFADAS**

Joseph Arthur Meléndez Vásquez

Tese de Doutorado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Ciência e Tecnologia de Materiais e Sensores, orientada pelos Drs. Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado, e Juan Pablo Julca Ávila, aprovada em 20 de fevereiro de 2020.

URL do documento original:

<<http://urlib.net/8JMKD3MGP3W34R/3UT726P>>

INPE  
São José dos Campos  
2020

## **PUBLICADO POR:**

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE

Gabinete do Diretor (GBDIR)

Serviço de Informação e Documentação (SESID)

CEP 12.227-010

São José dos Campos - SP - Brasil

Tel.:(012) 3208-6923/7348

E-mail: pubtc@inpe.br

## **CONSELHO DE EDITORAÇÃO E PRESERVAÇÃO DA PRODUÇÃO INTELLECTUAL DO INPE - CEPPII (PORTARIA Nº 176/2018/SEI-INPE):**

### **Presidente:**

Dra. Marley Cavalcante de Lima Moscati - Centro de Previsão de Tempo e Estudos Climáticos (CGCPT)

### **Membros:**

Dra. Carina Barros Mello - Coordenação de Laboratórios Associados (COCTE)

Dr. Alisson Dal Lago - Coordenação-Geral de Ciências Espaciais e Atmosféricas (CGCEA)

Dr. Evandro Albiach Branco - Centro de Ciência do Sistema Terrestre (COCST)

Dr. Evandro Marconi Rocco - Coordenação-Geral de Engenharia e Tecnologia Espacial (CGETE)

Dr. Hermann Johann Heinrich Kux - Coordenação-Geral de Observação da Terra (CGOBT)

Dra. Ieda Del Arco Sanches - Conselho de Pós-Graduação - (CPG)

Silvia Castro Marcelino - Serviço de Informação e Documentação (SESID)

### **BIBLIOTECA DIGITAL:**

Dr. Gerald Jean Francis Banon

Clayton Martins Pereira - Serviço de Informação e Documentação (SESID)

### **REVISÃO E NORMALIZAÇÃO DOCUMENTÁRIA:**

Simone Angélica Del Ducca Barbedo - Serviço de Informação e Documentação (SESID)

André Luis Dias Fernandes - Serviço de Informação e Documentação (SESID)

### **EDITORAÇÃO ELETRÔNICA:**

Ivone Martins - Serviço de Informação e Documentação (SESID)

Cauê Silva Fróes - Serviço de Informação e Documentação (SESID)



MINISTÉRIO DA  
CIÊNCIA, TECNOLOGIA,  
INOVAÇÕES E COMUNICAÇÕES



sid.inpe.br/mtc-m21c/2020/02.07.21.44-TDI

**FERRAMENTA COMPUTACIONAL PARA ANÁLISE  
DE RISERS FLEXÍVEIS DISPOSTOS EM CATENÁRIA  
COM UM ESCOAMENTO INTERNO BIFÁSICO  
GÁS-LÍQUIDO EM PADRÃO GOLFADAS**

Joseph Arthur Meléndez Vásquez

Tese de Doutorado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Ciência e Tecnologia de Materiais e Sensores, orientada pelos Drs. Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado, e Juan Pablo Julca Ávila, aprovada em 20 de fevereiro de 2020.

URL do documento original:

<<http://urlib.net/8JMKD3MGP3W34R/3UT726P>>

INPE  
São José dos Campos  
2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

---

Meléndez Vásquez, Joseph Arthur.

M483f Ferramenta computacional para análise de risers flexíveis dispostos em catenária com um escoamento interno bifásico gás-líquido em padrão golfadas / Joseph Arthur Meléndez Vásquez. – São José dos Campos : INPE, 2020.

xxii + 196 p. ; (sid.inpe.br/mtc-m21c/2020/02.07.21.44-TDI)

Tese (Doutorado em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Ciência e Tecnologia de Materiais e Sensores) – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2020.

Orientadores : Dr. Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado, e Dr. Juan Pablo Julca Ávila.

1. Riser Flexível em Catenária. 2. Escoamento Bifásico Líquido-gás em Padrão Golfadas de Líquido. 3. Formulação Corrotacional. 4. Interação Fluido-estrutura. I.Título.

CDU 622.276.05

---



Esta obra foi licenciada sob uma Licença [Creative Commons Atribuição-NãoComercial 3.0 Não Adaptada](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/).

This work is licensed under a [Creative Commons Attribution-NonCommercial 3.0 Unported License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/).

Aluno (a): **Joseph Arthur Meléndez Vásquez**

Título: "FERRAMENTA COMPUTACIONAL PARA ANÁLISE DE RISERS FLEXÍVEIS DISPOSTOS EM CATENÁRIA COM UM ESCOAMENTO INTERNO BIFÁSICO GÁS-LÍQUIDO EM PADRÃO GOLFADAS"

Aprovado (a) pela Banca Examinadora em cumprimento ao requisito exigido para obtenção do Título de **Doutor(a)** em

**Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle**

Dr. **Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado**

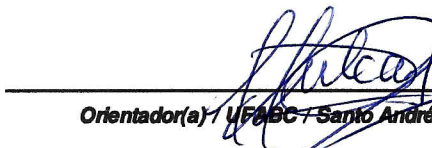


Presidente / Orientador(a) / INPE / SJCampos - SP

Participação por Vídeo - Conferência

Aprovado  Reprovado

Dr. **Juan Pablo Julca Ávila**

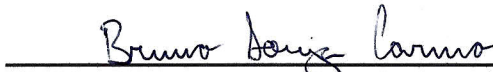


Orientador(a) / UFABC / Santo André - SP

Participação por Vídeo - Conferência

Aprovado  Reprovado

Dr. **Bruno Souza Carmo**

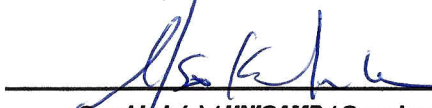


Convidado(a) / USP / São Paulo - SP

Participação por Vídeo - Conferência

Aprovado  Reprovado

Dr. **Celso Kazuyuki Morooka**

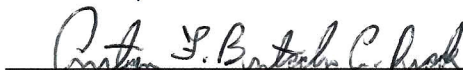


Convidado(a) / UNICAMP / Campinas - SP

Participação por Vídeo - Conferência

Aprovado  Reprovado

Dr. **Oscar Mauricio Hernandez Rodriguez**



Convidado(a) / USP / São Paulo - SP

Participação por Vídeo - Conferência

Aprovado  Reprovado

Este trabalho foi aprovado por:

maioria simples

unanimidade



*A meus pais **Felipe** e **Concesa**,  
a meus irmãos **Luis** e **Jared**,  
a minha esposa **Paula**,  
a **Isabella**.*





## AGRADECIMENTOS

A meus pais, Felipe e Concesa, e a meus irmãos, Luis e Jared, pelo amor, carinho e afeto, pelo apoio incondicional, e por serem eles a maior fonte de inspiração para a realização de tudo projeto na minha vida.

Ao Professor Dr. Juan Pablo Julca Avila, coordenador do Laboratório de Interação Fluido-Estrutura da Universidade Federal do ABC (UFABC), pela orientação principal e seus ensinamentos, pelo suporte, e por ser um dos artífices deste trabalho.

Ao Professor Dr. Antonio Bertachini Prado, por me permitir realizar o curso de doutorado no Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE), e pelo apoio dado ao longo destes mais de quatro anos.

A minha esposa Paula, ouvinte atenta de algumas dúvidas, inquietações, desânimos e sucessos, pelo apoio, pela confiança, pela valorização sempre tão entusiasta do meu trabalho e por tornar minha vida cada dia mais feliz.

A meus demais familiares e amigos por serem de grande apoio emocional durante a realização deste trabalho.

A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pela bolsa de estudo.



## RESUMO

Atualmente, um dos maiores desafios que existem na indústria de exploração e produção de petróleo e gás em águas profundas é a modelagem numérica do comportamento mecânico dos *risers* de produção de petróleo. Na presente tese de doutorado, uma ferramenta computacional para calcular a resposta dinâmica estrutural de um *riser* flexível em catenária sob os efeitos de um escoamento interno bifásico líquido-gás em padrão golfadas de líquido é apresentada. A ferramenta computacional, a qual tem por nome SLUGFLEX, é composta por dois códigos computacionais: o código que calcula a resposta dinâmica estrutural do *riser*, e o código que calcula o desenvolvimento do escoamento bifásico em padrão golfadas no interior do *riser*. O escoamento bifásico líquido-gás, o qual tem como característica principal a intermitência de duas regiões distintas: pistão de líquido e a bolha alongada de gás, é modelado matematicamente mediante o uso de um método lagrangeano unidimensional de seguimento de pistões, o qual divide o domínio computacional do escoamento em células unitárias, as quais estão formadas por um pistão de líquido e por uma bolha alongada de gás. Para realizar a análise estrutural, o *riser*, objeto deste estudo, é discretizado mediante o uso de elementos finitos de viga espacial de Euler, os quais experimentam grandes deslocamentos e grandes rotações, porém, com pequenas deformações. Para a formulação tridimensional do elemento de viga, a formulação co-rotacional é utilizada. A interação fluido-estrutura é um fenômeno bastante complexo, isto porque a resposta dinâmica do *riser* é influenciada pela dinâmica do escoamento interno, e o desenvolvimento do escoamento interno é influenciado pela resposta dinâmica do *riser*. Por esse motivo, ambos os códigos computacionais trabalham de forma conjunta trocando informação durante todo o processo de cálculo. No cálculo da resposta dinâmica do *riser* é empregado o método de integração direta HHT- $\alpha$  em combinação com o método de Newton-Raphson para forças seguidoras, o qual é utilizado com a finalidade de obter o equilíbrio das forças internas com os carregamentos externos em cada instante de tempo. Simulações do *riser* com movimentos oscilatórios impostos no topo também foram considerados. Os resultados numéricos obtidos pela ferramenta computacional são validados mediante a comparação com resultados experimentais da literatura.

Palavras-chave: *Riser* flexível em catenária. Escoamento bifásico líquido-gás em padrão golfadas de líquido. Formulação co-rotacional. Interação fluido-estrutura.



# COMPUTATIONAL TOOL FOR ANALYSIS OF FLEXIBLE CATENARY RISERS WITH AN INTERNAL SLUG FLOW

## ABSTRACT

Nowadays, one of the most significant challenges that exists in deep-waters oil and gas exploitation and production industry is the numerical modeling of the mechanical behaviour of oil-production *risers*. In this doctoral thesis, a computational tool to calculate the structural dynamic response of a flexible catenary *riser* under the influence of an internal slug flow is presented. The computational tool is called SLUGFLEX and it consists of two computational codes: the code that calculates the dynamic structural response of *risers*, and the code that calculates the development of an internal slug flow within *risers*. The slug flow, whose main feature is the intermittency of two different regions: a liquid slug and an elongated bubble of gas, is mathematically modeled through the use of an unidimensional lagrangian slug tracking method, that divides the computational domain of slug flow in unit cells, which are made up by a liquid slug and an elongated bubble of gas. To carry out the structural analysis, the *riser*, object of this study, is discretized through the use of spatial Euler beam finite elements, which experiments large displacements and large rotations, but with small deformations. For the tridimensional formulation of the beam element, the co-rotational formulation is used. The fluid-structure interaction is a very complex phenomenon, this due to the influence of the internal fluid dynamics in the *riser* dynamic response and the influence of *riser* dynamic response in the internal fluid development; for this reason, both computational codes work together exchanging information during the whole calculation process. In the calculus of the *risers* dynamic response, the direct integration method HHT- $\alpha$  is used, in combination with the Newton-Raphson method for follower loads, which is used on purpose of obtaining the equilibrium between the internal forces and the external forces at each instant of time. *Riser* simulations with imposed oscillation movements at the top were also considered. The numerical results obtained by the computational tool are validated through the comparison with the experimental results found in the current literature.

Keywords: Flexible catenary *riser*. Slug flow. Corotational formulation. Fluid-solid interaction.

## **LISTA DE PUBLICAÇÕES**

Publicações do autor, entre 2016 e 2020, relacionadas à presente Tese de Doutorado.

### **ARTIGOS PUBLICADOS EM REVISTAS CIENTÍFICAS**

MELENDEZ, J.A., AVILA, J.P.J. A parametric analysis of the influence of the internal slug flow on the dynamic response of flexible marine risers. *Ocean Engineering*, v. 174, p. 169-185, 2019.

### **ARTIGOS PUBLICADOS EM ANAIS DE CONGRESSOS**

MELENDEZ, J.A., AVILA, J.P.J. Free vibrations of catenary risers with internal fluid. *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, v. 4, n. 1, p. 1-7, Natal, Brasil, 2016.

MELENDEZ, J.A., AVILA, J.P.J. Dynamic response analysis of steel catenary risers under the influence of an internal slug flow. *Proceedings of the 24th ABCM International Congress of Mechanical Engineering*, Curitiba, Brasil, 2017.

## LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
1.1	Esquema de um sistema de produção de petróleo em alto-mar. . . . . 1
1.2	O pré-sal brasileiro. . . . . 2
1.3	Composição de um <i>riser</i> flexível convencional. . . . . 3
1.4	Configurações adotadas por um <i>riser</i> flexível. . . . . 3
1.5	Padrões de escoamento em tubos na configuração horizontal. . . . . 5
1.6	Padrões de escoamento em tubos na configuração vertical. . . . . 6
1.7	Configurações na formulação co-rotacional. . . . . 8
1.8	Escoamento bifásico em padrão golfadas. . . . . 12
1.9	Modelos utilizados para o estudo do escoamento bifásico em padrão gol- fadas. . . . . 13
1.10	Representação esquemática do processo de saída de bolhas e pistões do domínio computacional. . . . . 15
2.1	Não-comutatividade do vetor de rotação. . . . . 23
2.2	Rotação em três dimensões. . . . . 24
2.3	Triades associadas a um elemento de viga tridimensional. . . . . 29
2.4	Partícula de fluido movendo-se através de um elemento de riser. . . . . 31
2.5	Componentes tangencial e normal da aceleração do fluido no sistema de coordenadas não-inercial. . . . . 33
2.6	Cilindro inclinado submetido aos efeitos de uma correnteza. . . . . 34
3.1	Configuração inicial e final de um elemento de viga tridimensional. . . . . 38
3.2	Rotações locais de um elemento de viga tridimensional. . . . . 39
3.3	Rotação da Triade $\mathbf{R}_m$ por meio do pseudovetor $\varphi$ . . . . . 41
3.4	Momentos de torção e momentos fletores atuantes em um elemento de viga. . . . . 42
3.5	Deslocamentos nodais globais do elemento de viga tridimensional. . . . . 43
3.6	Rotações associadas ao sistema de coordenadas local do elemento de viga. 53
4.1	Distribuições das golfadas e das bolhas de gás em um tubo reto. . . . . 57
4.2	Escoamento bifásico líquido-gás: Golfada de líquido e região de fluido estratificado. . . . . 58
4.3	Representação da $j$ -ésima célula unitária do escoamento bifásico padrão golfadas. . . . . 59
4.4	Volume de controle para a golfada de líquido da $j$ -ésima célula unitária. . 60
4.5	Volume de controle para a bolha alongada de gás da $j$ -ésima célula unitária. 62

4.6	Forças atuantes sobre o pistão de líquido da $j$ -ésima célula unitária. . . . .	64
4.7	Aproximação de uma curva em catenária por meio de tubos retos. . . . .	65
4.8	Pistão de líquido da $j$ -ésima célula unitária distribuído em três elementos de <i>riser</i> . . . . .	66
4.9	Pressões atuantes nas fronteiras $x_j$ e $y_j$ da $j$ -ésima célula unitária. . . . .	68
4.10	Forças de atrito atuantes sobre a $j$ -ésima célula unitária do escoamento. . . . .	70
4.11	Diagrama de Moody. . . . .	71
4.12	Forças hipotéticas atuantes sobre o pistão de líquido na direção do fluxo. . . . .	75
5.1	Deslocamentos da frente e traseira das células 1, $j$ , e $n$ do escoamento. . . . .	82
5.2	Composição do domínio computacional para análise do escoamento. . . . .	84
5.3	Processo de entrada de uma célula unitária no domínio computacional. . . . .	85
5.4	Processo de saída de uma célula unitária do domínio computacional. . . . .	87
5.5	Configuração inicial do escoamento em golfadas. . . . .	88
5.6	Cenários ocorridos durante a saída do escoamento em golfadas. . . . .	89
5.7	Processo de coalescência das bolhas de gás $j$ e $j + 1$ do escoamento interno. . . . .	91
5.8	Diagrama de fluxo do cálculo do desenvolvimento do escoamento interno. . . . .	94
5.9	Sub-rotinas: Entrada de uma célula, saída de uma célula, e coalescência de bolhas. . . . .	95
6.1	Configuração de equilíbrio estático e resposta dinâmica de um <i>riser</i> em catenária. . . . .	97
6.2	Configurações inicial, final e intermediárias adotadas pelo <i>riser</i> durante o cálculo da sua configuração de equilíbrio estático. . . . .	98
6.3	Método iterativo de Newton-Raphson para forças seguidoras. . . . .	100
6.4	Escoamento em golfadas se movimentando ao longo de um elemento de <i>riser</i> . . . . .	102
6.5	Esquema numérico de solução para cálculo da resposta dinâmica de <i>risers</i> . . . . .	114
7.1	Fluxograma do funcionamento da ferramenta SLUGFLEX. . . . .	118
7.2	Interação computacional do código do escoamento e do código estrutural - Parte 1 de 2. . . . .	120
7.3	Interação computacional do código do escoamento e do código estrutural - Parte 2 de 2. . . . .	121
7.4	Interação gráfica dos códigos computacionais. . . . .	122
7.5	Verificação da saída de uma célula do domínio computacional. . . . .	124
7.6	Montagem dos domínios computacionais do <i>riser</i> e do escoamento bifásico. . . . .	126
8.1	Viga articulada - Histórico das cargas de impacto $F_y(t)$ e $F_z(t)$ . . . . .	128
8.2	Deslocamentos do extremo livre da viga, para $E = 2,1 \times 10^6$ . . . . .	129
8.3	Deslocamentos do extremo livre da viga, para $E = 2,1 \times 10^9$ . . . . .	130



8.4	Deslocamentos do extremo livre da viga, para $E = 6,3 \times 10^6$ .	130
8.5	Pórtico em L - Histórico da carga $F_z(t)$ .	131
8.6	Deslocamento do cotovelo do pórtico na direção z.	132
8.7	Deslocamento do extremo livre do pórtico na direção z.	132
8.8	Anel com rotações finitas - Cargas aplicadas.	133
8.9	Deslocamento do ponto B na direção do eixo $\mathbf{x}$ .	134
8.10	Deslocamento do ponto B na direção do eixo $\mathbf{y}$ .	134
8.11	Deslocamento do ponto B na direção do eixo $\mathbf{z}$ .	135
8.12	Arco circular de grande altura - Histórico das cargas $F_y(t)$ e $F_z(t)$ .	136
8.13	Deslocamento do ponto A na direção do eixo $\mathbf{x}$ .	136
8.14	Deslocamento do ponto A na direção do eixo $\mathbf{y}$ .	137
8.15	Deslocamento do ponto A na direção do eixo $\mathbf{z}$ .	137
8.16	Esquema de instalação experimental realizado por Chen e Jendrzeczyk.	138
8.17	Deslocamento horizontal do extremo livre. $\Delta x = 0,005$ m., $V = 24,4$ m/s.	139
8.18	Deslocamento horizontal do extremo livre. $\Delta x = 0,14$ m., $V = 24,4$ m/s.	140
8.19	Deslocamento horizontal do extremo livre. $\Delta x = 0,26$ m., $V = 24,4$ m/s.	140
8.20	Amplitude de oscilação para diferentes valores de velocidade do escoamento.	141
8.21	Frequências de oscilação no ciclo limite para diferentes valores de velocidade do escoamento.	142
8.22	Tubo vertical a simular - Histórico da carga $F_x(t)$ .	143
8.23	Caso 1. Deslocamento do ponto B na direção do eixo $\mathbf{x}$ .	144
8.24	Caso 2. Deslocamento do ponto B na direção do eixo $\mathbf{x}$ .	145
8.25	Caso 2. Deslocamento do ponto B na direção do eixo $\mathbf{y}$ .	145
8.26	Esquema da instalação experimental realizada por Valdivia.	146
8.27	Características geométricas do modelo experimental realizado por Valdivia.	147
8.28	Resultado experimental para o deslocamento horizontal adimensional do nó 51.	148
8.29	Resultado numérico para o deslocamento horizontal adimensional do nó 51.	149
8.30	Comparação entre as respostas em frequência para a variável $u/D_i$ .	149
8.31	Resultado experimental para o deslocamento vertical adimensional do nó 51.	150
8.32	Resultado numérico para o deslocamento vertical adimensional do nó 51.	151
8.33	Comparação entre as respostas em frequência para a variável $v/D_i$ .	151
8.34	Resultados experimentais obtidos para a força axial no topo.	152
8.35	Resultados numéricos obtidos para a força axial no topo.	153
8.36	Configuração de equilíbrio estático do <i>riser</i> em catenária.	154
8.37	Deslocamentos dos nós 26, 51 e 76 na direção $\mathbf{x}$ .	156
8.38	Deslocamentos dos nós 26, 51 e 76 na direção $\mathbf{y}$ .	156

8.39	Deslocamentos dos nós 26, 51 e 76 na direção $\mathbf{z}$ .	157
8.40	Força axial efetiva ao longo do <i>riser</i> .	158
8.41	Momentos de torção aplicados nos nós 11, 26, 51 e 76.	159
8.42	Momento fletor referente ao eixo $\mathbf{e}_3$ nos nós 11, 26, 51 e 76.	160
8.43	Momento fletor referente ao eixo $\mathbf{e}_2$ nos nós 11, 26, 51 e 76.	160
8.44	Comparação dos deslocamentos do nó 51 na direção $\mathbf{x}$ .	162
8.45	Comparação dos deslocamentos do nó 51 na direção $\mathbf{y}$ .	162
8.46	Comparação dos deslocamentos do nó 51 na direção $\mathbf{z}$ .	163
8.47	Comparação da força axial no topo.	164
8.48	Força axial no topo para diferentes valores do período $T_e$ .	165
8.49	Momento fletor no nó 11 referente ao eixo $\mathbf{e}_3$ .	166
8.50	Momento fletor no nó 11, referente ao eixo $\mathbf{e}_3$ , para diferentes valores do período $T_e$ .	167
8.51	Força axial no topo para diferentes valores de $J_l$ .	168
8.52	Momento fletor nó 11, referente ao eixo $\mathbf{e}_3$ , para diferentes valores de $J_l$ .	169
8.53	Momento fletor nó 11, referente ao eixo $\mathbf{e}_3$ , para diferentes valores de $J_l$ , últimos 50s.	170
A.1	Célula "0" do escoamento em golfadas e características geométricas.	181
B.1	Elemento de <i>riser</i> e seus correspondentes deslocamentos nodais.	187
B.2	Coordenadas de posição de um ponto do elemento de viga tridimensional.	192

## LISTA DE TABELAS

	<u>Pág.</u>
5.1 Condições de contorno associadas à Equação (5.14). . . . .	90
8.1 Casos considerados para o escoamento em golfadas. . . . .	155



## SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
<b>1 INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>1</b>
1.1 Justificativa e definição do problema . . . . .	7
1.2 Revisão bibliográfica . . . . .	8
1.2.1 Análise tridimensional não-linear de estruturas . . . . .	8
1.2.2 Análise tridimensional de risers . . . . .	10
1.2.3 Estudo e modelagem do escoamento bifásico em padrão golfadas . . . . .	12
1.2.3.1 Modelo de seguimento de pistões . . . . .	14
1.2.4 Influência do escoamento interno bifásico em golfadas sobre risers . . . . .	16
1.3 Objetivos . . . . .	18
1.3.1 Objetivo principal . . . . .	18
1.3.2 Objetivos específicos . . . . .	19
1.4 Metodologia de estudo . . . . .	19
1.5 Contribuição . . . . .	20
1.6 Estrutura da Tese . . . . .	21
<b>2 CONCEITOS FUNDAMENTAIS</b> . . . . .	<b>23</b>
2.1 Grandes rotações . . . . .	23
2.1.1 Matriz de rotação para grandes rotações . . . . .	24
2.1.2 Matriz de rotação em função dos quatérnions . . . . .	26
2.1.3 Obtenção do pseudovetor a partir da matriz de rotação . . . . .	27
2.1.4 Extração do quatérnion normalizado a partir da matriz de rotação . . . . .	28
2.1.5 Ângulos de rotação no sistema de coordenadas local . . . . .	29
2.2 Forças devidas ao escoamento interno . . . . .	30
2.3 Forças devidas à correnteza sobre cilindros inclinados . . . . .	33
<b>3 FORMULAÇÃO CO-ROTACIONAL</b> . . . . .	<b>37</b>
3.1 Cálculo dos deslocamentos locais . . . . .	37
3.1.1 Deslocamento axial local . . . . .	37
3.1.2 Deslocamentos rotacionais locais do elemento de viga . . . . .	39
3.2 Relação entre as variáveis globais e locais . . . . .	43
3.3 Matriz de rigidez tangente . . . . .	47
3.3.1 Cálculo da matriz de rigidez elástica . . . . .	48
3.3.2 Cálculo da matriz de rigidez geométrica . . . . .	49

3.3.2.1	Matriz de rigidez geométrica $\mathbf{k}_{\sigma 1}$	50
3.3.2.2	Matriz de rigidez geométrica $\mathbf{k}_{\sigma 2}$	51
3.3.2.3	Matriz de rigidez geométrica $\mathbf{k}_{\sigma 3}$	51
3.3.2.4	Matriz de rigidez geométrica $\mathbf{k}_{\sigma 4}$	52
3.3.2.5	Matriz de rigidez geométrica $\mathbf{k}_{\sigma 5}$	52
3.4	Velocidade e aceleração do sistema local de referência	53
<b>4</b>	<b>MODELAGEM MATEMÁTICA DO ESCOAMENTO INTERNO</b>	<b>57</b>
4.1	Equação de conservação da massa	59
4.1.1	Conservação de massa do líquido na golfada	60
4.1.2	Conservação da massa do líquido no filme	61
4.1.3	Conservação da massa do gás na bolha alongada	63
4.2	Equações de conservação da quantidade de movimento	63
4.3	Tensões de cisalhamento	69
4.3.1	Velocidade do filme de líquido	73
4.3.2	Velocidade da bolha de gás	74
4.4	Forças hipotéticas	74
<b>5</b>	<b>ANÁLISE DO ESCOAMENTO: MÉTODOS DE SOLUÇÃO</b>	<b>77</b>
5.1	Discretização das Equações	77
5.2	Cálculo dos deslocamentos das células	82
5.3	Domínio computacional	84
5.3.1	Entrada de uma célula unitária no domínio	85
5.3.2	Saída de uma célula unitária do domínio	86
5.4	Condições de contorno do problema	88
5.5	Coalescência de bolhas de gás	91
<b>6</b>	<b>ANÁLISE DINÂMICA ESTRUTURAL</b>	<b>97</b>
6.1	Cálculo da configuração de equilíbrio estático	98
6.2	Análise dinâmica estrutural	101
6.2.1	Vetor de forças devido ao escoamento interno	102
6.2.2	Vetor de forças devido à correnteza	106
6.3	Métodos de solução	109
6.3.1	Método de Newton-Raphson	109
6.3.2	Método Hilber-Hughes-Taylor - HHT	111
6.3.2.1	CRITÉRIO DE CONVERGÊNCIA	113
6.3.3	Método de Levenberg - Marquardt	115
<b>7</b>	<b>FERRAMENTA COMPUTACIONAL SLUGFLEX</b>	<b>117</b>

7.1	Funcionamento da ferramenta SLUGFLEX . . . . .	117
7.2	Interação computacional dos códigos . . . . .	119
7.2.1	Verificação da saída de uma célula . . . . .	124
7.2.2	Montagem dos domínios computacionais . . . . .	125
<b>8</b>	<b>RESULTADOS . . . . .</b>	<b>127</b>
8.1	Verificação do código computacional para análise dinâmica de estruturas	128
8.1.1	CASO 1: Viga articulada flexível . . . . .	128
8.1.2	CASO 2: Pórtico em L . . . . .	131
8.1.3	CASO 3: Anel com rotações finitas . . . . .	133
8.1.4	CASO 4: Arco circular de grande altura . . . . .	135
8.2	Verificação das forças devidas ao escoamento interno . . . . .	138
8.3	Verificação da sub-rotina que calcula as forças devidas à correnteza . . . . .	142
8.4	Validação da ferramenta computacional . . . . .	146
8.4.1	Comparação dos deslocamentos . . . . .	148
8.4.2	Comparação da força axial no topo . . . . .	152
8.5	Resultados numéricos riser real . . . . .	153
8.5.1	Imposição de deslocamentos . . . . .	161
8.5.2	Análise estrutural para diferentes valores da velocidade superficial do líquido . . . . .	167
8.5.2.1	Comentários em relação às simulações numéricas . . . . .	170
<b>9</b>	<b>CONCLUSÕES . . . . .</b>	<b>171</b>
9.1	Trabalhos futuros . . . . .	173
9.1.1	Análise estrutural . . . . .	173
9.1.2	Escoamento bifásico . . . . .	173
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS . . . . .</b>	<b>175</b>
	<b>APÊNDICE A - MODELO ESTACIONÁRIO DO ESCOAMENTO EM GOLFADAS . . . . .</b>	<b>181</b>
A.1	Velocidade de translação da bolha de gás . . . . .	182
A.2	Velocidade do líquido no pistão . . . . .	182
A.3	Altura do filme de líquido . . . . .	182
A.4	Comprimentos da célula unitária . . . . .	184
	<b>APÊNDICE B - MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS . . . . .</b>	<b>187</b>
B.1	Vetor de forças nodais de um elemento de riser . . . . .	189
B.2	Equação de movimento de um elemento de riser . . . . .	190

B.2.1	Energia cinética de um elemento de riser . . . . .	191
-------	----------------------------------------------------	-----



# 1 INTRODUÇÃO

Na indústria de exploração e produção de petróleo e gás em águas-profundas, fluidos se movimentam desde o fundo do mar até uma unidade flutuante de produção de petróleo, por meio de estruturas tubulares cilíndricas delgadas chamadas *risers* (vide Figura 1.1). Muita pesquisa sobre estas estruturas tem sido realizada, principalmente à medida que estão sendo descobertos campos de petróleo em locais com profundidades cada vez maiores e sob condições ambientais extremamente severas.

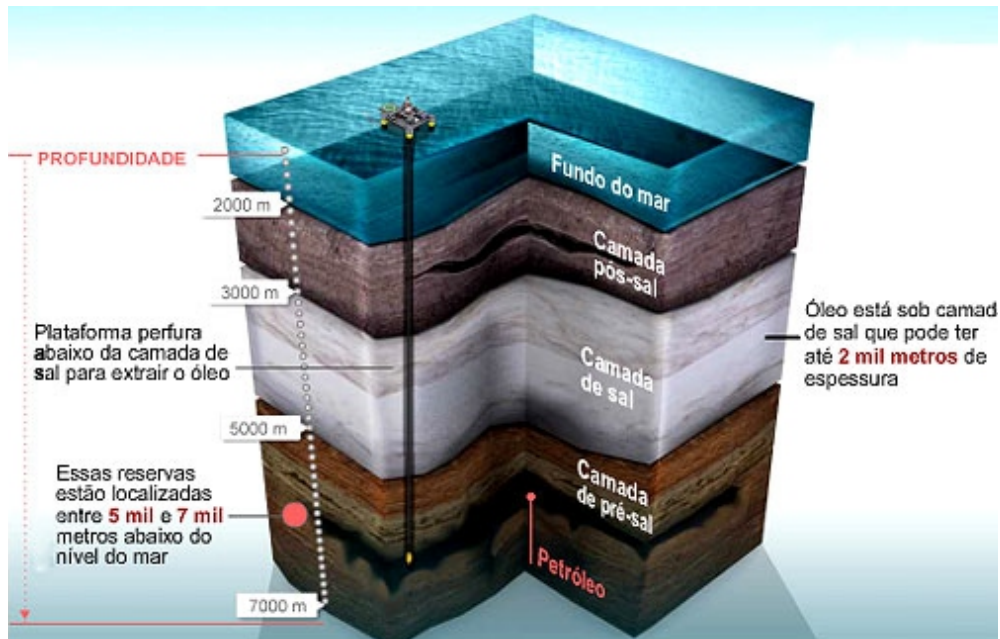
Figura 1.1 - Esquema de um sistema de produção de petróleo em alto-mar.



Fonte: Lee (2009).

Na atualidade, a PETROBRAS já superou a marca de 1,5 milhões de barris de petróleo produzidos por dia no pré-sal. A camada pré-sal descoberta no Brasil é uma grande reserva de petróleo e de gás natural, encontrada em águas ultra-profundas, a mais de 7000 m abaixo do nível do mar, ver Figura 1.2. Essas reservas de petróleo localizam-se em uma faixa litorânea de aproximadamente 800 km de extensão, que vai do estado de Espírito Santo até Santa Catarina.

Figura 1.2 - O pré-sal brasileiro.



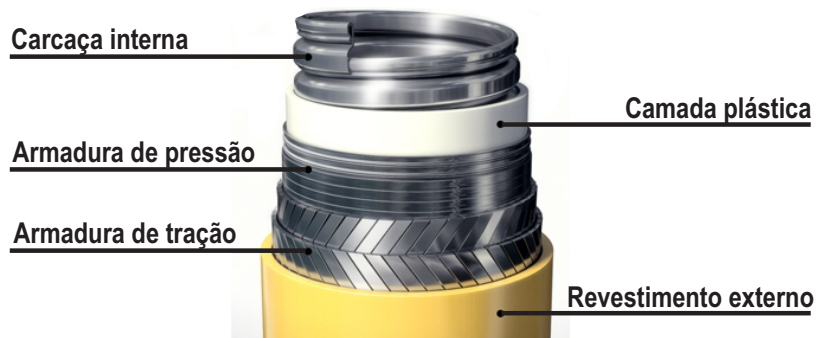
Fonte: Alves (2015).

Devido à função que cumprem, os *risers* são um dos principais componentes na indústria de produção de petróleo. Para o transporte de petróleo e gás, os *risers* de produção podem adotar diversos tipos de configurações e podem ser de diferentes tipos de material. Suas características dependem de parâmetros de campo como: as condições ambientais, tipo de plataforma, taxas volumétricas de produção, profundidade da água, etc.

### Risers flexíveis

Os *risers* flexíveis, objeto de estudo do presente trabalho de doutorado, são compostos por diversas camadas concêntricas metálicas e poliméricas, vide Figura 1.3, as quais trabalham solidariamente de forma a proporcionar rigidez e estanqueidade. A combinação destas camadas proporciona uma estrutura de baixa rigidez à flexão e altas rigidezes axial, radial e torcional, capaz de resistir altas pressões, o peso próprio, e carregamentos dinâmicos.

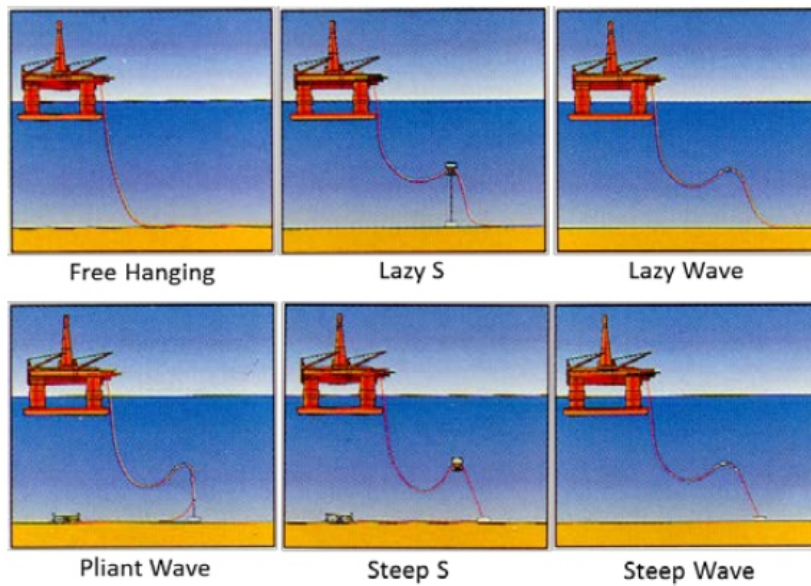
Figura 1.3 - Composição de um *riser* flexível convencional.



Fonte: Fatmala (2016).

Os *risers* flexíveis podem adotar diversas configurações, como pode ser visto na Figura 1.4. A configuração adotada por um *riser* depende das necessidades do projeto, das condições ambientais, condições de instalação, entre outros requisitos que devem ser atendidos. A configuração utilizada neste trabalho é a configuração em catenária (*free-hanging catenary*).

Figura 1.4 - Configurações adotadas por um *riser* flexível.



Fonte: Luppi et al. (2014).

## Escoamento interno bifásico líquido-gás

O escoamento interno de um *riser* é uma mistura de petróleo, gás, e água, e é exposto a diferentes condições de pressão e temperatura que permitem a formação de emulsões, hidratos e ceras. Neste trabalho, o escoamento interno é considerado como sendo um escoamento bifásico líquido-gás.

Quando dois fluidos escoam, simultaneamente, no interior de uma tubulação, as duas fases podem se distribuir numa variedade de padrões de escoamento. O termo padrão de escoamento refere-se à configuração geométrica das fases líquida e gasosa no interior da tubulação. Os padrões de escoamento diferem um do outro na distribuição espacial da interface, resultando em diferentes características de fluxo, tais como velocidade e distribuição da fração volumétrica ocupada pela fase líquida (*holdup*).

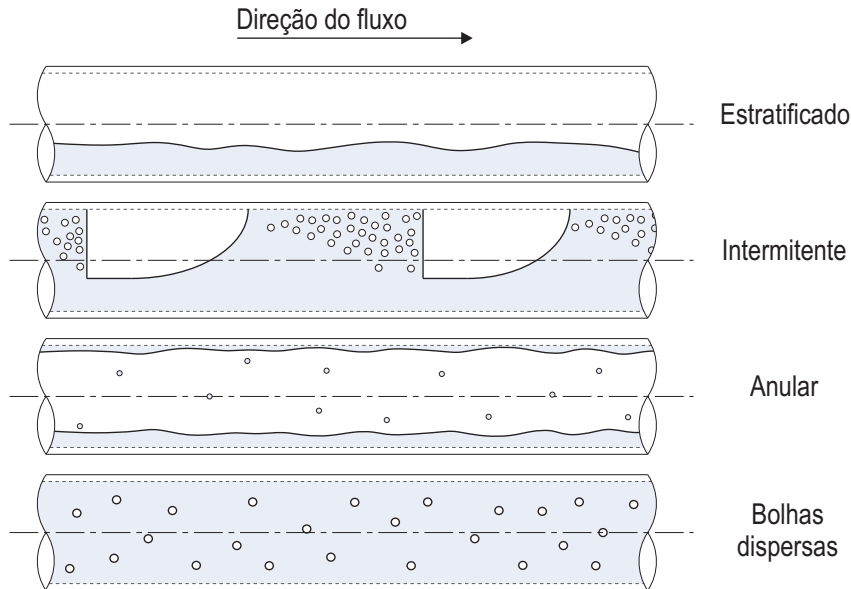
O padrão de escoamento que pode adotar um determinado sistema bifásico depende de: parâmetros de operação do sistema, características geométricas de instalação do sistema, e propriedades físicas das duas fases que compõem o escoamento bifásico.

Os padrões de escoamento existentes em tubos horizontais podem ser classificados como (vide Figura 1.5):

- 1 Estratificado: Este padrão ocorre para valores relativamente baixos das vazões de líquido e gás. As duas fases são separadas pela gravidade, onde a fase líquida escoar na parte inferior do tubo, e o gás na parte superior do mesmo.
- 2 Intermitente: O escoamento intermitente é caracterizado pelo escoamento alternado de líquido e gás. Golfadas de líquido, as quais preenchem por completo a área transversal do tubo, são separadas por pistões de gás, os quais contêm uma camada de líquido estratificado escoando na parte inferior do tubo.
- 3 Anular: Este padrão ocorre a altas vazões do gás. O líquido desloca-se sob a forma de uma película delgada junto à parede do tubo, enquanto um núcleo de gás se desloca com velocidade elevada no centro do tubo. Devido à força da gravidade, a película de líquido na parte inferior do tubo tem normalmente maior espessura do que no topo.
- 4 Bolhas dispersas: Este padrão ocorre a altas velocidades do líquido. A fase líquida é contínua, enquanto que o gás encontra-se disperso na forma de

pequenas bolhas. A vazões muito maiores do líquido, as bolhas de gás são dispersas mais uniformemente em toda a área transversal do tubo.

Figura 1.5 - Padrões de escoamento em tubos na configuração horizontal.



Fonte: Adaptada de Shoham (2006).

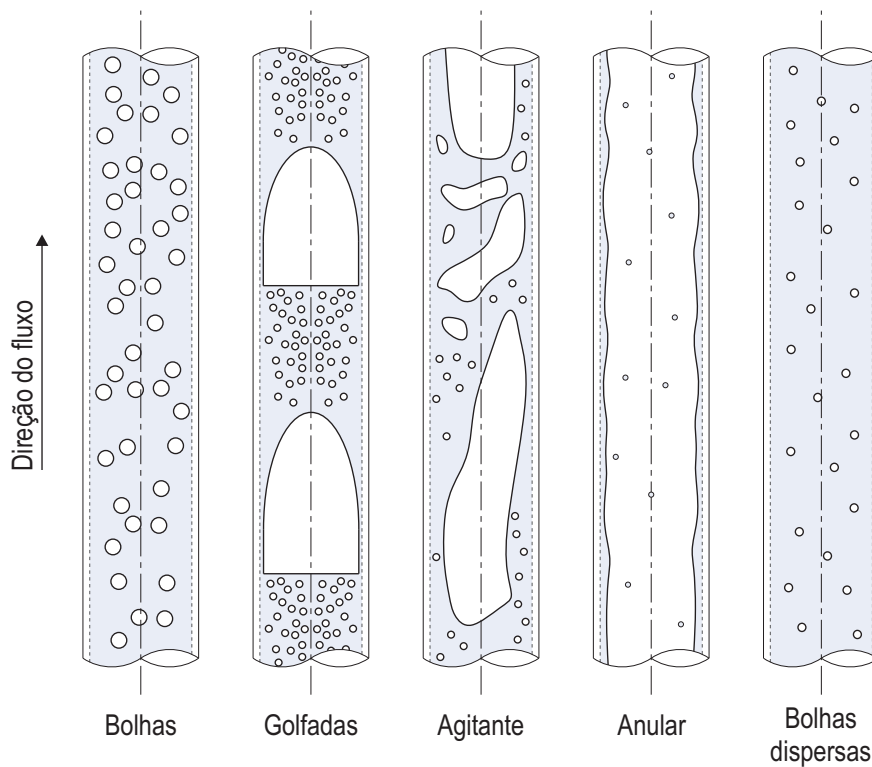
Os padrões de escoamento existentes em tubos verticais podem ser classificados como (vide Figura 1.6):

- 1 Bolhas: A fase gasosa é dispersa na forma de pequenas bolhas de gás, distribuídas quase uniformemente através da área transversal do tubo. Este padrão de escoamento ocorre para vazões de líquido relativamente baixas, com baixa turbulência, e caracteriza-se pelo deslizamento entre as fases.
- 2 Golfadas: Em tubos verticais, o escoamento em golfadas é simétrico ao redor do eixo do tubo. Este padrão de escoamento caracteriza-se pela intermitência entre bolhas de gás alongadas, chamadas de bolhas de Taylor, e pistões de líquido. Entre a bolha de Taylor e a parede do tubo escoam uma camada fina de líquido.
- 3 Agitante: O escoamento agitante ocorre a altas vazões de gás. Este padrão tem semelhança com o padrão em golfadas, porém, é muito mais caótico e

desordenado. As bolhas tornam-se mais estreitas, com formas irregulares e de vários tamanhos.

- 4 Anular: A característica deste tipo de escoamento é a continuidade da fase gasosa, a qual se desloca a altas velocidades e arrastando gotas de líquido no centro do tubo.
- 5 Bolhas dispersas: Este padrão ocorre a baixa vazões do líquido. Para este padrão de escoamento, a fase líquida dominante carrega as bolhas de gás, e não existe deslizamento entre as fases.

Figura 1.6 - Padrões de escoamento em tubos na configuração vertical.



Fonte: Adaptada de [Shoham \(2006\)](#).

As Figuras 1.5 e 1.6 mostram os padrões de escoamento existentes em tubos nas configurações horizontal e vertical. Os padrões de escoamento observados em tubos inclinados são bastante semelhantes aos observados em escoamentos verticais ascendentes.

## 1.1 Justificativa e definição do problema

*Risers* flexíveis dispostos em catenária são amplamente utilizados na indústria de produção de petróleo e gás. Devido à sua natureza dinâmica, o escoamento interno produz sobre o *riser* forças variantes no espaço e no tempo, as quais somadas às forças induzidas pelo movimento da plataforma e outros efeitos, produzem um aumento no valor dos esforços internos no *riser*. Além disso, a dinâmica do escoamento interno afeta as características de vibração natural de um *riser* flexível<sup>1</sup>, havendo a possibilidade de reduzir sua vida útil por fadiga.

Uma das principais motivações para realizar a presente Tese de Doutorado, é a grande importância dos *risers* nas operações de produção de petróleo e gás na Indústria Offshore. A ferramenta computacional SLUGFLEX permitirá identificar as zonas e pontos do *riser* onde ocorrem os valores máximos de deslocamentos, assim como também os valores máximos das forças internas que ocorrem ao longo do *riser*, permitindo prever e evitar esforços indesejáveis na estrutura.

Até o dia de hoje, pouca pesquisa tem sido feita para compreender o comportamento dinâmico tridimensional de *risers* com escoamentos multifásicos. Além da dificuldade de simular o comportamento dinâmico tridimensional do *riser* em catenária, existe o grande desafio de simular a interação fluido-estrutura entre o *riser* e o escoamento interno, e isto devido a que a dinâmica do *riser* influi sobre o desenvolvimento do escoamento interno, enquanto que a dinâmica do escoamento interno produz forças que afetam o movimento do *riser*.

Para prever o desenvolvimento de escoamentos bifásicos em golfadas no interior de tubos rígidos (tubos sem movimento nem deformações), existem muitos trabalhos de referência na literatura, assim como também modelos computacionais tais como o modelo OLGA e os modelos de seguimento de pistões SLUGGIT e LASSI. Por outro lado, temos o modelo de seguimento de pistões desenvolvido na UTFPR (Universidade Tecnológica Federal do Paraná), o qual está baseado na solução das equações de conservação da massa e da quantidade de movimento para cada uma das células unitárias que compõem o escoamento interno, e o qual será utilizado como base para o presente trabalho de doutorado.

Devido aos motivos expostos, a implementação de uma ferramenta computacional

---

<sup>1</sup>Este fenômeno foi observado por Chucheepsakul et al. (1999). Os autores estudaram a influência de um escoamento interno monofásico sobre as frequências naturais de um *riser* vertical, e concluíram que o incremento no valor da velocidade do escoamento interno produz uma redução no valor da frequência natural do *riser*, assim como também uma perda de estabilidade do *riser*.

para análise tridimensional é de muita importância, já que servirá para poder entender a influência de um escoamento interno em padrão golfadas sobre *risers*.

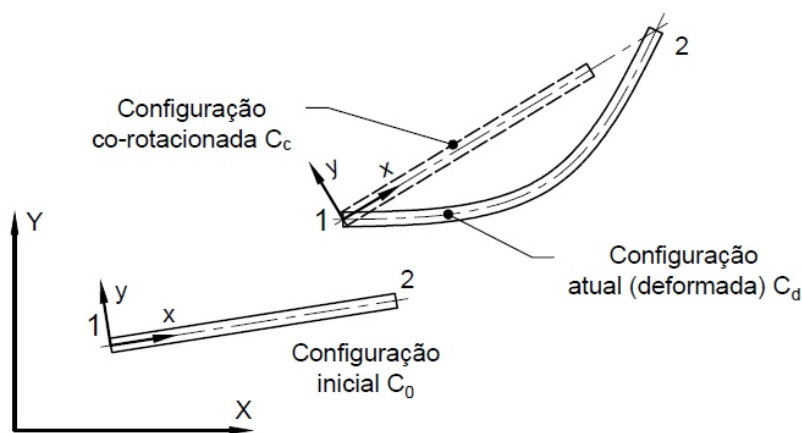
## 1.2 Revisão bibliográfica

A revisão bibliográfica será dividida em três partes: análise tridimensional não-linear de estruturas, estudo e modelagem do escoamento bifásico líquido-gás padrão golfadas, e por último, influência do escoamento interno bifásico em padrão golfadas sobre o comportamento dinâmico de *risers*, isto é com o objetivo de obter uma melhor organização das referências bibliográficas usadas neste trabalho.

### 1.2.1 Análise tridimensional não-linear de estruturas

Para descrever a cinemática do elemento estrutural em 3D, a formulação co-rotacional será utilizada. O termo co-rotacional refere-se a um sistema de coordenadas local fixo ao elemento de viga, que encontra-se rotando continuamente junto ao elemento. A Figura 1.7 mostra a sequência de configurações para obter a configuração final deformada de um elemento de viga.

Figura 1.7 - Configurações na formulação co-rotacional.



Fonte: Produção do autor.

Uma das principais características da formulação co-rotacional, é que permite facilmente separar o movimento de translação do movimento deformacional do elemento de viga. Devido à sua eficiência, a formulação co-rotacional é muito utilizada no es-



tudo de estruturas esbeltas com grandes deslocamentos e grandes rotações, porém, com pequenas deformações.

O tratamento de grandes rotações é um tema que tem sido estudado há décadas por pesquisadores de mecânica estrutural. Um dos trabalhos mais extensos e detalhados sobre grandes rotações foi o realizado por [Argyris \(1982\)](#). Este trabalho foi de vital importância para o desenvolvimento da formulação co-rotacional em três dimensões. O autor mostrou, a partir de manipulações algébricas, que uma matriz de rotação pode ser relacionada a uma rotação ao redor de um eixo arbitrário.

Anos depois, [Rankin e Brogan \(1986\)](#) desenvolveram um novo procedimento para o tratamento de grandes rotações, chamado Procedimento do elemento co-rotacional independente, o qual foi baseado no código computacional STAGS (Structural Analysis of General Shells, implementado por [Almroth e Brogan \(1978\)](#)). Através do uso de operadores de projeção, a contribuição do movimento de corpo rígido do elemento ao campo de deslocamentos foi eliminado.

Uma das formulações que se mostrou mais eficiente para o tratamento de grandes rotações foi a proposta por [Crisfield \(1990\)](#). Crisfield descreve a formulação co-rotacional para vigas em três dimensões, onde o vetor de forças internas e a matriz de rigidez são derivadas consistentemente a partir do cálculo das deformações locais do elemento de viga. As não-linearidades são introduzidas via as rotações do sistema de coordenadas local fixo ao elemento de viga. Entre suas principais descobertas, o autor menciona que as características de convergência são reduzidas se a matriz de rigidez tangente é simetrizada artificialmente.

A formulação co-rotacional tem sido amplamente utilizada para a implementação de ferramentas computacionais para análise estática e dinâmica de estruturas em 3D. [Granados \(2017\)](#) desenvolveu uma ferramenta computacional para análise estática de vigas em 3D submetida a carregamentos de torção e tração no topo. Para calcular a configuração de equilíbrio estático, o autor utilizou dois esquemas incrementais iterativos: o método de Newton-Raphson e o método de comprimento de arco cilíndrico com controle de carga e deslocamento. Entre os resultados obtidos pelo autor, destaca-se a análise estática de um *riser* flexível submetido a torção no topo.

Entre os trabalhos que realizam análise dinâmica de estruturas em 3D utilizando a formulação co-rotacional destacam-se os realizados por [Hsiao et al. \(1999\)](#), [Jelenić e Crisfield \(2001\)](#), [Le et al. \(2012\)](#) e [Silva \(2013\)](#). A integração numérica no domínio do tempo foi realizada utilizando o método de Newmark e o método Hilbert-

Hughes-Taylor (HHT). Os trabalhos realizados pelos autores mencionados, mostram simulações de estruturas sem condições de contorno estáticas nem cinemáticas, entre as quais se destaca o caso de um anel com rotações finitas. Estes trabalhos mostram a grande capacidade da formulação co-rotacional de trabalhar com grandes rotações.

### 1.2.2 Análise tridimensional de risers

A estática e dinâmica de *risers* em três dimensões foi bastante estudada pelos pesquisadores em mecânica de *risers*. A seguir apresentamos alguns dos trabalhos referentes à análise tridimensional de *risers*.

Irani (1989) realiza uma análise tridimensional da configuração de equilíbrio estático e da resposta dinâmica de *risers* com um escoamento interno monofásico. No seu estudo, o *riser* é submetido a grandes deformações, e as equações que regem seu movimento são calculadas a partir de uma abordagem variacional (princípio estendido de Hamilton). O autor compara as respostas obtidas no domínio da frequência (para o qual a força de arrasto foi linearizada) com as obtidas no domínio do tempo, mostrando em seus resultados que a linearização da força de arrasto é uma boa aproximação, exceto, quando se trabalha com baixas frequências de excitação. Além disso, o autor conclui também que o efeito do escoamento interno tende a reduzir o valor da força axial efetiva no *riser*<sup>2</sup>, dando como resultado uma diminuição na rigidez do sistema.

Mourelle (1993) desenvolveu algoritmos para análise da dinâmica de *risers* marinhos. O *riser* é discretizado por meio do método dos elementos finitos, e para a formulação tridimensional de cada elemento a abordagem co-rotacional foi utilizada. O autor propõe um algoritmo para ajuste automático do intervalo de integração ao longo da análise dinâmica baseado no quociente de Rayleigh.

Chai e Varyani (2006) utilizaram uma formulação tridimensional em coordenadas absolutas para a análise estática e dinâmica de *risers*/tubos flexíveis. Esta formulação tem como característica principal que as características da resposta estrutural são expressas em termos do vetor de posição e de suas derivadas, em coordenadas absolutas, o que permite uma descrição precisa da cinemática do *riser*/tubo. Uma das vantagens desta formulação é que não faz uso de rotações finitas ou infinitesimais como variáveis nodais, a diferencia da formulação co-rotacional. Os autores após validar o código desenvolvido com softwares comerciais (FLEXCOM, ABAQUS),

---

<sup>2</sup>O termo força axial efetiva, introduzido inicialmente por Sparks (1984), considera os efeitos das pressões devidas aos escoamentos externo e interno sobre a força axial na parede do *riser*.

mostram nos seus resultados a influência da correnteza e a influência da interação riser-solo marinho.

Takafuji (2010), em sua tese de Doutorado, apresenta um estudo tridimensional de *risers* sob efeitos da correnteza e do solo marinho. Na análise estática, estudou o efeito da rigidez a torção na configuração de equilíbrio, mostrando em seus resultados que este efeito é desprezível. A análise dinâmica foi realizada no domínio da frequência e no domínio do tempo. Para a solução no domínio da frequência, mostra um método para a linearização das forças não lineares: forças de arrasto devida a correnteza e força de interação com o solo marinho. Os resultados obtidos pelo autor foram comparados com os obtidos com um software comercial (ORCAFLEX), mostrando boa concordância.

Athisakul et al. (2011) apresentaram uma formulação para a análise estática e dinâmica tridimensional de *risers* marinhos com escoamento interno. As equações de governo do *riser* são obtidas a partir do princípio dos trabalhos virtuais. Nos seus resultados, os autores estudam os efeitos da velocidade de um escoamento interno monofásico sobre as frequências naturais do *riser*, mostrando que um incremento no valor das velocidades diminui o valor das frequências naturais. Assim também eles mostraram a influência da extensibilidade do *riser* sobre seu comportamento estrutural, mostrando que, para valores baixos, o comportamento do *riser* é dominado pela rigidez à flexão, enquanto que para valores altos, o comportamento é dominado pela rigidez axial.

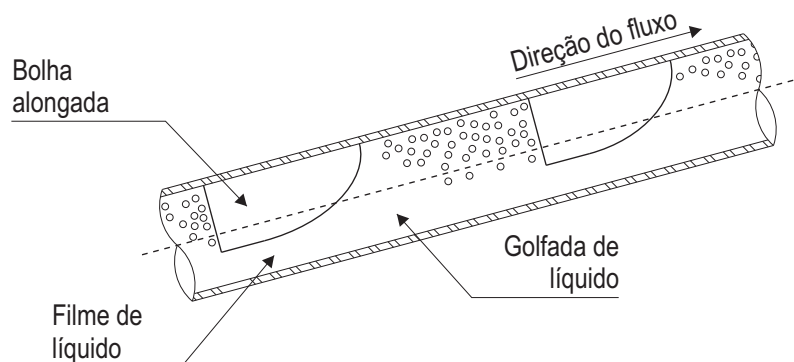
Kordkheili et al. (2011), no seu estudo da dinâmica tridimensional de *risers*, utilizaram elementos finitos isoparamétricos de quatro nós na formulação dos elementos de *riser*, de acordo com o apresentado por Bathe (2006). As forças consideradas na análise foram as forças devidas à correnteza e às forças de empuxo. Os resultados obtidos pelos autores foram comparados com os resultados obtidos por outros autores da literatura, mostrando boa concordância.

Neto (2016) apresentou um modelo matemático para simular a resposta dinâmica de *risers* de produção, para o qual foram considerados os efeitos devidos a uma correnteza, efeitos devidos à imposição de deslocamentos no topo do *riser*, e os efeitos devidos à interação do *riser* com o fundo marinho. No seu trabalho, o autor utilizou um modelo de viga geometricamente-exato em 3D para representar a estrutura do *riser*. Entre os resultados obtido pelo autor, destacam-se os obtidos para o caso de um *riser* vertical submetido a deslocamentos no topo e à ação de uma força lateral tipo rampa aplicada no ponto médio da estrutura.

### 1.2.3 Estudo e modelagem do escoamento bifásico em padrão golfadas

A modelagem matemática do escoamento interno bifásico líquido-gás padrão golfadas é uma tarefa bastante complexa, isto devido principalmente à intermitência de duas estruturas distintas, uma golfada de líquido, ou também chamada de pistão de líquido, e uma bolha gasosa alongada, chamada também de bolha de Taylor, assim como pode ser visto na Figura 1.8.

Figura 1.8 - Escoamento bifásico em padrão golfadas.



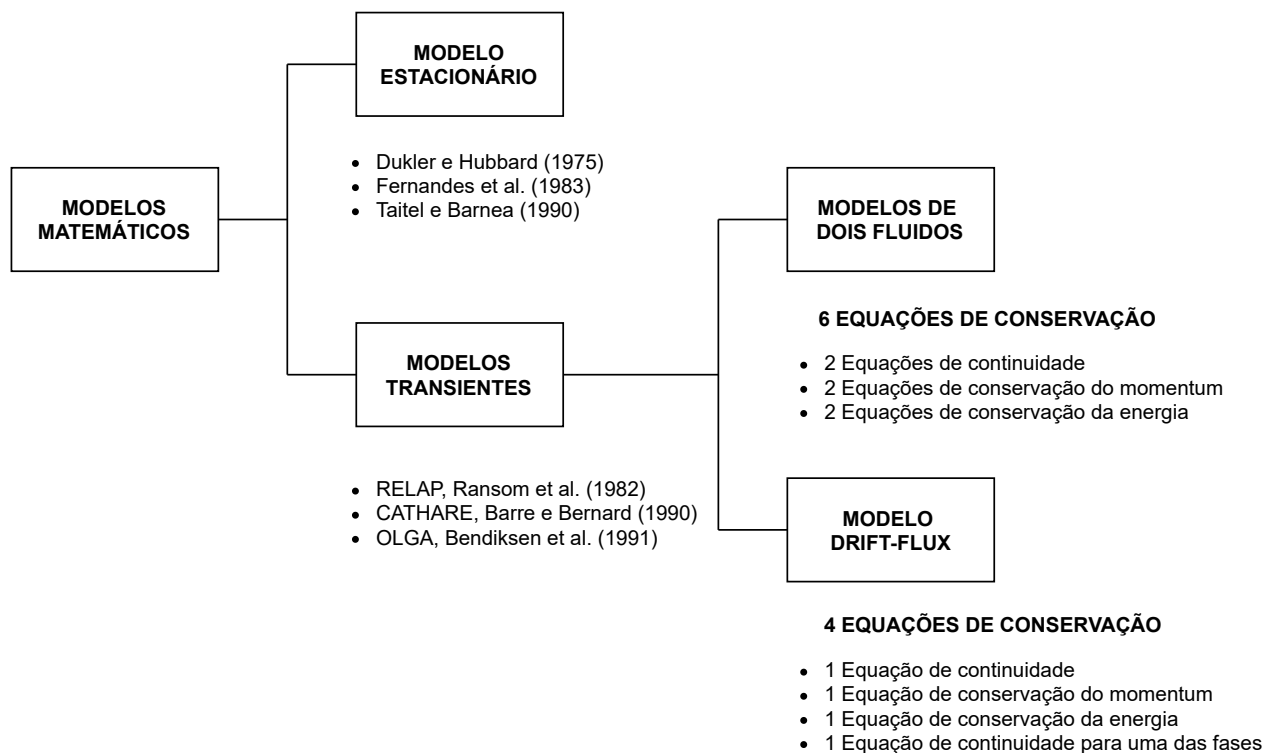
Fonte: Produção do autor.

Para o estudo e modelagem do escoamento em golfadas diversos modelos matemáticos foram propostos. Os primeiros modelos que surgiram foram os modelos de estado estacionário. Esses modelos consideram que as velocidades e demais parâmetros que caracterizam as bolhas de gás e os pistões de líquido permanecem invariantes no tempo. Os modelos de estado estacionário são de fácil implementação porque não se considera a principal característica do escoamento em golfadas, a intermitência. Entre os modelos estacionários destacam-se os propostos por [Dukler e Hubbard \(1975\)](#) e [Fernandes et al. \(1983\)](#), os quais foram desenvolvidos para tubos nas posições horizontal e vertical, respectivamente. Por outro lado, [Taitel e Barnea \(1990\)](#) propuseram um modelo estacionário para tubos em todas as posições, horizontal, vertical e inclinado, além disso, os autores apresentam detalhadamente o procedimento de cálculo de cada um dos parâmetros hidrodinâmicos do escoamento em golfadas.

Na atualidade, a modelagem do escoamento em golfadas é realizada por meio de

modelos transientes, como por exemplo, os desenvolvidos por Ransom et al. (1982) e Barre e Bernard (1990). Esses modelos consideram que, parâmetros como as velocidades e as pressões das duas fases do fluido, podem variar através do tempo e ao longo do espaço. Existem dois modelos os quais têm sido utilizados principalmente no desenvolvimento das equações para o cálculo transiente, e são: o modelo de dois fluidos, e o modelo *drift flux*. Na Figura 1.9, pode-se observar um quadro resumo dos modelos utilizados para o estudo do escoamento bifásico em padrão golfadas.

Figura 1.9 - Modelos utilizados para o estudo do escoamento bifásico em padrão golfadas.



Fonte: Produção do autor.

De acordo com Shoham (2006), em princípio, o modelo de dois fluidos é mais adequado para o caso de escoamentos de fases separadas, tais como escoamentos em padrão estratificado e anular, enquanto que o modelo *drift flux* é mais adequado para tratar com escoamentos de fases dispersas e intermitentes. No entanto, ambos os modelos são utilizados para a modelagem do escoamento em golfadas.

O modelo transiente de dois fluidos trata as fases líquida e gasosa de forma separada. A principal suposição na derivação das equações de conservação é que o escoamento é unidimensional. Este modelo consiste de seis equações diferenciais parciais: duas equações de conservação de massa, duas de conservação de momentum, e duas de conservação da energia, para cada uma das fases do escoamento.

Bendiksen et al. (1991) desenvolveram o software OLGA, o qual é amplamente utilizado na indústria de produção de petróleo e gás. Este código baseia-se no modelo de dois fluidos estendido, o qual assume a existência de três fases separadas: a fase gasosa, o filme de líquido e a fase composta pelas gotas de líquido dispersas no interior da fase gasosa.

### 1.2.3.1 Modelo de seguimento de pistões

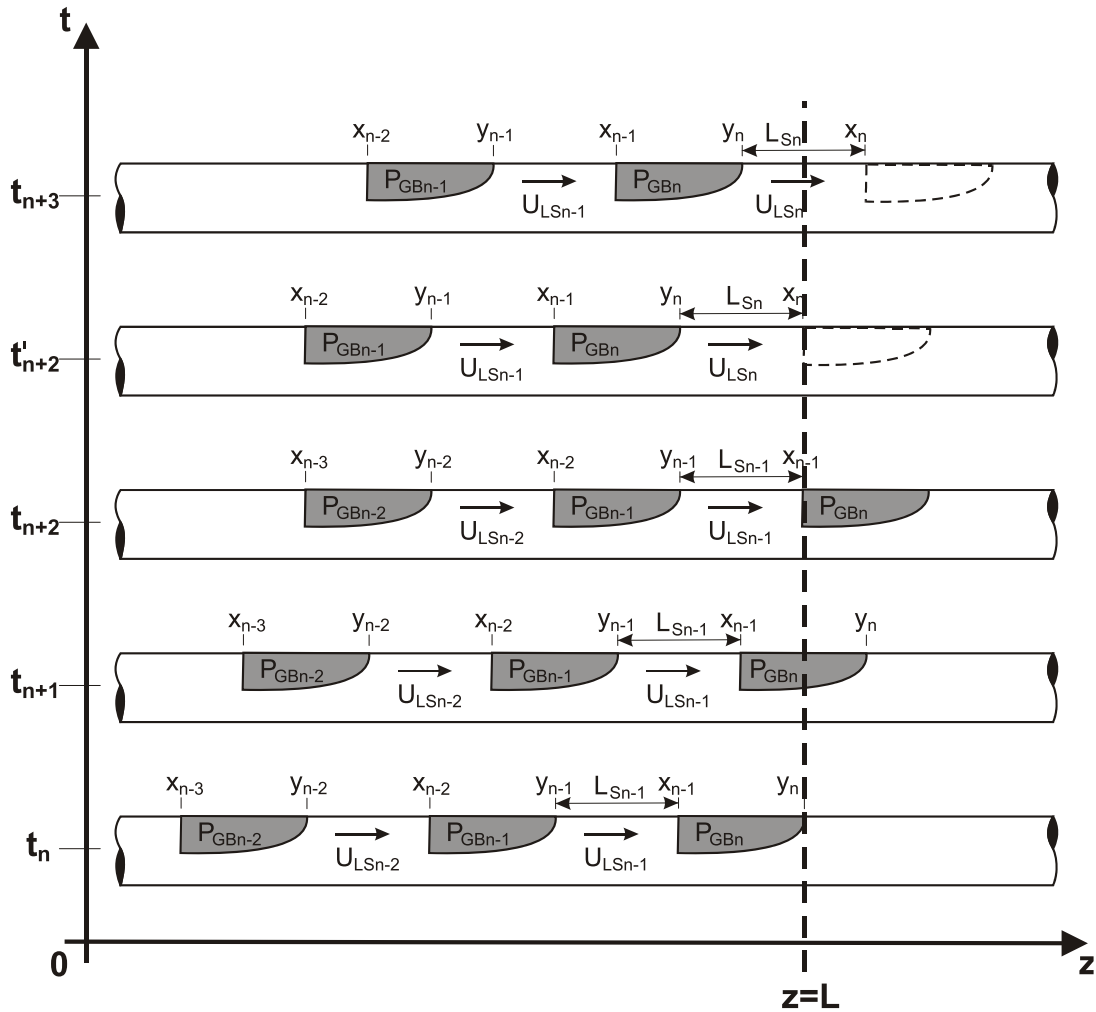
Barnea e Taitel (1993) desenvolveram um modelo simplificado utilizando a metodologia de seguimento de pistões. Este modelo simplificado não considera as bolhas de gás dispersas na golfada de líquido e, além disso, considera que a região que segue à golfada de líquido é de fluido estratificado, na qual a altura do filme de líquido é constante ao longo do comprimento da bolha de gás. Na análise, os autores introduziram dois tipos de distribuição para o comprimento das golfadas de líquido na entrada do tubo, uma distribuição aleatória uniforme e uma distribuição aleatória normal. A evolução do escoamento em golfadas no interior do tubo foi similar para ambas as distribuições, mostrando que a evolução do escoamento não é sensível às condições na entrada do tubo. Assim também, os autores concluíram que a velocidade de translação de uma bolha alongada é maior quando esta se encontra por trás de uma golfada curta, dando como resultado que a golfada de líquido eventualmente desapareça e o líquido seja acumulado na golfada por trás dela.

Na sua tese de doutorado, Renault (2007) apresenta o esquema numérico LASSI (Lagrangian approximate scheme for slug initiation) para modelar a transição de escoamento estratificado a escoamento em golfadas. Para a modelagem matemática do escoamento bifásico, o modelo geral de dois fluidos é utilizado. O esquema numérico LASSI foi implementado baseando-se no esquema de captura da golfada de líquido (TRIOMPH, desenvolvido por Issa e Kempf (2003)), e no esquema de seguimento de pistões (SLUGGIT, desenvolvido inicialmente por Nydal e Banerjee (1996)).

Rodrigues (2009) desenvolveu um modelo matemático 1D utilizando o método de seguimento de pistões (*slug tracking*) para a simulação de escoamento bifásico líquido-gás em tubos horizontais, inclinados e verticais. O modelo desenvolvido pelo autor,

o qual é baseado no trabalho realizado por Barnea e Taitel (1993), considera na sua modelagem o efeito das bolhas dispersas no pistão de líquido, e o efeito do perfil da bolha de gás. O autor enfatiza que, devido a que o modelo de seguimento de pistões não prevê a transição de nenhum outro padrão de escoamento para o padrão em golfadas, deve-se garantir a ocorrência do padrão em golfadas na entrada e na saída da tubulação. No processo de saída de bolhas e pistões do domínio computacional, o autor considera que o comprimento do pistão  $n$ ,  $L_{Sn}$ , permanece constante quando o pistão está saindo do tubo, assim como mostrado na Figura 1.10, e o comprimento do tubo é aumentado artificialmente até a frente do pistão  $n$ .

Figura 1.10 - Representação esquemática do processo de saída de bolhas e pistões do domínio computacional.



Fonte: Rodrigues (2009).

Kjeldby et al. (2011) realizaram comparações entre dados experimentais, fornecidos pelo centro de pesquisa da Shell Amsterdam, e dados numéricos, os quais foram obtidos por meio do uso da ferramenta computacional SLUGGIT. A ferramenta baseia-se no seguimento de pistões de líquido em pipelines mediante o uso de uma formulação de malha lagrangeana, implementada em C++. No modelo implementado, os autores estudaram a iniciação das golfadas em tubos horizontais por meio do uso do critério de Kelvin-Helmholtz viscoso (VKH).

Almeida et al. (2017) apresentaram um modelo híbrido que consiste na integração de dois modelos: o modelo de seguimento de pistões de líquido, o qual foi baseado no trabalho de Rodrigues (2009), e o modelo de captura do pistão de líquido, baseado no modelo implementado por Renault (2007). O modelo desenvolvido pelos autores mostra boa concordância com os resultados experimentais, exceto no caso do gradiente de pressão, onde obtiveram um erro de 13% em relação aos dados experimentais.

#### 1.2.4 Influência do escoamento interno bifásico em golfadas sobre risers

Entre as referências encontradas temos o trabalho realizado por Patel e Seyed (1989). Neste trabalho, para representar o escoamento em golfadas, os autores propuseram um modelo simplificado baseado no comportamento senoidal da densidade do fluido interno ao longo do *riser*. O esquema numérico no domínio da frequência foi utilizado para calcular a resposta dinâmica bidimensional do *riser*. Os resultados numéricos obtidos pelos autores foram comparados com dados obtidos experimentalmente, mostrando boa concordância.

Estudos experimentais foram realizados por Das (2003), para determinar e analisar as forças atuantes devidas a *slug-flow* severo sobre *risers* na configuração lazy-wave. O autor concluiu que, ao incrementar o valor das velocidades superficiais do líquido e gás, as forças atuantes sobre uma curva do *riser* também incrementam seus valores. Além disso, esta força é mais sensível a mudanças na velocidade superficial do líquido que a mudanças na velocidade superficial do gás.

Valdivia (2008) realizou um estudo experimental e numérico do comportamento dinâmico de *risers* em catenária com escoamento interno. O escoamento interno foi representado pelo modelo simplificado proposto por Patel e Seyed (1989). Um estudo experimental foi realizado, no qual um tubo de silicone foi usado com um fluido interno composto de água e ar. Os valores obtidos por meio das simulações, para a tensão no topo e para os valores de deslocamento horizontal e vertical, foram



comparados com os resultados experimentais mostrando boa concordância.

Pollio e Mossa (2009), baseado no modelo proposto por Patel e Seyed (1989), fizeram comparações entre dois modelos simplificados de *slug-flow*. O primeiro considera um comprimento da golfada constante ao longo do *riser*, e o outro modelo considera o comprimento de golfada como sendo uma função da inclinação do *riser*. As equações de movimento do *riser* foram resolvidas usando integração numérica no domínio do tempo.

Bordalo et al. (2015) descreveram modelos para as forças induzidas pelo escoamento bifásico em padrão golfadas sobre *risers* de aço em catenária. Segundo os autores, as forças devidas ao escoamento interno de maior relevância são as forças de gravidade e as forças devidas à curvatura da trajetória do fluxo.

Ortega (2015) estudou numericamente a influência do escoamento interno tipo *slug-flow* sobre a resposta dinâmica de *risers* flexíveis. Nas simulações numéricas, uma ferramenta computacional baseada em dois códigos foi utilizada: uma para simular o desenvolvimento do *slug-flow* utilizando um modelo lagrangiano de rastreamento de pistões, e o outro para calcular a resposta dinâmica bidimensional de *risers* no domínio do tempo. O *slug-flow* foi modelado pelas equações de conservação do fluido. Os resultados numéricos foram comparados satisfatoriamente aos resultados experimentais obtidos por Valdivia (2008).

Chatjigeorgiou (2017) calculou a resposta estática 3D de *risers* marinhos submetidos ao efeito de um escoamento interno em golfadas. O autor, para a modelagem do escoamento em golfadas utilizou o modelo de estado estacionário proposto por Taitel e Barnea (1990). Na análise estática, o autor considerou que o comprimento da célula unitária do escoamento em golfadas é constante ao longo do *riser*. Para combinar os modelos matemáticos do *riser* e do escoamento em golfadas, o autor considera que o elemento de viga tem o mesmo comprimento da célula unitária de escoamento.

Medina (2018) apresentou um esquema computacional que calcula o movimento de um escoamento multifásico ao longo de um tubo flexível. Para simular a resposta dinâmica estrutural do tubo, o autor utilizou um modelo tridimensional baseado no método das massas concentradas. Para simular o escoamento foi utilizado o código computacional SLUGGIT, que foi inicialmente desenvolvido por Nydal e Banerjee (1996), o qual é baseado no modelo de seguimento de pistões. Ambos os modelos, estrutural e do escoamento, foram acoplados mediante o método de decomposição de domínios.

Meléndez e Avila (2019) realizaram uma análise paramétrica da influência do escoamento interno em padrão golfadas sobre a resposta dinâmica de *risers* flexíveis marinhos. O *riser* foi discretizado em vários elementos de viga de igual tamanho, e para a formulação 2D dos elementos de viga, a formulação co-rotacional foi utilizada. O modelo matemático utilizado para representar o escoamento interno em golfadas foi o proposto por Patel e Seyed (1989), o qual considera o escoamento em golfadas com sendo um fluido monofásico de densidade variável. O cálculo das forças devidas ao escoamento em golfadas foi determinado por meio da segunda lei de Newton, para o qual a aceleração total da partícula do fluido foi calculada. O código computacional desenvolvido pelos autores foi utilizado para simular o comportamento dinâmico de um modelo reduzido de *riser*, o qual foi testado experimentalmente por Valdivia (2008). Os resultados numéricos mostraram boa concordância em comparação com os resultados experimentais. A partir dos resultados numéricos, os autores concluíram que, para velocidades moderadas das fases líquida e gasosa, as forças devidas à aceleração de Coriolis tem um efeito quase desprezível sobre a dinâmica do *riser*.

A principal limitação do estudo realizado por Meléndez e Avila (2019) é a modelagem do escoamento em golfadas, a qual foi realizada a partir de um modelo simples. Este modelo considera que a frequência do escoamento interno é constante através do tempo e ao longo do *riser*, o que não é correto, porque a frequência do escoamento em golfadas depende de fatores como a velocidade superficial das fases, assim como das mudanças da inclinação no *riser*, além de outros parâmetros.

Como pode ser observado a partir dos trabalhos mencionados, com exceção do trabalho realizado por Medina (2018), todos eles realizam uma análise bidimensional da influência do escoamento interno sobre o *riser*. Pode-se concluir então, que a resposta tridimensional dinâmica de *risers* com escoamento interno bifásico gás-líquido em padrão golfadas (*slug-flow*) é um tema pouco estudado pelos pesquisadores em mecânica de *risers*, isto principalmente devido à alta complexidade para modelar o escoamento em golfadas.

### 1.3 Objetivos

#### 1.3.1 Objetivo principal

O objetivo principal desta tese é desenvolver uma ferramenta computacional para cálculo da resposta dinâmica tridimensional de *risers* flexíveis dispostos em catenária sobre os efeitos de um escoamento interno bifásico em padrão golfadas.

### 1.3.2 Objetivos específicos

- 1 Desenvolver um código computacional para cálculo da resposta dinâmica estrutural de vigas em três dimensões. Para a formulação do elemento de viga em 3D, a abordagem co-rotacional foi utilizada. Integração numérica no domínio do tempo foi realizada mediante a implementação do método HHT- $\alpha$ .
- 2 Verificar o correto funcionamento do código computacional de análise dinâmica estrutural de vigas em 3D. A verificação é realizada mediante a comparação dos resultados numéricos obtidos pelo código computacional desenvolvido com os resultados obtidos por outros autores da literatura.
- 3 Implementar um modelo lagrangeano unidimensional de seguimento de pistões, baseado no modelo de dois fluidos, para simular o desenvolvimento de um escoamento bifásico em padrão golfadas no interior de um tubo com mudanças na inclinação.
- 4 Validar o modelo lagrangeano de seguimento de pistões desenvolvido neste trabalho. A validação do modelo será realizada com dados experimentais da literatura.

### 1.4 Metodologia de estudo

Para atingir os objetivos traçados neste trabalho, uma metodologia de estudo foi seguida. A seguir, vamos enumerar cada um dos estágios através dos quais o trabalho foi evoluindo.

1. Inicialmente, uma ferramenta computacional capaz de calcular a resposta dinâmica bidimensional de *risers* flexíveis dispostos em catenária foi desenvolvida. O *riser* flexível encontra-se sob efeito de um escoamento interno bifásico gás-líquido em padrão golfadas, e além disso, sob efeito de uma correnteza. O escoamento interno foi simulado como sendo um fluido monofásico de densidade variável, a qual varia senoidalmente ao longo do *riser*. Para a formulação bidimensional dos elementos de viga, a formulação co-rotacional foi utilizada.

Este estudo inicial encontra-se registrado no artigo de título "A PARAMETRIC ANALYSIS OF THE INFLUENCE OF THE INTERNAL SLUG-FLOW

ON THE DYNAMIC RESPONSE OF FLEXIBLE MARINE RISERS", o qual foi publicado pela revista *Ocean Engineering* no mês de Fevereiro de 2019.

2. O seguinte estágio consistiu no desenvolvimento e implementação de um código computacional para análise estática de vigas em três dimensões. Para isto, a formulação co-rotacional em três dimensões foi utilizada. Esta ferramenta computacional foi implementada e desenvolvida pelo grupo de trabalho do Laboratório de Interação Fluido-Estrutura da Universidade Federal do ABC (UFABC).
3. Uma vez implementado o código computacional para análise estática de vigas, seguiu-se com a implementação do código para análise dinâmica em três dimensões. Para isto, o método de HHT- $\alpha$  será utilizado. Este código computacional também foi validado com resultados numéricos da presente literatura.
4. O seguinte estágio consistiu no desenvolvimento e implementação de um código computacional capaz de simular o desenvolvimento de um escoamento bifásico em padrão golfadas no interior de um tubo rígido com mudanças na inclinação. O escoamento em golfadas é caracterizado pela ocorrência intermitente de pistões de líquido empurrados por bolhas de gás. Para realizar esta análise, algumas considerações serão feitas, isto devido à complexidade da modelagem matemática deste tipo de escoamento.
5. Os códigos computacionais desenvolvidos nos estágios 3 e 4 conformam a ferramenta computacional para análise dinâmico de *risers* flexíveis com escoamento bifásico em padrão golfadas. O seguinte e último estágio consistiu no acoplamento dos códigos computacionais, os quais interagem entre si mediante a troca de informação.

## 1.5 Contribuição

A contribuição da ferramenta SLUGFLEX, desenvolvida neste trabalho, é a simulação, de forma simultânea, da interação entre o *riser* flexível em catenária com o escoamento bifásico em padrão golfadas transportado no seu interior, assim como também com a correnteza de mar, no sistema de coordenadas tridimensional.

Para determinar o desenvolvimento do escoamento em golfadas no interior do *riser*, foi utilizado como base o modelo numérico implementado por Rodrigues (2009), o qual é aplicado a escoamentos em golfadas no interior de tubos retos, e sobre o qual,

para este trabalho, foram adicionados os efeitos da curvatura do *riser*, assim como também os efeitos que a dinâmica do *riser* produz sobre o escoamento interno.

A ferramenta computacional SLUGFLEX poderá ser utilizada como fonte de informação numérica para pesquisadores na área de interação fluido-estrutura e mecânica de *risers*, e também para reproduzir trabalhos experimentais realizados em laboratórios de pesquisa. Por outro lado, esta ferramenta servirá como base para continuar desenvolvendo códigos e programas computacionais cada vez mais complexos, tanto na parte estrutural quanto no desenvolvimento de modelos matemáticos mais completos que simulem o escoamento interno multifásico; sendo este último de grande importância na indústria do petróleo e gás.

## 1.6 Estrutura da Tese

Este trabalho está dividido em oito capítulos. O Capítulo 1 contém uma introdução ao assunto, situando onde o problema abordado está sendo inserido na indústria e justificando a importância dele. Também são definidos os objetivos. No Capítulo 1 também é destinado à revisão bibliográfica referente ao escoamento em golfadas. Em seguida são descritos alguns métodos para simular este tipo de escoamento. Um destaque maior é dedicado ao modelo de dois fluidos que, por sua vez, é o único dos métodos apresentados capaz de capturar a geração de pistões de líquido. Por fim, é feito uma revisão sobre os modelos dedicados à captura de golfadas.

No Capítulo 2 são apresentados conceitos de grande importância para o desenvolvimento deste trabalho. Neste capítulo é abordado o tema das grandes rotações, o qual é de vital importância para entender a formulação co-rotacional para um elemento de viga tridimensional, a qual é mostrada no Capítulo 3. A formulação co-rotacional é muito utilizada em análise estrutural de vigas, isto devido principalmente à sua capacidade de lidar com as não linearidades.

O Capítulo 4 é destinado à modelagem matemática do escoamento interno em padrão golfadas de líquido. Para a modelagem, várias considerações serão feitas, isto devido principalmente à alta complexidade do estudo do escoamento em golfadas. As equações de conservação de massa e de quantidade de movimento serão desenvolvidas para cada uma das células unitárias do escoamento. Já no Capítulo 5 apresenta-se a discretização e solução das equações desenvolvidas no Capítulo 4, as quais governam o movimento do escoamento em golfadas no interior do *riser*.

O Capítulo 6 apresenta as equações utilizadas para calcular a resposta dinâmica

estrutural do *riser* em catenária, assim como também seus respectivos métodos de solução. Uma vez conhecida a solução das equações para calcular o desenvolvimento do escoamento e para calcular a resposta dinâmica estrutural do *riser*, o seguinte passo consiste em mostrar a forma em que ambos os códigos interagem e de que forma estes trocam informação, o que será explicado no Capítulo 7.

No Capítulo 8 são apresentados os resultados numéricos obtidos pela ferramenta computacional. Finalmente, o Capítulo 9 mostra as conclusões do presente trabalho, assim como também as recomendações para futuros trabalhos.

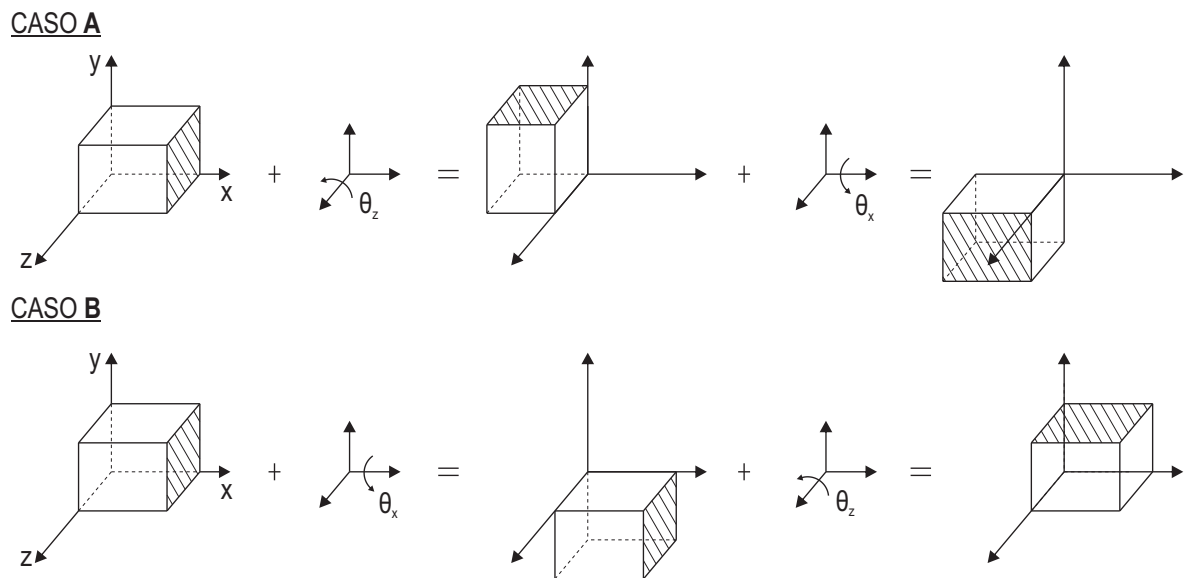
## 2 CONCEITOS FUNDAMENTAIS

Neste capítulo serão apresentados conceitos que são muito importantes para o desenvolvimento do presente trabalho: o tema de grandes rotações, que é fundamental para o desenvolvimento da formulação co-rotacional; o cálculo da força devida ao escoamento no interior de um *riser* de produção, estudo necessário para poder realizar uma análise estrutural; e por último, o cálculo das forças hidrodinâmicas devidas à correnteza.

### 2.1 Grandes rotações

O tratamento de grande rotações é de crucial importância no estudo da formulação co-rotacional. As rotações não podem ser tratadas como quantidades vetoriais, isto porque as rotações são não-comutativas, assim como mostrado na Figura 2.1.

Figura 2.1 - Não-comutatividade do vetor de rotação.



Fonte: Produção do autor.

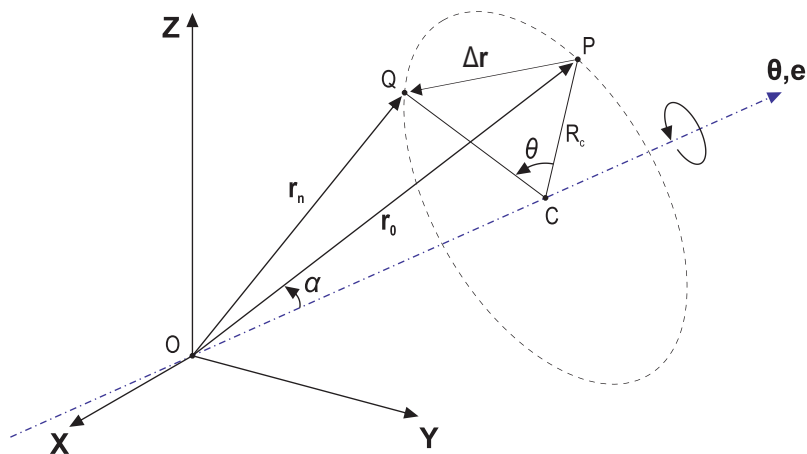
A Figura 2.1 mostra um elemento no sistema de coordenadas  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ ; no caso A foram aplicadas as rotações  $\theta_z$  e  $\theta_x$ , nessa ordem, e no caso B foram aplicadas as rotações  $\theta_x$  e  $\theta_z$ . A Figura 2.1 mostra que o resultado de uma série de rotações de-

pende da ordem em que elas são aplicadas. Por esse motivo, para o tratamento das grandes rotações se introduz o conceito de pseudovetor, o qual tem uma representação semelhante ao de um vetor, porém, não cumpre com as propriedades básicas de um vetor.

### 2.1.1 Matriz de rotação para grandes rotações

A matriz de rotação para grandes rotações será desenvolvida. Para isto, define-se o vetor  $\mathbf{r}_o$ , o qual vai ser rotacionado ao redor do eixo  $\mathbf{e}$  até alcançar uma nova orientação, a qual será definida pelo vetor  $\mathbf{r}_n$ , assim como mostrado na Figura 2.2.

Figura 2.2 - Rotação em três dimensões.



Fonte: Adaptado de Crisfield (1997).

A rotação que sofre o vetor  $\mathbf{r}_o$  é definido pelo pseudovetor  $\boldsymbol{\theta}$ , definido por um vetor unitário  $\mathbf{e}$ , que a sua vez indica a direção do eixo de rotação ao redor do qual a rotação ocorre, e pelo ângulo de rotação  $\theta$ , assim como mostrado na Figura 2.2. O pseudovetor  $\boldsymbol{\theta}$  é dado por:

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \theta_1 \mathbf{e}_1 + \theta_2 \mathbf{e}_2 + \theta_3 \mathbf{e}_3 = \theta \mathbf{e} \quad (2.1)$$

O módulo do pseudovetor  $\boldsymbol{\theta}$  é dado por:



$$\theta = \|\boldsymbol{\theta}\| = (\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2)^{1/2} = (\boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\theta})^{1/2} \quad (2.2)$$

Para o cálculo da matriz de rotação, determina-se o vetor  $\mathbf{r}_n$  em função do vetor  $\mathbf{r}_o$ . A partir da Figura 2.2 tem-se:

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{r}_o + \Delta \mathbf{r} \quad (2.3)$$

O cálculo do vetor  $\Delta \mathbf{r}$  foi detalhado minuciosamente por [Argyris \(1982\)](#), em seu trabalho sobre grandes rotações. O vetor  $\Delta \mathbf{r}$  é calculado como:

$$\Delta \mathbf{r} = \frac{\text{sen } \theta}{\theta} (\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}_o) + \frac{(1 - \cos \theta)}{\theta^2} (\boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}_o)) \quad (2.4)$$

Logo, substituindo a Equação (2.4) na Equação (2.3) obtém-se a seguinte expressão:

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{r}_o + \frac{\text{sen } \theta}{\theta} (\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}_o) + \frac{(1 - \cos \theta)}{\theta^2} (\boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}_o)) \quad (2.5)$$

Agora, reescreve-se a Equação (2.5) em forma matricial. Para isso, será introduzido o conceito de matriz anti-simétrica:

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} 0 & -\theta_3 & \theta_2 \\ \theta_3 & 0 & -\theta_1 \\ \theta_2 & \theta_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

onde  $\mathbf{S}(\boldsymbol{\theta})$  representa a matriz anti-simétrica associada ao pseudovetor  $\boldsymbol{\theta}$ . Logo, com o objetivo de manipular a Equação (2.5), as seguintes igualdades serão utilizadas:

$$\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}_o = \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{r}_o \quad (2.7)$$

$$\boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}_o) = \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{S}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{r}_o \quad (2.8)$$

Finalmente, substituindo as Equações (2.7) e (2.8) na Equação (2.5) obtém-se:

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{R}\mathbf{r}_o = \left[ \mathbf{I} + \frac{\text{sen } \theta}{\theta} \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}) + \frac{(1 - \cos \theta)}{\theta^2} \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}) \right] \mathbf{r}_o \quad (2.9)$$

onde  $\mathbf{R}$  é a matriz de rotação, e relaciona os vetores  $\mathbf{r}_o$  e  $\mathbf{r}_n$ . A Equação (2.9) é conhecida como a fórmula de Rodrigues.

A matriz de rotação  $\mathbf{R}$  também pode ser expressa em função do vetor unitário  $\mathbf{e}$ , da seguinte forma:

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} + \text{sen } \theta \mathbf{S}(\mathbf{e}) + (1 - \cos \theta) \mathbf{S}(\mathbf{e}) \mathbf{S}(\mathbf{e}) \quad (2.10)$$

### 2.1.2 Matriz de rotação em função dos quatérnions

Uma das limitações de trabalhar com pseudovetores é quando se trabalha com ângulos de rotação maiores que  $180^\circ$ . Outra alternativa no tratamento de grandes rotações é o uso dos quatérnions, os quais contam com quatro parâmetros.

Os parâmetros do quatérnion baseiam-se num eixo de rotação e num ângulo de rotação. O quatérnion unitário  $\hat{\mathbf{q}}$  é definido a partir dos parâmetros de Euler  $q_0$ ,  $q_1$ ,  $q_2$ , e  $q_3$ , onde os três últimos são os componentes do eixo de rotação  $\bar{\mathbf{q}}$ , e  $q_0$  é um escalar. Logo, o quatérnion unitário é definido por:

$$\hat{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{q}} \\ q_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{sen } (\theta/2) \mathbf{e} \\ \cos (\theta/2) \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

onde  $\mathbf{e}$  é o vetor unitário do eixo de rotação sobre o qual a rotação ocorre, e  $\theta$  é o ângulo de rotação. Os parâmetros do quatérnion unitário satisfazem a condição:

$$\bar{\mathbf{q}}^T \bar{\mathbf{q}} + q_0^2 = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_0^2 = 1 \quad (2.12)$$

Para o cálculo da matriz de rotação  $\mathbf{R}$ , Equação (2.10), usamos uma expressão em função da metade do ângulo de rotação  $\theta$  da forma seguinte:

$$\mathbf{R} = \left( \cos^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) - \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \right) \mathbf{I} + 2 \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) \sin \left( \frac{\theta}{2} \right) \mathbf{S}(\mathbf{e}) + 2 \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \mathbf{e}\mathbf{e}^T \quad (2.13)$$

Finalmente, a matriz de rotação  $\mathbf{R}$  pode ser expressa em função dos parâmetros de Euler ao substituir, adequadamente, os valores da Equação (2.11) na Equação (2.13). Logo, a matriz de rotação  $\mathbf{R}$  é expressa por:

$$\mathbf{R} = 2 \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - 1/2 & q_1q_2 - q_3q_0 & q_1q_3 + q_2q_0 \\ q_2q_1 + q_3q_0 & q_0^2 + q_2^2 - 1/2 & q_2q_3 - q_1q_0 \\ q_3q_1 - q_2q_0 & q_3q_2 + q_1q_0 & q_0^2 + q_3^2 - 1/2 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

### 2.1.3 Obtenção do pseudovetor a partir da matriz de rotação

Para obter o pseudovetor  $\boldsymbol{\theta}$  a partir da matriz de rotação  $\mathbf{R}$ , será calculada a matriz transposta de  $\mathbf{R}$ , a qual será obtida a partir da Equação (2.10). Dessa forma

$$\mathbf{R}^T = [\mathbf{I} - \sin \theta \mathbf{S}(\mathbf{e}) + (1 - \cos \theta) \mathbf{S}(\mathbf{e}) \mathbf{S}(\mathbf{e})] \quad (2.15)$$

A partir das Equações (2.10) e (2.15), pode-se mostrar que a parte antissimétrica  $\mathbf{R}^a$  da matriz de rotação  $\mathbf{R}$  é dada por:

$$\mathbf{R}^a = \frac{1}{2} (\mathbf{R} - \mathbf{R}^T) = \sin \theta \mathbf{S}(\mathbf{e}) = \frac{\sin \theta}{\theta} \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}) \quad (2.16)$$

onde  $\mathbf{S}(\mathbf{e})$  e  $\mathbf{S}(\boldsymbol{\theta})$  são as matrizes antissimétricas associadas aos pseudovetores  $\mathbf{e}$  e  $\boldsymbol{\theta}$ , respectivamente, as quais podem ser calculadas utilizando a expressão mostrada na Equação (2.6).

Finalmente, substituindo a matriz antissimétrica  $\mathbf{S}(\boldsymbol{\theta})$  na Equação (2.16), o pseudovetor  $\boldsymbol{\theta}$  é obtido como:

$$\frac{\sin \theta}{\theta} \boldsymbol{\theta} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} R_{32} - R_{23} \\ R_{13} - R_{31} \\ R_{21} - R_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.17)$$

A Equação (2.17) é válida para valores do ângulo  $\theta$  na faixa de  $0 < |\theta| < \pi$ , especificamente, para ângulos pequenos ( $\sin \theta \approx \theta$ ). Para ângulos maiores, recomenda-se trabalhar com quatérnions, explicado a seguir.

#### 2.1.4 Extração do quatérnion normalizado a partir da matriz de rotação

No tratamento de grandes rotações, como foi mencionado na seção 2.2.3, existem algumas limitações enquanto a trabalhar com ângulos maiores que  $\pi$ . Por esse motivo, muitos autores recomendam trabalhar com quatérnions ao invés de pseudovetores.

A metodologia a utilizar na extração do quatérnion é a proposta por Spurrier (1978). Spurrier recomenda calcular só a componente de maior magnitude como uma raiz quadrada e usar essa componente como divisor para o cálculo das demais componentes. A metodologia utilizada é descrita a seguir.

1. Defina-se  $a$  como:

$$a = \max(Tr(\mathbf{R}), R_{11}, R_{22}, R_{33}) \quad (2.18)$$

onde  $\mathbf{R}$  é a matriz de rotação, e  $Tr(\mathbf{R})$  indica o traço da matriz  $\mathbf{R}$ .

2. Se:

$$a = Tr(\mathbf{R}) \quad (2.19)$$

3. Obtém-se:

$$q_0 = \frac{1}{2} (1 + a)^{1/2} \quad (2.20)$$

$$q_i = 2(R_{kj} - R_{jk}) / \bar{q} \quad (2.21)$$

onde  $i, j, k$  formam uma permutação circular de 1, 2, 3.

4. Se:

$$a \neq Tr(\mathbf{R}) = R_{11} + R_{22} + R_{33} \quad (2.22)$$

5. Obtém-se:

$$q_i = \left[ \frac{a}{2} + \frac{1}{4} (1 - \text{Tr}(\mathbf{R})) \right]^{1/2} \quad (2.23)$$

$$q_0 = \frac{1}{4} (R_{kj} - R_{jk}) / q_i \quad (2.24)$$

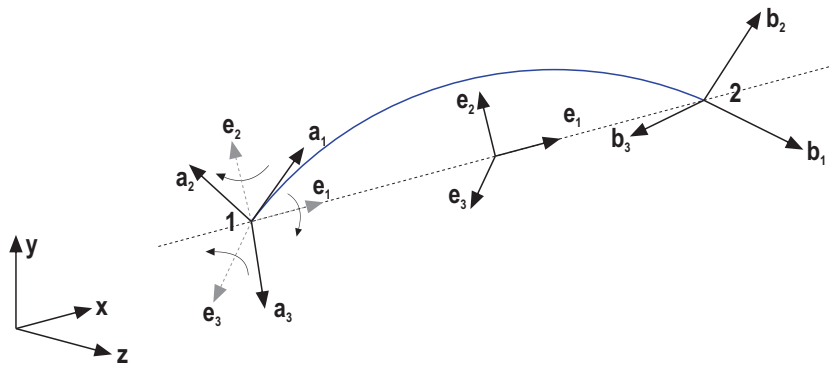
$$q_j = \frac{1}{4} (R_{ji} + R_{ij}) / q_i \quad (2.25)$$

onde  $l=j,k$ . As variables  $i,j,k$  formam uma permutação circular de 1,2,3, tal que  $R_{ii}$  é o maior valor da Equação (2.18).

### 2.1.5 Ângulos de rotação no sistema de coordenadas local

Figura 2.3 mostra um elemento de viga tridimensional, definido pelos nós 1 e 2, com uma triáde  $\mathbf{A}$ , composta pelos vetores  $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{a}_2$  e  $\mathbf{a}_3$ , associada ao nó 1, e com uma triáde  $\mathbf{B}$ , composta pelos vetores  $\mathbf{b}_1$ ,  $\mathbf{b}_2$  e  $\mathbf{b}_3$ , associada ao nó 2. A figura mostra também a triáde  $\mathbf{E}$ , composta pelos vetores  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  e  $\mathbf{e}_3$ , a qual representa o sistema de coordenadas local, e onde o vetor  $\mathbf{e}_1$  é definido pela linha que une os nós 1 e 2.

Figura 2.3 - Triádes associadas a um elemento de viga tridimensional.



Fonte: Produção do autor.

A seguir, relacionam-se as triádes  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{E}$  por meio da seguinte equação:

$$\mathbf{R}(\Delta\theta_g)\mathbf{E} = \mathbf{A} \quad (2.26)$$

onde  $\mathbf{R}(\Delta\boldsymbol{\theta}_g)$  é a matriz de rotação no sistema de coordenadas global, que mede a rotação entre as tríades  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{A}$ . A seguir, a matriz de rotação é determinada pela seguinte expressão:

$$\mathbf{R}(\Delta\boldsymbol{\theta}_g) = \mathbf{A}\mathbf{E}^T \quad (2.27)$$

Uma vez conhecida a matriz de rotação em coordenadas globais, pode-se calcular a matriz de rotação com respeito ao sistema de coordenadas local, a qual é dada pela seguinte expressão:

$$\mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}_l) = \mathbf{E}^T \mathbf{A} \mathbf{E}^T \mathbf{E} = \mathbf{E}^T \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^T \mathbf{a}_1 & \mathbf{e}_1^T \mathbf{a}_2 & \mathbf{e}_1^T \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{e}_2^T \mathbf{a}_1 & \mathbf{e}_2^T \mathbf{a}_2 & \mathbf{e}_2^T \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{e}_3^T \mathbf{a}_1 & \mathbf{e}_3^T \mathbf{a}_2 & \mathbf{e}_3^T \mathbf{a}_3 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

De acordo com a Equação (2.16), o pseudovetor  $\boldsymbol{\theta}_l$  pode ser calculado a partir da seguinte expressão:

$$\text{sen } \theta_l \mathbf{S}(\mathbf{e}) = \frac{\mathbf{R} - \mathbf{R}^T}{2} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{e}_1^T \mathbf{a}_2 - \mathbf{e}_2^T \mathbf{a}_1 & \mathbf{e}_1^T \mathbf{a}_3 - \mathbf{e}_3^T \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{e}_2^T \mathbf{a}_1 - \mathbf{e}_1^T \mathbf{a}_2 & 0 & \mathbf{e}_2^T \mathbf{a}_3 - \mathbf{e}_3^T \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{e}_3^T \mathbf{a}_1 - \mathbf{e}_1^T \mathbf{a}_3 & \mathbf{e}_3^T \mathbf{a}_2 - \mathbf{e}_2^T \mathbf{a}_3 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

onde  $\mathbf{e}$ , no lado esquerdo da Equação (2.29), é um vetor unitário e não tem relação com os vetores  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  e  $\mathbf{e}_3$ . Finalmente, os ângulos de rotação locais podem ser obtidos a partir da seguinte igualdade:

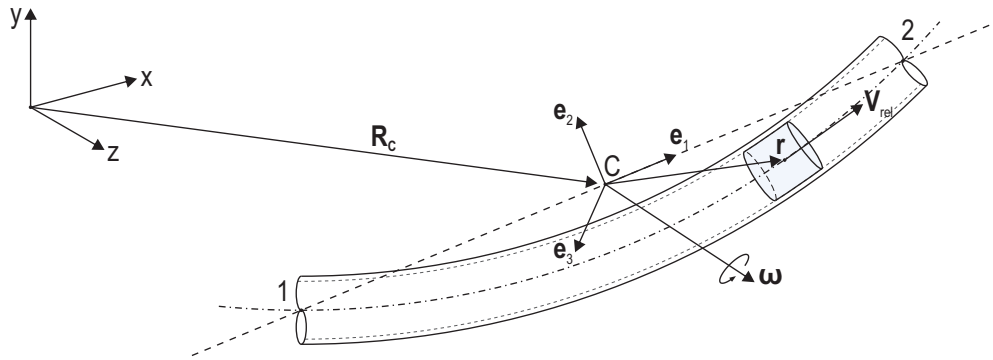
$$\begin{Bmatrix} \text{sen } \theta_{l1} \\ \text{sen } \theta_{l2} \\ \text{sen } \theta_{l3} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_2^T \mathbf{e}_3 - \mathbf{a}_3^T \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{a}_3^T \mathbf{e}_1 - \mathbf{a}_1^T \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{a}_1^T \mathbf{e}_2 - \mathbf{a}_2^T \mathbf{e}_1 \end{Bmatrix} \quad (2.30)$$

## 2.2 Forças devidas ao escoamento interno

Considere-se um elemento diferencial de fluido movendo-se através de um elemento de *riser*, o qual é definido pelos pontos 1 e 2, assim como mostrado na Figura 2.4. O sistema de coordenadas  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  é associado ao elemento de *riser*, deslocando-se e rotacionando junto com o elemento. O sistema de coordenadas  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  é chamado

de não-inercial, isto devido a que o sistema tem aceleração em relação ao sistema de coordenadas inercial  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ .

Figura 2.4 - Partícula de fluido movendo-se através de um elemento de riser.



Fonte: Produção do autor.

A partir da Figura 2.4, o ponto C é o origem do sistema de coordenadas não-inercial  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ , e é definido como sendo o ponto médio da linha que conecta os pontos 1 e 2, os quais são os extremos do elemento tridimensional de *riser*. O vetor  $\mathbf{R}_c$  define as coordenadas de posição do ponto C, entanto que o vetor  $\boldsymbol{\omega}$  representa a velocidade angular do sistema de coordenadas não-inercial. Os vetores  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{V}_{rel}$  indicam a posição e a velocidade do elemento diferencial de fluido em relação ao sistema de coordenadas não-inercial, respetivamente.

Para poder calcular a força que o escoamento interno produz sobre o elemento de *riser*, como primeiro passo vamos calcular a força que o elemento de *riser* produz sobre o elemento diferencial de fluido, motivo pelo qual utilizaremos a segunda lei de Newton, a qual estabelece que

$$d\mathbf{F}_r = \mathbf{a}_f \cdot dm \quad (2.31)$$

onde  $\mathbf{a}_f$  é a aceleração do elemento diferencial de fluido,  $d\mathbf{F}_r$  é a força resultante que atua sobre o elemento diferencial de fluido, e  $dm$  é a massa do elemento diferencial de fluido. A força  $\mathbf{F}_r$  é aplicada pelo elemento de *riser* sobre o fluido interno. A força aplicada pelo fluido interno sobre o elemento de *riser* tem o mesmo valor, porém,

no sentido contrário. Logo, a força devida ao elemento diferencial de fluido interno que atua sobre o elemento de *riser* pode ser calculada como

$$d\mathbf{F}_f = -\mathbf{a}_f dm \quad (2.32)$$

onde  $\mathbf{F}_f$  é o vetor de força devido à dinâmica do fluido interno. A partir da Equação (2.32) e usando  $dm = \rho_L A_{int} ds$ , a força devida ao escoamento interno por unidade de comprimento,  $\mathbf{f}_f$ , pode ser calculada como

$$\mathbf{f}_f = -\rho_L A_{int} \mathbf{a}_f \quad (2.33)$$

A aceleração de uma partícula de fluido movendo-se em relação a um sistema de coordenadas não-inercial, é calculada a partir da expressão formulada por Meriam e Kraige (2012):

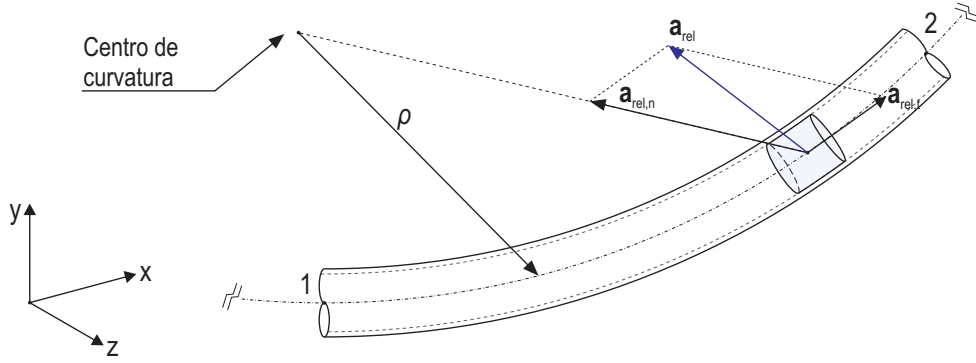
$$\mathbf{a}_f = \mathbf{a}_{rel} + \ddot{\mathbf{R}}_c + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}_{rel} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \quad (2.34)$$

onde  $\mathbf{a}_f$  é a aceleração da partícula de fluido no sistema global de coordenadas  $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})$  e  $\mathbf{a}_{rel}$  é a aceleração do fluido no sistema de coordenadas não-inercial  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ . No lado direito da Equação (2.34), o segundo termo representa a aceleração da origem do sistema de coordenadas não-inercial  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ , o terceiro termo representa a aceleração de Coriolis, o quarto termo representa a aceleração causada pela aceleração angular do sistema de coordenadas  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ , e o quinto termo representa a aceleração centrípeta em relação ao origem do sistema de coordenadas não-inercial.

O vetor  $\mathbf{a}_{rel}$  é expresso como a soma vetorial de um vetor tangente à trajetória,  $\mathbf{a}_{rel,t}$ , e um vetor normal à trajetória,  $\mathbf{a}_{rel,n}$ . O vetor  $\mathbf{a}_{rel,n}$  é sempre orientado ao centro de curvatura instantâneo, assim como mostrado na Figura 2.5.



Figura 2.5 - Componentes tangencial e normal da aceleração do fluido no sistema de coordenadas não-inercial.



Fonte: Produção do autor.

onde  $\rho$  representa o raio de curvatura. A magnitude das componentes tangencial e normal de  $\mathbf{a}_{rel}$  são dadas pelas seguintes expressões:

$$a_{rel,t} = \dot{V}_{rel} \quad (2.35)$$

$$a_{rel,n} = \frac{V_{rel}^2}{\rho} \quad (2.36)$$

Finalmente, uma vez conhecida a aceleração da partícula no sistema de global de coordenadas, substituindo a Equação (2.34) na Equação (2.33) obtêm-se:

$$\mathbf{f}_f = -\rho_L A_{int} \left[ \mathbf{a}_{rel} + \ddot{\mathbf{R}}_c + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}_{rel} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \right] \quad (2.37)$$

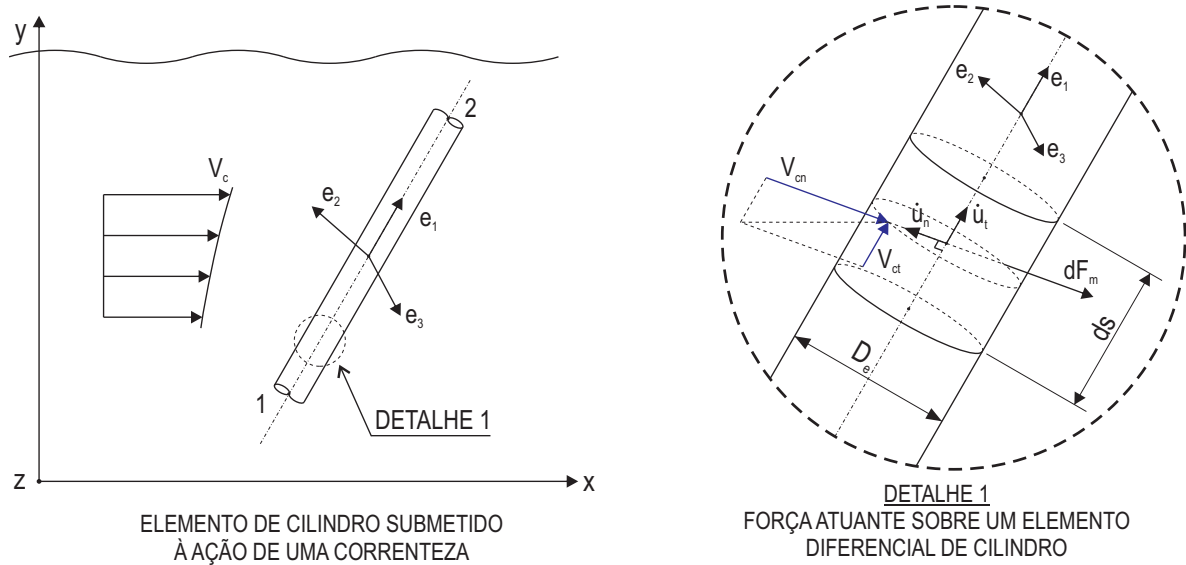
onde a Equação (2.37) expressa a força por unidade de comprimento que o escoamento interno exerce sobre o *riser*.

### 2.3 Forças devidas à correnteza sobre cilindros inclinados

Para determinar as forças que produz uma correnteza sobre um cilindro inclinado em movimento, utilizou-se a fórmula semi-empírica de Morison, a qual baseia-se na suposição de que as propriedades da onda não são afetadas pela presença da

estrutura. Considera-se um cilindro inclinado em movimento, o qual encontra-se sob os efeitos de uma correnteza, assim como mostrado na Figura 2.6.

Figura 2.6 - Cilindro inclinado submetido aos efeitos de uma correnteza.



Fonte: Produção do autor.

A Figura 2.6 mostra um cilindro definido pelos pontos 1 e 2, onde os vetores  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$ , e  $\mathbf{e}_3$  definem as direções do sistema de coordenadas local do elemento.  $\dot{u}_t$  e  $\dot{u}_n$  representam as velocidades do elemento diferencial de cilindro, de comprimento  $ds$ , nas direções tangencial e normal ao eixo do cilindro, respectivamente. O vetor velocidade  $\dot{u}_n$  é paralelo ao plano formado pelos vetores  $\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$ .  $V_c$  representa a velocidade da correnteza, a qual é uma função da coordenada vertical  $y$ , e tem duas componentes,  $V_{ct}$  na direção tangencial, e  $V_{cn}$  na direção normal ao eixo do cilindro. Por último,  $dF_m$  representa as forças devidas à correnteza que atuam sobre o elemento diferencial de cilindro.

Neste trabalho, para o cálculo das forças devidas à correnteza, vamos utilizar a abordagem da componente normal, a qual considera que só produzem forças as velocidades e acelerações na direção normal ao eixo do cilindro, desprezando as componentes na direção tangencial. Esta abordagem, segundo Beltrán e Cerrolaza (1989), foi utilizada com bastante sucesso por outros autores.

A força de Morison, de acordo com Patel (2013) e Beltrán e Cerrolaza (1989), é dada pela soma de três componentes de força: uma devida ao arrasto hidrodinâmico, uma devida à inércia do fluido, e outra devida às massas adicionadas. A força de Morison que atua sobre um elemento diferencial de cilindro é dada pela seguinte equação:

$$dF_m = \frac{1}{2}C_D\rho_m|V_{cn} - \dot{u}_n|(V_{cn} - \dot{u}_n)D_e ds + C_M\rho_m\frac{\pi D_e^2}{4}\dot{V}_{cn} ds - C_A\rho_m\frac{\pi D_e^2}{4}\ddot{u}_n ds \quad (2.38)$$

onde  $C_D$ ,  $C_M$  e  $C_A$  representam os coeficientes de arrasto hidrodinâmico, de inércia do fluido, e de massas adicionadas, respectivamente.  $\rho_m$  é a densidade da água do mar, e  $D_e$  representa o diâmetro externo do cilindro.

Finalmente, a força devida à correnteza, por unidade de comprimento, que atua sobre um cilindro inclinado é dada pela seguinte equação:

$$f_m = \frac{1}{2}C_D\rho_m D_e|V_{cn} - \dot{u}_n|(V_{cn} - \dot{u}_n) + C_M\rho_m\frac{\pi D_e^2}{4}\dot{V}_{cn} - C_A\rho_m\frac{\pi D_e^2}{4}\ddot{u}_n \quad (2.39)$$



### 3 FORMULAÇÃO CO-ROTACIONAL

Neste capítulo, será apresentada a formulação co-rotacional para um elemento de viga tridimensional, a qual é baseada nos trabalhos realizados por Crisfield (1990) e Crisfield (1997). A formulação co-rotacional é muito utilizada em análise estrutural de vigas, isto devido à sua capacidade de lidar com as não-linearidades. Neste trabalho, a formulação co-rotacional é utilizada para poder calcular a matriz de rigidez tangente, assim como também o vetor de forças internas do *riser*.

Na configuração inicial assume-se que o elemento de viga têm um comportamento linear elástico, e seguidamente as não linearidades são introduzidas via a formulação co-rotacional. Para isto, considera-se que o elemento de viga sofre grandes deslocamentos, porém pequenas deformações. A formulação co-rotacional permite separar o movimento de corpo rígido do movimento deformacional do elemento de viga, a partir de um sistema de referência local fixo ao elemento de viga.

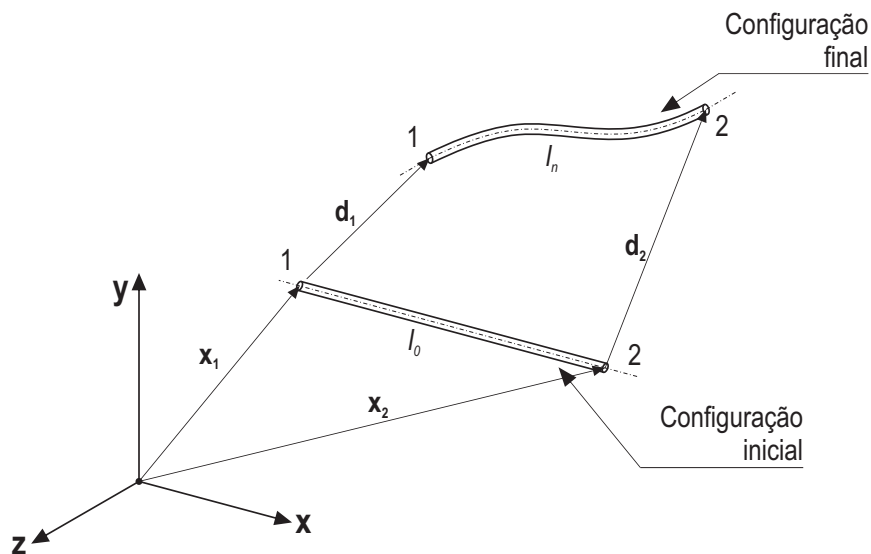
#### 3.1 Cálculo dos deslocamentos locais

##### 3.1.1 Deslocamento axial local

Na Figura 3.1 mostra-se as configurações inicial e final de um elemento de viga tridimensional. A deformação axial local do elemento de viga é calculado a partir dos comprimentos  $l_o$  e  $l_n$ , os quais correspondem aos comprimentos do elemento de viga nas configurações inicial e final, respectivamente. Na formulação co-rotacional, considera-se que o comprimento final do elemento de viga,  $l_n$ , é igual à distancia entre os pontos 1 e 2, isto devido às pequenas deformações que sofre o elemento.

A partir da Figura 3.1, os vetores  $\mathbf{X}_1$  e  $\mathbf{X}_2$  representam os vetores de posição dos pontos 1 e 2 do elemento de viga, respectivamente.  $\mathbf{d}_1$  e  $\mathbf{d}_2$  são os vetores que medem os deslocamentos dos nós 1 e 2, respectivamente, a partir da configuração inicial até a configuração final. A seguir será definida a diferença dos vetores de posição  $\mathbf{X}_1$  e  $\mathbf{X}_2$  como sendo  $\mathbf{X}_{21}$ , dada pela seguinte expressão:

Figura 3.1 - Configuração inicial e final de um elemento de viga tridimensional.



Fonte: Crisfield (1997).

$$\mathbf{X}_{21} = \mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1 \quad (3.1)$$

assim também, será definida a diferença dos vetores de deslocamentos dos nós 1 e 2 como  $\mathbf{d}_{21}$ , a qual é definida como:

$$\mathbf{d}_{21} = \mathbf{d}_2 - \mathbf{d}_1 \quad (3.2)$$

O deslocamento axial local,  $u_a$ , que sofre o elemento de viga a partir da configuração inicial até a configuração final, é dado pela seguinte equação:

$$u_a = l_n - l_o = \left( (\mathbf{X}_{21} + \mathbf{d}_{21})^T (\mathbf{X}_{21} + \mathbf{d}_{21}) \right)^{1/2} - \left( \mathbf{X}_{21}^T \mathbf{X}_{21} \right)^{1/2} \quad (3.3)$$

Quando a diferença entre os comprimentos  $l_n$  e  $l_o$  é muito pequena, a Equação (3.3) é mal condicionada. Para evitar isso, a Equação (3.3) é manipulada da seguinte forma:

$$u_a = \frac{(l_n + l_o)}{(l_n + l_o)} (l_n - l_o) \quad (3.4)$$

Logo, a seguinte expressão para o deslocamento axial local  $u_a$  é obtida:

$$u_a = \frac{2}{(l_n + l_o)} \left( \mathbf{X}_{21} + \frac{1}{2} \mathbf{d}_{21} \right)^T \mathbf{d}_{21} \quad (3.5)$$

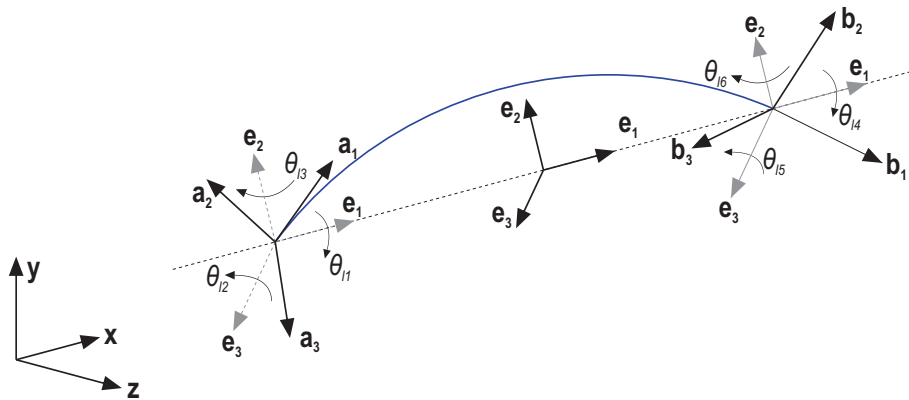
A Equação (3.5) relaciona os deslocamentos em coordenadas globais com o deslocamento axial local  $u_a$ . Na formulação co-rotacional é assumido que a deformação axial local  $\varepsilon_l$  é constante ao longo do elemento. Finalmente, a força axial ao longo do elemento,  $N$ , é calculada a partir da seguinte equação:

$$N = EA\varepsilon_l = EA \frac{u_a}{l_o} \quad (3.6)$$

### 3.1.2 Deslocamentos rotacionais locais do elemento de viga

Os deslocamentos rotacionais locais do elemento de viga podem ser calculados por meio da Equação (2.17), motivo pelo qual precisamos conhecer os vetores que compõem as tríades  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ .

Figura 3.2 - Rotações locais de um elemento de viga tridimensional.



Fonte: Produção do autor

Nesta seção, será definido o sistema de referência local  $\mathbf{E}$ , o qual é fixo ao elemento tridimensional de viga. O sistema  $\mathbf{E}$ , com vetores unitários  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$ , e  $\mathbf{e}_3$ , acompanha as rotações da seção transversal do elemento de viga, e é rotacionado em relação ao sistema de referência global  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ . O vetor unitário  $\mathbf{e}_1$ , como pode ser visto na Figura 3.2, é definido a partir da linha que une os nós 1 e 2 do elemento de viga. Logo,  $\mathbf{e}_1$  é expresso como:

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{l_n} (\mathbf{X}_{21} + \mathbf{d}_{21}) \quad (3.7)$$

Na Figura 3.2 se mostra as tríades  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ , as quais estão associadas aos nós 1 e 2 do elemento de viga, respectivamente. A tríade  $\mathbf{A}$  é composta pelos vetores unitários  $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{a}_2$ , e  $\mathbf{a}_3$ , enquanto que a tríade  $\mathbf{B}$  é composta pelos vetores unitários  $\mathbf{b}_1$ ,  $\mathbf{b}_2$ , e  $\mathbf{b}_3$ . Agora, vamos a definir a tríade  $\mathbf{A}$  e a tríade  $\mathbf{B}$  como:

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3] = \mathbf{R}(\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{A}_0 \quad (3.8)$$

$$\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3] = \mathbf{R}(\boldsymbol{\beta}) \mathbf{B}_0 \quad (3.9)$$

onde  $\mathbf{A}_0$  e  $\mathbf{B}_0$  representam as configurações iniciais das tríades  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ , respectivamente. A orientação dos vetores das tríades  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  está relacionada com os pseudovetores  $\boldsymbol{\alpha}$  e  $\boldsymbol{\beta}$ , respectivamente, através da matriz de rotação  $\mathbf{R}$ .

Para calcular o valor da tríade  $\mathbf{E}$ , esta será relacionada com a rotação intermediária entre as tríades  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  (CRISFIELD, 1997). O sistema intermediário  $\mathbf{R}_m$  é definido pelos vetores unitários  $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}_2$ , e  $\mathbf{r}_3$ . Para calcular o sistema intermediário  $\mathbf{R}_m$  precisamos conhecer a rotação entre as tríades  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ , a qual é dada pela seguinte matriz de rotação:

$$\Delta \mathbf{R}(\boldsymbol{\gamma}) = \mathbf{B} \mathbf{A}^T \quad (3.10)$$

Após conhecer a matriz de rotação  $\Delta \mathbf{R}$ , temos que extrair o pseudovetor  $\boldsymbol{\gamma}$ . Uma vez conhecido o pseudovetor  $\boldsymbol{\gamma}$  pode-se calcular o sistema intermediário  $\mathbf{R}_m$  por meio da seguinte expressão

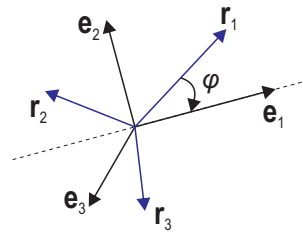


$$\mathbf{R}_m = \Delta\mathbf{R}\left(\frac{\gamma}{2}\right)\mathbf{T} \quad (3.11)$$

Segundo Crisfield (1997), em geral, a primeira coluna do sistema intermediário  $\mathbf{R}_m$ ,  $\mathbf{r}_1$ , não coincide com o vetor unitário  $\mathbf{e}_1$ , portanto, para obter  $\mathbf{E}$ , o sistema  $\mathbf{R}_m$  deverá ser rotacionado até que sua primeira coluna,  $\mathbf{r}_1$ , coincida com  $\mathbf{e}_1$  (vide Figura 3.3), o que pode ser obtido rotacionando os vetores  $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}_2$ , e  $\mathbf{r}_3$  através de um pseudovetor  $\varphi$ , definido por:

$$\varphi = \arccos\left(\mathbf{r}_1^T \mathbf{e}_1\right) \frac{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{e}_1}{|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{e}_1|} \quad (3.12)$$

Figura 3.3 - Rotação da Triade  $\mathbf{R}_m$  por meio do pseudovetor  $\varphi$ .



Fonte: Produção do autor

Finalmente, os vetores  $\mathbf{e}_2$  e  $\mathbf{e}_3$  são determinados como:

$$\mathbf{e}_2 = \mathbf{r}_2 - \frac{\mathbf{r}_2^T \mathbf{e}_1}{2} (\mathbf{e}_1 + \mathbf{r}_1) \quad (3.13)$$

$$\mathbf{e}_3 = \mathbf{r}_3 - \frac{\mathbf{r}_3^T \mathbf{e}_1}{2} (\mathbf{e}_1 + \mathbf{r}_1) \quad (3.14)$$

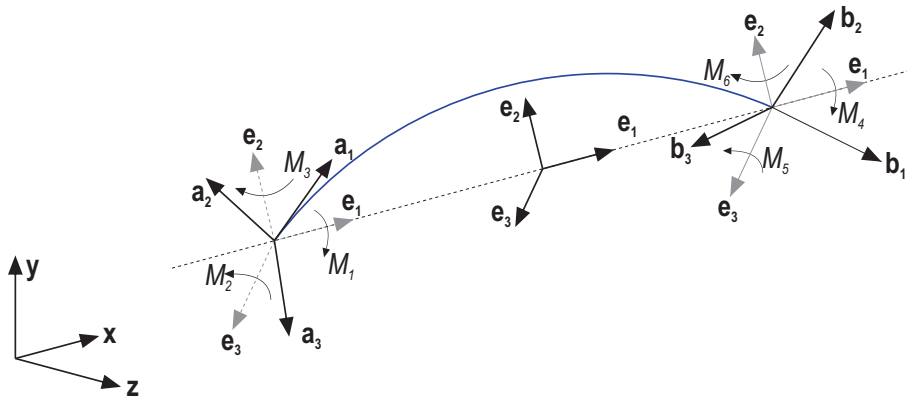
Uma vez conhecidos os valores das tríades  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ , utiliza-se a Equação (2.30) para calcular as rotações locais do elemento de viga. Logo, temos:

$$\begin{aligned}
2 \operatorname{sen} \theta_{l1} &= -\mathbf{a}_3^T \mathbf{e}_2 + \mathbf{a}_2^T \mathbf{e}_3 \\
2 \operatorname{sen} \theta_{l2} &= -\mathbf{a}_2^T \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2^T \mathbf{a}_1 \\
2 \operatorname{sen} \theta_{l3} &= -\mathbf{a}_3^T \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3^T \mathbf{a}_1 \\
2 \operatorname{sen} \theta_{l4} &= -\mathbf{b}_3^T \mathbf{e}_2 + \mathbf{b}_2^T \mathbf{e}_3 \\
2 \operatorname{sen} \theta_{l5} &= -\mathbf{b}_2^T \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2^T \mathbf{b}_1 \\
2 \operatorname{sen} \theta_{l6} &= -\mathbf{b}_3^T \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3^T \mathbf{b}_1
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Segundo Crisfield (1990), os momentos de torção e os momentos fletores podem se relacionar com as rotações locais dos nós da estrutura por meio das seguintes equações:

$$\begin{aligned}
M_1 &= +\frac{GJ}{l_0} [(\theta_{l1} - \theta_{l01}) - (\theta_{l4} - \theta_{l04})] \\
M_2 &= \frac{2EI_2}{l_0} [2(\theta_{l2} - \theta_{l02}) + (\theta_{l5} - \theta_{l05})] \\
M_3 &= \frac{2EI_3}{l_0} [2(\theta_{l3} - \theta_{l03}) + (\theta_{l6} - \theta_{l06})] \\
M_4 &= -\frac{GJ}{l_0} [(\theta_{l1} - \theta_{l01}) - (\theta_{l4} - \theta_{l04})] \\
M_5 &= \frac{2EI_2}{l_0} [(\theta_{l2} - \theta_{l02}) + 2(\theta_{l5} - \theta_{l05})] \\
M_6 &= \frac{2EI_3}{l_0} [(\theta_{l3} - \theta_{l03}) + 2(\theta_{l6} - \theta_{l06})]
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Figura 3.4 - Momentos de torção e momentos fletores atuantes em um elemento de viga.



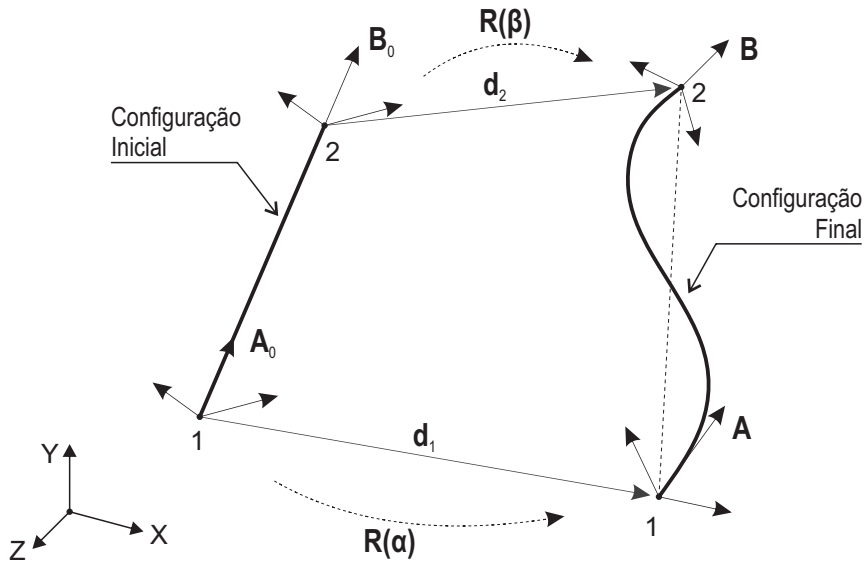
Fonte: Produção do autor

onde  $M_1$  e  $M_4$  são momentos de torção, e  $M_2, M_3, M_5,$  e  $M_6$  são momentos fletores (vide Figura 3.4). Os ângulos  $\theta_{li}$  e  $\theta_{lo_i}$ , para  $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ , representam as rotações locais do elemento de viga nas configurações inicial e final, respectivamente.  $G$  é o módulo de cisalhamento,  $E$  é o módulo de elasticidade,  $J$  é o momento polar de inércia,  $I_2$  e  $I_3$  são os momento de inércia da seção transversal do elemento de viga.

### 3.2 Relação entre as variáveis globais e locais

Para poder aplicar a abordagem co-rotacional, é preciso expressar o vetor de deslocamentos locais,  $\mathbf{u}_l$ , em função do vetor de deslocamentos globais,  $\mathbf{u}$ . O vetor de deslocamentos locais,  $\mathbf{u}_l$ , é composto pela deformação axial local do elemento (vide Figura 3.1), e pelas rotações locais do elemento (vide Figura 3.2). As componentes do vetor de deslocamentos globais são mostrados na Figura 3.5:

Figura 3.5 - Deslocamentos nodais globais do elemento de viga tridimensional.



Fonte: Produção do autor

onde os vetores  $\mathbf{d}_1$  e  $\mathbf{d}_2$  são os vetores de deslocamentos dos nós 1 e 2, respectivamente;  $\boldsymbol{\alpha}$  e  $\boldsymbol{\beta}$  são os pseudovetores associados as rotações dos nós 1 e 2, respectivamente. É importante lembrar que cada pseudovetor está associado a uma matriz de rotação.

Uma vez conhecidos os vetores de deslocamento local e global, será utilizada a matriz  $\mathbf{F}$  para relacionar estes vetores da seguinte forma:

$$\delta \mathbf{u}_l = \mathbf{F} \delta \mathbf{u} \quad (3.17)$$

onde os vetores  $\delta \mathbf{u}_l$  e  $\delta \mathbf{u}$  são as variações dos vetores de deslocamentos local e global, respectivamente. Os vetores  $\delta \mathbf{u}_l$ ,  $\delta \mathbf{u}$  e a matriz  $\mathbf{F}$  são definidos pelas seguintes expressões:

$$\delta \mathbf{u}_l^T = \{0, 0, 0, \delta \theta_{l1}, \delta \theta_{l2}, \delta \theta_{l3}, \delta u_a, 0, 0, \delta \theta_{l4}, \delta \theta_{l5}, \delta \theta_{l6}\} \quad (3.18)$$

$$\delta \mathbf{u}^T = \{\delta \mathbf{d}_1^T, \delta \boldsymbol{\alpha}^T, \delta \mathbf{d}_2^T, \delta \boldsymbol{\beta}^T\} \quad (3.19)$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1^T \\ \mathbf{f}_2^T \\ \mathbf{f}_3^T \\ \mathbf{f}_4^T \\ \mathbf{f}_5^T \\ \mathbf{f}_6^T \\ \mathbf{f}_7^T \\ \mathbf{f}_8^T \\ \mathbf{f}_9^T \\ \mathbf{f}_{10}^T \\ \mathbf{f}_{11}^T \\ \mathbf{f}_{12}^T \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

onde  $\mathbf{f}_1^T$  é a primeira linha da matriz  $\mathbf{F}$ . A partir das definições das variações dos deslocamentos locais e globais,  $\delta \mathbf{u}_l$  e  $\delta \mathbf{u}$ , respectivamente, tem-se:

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{f}_2 = \mathbf{f}_3 = \mathbf{f}_8 = \mathbf{f}_9 = \mathbf{0} \quad (3.21)$$

Agora, expressa-se a variação do deslocamento axial local do elemento de viga,  $\delta u_a$ , como uma função do vetor de deslocamentos globais, da seguinte forma:

$$\delta u_a = \mathbf{e}_1^T \delta \mathbf{d}_{21} = \left\{ -\mathbf{e}_1^T, \mathbf{0}^T, \mathbf{e}_1^T, \mathbf{0}^T \right\} \delta \mathbf{u} = \mathbf{f}_7^T \delta \mathbf{u} \quad (3.22)$$

Para o caso das rotações locais, dadas pela Equação (3.15), primeiro é necessário conhecer as variações dos vetores unitários das tríades  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ . As variações dos vetores unitários  $\delta \mathbf{a}_i$  e  $\delta \mathbf{b}_i$ , para  $i = 1, 2, 3$ , são dadas pelas seguintes expressões (CRISFIELD, 1997):

$$\delta \mathbf{a}_i = \delta \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{a}_i = -\mathbf{S}(\mathbf{a}_i) \delta \boldsymbol{\alpha} \quad (3.23)$$

$$\delta \mathbf{b}_i = \delta \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{b}_i = -\mathbf{S}(\mathbf{b}_i) \delta \boldsymbol{\beta} \quad (3.24)$$

onde  $\mathbf{S}(\mathbf{a}_i)$  e  $\mathbf{S}(\mathbf{b}_i)$  são as matrizes anti-simétricas dos vetores unitários  $\mathbf{a}_i$  e  $\mathbf{b}_i$ , respectivamente.

Também tem-se a necessidade de conhecer  $\delta \mathbf{e}_1$ ,  $\delta \mathbf{e}_2$ , e  $\delta \mathbf{e}_3$ , as quais são as variações dos vetores unitários da tríade  $\mathbf{E}$ . A partir das Equações (3.3), (3.7) e (3.22) obtém-se:

$$\delta \mathbf{e}_1 = \frac{\delta \mathbf{d}_{21}}{l_n} - \frac{(\mathbf{X}_{21} + \mathbf{d}_{21})}{l_n^2} \delta u_a = \mathbf{A}_e \delta \mathbf{d}_{21} \quad (3.25)$$

onde a matriz simétrica  $\mathbf{A}_e$  é dada por:

$$\mathbf{A}_e = \frac{1}{l_n} (\mathbf{I} - \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^T) \quad (3.26)$$

Para o cálculo das variações de  $\mathbf{e}_2$  e  $\mathbf{e}_3$ , é necessário conhecer as variações dos vetores unitários do sistema intermediário  $\mathbf{R}_m$ . Estas variações são dadas por:

$$\delta \mathbf{r}_i = -\mathbf{S}(\mathbf{r}_i) \frac{(\delta \boldsymbol{\alpha} + \delta \boldsymbol{\beta})}{2} \quad (3.27)$$

Logo,  $\delta \mathbf{e}_2$  e  $\delta \mathbf{e}_3$  são determinados a partir de :

$$\delta \mathbf{e}_2 = \mathbf{L}(\mathbf{r}_2)^T \delta \mathbf{u} \quad (3.28)$$

$$\delta \mathbf{e}_3 = \mathbf{L}(\mathbf{r}_3)^T \delta \mathbf{u} \quad (3.29)$$

onde a matriz  $\mathbf{L}$  é dada por:

$$\mathbf{L}^T = [\mathbf{L}_1^T, \mathbf{L}_2^T, -\mathbf{L}_1^T, \mathbf{L}_2^T] \quad (3.30)$$

As componentes  $\mathbf{L}_1$  e  $\mathbf{L}_2$ , da Equação (3.30), são expressas por:

$$\mathbf{L}_1(\mathbf{r}_i) = \frac{\mathbf{r}_i^T \mathbf{e}_1}{2} \mathbf{A}_e + \frac{1}{2} \mathbf{A}_e \mathbf{r}_i (\mathbf{e}_1 + \mathbf{r}_1)^T \quad (3.31)$$

$$\mathbf{L}_2(\mathbf{r}_i) = \frac{\mathbf{S}(\mathbf{r}_i)}{2} - \frac{\mathbf{r}_i^T \mathbf{e}_1}{4} \mathbf{S}(\mathbf{r}_i) - \frac{1}{4} \mathbf{S}(\mathbf{r}_i) \mathbf{e}_1 (\mathbf{e}_1 + \mathbf{r}_1)^T \quad (3.32)$$

Uma vez conhecidas as variações das tríades  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ , as variações de  $\boldsymbol{\theta}_l$  podem ser obtidas a partir da variação da Equação (3.15). Logo tem-se:

$$\delta \boldsymbol{\theta}_l = \{\delta \theta_{l1}, \delta \theta_{l2}, \delta \theta_{l3}, \delta \theta_{l4}, \delta \theta_{l5}, \delta \theta_{l6}\}^T = [\mathbf{f}_4 \ \mathbf{f}_5 \ \mathbf{f}_6 \ \mathbf{f}_{10} \ \mathbf{f}_{11} \ \mathbf{f}_{12}]^T \delta \mathbf{u} \quad (3.33)$$

onde os vetores coluna  $\mathbf{f}_4$ ,  $\mathbf{f}_5$ ,  $\mathbf{f}_6$ ,  $\mathbf{f}_{10}$ ,  $\mathbf{f}_{11}$ , e  $\mathbf{f}_{12}$  são dados pelas seguintes expressões:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_4 &= \frac{1}{2 \cos \theta_{l1}} (\mathbf{L}(\mathbf{r}_3) \mathbf{a}_2 - \mathbf{L}(\mathbf{r}_2) \mathbf{a}_3 + \mathbf{h}_1) \\ \mathbf{f}_5 &= \frac{1}{2 \cos \theta_{l2}} (\mathbf{L}(\mathbf{r}_2) \mathbf{a}_1 + \mathbf{h}_2) \\ \mathbf{f}_6 &= \frac{1}{2 \cos \theta_{l3}} (\mathbf{L}(\mathbf{r}_3) \mathbf{a}_1 + \mathbf{h}_3) \\ \mathbf{f}_{10} &= \frac{1}{2 \cos \theta_{l4}} (\mathbf{L}(\mathbf{r}_3) \mathbf{b}_2 - \mathbf{L}(\mathbf{r}_2) \mathbf{b}_3 + \mathbf{h}_4) \\ \mathbf{f}_{11} &= \frac{1}{2 \cos \theta_{l5}} (\mathbf{L}(\mathbf{r}_2) \mathbf{b}_1 - \mathbf{h}_5) \\ \mathbf{f}_{12} &= \frac{1}{2 \cos \theta_{l6}} (\mathbf{L}(\mathbf{r}_3) \mathbf{b}_1 - \mathbf{h}_6) \end{aligned} \quad (3.34)$$

com os termos  $\mathbf{h}_1$ ,  $\mathbf{h}_2$ ,  $\mathbf{h}_3$ ,  $\mathbf{h}_4$ ,  $\mathbf{h}_5$ , e  $\mathbf{h}_6$  são expressos por:

$$\begin{aligned}
\mathbf{h}_1^T &= \{ \mathbf{0}^T, (-\mathbf{S}(\mathbf{a}_3) \mathbf{e}_2 + \mathbf{S}(\mathbf{a}_2) \mathbf{e}_3)^T, \mathbf{0}^T, \mathbf{0}^T \} \\
\mathbf{h}_2^T &= \{ (\mathbf{A}_e \mathbf{a}_2)^T, (-\mathbf{S}(\mathbf{a}_2) \mathbf{e}_1 + \mathbf{S}(\mathbf{a}_1) \mathbf{e}_2)^T, -(\mathbf{A}_e \mathbf{a}_2)^T, \mathbf{0}^T \} \\
\mathbf{h}_3^T &= \{ (\mathbf{A}_e \mathbf{a}_3)^T, (-\mathbf{S}(\mathbf{a}_3) \mathbf{e}_1 + \mathbf{S}(\mathbf{a}_1) \mathbf{e}_3)^T, -(\mathbf{A}_e \mathbf{a}_3)^T, \mathbf{0}^T \} \\
\mathbf{h}_4^T &= \{ \mathbf{0}^T, \mathbf{0}^T, \mathbf{0}^T, (-\mathbf{S}(\mathbf{b}_3) \mathbf{e}_2 + \mathbf{S}(\mathbf{b}_2) \mathbf{e}_3)^T \} \\
\mathbf{h}_5^T &= \{ (\mathbf{A}_e \mathbf{b}_2)^T, \mathbf{0}^T, -(\mathbf{A}_e \mathbf{b}_2)^T, (-\mathbf{S}(\mathbf{b}_2) \mathbf{e}_1 + \mathbf{S}(\mathbf{b}_1) \mathbf{e}_2)^T \} \\
\mathbf{h}_6^T &= \{ (\mathbf{A}_e \mathbf{b}_3)^T, \mathbf{0}^T, -(\mathbf{A}_e \mathbf{b}_3)^T, (-\mathbf{S}(\mathbf{b}_3) \mathbf{e}_1 + \mathbf{S}(\mathbf{b}_1) \mathbf{e}_3)^T \}
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Uma vez conhecida a relação entre os vetores de deslocamentos locais e globais, o seguinte passo é calcular a matriz de rigidez tangente  $\mathbf{k}_t$ .

### 3.3 Matriz de rigidez tangente

A matriz de rigidez tangente permite medir a rigidez de uma estrutura em resposta a pequenas mudanças na sua configuração geométrica. O cálculo da matriz de rigidez tangente de um elemento de viga tridimensional é realizado a partir da equivalência dos trabalhos virtuais em coordenadas locais e em coordenadas globais. Logo tem-se:

$$\mathbf{q}^T \delta \mathbf{u}_v = \mathbf{q}_l^T \delta \mathbf{u}_{lv} \tag{3.36}$$

onde  $\mathbf{q}$  e  $\mathbf{q}_l$  representam os vetores de forças internas nos sistemas de coordenadas global e local, respectivamente;  $\mathbf{u}_v$  e  $\mathbf{u}_{lv}$  são os vetores de deslocamentos virtuais nos sistemas global e local, respectivamente. O trabalho virtual realizado pelo vetor  $\mathbf{q}_l$  é dado pela seguinte equação:

$$\mathbf{q}_l^T \delta \mathbf{u}_{lv} = N \delta u_a + M_1 \delta \theta_{l1} + M_2 \delta \theta_{l2} + M_3 \delta \theta_{l3} + M_4 \delta \theta_{l4} + M_5 \delta \theta_{l5} + M_6 \delta \theta_{l6} \tag{3.37}$$

onde  $N$  é a força axial no elemento de viga, e  $M_i$  é o momento associado ao deslocamento rotacional  $\theta_{li}$ , para  $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ . A Equação (3.37) pode ser reescrita na seguinte forma:

$$\mathbf{q}^T \delta \mathbf{u}_v = \mathbf{q}_1^T \mathbf{F} \delta \mathbf{u}_v \quad (3.38)$$

Assumindo que o vetor de deslocamentos virtuais  $\delta \mathbf{u}_v$  é arbitrário, a partir da Equação (3.38) obtém-se:

$$\mathbf{q} = \mathbf{F}^T \mathbf{q}_1 \quad (3.39)$$

A matriz de rigidez tangente  $\mathbf{k}_t$  é obtida a partir da aplicação do operador variacional à Equação (3.39). Logo tem-se:

$$\delta \mathbf{q} = \delta \mathbf{F}^T \mathbf{q}_1 + \mathbf{F}^T \delta \mathbf{q}_1 = (\mathbf{k}_\sigma + \mathbf{k}_{t1}) \delta \mathbf{u} = \mathbf{k}_t \delta \mathbf{u} \quad (3.40)$$

onde  $\mathbf{k}_\sigma$  é a matriz de rigidez geométrica a qual é obtida a partir da aplicação do operador variacional sobre a matriz  $\mathbf{F}$ . A matriz geométrica contém as contribuições de variação de comprimento de elemento e variação da orientação das tríades. A matriz  $\mathbf{k}_{t1}$  corresponde a variação nos esforços internos devido a variação nas deformações da viga. Esta matriz é chamada de matriz de rigidez elástica ou também de matriz de rigidez do material.

### 3.3.1 Cálculo da matriz de rigidez elástica

O cálculo da matriz de rigidez elástica é realizado a partir da variação do vetor de forças internas locais,  $\mathbf{q}_1$ , o qual é composto pela forças axial e pelos momentos atuantes sobre o elemento de viga. O vetor de forças internas locais  $\mathbf{q}_1$  é definido como:

$$\mathbf{q}_1 = \left\{ -N \quad 0 \quad 0 \quad M_1 \quad M_2 \quad M_3 \quad N \quad 0 \quad 0 \quad M_4 \quad M_5 \quad M_6 \right\}^T \quad (3.41)$$

Após aplicar o operador variacional na Equação (3.41) tem-se:

$$\delta \mathbf{q}_1 = \mathbf{k} \delta \mathbf{u}_1 = \mathbf{K} \mathbf{F} \delta \mathbf{u} \quad (3.42)$$

onde a matriz de rigidez tangente local  $\mathbf{k}$  é uma matriz 12x12, e os valores dos seus elementos são:



$$\mathbf{k} = \frac{1}{l_0} \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -EA & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & GJ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -GJ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4EI_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2EI_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4EI_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2EI_3 \\ -EA & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & EA & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -GJ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & GJ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2EI_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4EI_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2EI_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4EI_3 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

onde  $A$  é a área transversal da viga,  $E$  é o módulo de elasticidade do material da viga, e  $l_0$  é o comprimento do elemento de viga na configuração inicial.

Finalmente, substituindo a Equação (3.42) na Equação (3.40) é obtida a matriz de rigidez elástica  $\mathbf{k}_{t1}$  a partir da seguinte expressão:

$$\mathbf{k}_{t1} = \mathbf{F}^T \mathbf{k} \mathbf{F} \quad (3.44)$$

### 3.3.2 Cálculo da matriz de rigidez geométrica

A matriz de rigidez geométrica  $\mathbf{k}_\sigma$  é determinada a partir da variação da matriz  $\mathbf{F}$ . A expressão  $\delta \mathbf{F}^T \mathbf{q}_l$  da Equação (3.40) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\delta \mathbf{F}^T \mathbf{q}_l = \mathbf{k}_\sigma \delta \mathbf{u} = \sum_{j=1}^{12} \mathbf{q}_l(j) \delta \mathbf{f}_j \quad (3.45)$$

De acordo com a Equação (3.21), os únicos vetores da matriz  $\mathbf{F}$  aos quais serão aplicados o operador variacional são  $\mathbf{f}_4$ ,  $\mathbf{f}_5$ ,  $\mathbf{f}_6$ ,  $\mathbf{f}_7$ ,  $\mathbf{f}_{10}$ ,  $\mathbf{f}_{11}$ , e  $\mathbf{f}_{12}$ .

Para poder facilitar o cálculo da matriz de rigidez geométrica, serão relacionados os momentos atuantes no elemento de viga no sistema de coordenadas local com os deslocamentos rotacionais locais. Para isto utilizaremos os vetores  $\bar{\mathbf{q}}_l$  e  $\hat{\mathbf{q}}_l$ , os quais

são definidos como:

$$\bar{\mathbf{q}}_l = \left[ 0, 0, 0, \frac{M_1}{2 \cos \theta_{l1}}, \frac{M_2}{2 \cos \theta_{l2}}, \frac{M_3}{2 \cos \theta_{l3}}, 0, 0, 0, \frac{M_4}{2 \cos \theta_{l4}}, \frac{M_5}{2 \cos \theta_{l5}}, \frac{M_6}{2 \cos \theta_{l6}} \right]^T \quad (3.46)$$

$$\hat{\mathbf{q}}_l = \left[ 0, 0, 0, \frac{M_1 \operatorname{tg} \theta_{l1}}{2 \cos \theta_{l1}}, \frac{M_2 \operatorname{tg} \theta_{l2}}{2 \cos \theta_{l2}}, \frac{M_3 \operatorname{tg} \theta_{l3}}{2 \cos \theta_{l3}}, 0, 0, 0, \frac{M_4 \operatorname{tg} \theta_{l4}}{2 \cos \theta_{l4}}, \frac{M_5 \operatorname{tg} \theta_{l5}}{2 \cos \theta_{l5}}, \frac{M_6 \operatorname{tg} \theta_{l6}}{2 \cos \theta_{l6}} \right]^T \quad (3.47)$$

A matriz de rigidez geométrica é obtida a partir da seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_\sigma = & \mathbf{k}_{\sigma 1} + \mathbf{F}^T \operatorname{Diag}(\hat{\mathbf{q}}_l) \mathbf{F} + \mathbf{q}_l(10) [\mathbf{k}_{\sigma 2}(\mathbf{r}_2, \mathbf{a}_3 - \mathbf{b}_3) + \mathbf{k}_{\sigma 2}(\mathbf{r}_3, \mathbf{b}_2 - \mathbf{a}_2)] \\ & + \bar{\mathbf{q}}_l(5) \mathbf{k}_{\sigma 2}(\mathbf{r}_2, \mathbf{a}_1) + \bar{\mathbf{q}}_l(6) \mathbf{k}_{\sigma 2}(\mathbf{r}_3, \mathbf{a}_1) + \bar{\mathbf{q}}_l(11) \mathbf{k}_{\sigma 2}(\mathbf{r}_2, \mathbf{b}_1) \\ & + \bar{\mathbf{q}}_l(12) \mathbf{k}_{\sigma 2}(\mathbf{r}_3, \mathbf{b}_1) + \mathbf{k}_{\sigma 3} + \mathbf{k}_{\sigma 3}^T + \mathbf{k}_{\sigma 4} + \mathbf{k}_{\sigma 5} \end{aligned} \quad (3.48)$$

Para o cálculo de cada uma das matrizes mencionadas na Equação (3.48),  $\mathbf{k}_{\sigma 1}$ ,  $\mathbf{k}_{\sigma 2}$ ,  $\mathbf{k}_{\sigma 3}$ ,  $\mathbf{k}_{\sigma 4}$  e  $\mathbf{k}_{\sigma 5}$ , cada uma delas será dividida em submatrizes da seguinte forma:

$$\mathbf{k}_{\sigma i} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{11} & \mathbf{k}_{12} & \mathbf{k}_{13} & \mathbf{k}_{14} \\ \mathbf{k}_{21} & \mathbf{k}_{22} & \mathbf{k}_{23} & \mathbf{k}_{24} \\ \mathbf{k}_{31} & \mathbf{k}_{32} & \mathbf{k}_{33} & \mathbf{k}_{34} \\ \mathbf{k}_{41} & \mathbf{k}_{42} & \mathbf{k}_{43} & \mathbf{k}_{44} \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

### 3.3.2.1 Matriz de rigidez geométrica $\mathbf{k}_{\sigma 1}$

A matriz de rigidez  $\mathbf{k}_{\sigma 1}$  é obtida a partir da variação do vetor  $\mathbf{f}_7$  na Equação (3.22). Logo, o valor das submatrizes é:

$$\mathbf{k}_{11} = \mathbf{k}_{33} = -\mathbf{k}_{13} = -\mathbf{k}_{31} = N\mathbf{A}_e \quad (3.50)$$

### 3.3.2.2 Matriz de rigidez geométrica $\mathbf{k}_{\sigma_2}$

As submatrizes da matriz de rigidez da forma  $\mathbf{k}_{\sigma_2}(\mathbf{r}_i, \mathbf{z})$ , na Equação (3.48), são obtidas a partir da variação dos termos  $\mathbf{L}(\mathbf{r}_i)\mathbf{a}_j$  e  $\mathbf{L}(\mathbf{r}_i)\mathbf{b}_j$ , para  $i = 2, 3$  e  $j = 1, 2, 3$ , nas Equações(3.34). Logo, as submatrizes da matriz  $\mathbf{k}_{\sigma_2}(\mathbf{r}_i, \mathbf{z})$  são calculadas como:

$$\mathbf{k}_{11} = -\mathbf{k}_{13} = -\mathbf{k}_{31} = \mathbf{k}_{33} = \mathbf{X} + \mathbf{X}^T + \frac{\mathbf{r}_i^T \mathbf{e}_1}{2l_n} \left( 2(\mathbf{e}_1^T \mathbf{z}) + \mathbf{z}^T \mathbf{r}_1 \right) \mathbf{A}_e \quad (3.51)$$

onde:

$$\mathbf{X} = -\frac{1}{2} \mathbf{A}_e \mathbf{z} \mathbf{r}_i^T \mathbf{A}_e + \frac{\mathbf{r}_i^T \mathbf{e}_1}{2l_n} \mathbf{A}_e \mathbf{z} \mathbf{e}_1^T + \frac{\mathbf{z}^T (\mathbf{e}_1 + \mathbf{r}_1)}{2l_n} \mathbf{A}_e \mathbf{r}_i \mathbf{e}_1^T \quad (3.52)$$

Os valores das sub-matrizes faltantes são:

$$\begin{aligned} 4\mathbf{k}_{12} &= 4\mathbf{k}_{14} = -4\mathbf{k}_{32} = -4\mathbf{k}_{34} = 4\mathbf{k}_{21}^T = 4\mathbf{k}_{41}^T = -4\mathbf{k}_{23}^T = -4\mathbf{k}_{43}^T \\ &= -\mathbf{A}_e \mathbf{z} \mathbf{e}_1^T \mathbf{S}(\mathbf{r}_i) - \mathbf{A}_e \mathbf{r}_i \mathbf{z}^T \mathbf{S}(\mathbf{r}_1) - \mathbf{z}^T (\mathbf{e}_1 + \mathbf{r}_1) \mathbf{A}_e \mathbf{S}(\mathbf{r}_i) \end{aligned} \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned} 8\mathbf{k}_{22} &= 8\mathbf{k}_{24} = 8\mathbf{k}_{42} = 8\mathbf{k}_{44} \\ &= -(\mathbf{r}_i^T \mathbf{e}_i) \mathbf{S}(\mathbf{z}) \mathbf{S}(\mathbf{r}_1) + \mathbf{S}(\mathbf{r}_1) \mathbf{z} \mathbf{e}_1^T \mathbf{S}(\mathbf{r}_i) + \mathbf{S}(\mathbf{r}_i) \mathbf{e}_1 \mathbf{z}^T \mathbf{S}(\mathbf{r}_1) \\ &\quad - (\mathbf{e}_1 + \mathbf{r}_1)^T \mathbf{z} \mathbf{S}(\mathbf{e}_1) \mathbf{S}(\mathbf{r}_i) + 2\mathbf{S}(\mathbf{z}) \mathbf{S}(\mathbf{r}_i) \end{aligned} \quad (3.54)$$

### 3.3.2.3 Matriz de rigidez geométrica $\mathbf{k}_{\sigma_3}$

A matriz de rigidez  $\mathbf{k}_{\sigma_3}$  é obtida a partir de termos como  $\mathbf{L}(\mathbf{r}_2)\delta\mathbf{a}_1$ , e é dado pela seguinte expressão:

$$\mathbf{k}_{\sigma_3} = \left[ \mathbf{0}, \bar{\mathbf{K}}_2, \mathbf{0}, \bar{\mathbf{K}}_4 \right] \quad (3.55)$$

onde:

$$\bar{\mathbf{k}}_2 = -\mathbf{L}(\mathbf{r}_2) [\bar{\mathbf{q}}_l(10)\mathbf{S}(\mathbf{a}_3) + \bar{\mathbf{q}}_l(5)\mathbf{S}(\mathbf{a}_1)] + \mathbf{L}(\mathbf{r}_3) [\bar{\mathbf{q}}_l(10)\mathbf{S}(\mathbf{a}_2) - \bar{\mathbf{q}}_l(6)\mathbf{S}(\mathbf{a}_1)] \quad (3.56)$$

$$\bar{\mathbf{k}}_4 = \mathbf{L}(\mathbf{r}_2) [\bar{\mathbf{q}}_l(10)\mathbf{S}(\mathbf{b}_3) - \bar{\mathbf{q}}_l(11)\mathbf{S}(\mathbf{b}_1)] - \mathbf{L}(\mathbf{r}_3) [\bar{\mathbf{q}}_l(10)\mathbf{S}(\mathbf{b}_2) + \bar{\mathbf{q}}_l(12)\mathbf{S}(\mathbf{b}_1)] \quad (3.57)$$

A matriz  $\mathbf{k}_{\sigma_3}^T$  é obtida, por exemplo, de termos como  $\mathbf{S}(\mathbf{a}_3)\delta\mathbf{e}_2$  ou  $\mathbf{S}(\mathbf{a}_2)\delta\mathbf{e}_3$ , os quais são obtidos a partir da variação de  $\mathbf{h}_1$  na Equação (3.35).

### 3.3.2.4 Matriz de rigidez geométrica $\mathbf{k}_{\sigma_4}$

A matriz de rigidez  $\mathbf{k}_{\sigma_4}$  é obtida, por exemplo, de termos como  $\mathbf{S}(\delta\mathbf{a}_3)\mathbf{e}_2$ , o qual é obtido a partir da variação de  $\mathbf{h}_1$  da Equação (3.35).

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{22} = & \bar{\mathbf{q}}_l(10) [\mathbf{S}(\mathbf{e}_2)\mathbf{S}(\mathbf{a}_3) - \mathbf{S}(\mathbf{e}_3)\mathbf{S}(\mathbf{a}_2)] + \bar{\mathbf{q}}_l(5) [-\mathbf{S}(\mathbf{e}_1)\mathbf{S}(\mathbf{a}_2) + \mathbf{S}(\mathbf{e}_2)\mathbf{S}(\mathbf{a}_1)] \\ & + \bar{\mathbf{q}}_l(6) [-\mathbf{S}(\mathbf{e}_1)\mathbf{S}(\mathbf{a}_3) + \mathbf{S}(\mathbf{e}_3)\mathbf{S}(\mathbf{a}_1)] \end{aligned} \quad (3.58)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{44} = & -\bar{\mathbf{q}}_l(10) [\mathbf{S}(\mathbf{e}_2)\mathbf{S}(\mathbf{b}_3) - \mathbf{S}(\mathbf{e}_3)\mathbf{S}(\mathbf{b}_2)] + \bar{\mathbf{q}}_l(11) [-\mathbf{S}(\mathbf{e}_1)\mathbf{S}(\mathbf{b}_2) + \mathbf{S}(\mathbf{e}_2)\mathbf{S}(\mathbf{b}_1)] \\ & + \bar{\mathbf{q}}_l(12) [-\mathbf{S}(\mathbf{e}_1)\mathbf{S}(\mathbf{b}_3) + \mathbf{S}(\mathbf{e}_3)\mathbf{S}(\mathbf{b}_1)] \end{aligned} \quad (3.59)$$

### 3.3.2.5 Matriz de rigidez geométrica $\mathbf{k}_{\sigma_5}$

A matriz de rigidez  $\mathbf{k}_{\sigma_5}$ , é composta de submatrizes as quais são obtidas, por exemplo, a partir da variação de termos como  $\mathbf{A}_e\mathbf{a}_2$  da Equação (3.35).

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{12} = -\mathbf{k}_{32} = & -[\bar{\mathbf{q}}_l(5)\mathbf{A}_e\mathbf{S}(\mathbf{a}_2) + \bar{\mathbf{q}}_l(6)\mathbf{A}_e\mathbf{S}(\mathbf{a}_3)] \\ \mathbf{k}_{14} = -\mathbf{k}_{34} = & -[\bar{\mathbf{q}}_l(11)\mathbf{A}_e\mathbf{S}(\mathbf{b}_2) + \bar{\mathbf{q}}_l(12)\mathbf{A}_e\mathbf{S}(\mathbf{b}_3)] \\ \mathbf{k}_{21} = -\mathbf{k}_{23} = & \mathbf{k}_{12}^T \\ \mathbf{k}_{41} = -\mathbf{k}_{43} = & \mathbf{k}_{14}^T \end{aligned} \quad (3.60)$$

$$\mathbf{k}_{11} = \mathbf{k}_{33} = -\mathbf{k}_{13} = -\mathbf{k}_{31} = \mathbf{A}_e\mathbf{v}\mathbf{e}_1^T + \mathbf{e}_1\mathbf{v}^T\mathbf{A}_e + \mathbf{e}_1^T\mathbf{v}\mathbf{A}_e \quad (3.61)$$

$$\mathbf{v} = \frac{1}{l_n} \{ \bar{\mathbf{q}}_l(5)\mathbf{a}_2 + \bar{\mathbf{q}}_l(6)\mathbf{a}_3 + \bar{\mathbf{q}}_l(11)\mathbf{b}_2 + \bar{\mathbf{q}}_l(12)\mathbf{b}_3 \} \quad (3.62)$$

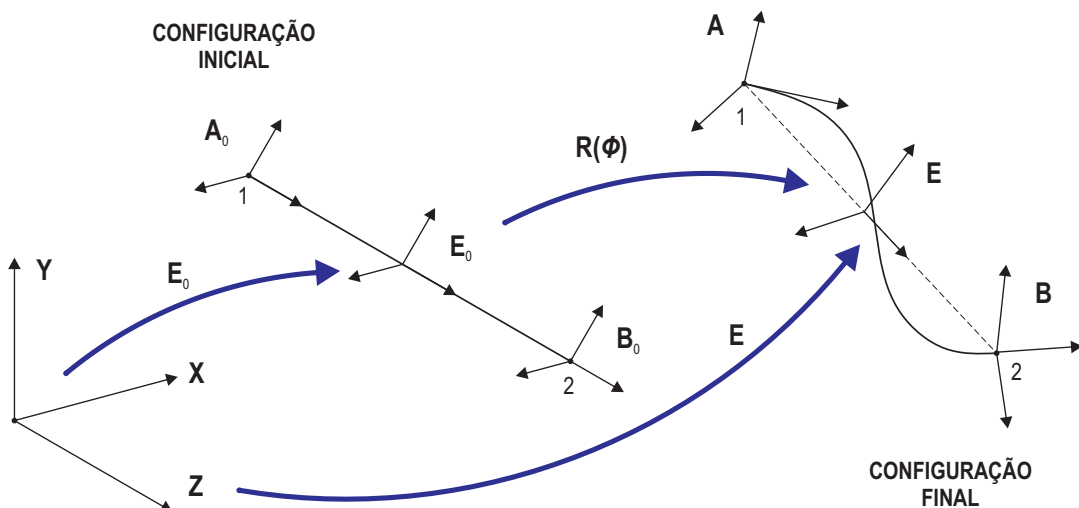
Na construção da matriz de rigidez tangente, algumas das matrizes que compõem a matriz de rigidez geométrica contribuem com submatrizes não simétricas.

### 3.4 Velocidade e aceleração do sistema local de referência

Como foi mencionado no capítulo anterior, para o cálculo das forças devidas à dinâmica do escoamento interno, precisamos conhecer a velocidade angular e a aceleração angular do sistema de referência local  $\mathbf{E}$ . Para poder realizar este cálculo, a formulação co-rotacional será utilizada.

A Figura 3.6 mostra um elemento de viga tridimensional na sua configuração inicial, cujo sistema local de referência é definido pela tríade  $\mathbf{E}_0$ . A partir desta configuração inicial, o elemento de viga sofre deslocamentos e rotações até chegar na sua configuração final, com um sistema local de referência definido pela tríade  $\mathbf{E}$ . A partir da Figura 3.6, pode-se observar que a tríade  $\mathbf{E}$  é obtida após aplicar uma rotação  $\mathbf{R}(\phi)$ , a qual é associada ao pseudovetor  $\phi$ , à tríade  $\mathbf{E}_0$ .

Figura 3.6 - Rotações associadas ao sistema de coordenadas local do elemento de viga.



Fonte: Produção do autor

Para o cálculo da velocidade angular e a aceleração angular, vamos começar por definir a variação da tríade  $\mathbf{E}$ , a qual é dada pela seguinte expressão (CRISFIELD, 1997):

$$\delta\mathbf{E} = \mathbf{S}(\delta\boldsymbol{\phi})\mathbf{E} \quad (3.63)$$

onde  $\mathbf{S}(\delta\boldsymbol{\phi}_g)$  é a matriz anti-simétrica do pseudovetor  $\boldsymbol{\phi}$ , o qual foi medido no sistema de coordenadas global. Multiplicando a Equação (3.63) pela transposta da matriz  $\mathbf{E}$  obtém-se:

$$\mathbf{E}^T \delta\mathbf{E} = \mathbf{E}^T \mathbf{S}(\delta\boldsymbol{\phi})\mathbf{E} \quad (3.64)$$

A partir da Equação (3.64), o termo do lado direito representa a transformação da matriz  $\mathbf{S}(\delta\boldsymbol{\phi})$ , expressa em coordenadas globais, para o sistema de coordenadas local, definido pela tríade  $\mathbf{E}$ . Logo, a Equação (3.64) pode ser reescrita como:

$$\mathbf{E}^T \delta\mathbf{E} = \mathbf{S}(\delta\boldsymbol{\phi}_l) \quad (3.65)$$

onde  $\mathbf{S}(\delta\boldsymbol{\phi}_l)$  é a matriz anti-simétrica do pseudovetor  $\boldsymbol{\phi}_l$ , em coordenadas locais. Sabendo que a tríade  $\mathbf{E}$  é definida como  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ , a Equação (3.65) adota a seguinte forma:

$$\mathbf{S}(\delta\boldsymbol{\phi}_l) = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^T \delta\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_1^T \delta\mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_1^T \delta\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_2^T \delta\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2^T \delta\mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_2^T \delta\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_3^T \delta\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_3^T \delta\mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3^T \delta\mathbf{e}_3 \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

Sabendo que os vetores  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$ , e  $\mathbf{e}_3$  são perpendiculares uns aos outros, as seguintes relações são facilmente verificáveis:

$$\mathbf{e}_1^T \delta\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2^T \delta\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3^T \delta\mathbf{e}_3 = 0 \quad (3.67)$$

$$\mathbf{e}_1^T \delta\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_2^T \delta\mathbf{e}_1 \quad (3.68)$$

$$\mathbf{e}_1^T \delta\mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_3^T \delta\mathbf{e}_1 \quad (3.69)$$

$$\mathbf{e}_3^T \delta\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_2^T \delta\mathbf{e}_3 \quad (3.70)$$

Uma vez conhecida a definição do conceito de matriz anti-simétrica (vide Equação (2.6)), e substituindo as Equações (3.67), (3.68), (3.69), e (3.70) na Equação (3.66), obtém-se a seguinte expressão:

$$\begin{bmatrix} 0 & -\delta\phi_{l3} & \delta\phi_{l2} \\ \delta\phi_{l3} & 0 & -\delta\phi_{l1} \\ -\delta\phi_{l2} & \delta\phi_{l1} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{e}_2^T \delta\mathbf{e}_1 & -\mathbf{e}_3^T \delta\mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2^T \delta\mathbf{e}_1 & 0 & \mathbf{e}_2^T \delta\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_3^T \delta\mathbf{e}_1 & -\mathbf{e}_2^T \delta\mathbf{e}_3 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

Logo, a primeira variação do pseudovetor  $\phi_l$  é dada pela seguinte expressão:

$$\delta\phi_l = \begin{Bmatrix} \delta\phi_{l1} \\ \delta\phi_{l2} \\ \delta\phi_{l3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\mathbf{e}_2^T \delta\mathbf{e}_3 \\ -\mathbf{e}_3^T \delta\mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2^T \delta\mathbf{e}_1 \end{Bmatrix} \quad (3.72)$$

A partir da definição dos vetores  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$ , e  $\mathbf{e}_3$ , dadas pelas Equações (3.7), (3.13), e (3.14), assim como de suas respectivas variações, dadas pelas Equações (3.25), (3.28) e (3.29), a primeira variação do pseudovetor  $\phi_l$  pode ser expressa em função da primeira variação do vetor de deslocamentos global,  $\delta\mathbf{u}$ , como:

$$\delta\phi_l = \mathbf{G}\delta\mathbf{u} \quad (3.73)$$

onde a matriz  $\mathbf{G}$  é dada por:

$$\mathbf{G} = \begin{Bmatrix} -\left(\mathbf{r}_2^T - \frac{\mathbf{r}_2^T \mathbf{e}_1}{2}(\mathbf{e}_1^T + \mathbf{r}_1^T)\right) \mathbf{L}^T(\mathbf{r}_3) \\ -\left(\mathbf{r}_3^T - \frac{\mathbf{r}_3^T \mathbf{e}_1}{2}(\mathbf{e}_1^T + \mathbf{r}_1^T)\right) [-\mathbf{A}, \mathbf{0}, \mathbf{A}, \mathbf{0}] \\ \left(\mathbf{r}_2^T - \frac{\mathbf{r}_2^T \mathbf{e}_1}{2}(\mathbf{e}_1^T + \mathbf{r}_1^T)\right) [-\mathbf{A}, \mathbf{0}, \mathbf{A}, \mathbf{0}] \end{Bmatrix} \quad (3.74)$$

A partir da Equação (3.73), podemos calcular a velocidade angular da tríade  $\mathbf{E}$  no sistema de coordenadas local, a qual é dada pela seguinte expressão:

$$\dot{\phi}_l = \mathbf{G}\dot{\mathbf{u}} \quad (3.75)$$

A velocidade angular da tríade  $\mathbf{E}$ , no sistemas de coordenadas global, é obtida a

partir de uma transformação de coordenadas, a qual se dá a partir da multiplicação da Equação (3.75) pela matriz  $\mathbf{E}$ , da seguinte forma:

$$\dot{\phi} = \mathbf{E}\mathbf{G}\dot{\mathbf{u}} \quad (3.76)$$

Finalmente, a aceleração angular, no sistema de coordenadas global, pode ser obtida calculando a derivada temporal da Equação (3.76), dando como resultado a seguinte relação:

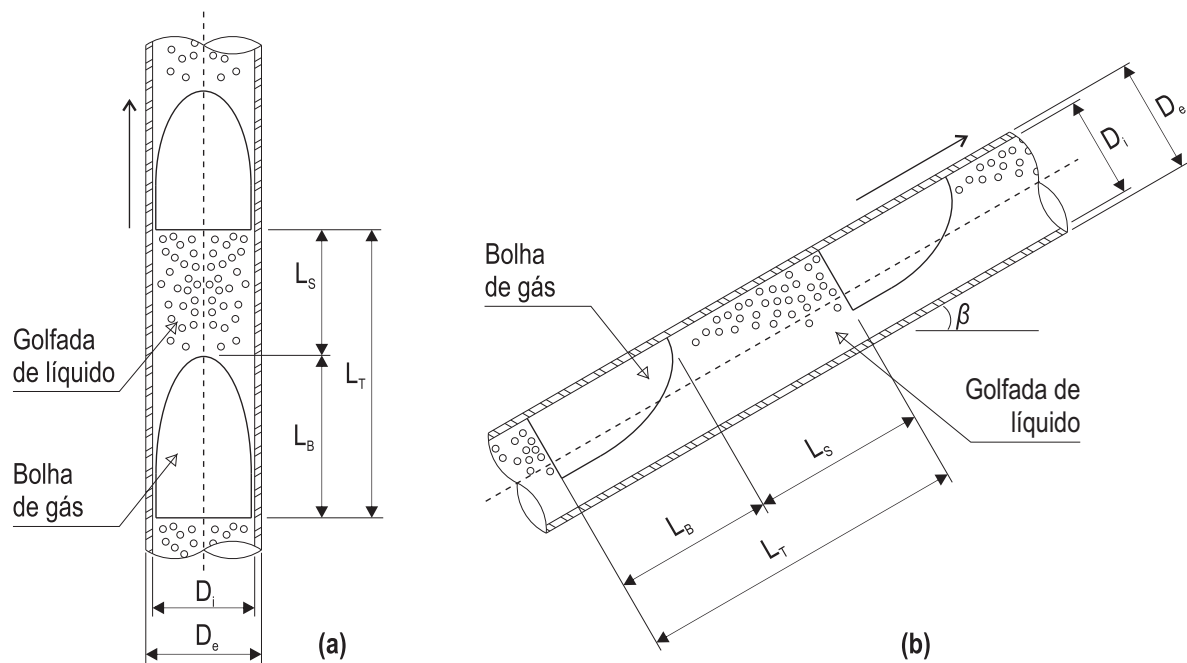
$$\ddot{\phi} = (\dot{\mathbf{E}}\mathbf{G} + \mathbf{E}\dot{\mathbf{G}})\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{E}\mathbf{G}\ddot{\mathbf{u}} \quad (3.77)$$



#### 4 MODELAGEM MATEMÁTICA DO ESCOAMENTO INTERNO

Quando um fluido bifásico líquido-gás escoar no interior de um *riser*, este pode se distribuir em uma variedade de padrões de escoamento. Neste trabalho o padrão de escoamento em golfadas de líquido (*slug flow*) será considerado. O escoamento bifásico em golfadas é caracterizado pela sucessão de duas regiões distintas: a golfada de líquido e a bolha alongada de gás, chamada de bolha de Taylor, as quais compõem uma célula unitária de fluido. Na Figura 4.1 são mostradas as distribuições das golfadas e das bolhas de gás nas configurações vertical e inclinada de um tubo reto.

Figura 4.1 - Distribuições das golfadas e das bolhas de gás em um tubo reto.



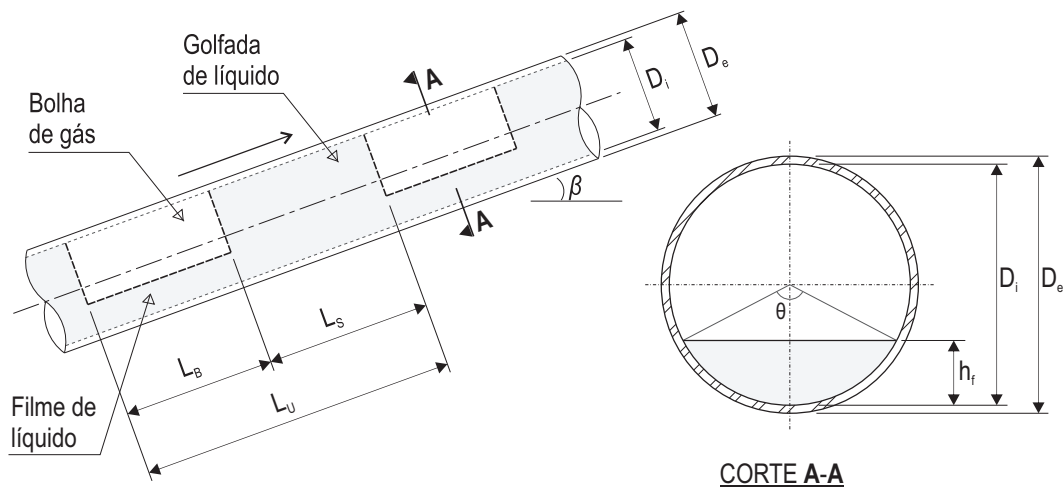
Fonte: Produção do autor

A partir da Figura 4.1,  $D_e$  e  $D_i$  são os diâmetros externo e interno do tubo, respectivamente,  $L_S$  e  $L_B$  são os comprimentos da golfada de líquido e da bolha de gás, respectivamente,  $L_T$  é o comprimento total da célula unitária, e  $\beta$  é o ângulo de inclinação do tubo.

Para modelar matematicamente o escoamento bifásico em padrão golfadas será utilizado um modelo lagrangeano de seguimento de pistões (lagrangian slug tracking

model). Na modelagem matemática, a célula unitária de *slug flow* será dividida em duas regiões: a golfada de líquido e uma região de fluido estratificado. O fluido estratificado é caracterizado por duas regiões bem diferenciadas, uma de líquido e uma de gás. Além disso, o filme de líquido tem uma altura,  $h_f$ , constante ao longo do comprimento da bolha, assim como mostrado na Figura 4.2.

Figura 4.2 - Escoamento bifásico líquido-gás: Golfada de líquido e região de fluido estratificado.



Fonte: Produção do autor

As considerações a realizar na modelagem matemática são:

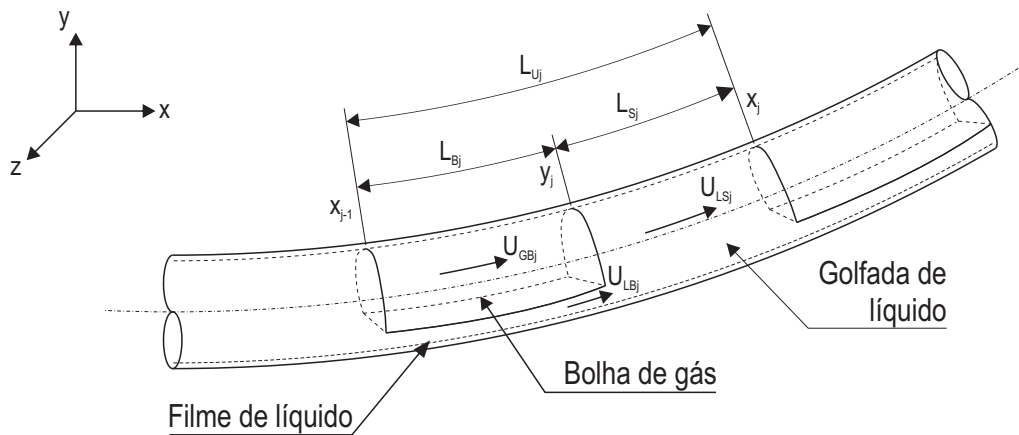
1. O líquido é incompressível e não aerado;
2. A fase gasosa comporta-se como um gás ideal;
3. A altura do filme de líquido de uma célula não varia ao longo do *riser*;
4. Não há variações de temperatura (escoamento isotérmico);
5. Não há mudanças de fase de líquido a gás, nem de gás a líquido;
6. Não há transferência de massa entre as fases;
7. As forças interfaciais entre o gás e o líquido são desprezíveis;
8. O escoamento em golfadas é considerado como sendo irrotacional.

A velocidade do escoamento em golfadas é relativamente baixa em *risers* de produção, motivo pelo qual considera-se a fase líquida do escoamento como sendo não aerada (NYDAL; BANERJEE, 1996).

#### 4.1 Equação de conservação da massa

Neste capítulo, serão apresentadas a equação de conservação da massa, a qual será aplicada a cada região que compõe a célula unitária do escoamento, e de forma separada para cada uma das fases, líquido e gasosa. As equações de conservação da massa serão desenvolvidas para a  $j$ -ésima célula unitária, a qual é representada na Figura 4.3.

Figura 4.3 - Representação da  $j$ -ésima célula unitária do escoamento bifásico padrão golfadas.



Fonte: Produção do autor

A partir da Figura 4.3,  $L_{Sj}$ ,  $L_{Bj}$ , e  $L_{Uj}$  são os comprimentos do pistão de líquido, da bolha de gás, e o comprimento total da  $j$ -ésima célula unitária do escoamento, respectivamente. Na região da bolha de gás, pode-se observar as variáveis  $U_{GBj}$  e  $U_{LBj}$ , que são as velocidades da bolha de gás e do filme de líquido, respectivamente, enquanto que na região do pistão de líquido, a velocidade do líquido é representada pela variável  $U_{LSj}$ . A variável  $x_j$  indica a frente do pistão de líquido, e  $y_j$  indica a frente da bolha de gás. Todas estas variáveis são as correspondentes à  $j$ -ésima célula do escoamento interno.

A equação de conservação de massa é dada pela seguinte expressão (SHAMES, 2003):

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho_k dv + \int_{SC} \rho_k \mathbf{U}_k \cdot d\mathbf{A} = 0 \quad (4.1)$$

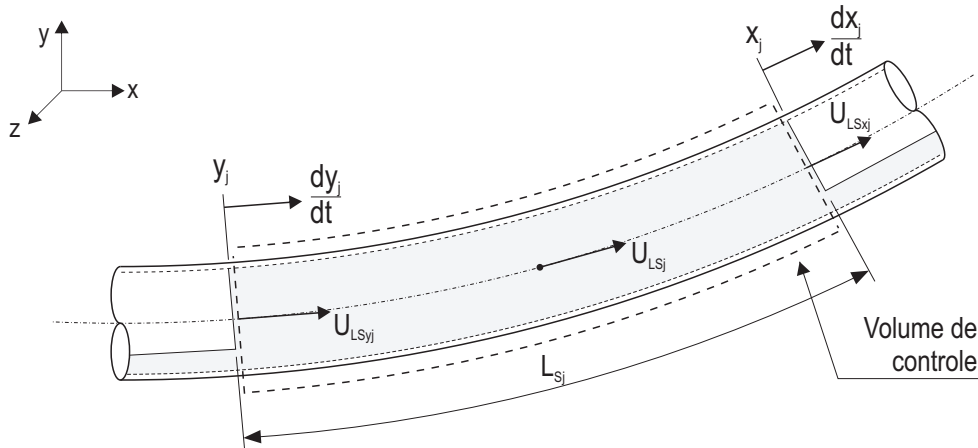
onde a variável  $k$  representa a fase em análise, a qual pode ser líquida (L) ou gasosa (G),  $\rho_k$  indica a densidade da fase  $k$ ,  $v$  indica o volume de controle em análise,  $\mathbf{U}_k$  é o vetor de velocidade da fase  $k$ , e  $d\mathbf{A}$  é o vetor diferencial da área transversal pela qual a fase correspondente está sendo transportada.

A seguir, serão desenvolvidas as equações de conservação da massa para o líquido na golfada, para a bolha de gás, e para o filme de líquido. Esta formulação baseia-se no trabalho realizado por [Rodrigues \(2009\)](#), que, como já foi explicado na revisão bibliográfica, estudou o desenvolvimento de um escoamento em golfadas no interior de um tubo reto inclinado.

#### 4.1.1 Conservação de massa do líquido na golfada

O volume de controle para a golfada de líquido da  $j$ -ésima célula unitária do escoamento em golfadas é mostrada na Figura 4.4. A partir da Figura 4.4, pode-se observar que o volume de controle encontra-se definido pelas fronteiras da golfada de líquido, as quais são definidas pelas coordenadas  $x_j$  e  $y_j$ .

Figura 4.4 - Volume de controle para a golfada de líquido da  $j$ -ésima célula unitária.



Fonte: Produção do autor

Da Figura (4.4),  $U_{LSxj}$  e  $U_{LSyj}$  são as velocidades do líquido nas fronteiras  $x_j$  e  $y_j$ ,

respectivamente, enquanto que  $\frac{dx_j}{dt}$  e  $\frac{dy_j}{dt}$  são as velocidades das fronteiras  $x_j$  e  $y_j$ , respectivamente.

Utilizando a Equação (4.1) para a fase líquida na região da golfada, tem-se a seguinte expressão:

$$\frac{d}{dt}(\rho_L A_{int} L_{Sj}) + \rho_L A_{int} \left( U_{LSxj} - \frac{dx_j}{dt} \right) - \rho_L A_{int} \left( U_{LSyj} - \frac{dy_j}{dt} \right) = 0 \quad (4.2)$$

onde  $A_{int}$  representa a área interna do *riser*, e  $\rho_L$  representa a densidade da fase líquida dentro da golfada, a qual é considerada incompressível.

Desenvolvendo os termos da Equação (4.2), podemos reescrevê-la como:

$$\frac{dL_{Sj}}{dt} + (U_{LSxj} - U_{LSyj}) - \left( \frac{dx_j}{dt} - \frac{dy_j}{dt} \right) = 0 \quad (4.3)$$

onde o terceiro termo do lado esquerdo da Equação (4.3) representa a variação temporal do comprimento do pistão de líquido  $L_{Sj}$ , logo tem-se:

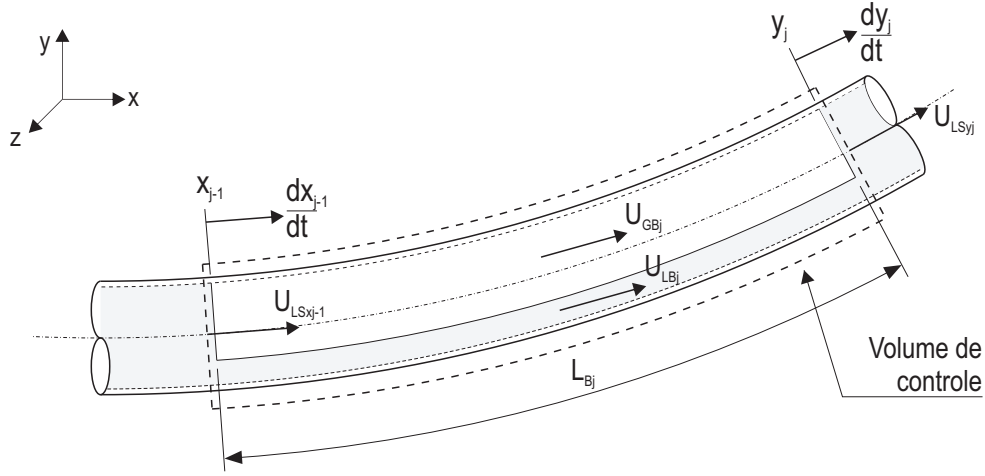
$$(U_{LSxj} - U_{LSyj}) = 0 \quad (4.4)$$

A Equação (4.4) indica que, ao considerar o líquido na golfada como sendo não-aerado, todas as partículas de líquido se deslocam com o mesmo valor de velocidade,  $U_{LSj} = U_{LSxj} = U_{LSyj}$ .

#### 4.1.2 Conservação da massa do líquido no filme

O volume de controle para a bolha alongada de gás da  $j$ -ésima célula unitária do escoamento em golfadas é mostrada na Figura 4.5. A partir da Figura 4.5, pode-se observar que o volume de controle encontra-se definido pelas fronteiras da bolha alongada, as quais são definidas pelas coordenadas  $y_j$  e  $x_{j-1}$ .

Figura 4.5 - Volume de controle para a bolha alongada de gás da j-ésima célula unitária.



Fonte: Produção do autor

Utilizando a Figura 4.5 e a Equação (4.1) para o filme de líquido na região da bolha de gás, tem-se a seguinte expressão:

$$\frac{d}{dt} (\rho_L A_{int} R_{LBj} L_{Bj}) + \rho_L A_{int} \left( U_{LSy_j} - \frac{dy_j}{dt} \right) - \rho_L A_{int} \left( U_{LSx_{j-1}} - \frac{dx_{j-1}}{dt} \right) = 0 \quad (4.5)$$

onde  $R_{LBj}$  é a fração volumétrica de líquido na região da bolha alongada.

De acordo com o resultado obtido na Equação (4.4), as velocidades  $U_{LSy_j}$  e  $U_{LSx_{j-1}}$  podem ser rescritas como:

$$U_{LSy_j} = U_{LSj} \quad , \quad U_{LSx_{j-1}} = U_{LSj-1} \quad (4.6)$$

Logo, substituindo a Equação (4.6) na Equação (4.5) obtêm-se:

$$U_{LSj-1} - U_{LSj} = L_{Bj} \frac{dR_{LBj}}{dt} - (1 - R_{LBj}) \frac{dL_{Bj}}{dt} \quad (4.7)$$

### 4.1.3 Conservação da massa do gás na bolha alongada

Utilizando a Figura 4.5 e a Equação (4.1) para a bolha de gás, obtêm-se a seguinte expressão:

$$\frac{d}{dt} [\rho_{GBj} A_{int} (1 - R_{LBj}) L_{Bj}] = 0 \quad (4.8)$$

A Equação (4.8) pode ser reescrita como:

$$(1 - R_{LBj}) \frac{L_{Bj}}{\rho_{GBj}} \frac{d\rho_{GBj}}{dt} = L_{Bj} \frac{dR_{LBj}}{dt} - (1 - R_{LBj}) \frac{dL_{Bj}}{dt} \quad (4.9)$$

A partir das Equações (4.7) e (4.9) pode-se notar que o lado direito de ambas são iguais. Portanto, a partir das duas equações mencionadas tem-se a equação da conservação de massa da j-ésima célula unitária, a qual é dada por:

$$U_{LSj-1} - U_{LSj} = (1 - R_{LBj}) \frac{L_{Bj}}{\rho_{GBj}} \frac{d\rho_{GBj}}{dt} \quad (4.10)$$

Assumindo que o gás na bolha alongada comporta-se como um gás ideal e que o processo é isotérmico, a equação de estado para gases ideais pode ser utilizada para relacionar a densidade do gás com a pressão do gás na bolha alongada, da seguinte forma:

$$\frac{1}{\rho_{GBj}} \frac{d\rho_{GBj}}{dt} = \frac{1}{P_{GBj}} \frac{dP_{GBj}}{dt} \quad (4.11)$$

Finalmente, substituindo a Equação (4.11) na Equação (4.10) conclui-se:

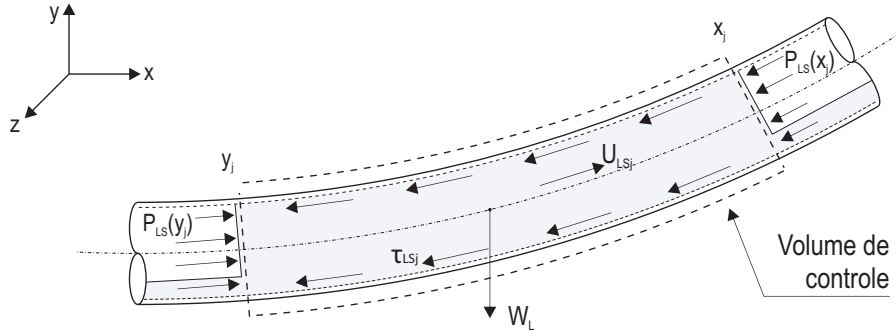
$$U_{LSj-1} - U_{LSj} = (1 - R_{LBj}) \frac{L_{Bj}}{P_{GBj}} \frac{dP_{GBj}}{dt} \quad (4.12)$$

## 4.2 Equações de conservação da quantidade de movimento

A Equação de conservação da quantidade de movimento é aplicada só para o pistão de líquido. Neste trabalho se despreza a quantidade de movimento do gás na bolha alongada, isto devido à grande diferença de densidades entre as fases líquida e gasosa.

Para este cálculo, será escolhido o volume de controle como sendo a superfície ao redor da golfada de líquido. Este volume de controle é considerado como não inercial, isto devido à influência do movimento do *riser* sobre o escoamento. Na Figura 4.6 é apresentado o volume de controle e as forças atuantes sobre ele.

Figura 4.6 - Forças atuantes sobre o pistão de líquido da  $j$ -ésima célula unitária.



Fonte: Produção do autor

Na Figura 4.6,  $P_{LS}(x_j)$  e  $P_{LS}(y_j)$  são as pressões atuantes sobre a golfada de líquido nas coordenadas  $x_j$  e  $y_j$ , respectivamente;  $\tau_{LSj}$  representa as tensões de cisalhamento entre a parede do *riser* e o pistão de líquido, e  $W_L$  é o peso do líquido.

A Equação da conservação da quantidade de movimento para volumes de controle não inerciais é dada pela expressão proposta por Shames (2003):

$$\iint_{SC} \mathbf{T}_S dA + \iiint_{VC} \mathbf{T}_B \rho_L dv - \iiint_{VC} [\ddot{\mathbf{R}} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{U}_{LSj} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})] \rho_L dv = \iint_{SC} \mathbf{U}_r (\rho_L \mathbf{U}_{LSj} dA) + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{VC} \mathbf{U}_{LSj} (\rho_L dv) \quad (4.13)$$

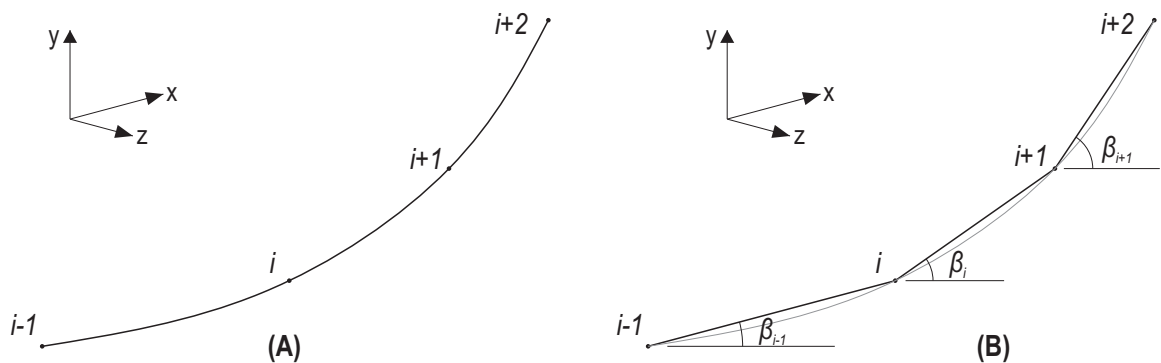
onde  $\mathbf{T}_S$  é a distribuição de forças superficiais, entre as quais têm-se as pressões e as tensões de cisalhamento;  $\mathbf{T}_B$  é a distribuição de forças de corpo.  $\mathbf{R}$  é o vetor de posição, o qual indica a origem do sistema de coordenadas local (vide Figura 2.4),  $\boldsymbol{\omega}$  indica o vetor de velocidade angular do sistema de coordenadas local, e



$\mathbf{r}$  indica o vetor de posição de uma partícula do escoamento medida no sistema de coordenadas local. O vetor  $\mathbf{U}_r$  é a velocidade relativa do pistão de líquido em relação ao movimento do volume de controle, o qual é definido pela linha tracejada na Figura 4.6. O terceiro termo do lado esquerdo da Equação (4.13) podem ser consideradas como forças hipotéticas, as quais serão representadas pela variável  $F_H$ .

A curvatura, característica inerente aos *risers* flexíveis, pode complicar a solução da equação de conservação da quantidade de movimento. Uma das formas de tratar este tipo de problema é considerando o *riser* flexível como sendo composto por vários elemento de viga reta, assim como mostrado na Figura 4.7, onde a curva em catenária, (A), é aproximada como uma composição de elementos de viga reta, (B), cada um deles com diferente inclinação. Na Figura 4.7, os pontos  $i - 1$ ,  $i$ ,  $i + 1$ , e  $i + 2$ , representam os nós do *riser*.

Figura 4.7 - Aproximação de uma curva em catenária por meio de tubos retos.

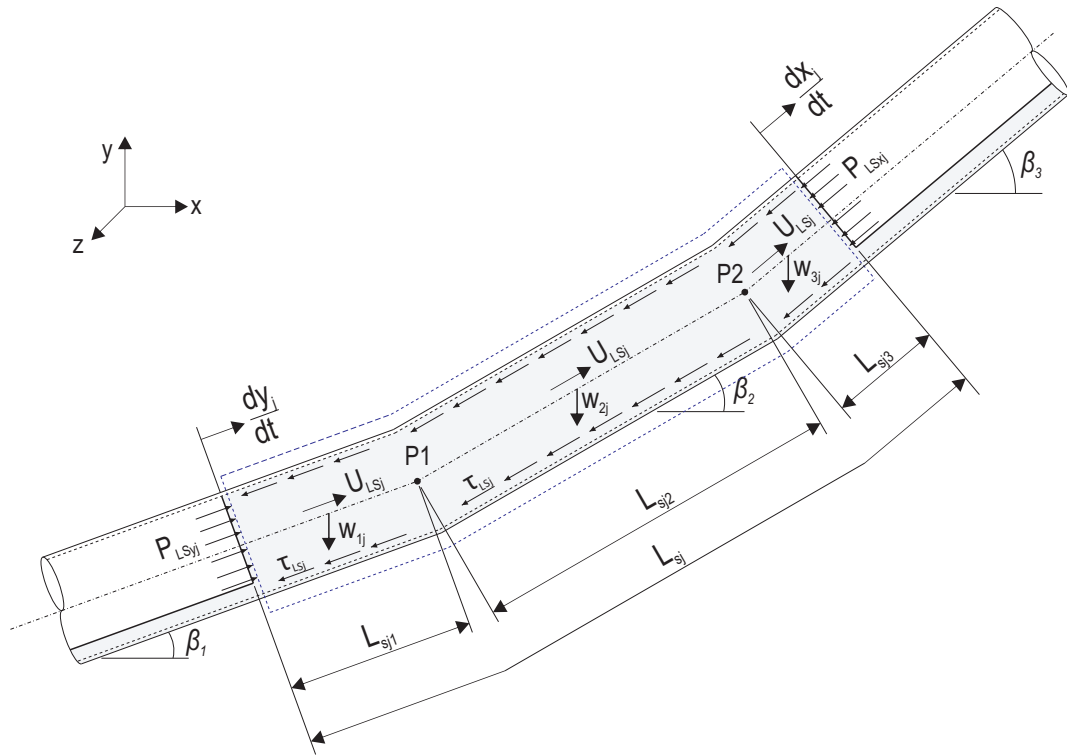


Fonte: Produção do autor

É importante destacar que a aproximação utilizada por meio do uso de tubos retos, vide Figura 4.7, não despreza os efeitos da força centrífuga. Para poder determinar o raio de curvatura de um dos elementos do *riser*, este pode ser aproximado como sendo o raio do círculo que passa por três nós consecutivos do *riser*.

A seguir, será desenvolvida a equação de conservação da quantidade de movimento para uma golfada de líquido, a qual se encontra distribuída em três elementos de *riser* de diferente inclinação, separados pelos pontos P1 e P2, assim como mostrado na Figura 4.8.

Figura 4.8 - Pistão de líquido da j-ésima célula unitária distribuído em três elementos de riser.



Fonte: Produção do autor

A Figura 4.8 mostra a j-ésima golfada de líquido do escoamento interno, a qual foi distribuída em três elementos de viga reta. O pistão de líquido encontra-se sobre o efeito das pressões  $P_{LSyj}$  e  $P_{LSxj}$ , tensões de cisalhamento entre o líquido e a parede do tubo  $\tau_{LSj}$ , e sobre o efeito do peso do próprio líquido  $W_{1j}$ ,  $W_{2j}$ , e  $W_{3j}$ , para cada uma das seções que compõem o pistão de líquido. A equação de conservação da quantidade de movimento, no sentido da direção do fluxo, para a primeira seção da golfada de líquido de tamanho  $L_{Sj1}$  e inclinação  $\beta_1$  é dada por:

$$\begin{aligned}
 (P_{LSyj} - P_{P1})A_{int} - \tau_{LSj}L_{Sj1}\pi D_i - \rho_L A_{int}L_{Sj1} \sin \beta_1 - F_{Hj1} &= \rho_L A_{int}U_{LSj}(U_{LSj} - \frac{dP1}{dt}) \\
 -\rho_L A_{int}U_{LSj}(U_{LSj} - \frac{dy_j}{dt}) + \rho_L A_{int}L_{Sj1} \frac{dU_{LSj}}{dt} + \rho_L A_{int}U_{LSj}(\frac{dP1}{dt} - \frac{dy_j}{dt}) &
 \end{aligned}
 \tag{4.14}$$

onde o terceiro termo do lado esquerdo da Equação (4.14) representa o peso do líquido, e o quarto termo representa as forças hipotéticas na direção do fluxo. A equação de conservação da quantidade de movimento para a segunda seção da golfada de líquido no sentido da direção do fluxo, de tamanho  $L_{Sj2}$  e inclinação  $\beta_2$ , é dada por:

$$\begin{aligned} (P_{P1} - P_{P2})A_{int} - \tau_{LSj}L_{Sj2}\pi D_i - \rho_L A_{int}L_{Sj2} \sin \beta_2 - F_{Hj2} = \rho_L A_{int}U_{LSj}(U_{LSj} - \frac{dP2}{dt}) \\ - \rho_L A_{int}U_{LSj}(U_{LSj} - \frac{dP1}{dt}) + \rho_L A_{int}L_{Sj2} \frac{dU_{LSj}}{dt} + \rho_L A_{int}U_{LSj}(\frac{dP2}{dt} - \frac{dP1}{dt}) \end{aligned} \quad (4.15)$$

Já a equação de conservação da quantidade de movimento para a terceira seção da golfada de líquido no sentido da direção do fluxo, de tamanho  $L_{Sj3}$  e inclinação  $\beta_3$ , é dada por:

$$\begin{aligned} (P_{P2} - P_{LSxj})A_{int} - \tau_{LSj}L_{Sj3}\pi D_i - \rho_L A_{int}L_{Sj3} \sin \beta_3 - F_{Hj3} = \rho_L A_{int}U_{LSj}(U_{LSj} - \frac{dx_j}{dt}) \\ - \rho_L A_{int}U_{LSj}(U_{LSj} - \frac{dP2}{dt}) + \rho_L A_{int}L_{Sj3} \frac{dU_{LSj}}{dt} + \rho_L A_{int}U_{LSj}(\frac{dx_j}{dt} - \frac{dP2}{dt}) \end{aligned} \quad (4.16)$$

Agora, a partir das Equações (4.14), (4.15) e (4.16) pode-se obter a seguinte expressão:

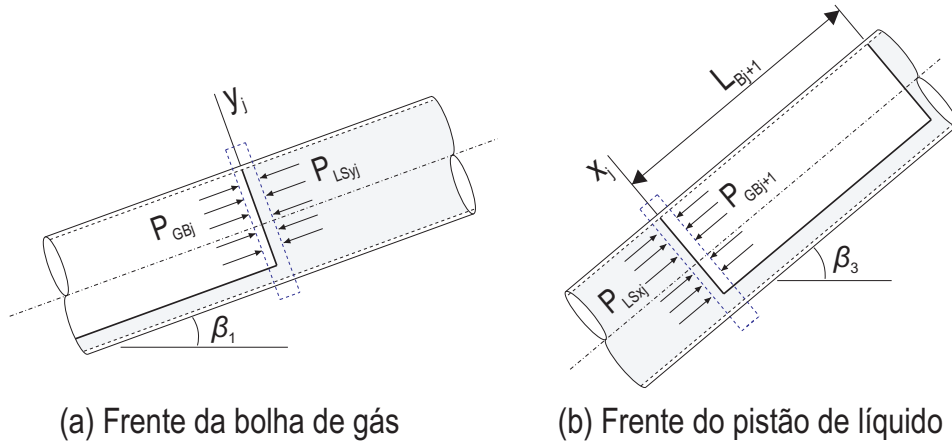
$$\begin{aligned} (P_{LSyj} - P_{LSxj})A_{int} - \tau_{LSj}L_{Sj}\pi D_i - \rho_L A_{int}(L_{Sj1} \sin \beta_1 + L_{Sj2} \sin \beta_2 + L_{Sj3} \sin \beta_3) \\ - (F_{Hj1} + F_{Hj2} + F_{Hj3}) = \rho_L A_{int}L_{Sj} \frac{dU_{LSj}}{dt} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Generalizando a equação de conservação da quantidade de movimento para um número  $n$  de elementos de viga reta, de inclinações e comprimentos diferentes:

$$(P_{LSy_j} - P_{LSx_j})A_{int} - \tau_{LSj}L_{Sj}\pi D_i - \rho_L A_{int} \sum_{i=1}^n (L_{Sji} \sin \beta_i) - \sum_{i=1}^n F_{Hji} = \rho_L A_{int} L_{Sj} \frac{dU_{LSj}}{dt} \quad (4.18)$$

Para poder resolver as Equações (4.10) e (4.18), expressam-se as pressões na golfada  $P_{LSx_j}$  e  $P_{LSy_j}$  em função das pressões atuantes na bolha alongada  $P_{GBj}$  e  $P_{GBj+1}$ , respectivamente. Na Figura 4.9, a qual foi feita baseada na Figura 4.8, apresentam-se as fronteiras  $x_j$  e  $y_j$  e as pressões atuantes na vizinhança delas.

Figura 4.9 - Pressões atuantes nas fronteiras  $x_j$  e  $y_j$  da  $j$ -ésima célula unitária.



Fonte: Produção do autor

onde  $P_{GBj}$  e  $P_{GBj+1}$  representam a pressão na bolha alongada de gás nas células  $j$  e  $j + 1$  do escoamento. Para o caso do escoamento bifásico em padrão golfadas, vários autores reportaram que a variação de pressão na frente da bolha alongada, coordenada  $y_j$  na Figura 4.9, é nula, logo tem-se:

$$P_{LSy_j} = P_{GBj} \quad (4.19)$$

Para o caso da fronteira  $x_j$ , a qual representa a frente do pistão de líquido, há uma perda de pressão perto da região da esteira trás da bolha alongada  $j + 1$ . Neste trabalho, para o cálculo da perda de pressão é considerada a expressão proposta por Taitel e Barnea (1990), a qual é expressa pela variável  $\Delta P_{mix}$  e é dada pela seguinte

equação:

$$\Delta P_{mix} = \rho_L g \sen \beta_3 L_{Bj+1} + \frac{\tau_{LBj+1} S_f}{A_{int}} L_{Bj+1} + \frac{\tau_{GBj+1} S_g}{A_{int}} L_{Bj+1} \quad (4.20)$$

onde  $g$  é a aceleração da gravidade,  $\tau_{LBj}$  é a tensão de cisalhamento entre o filme de líquido e a parede do tubo, e  $\tau_{GBj}$  é a tensão de cisalhamento entre a fase gasosa e a parede do tubo da  $j$ -ésima célula unitária do escoamento interno. As variáveis  $S_f$  e  $S_g$  representam o perímetro molhado do filme de líquido e da bolha alongada na região do gás, respectivamente. As tensões de cisalhamento entre as fases líquida e gasosa foi desprezada. Logo, calcula-se a pressão  $P_{LSxj}$  em função da pressão  $P_{GBj+1}$  da seguinte forma:

$$P_{LSxj} = P_{GBj+1} + \Delta P_{mix} \quad (4.21)$$

Finalmente, substituindo as Equações (4.19) e (4.21) na Equação (4.18) tem-se:

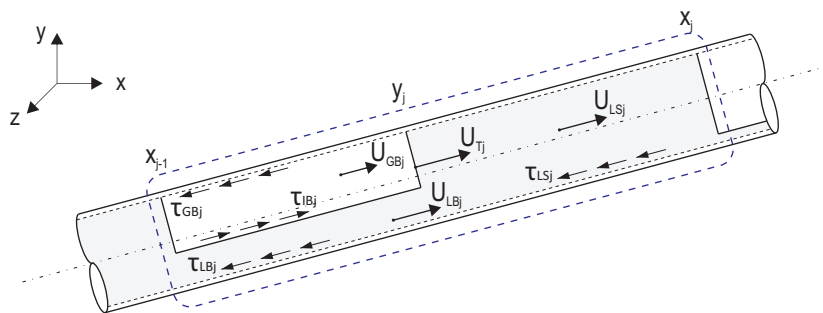
$$\begin{aligned} P_{GBj} - P_{GBj+1} = \rho_L g \sen \beta_3 L_{Bj+1} + \frac{\tau_{LBj+1} S_f L_{Bj+1}}{A_{int}} + \frac{\tau_{GBj+1} S_g L_{Bj+1}}{A_{int}} + \frac{\tau_{LSj} L_{Sj} \pi D_i}{A_{int}} \\ + \rho_L \sum_{i=1}^n (L_{Sjn} \sen \beta_n) + \frac{1}{A_{int}} \sum_{i=1}^n F_{Hjn} + \rho_L L_{Sj} \frac{dU_{LSj}}{dt} \end{aligned} \quad (4.22)$$

As Equações (4.10) e (4.22) formam um sistema de equações, o qual ao ser resolvido dá como resultado o valor da velocidade do pistão de líquido,  $U_{LS}$ , e o valor da pressão no interior da bolha de gás,  $P_{GB}$ , de cada uma das células no interior do *riser* a cada instante de tempo. A solução do sistema de Equações será explicado e detalhado no Capítulo 6.

### 4.3 Tensões de cisalhamento

Com o objetivo de solucionar o sistema formado pelas Equações (4.12) e (4.22), é preciso calcular, previamente, as tensões de cisalhamento atuantes sobre a célula unitária de escoamento, as quais são mostradas na Figura 4.10.

Figura 4.10 - Forças de atrito atuantes sobre a j-ésima célula unitária do escoamento.



Fonte: Produção do autor

onde  $\tau_{LSj}$  é tensão de cisalhamento entre o pistão de líquido e a parede do tubo,  $\tau_{LBj}$  é a tensão de cisalhamento entre o filme de líquido e a parede do tubo,  $\tau_{GBj}$  é a tensão de cisalhamento entre a bolha de gás e a parede, e  $\tau_{IBj}$  é a tensão de cisalhamento entre a bolha de gás e o filme de líquido da j-ésima célula unitária do escoamento. Segundo Taitel e Barnea (1990) e Rodrigues (2009), a tensão de cisalhamento entre a bolha de gás e o filme de líquido é desprezível.

As tensões de cisalhamento, mostradas na Figura 4.10, podem ser calculadas a partir das seguintes expressões:

$$\tau_{LSj} = \frac{\rho_L U_{LSj} |U_{LSj}| f_{f,LSj}}{2} \quad (4.23)$$

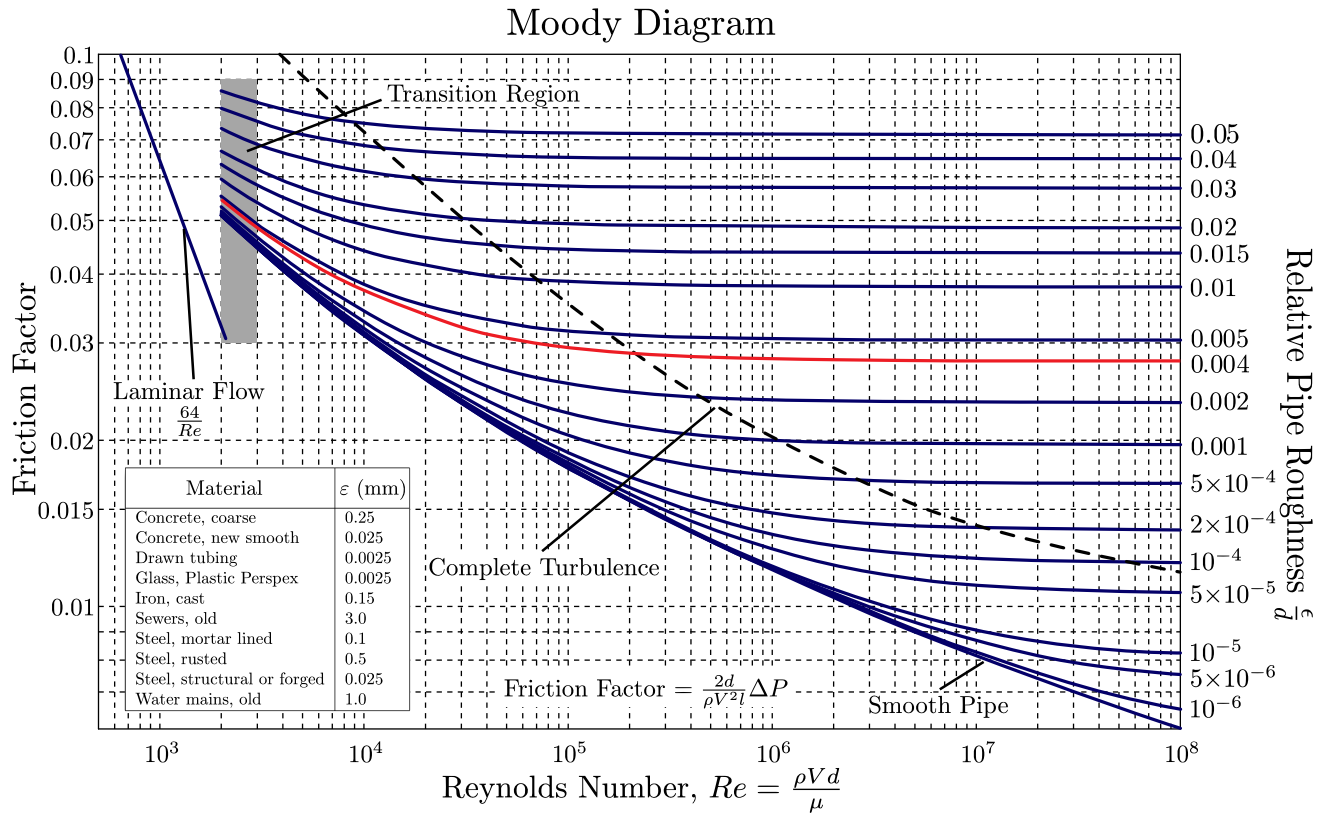
$$\tau_{LBj} = \frac{\rho_L U_{LBj} |U_{LBj}| f_{f,LBj}}{2} \quad (4.24)$$

$$\tau_{GBj} = \frac{\rho_G U_{GBj} |U_{GBj}| f_{f,GBj}}{2} \quad (4.25)$$

onde  $\rho_L$  e  $\rho_G$  são as densidades das fases líquida e gasosa do escoamento em golfadas, respectivamente;  $U_{LSj}$  é a velocidade do líquido na golfadas,  $U_{LBj}$  é a velocidade do filme de líquido na região da bolha de gás,  $U_{GBj}$  é a velocidade do gás;  $f_{f,LSj}$  é o fator de atrito de Fanning entre a parede do riser e o líquido na golfada,  $f_{f,LBj}$  é o fator de atrito de Fanning entre a parede do riser e o filme de líquido, e  $f_{f,GBj}$  é o fator de atrito de Fanning entre a parede do riser e a bolha de gás. Para determinar

o fator de atrito, utilizaremos o diagrama de Moody, mostrado na Figura 4.11.

Figura 4.11 - Diagrama de Moody.



Fonte: Nuclear Power (2014).

É importante mencionar, que o fator de atrito calculado no diagrama de Moody é o fator de atrito de Darcy-Weisbach,  $f_d$ , o qual relaciona-se com o fator de Fanning pela seguinte expressão:

$$f_f = \frac{f_d}{4} \quad (4.26)$$

Para o cálculo do fator de atrito de Darcy-Weisbach precisamos conhecer o valor do número de Reynolds,  $Re$ , assim como também, o valor da rugosidade relativa, a qual é definida pela expressão  $\epsilon/D_i$ , onde  $\epsilon$  representa a rugosidade do material do riser, e  $D_i$  é o diâmetro interno do riser. Pode-se observar na Figura 4.11 uma linha

de cor vermelha, a qual representa o fator de atrito para um valor de rugosidade relativa de 0.004, valor que, segundo Bai e Bai (2005), pode ser considerado para *risers* flexíveis.

Para o calculo do fator de atrito de Darcy-Weisbach, também podemos utilizar a equação de Barr, a qual é dada por:

$$\frac{1}{\sqrt{f_d}} = -2 \log \left( \frac{\varepsilon/D_i}{3.7} + \frac{5.1286}{Re^{0.89}} \right) \quad (4.27)$$

Os números de Reynolds para cada uma das fases do escoamento, podem ser calculadas como:

$$Re_{LSj} = \frac{\rho_{Lj} U_{LSj} D_{HLSj}}{\nu_{Lj}} \quad (4.28)$$

$$Re_{LBj} = \frac{\rho_{Lj} U_{LBj} D_{HLBj}}{\nu_{Lj}} \quad (4.29)$$

$$Re_{GBj} = \frac{\rho_{Gj} U_{GBj} D_{HGBj}}{\nu_{Gj}} \quad (4.30)$$

onde  $D_{HLSj}$  é o diâmetro hidráulico do líquido na golfada,  $D_{HLBj}$  é o diâmetro hidráulico do filme de líquido na região da bolha de gás, e  $D_{HGBj}$  é o diâmetro hidráulico da bolha de gás.  $\nu_{Lj}$  e  $\nu_{Gj}$  são as viscosidades dinâmicas da fase líquida e gasosa do escoamento, respectivamente. Para o cálculo dos diâmetros hidráulicos, utilizou-se a seguinte relação:

$$D_H = \frac{4A_{int}}{P_m} \quad (4.31)$$

onde  $P_m$  é o perímetro molhado da seção transversal.

Em seguida vamos calcular as velocidades  $U_{LBj}$ , e  $U_{GBj}$ . A velocidade  $U_{LSj}$  é obtida a partir da resolução do sistema dado pelas equações (4.12) e (4.22).



### 4.3.1 Velocidade do filme de líquido

Para o cálculo da velocidade do filme de líquido, vamos utilizar a relação proposta por Taitel e Barnea (1990), a qual é dada pela seguinte expressão:

$$U_{TRj} - U_{LBj} = (U_{TRj} - U_{LSj}) \frac{R_{LSj}}{R_{LBj}} \quad (4.32)$$

onde  $U_{TRj}$  é a velocidade de translação da bolha de gás. Considerando que o líquido no pistão é não-aerado o valor de  $R_{LSj}$  é igual a 1. Logo, o valor da velocidade do filme de líquido é dado por:

$$U_{LBj} = U_{TRj} + \frac{1}{R_{LBj}} (U_{LSj} - U_{TRj}) \quad (4.33)$$

De acordo com Taitel e Barnea (1990), o cálculo da velocidade de translação  $U_{TRj}$  pode ser expressada como uma função linear da velocidade de mistura, a qual vamos identificar com a variável  $U_{Sj}$ , da seguinte forma:

$$U_{TRj} = CU_{Sj} + U_{Dj} \quad (4.34)$$

onde  $C$  é uma constante que mede a contribuição adicional da velocidade de mistura sobre a velocidade de translação da bolha de gás. Neste trabalho, o valor de  $C$  será considerada como 1, 2. Devido a que o líquido no pistão é não aerado, o valor de  $U_{Sj}$  pode ser considerado igual a  $U_{LSj}$ , de acordo com Taitel e Barnea (1990). A variável  $U_{Dj}$  representa a velocidade das bolhas de gás em água parada, e pode ser calculada a partir da seguinte equação:

$$U_{Dj} = 0.54\sqrt{gD_i} \cos \beta_j + 0.35\sqrt{gD_i} \sin \beta_j \quad (4.35)$$

onde o ângulo  $\beta_j$  representa a inclinação do elemento de *riser*. Devido à curvatura inerente a os *risers* de produção, assim como foi mostrado na seção 4.2, em alguns casos a bolha de gás pode-se distribuir ao longo de elementos de *risers* com diferentes inclinações, para o que o ângulo  $\beta_j$  deverá ser calculado como um valor médio entre as diferentes inclinações existentes.

### 4.3.2 Velocidade da bolha de gás

Para o cálculo da velocidade da bolha de gás, vamos utilizar a relação proposta por Taitel e Barnea (1990), a qual é dada pela seguinte expressão:

$$U_{TRj} - U_{GBj} = (U_{TRj} - U_{GSj}) \frac{(1 - R_{LSj})}{(1 - R_{LBj})} \quad (4.36)$$

Como o líquido é considerado não-aerado, o valor de  $R_{LSj}$  é igual a 1. Logo, o valor da velocidade da bolha de gás é dada pela seguinte igualdade:

$$U_{GBj} = U_{TRj} \quad (4.37)$$

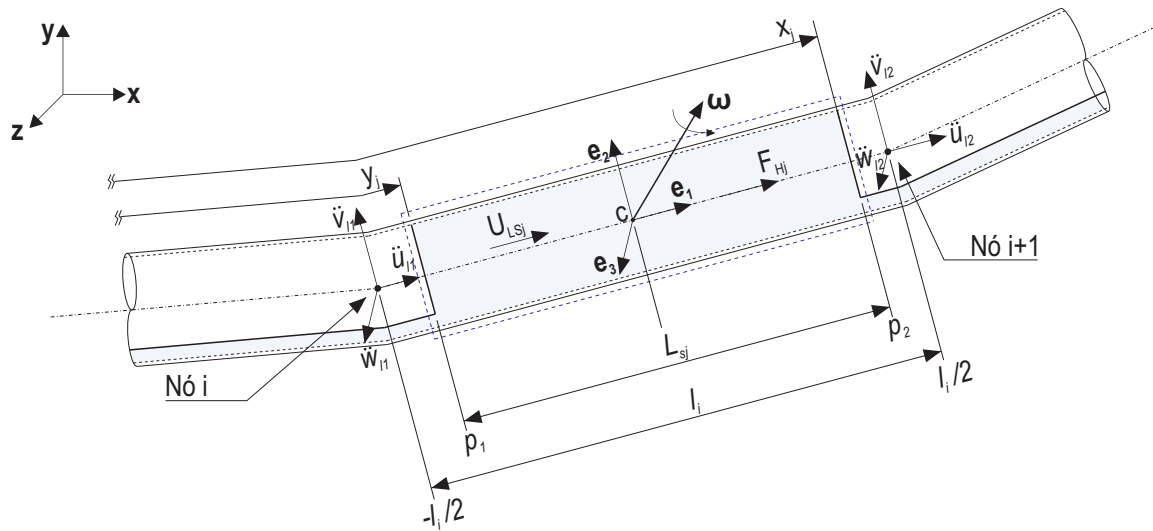
### 4.4 Forças hipotéticas

As forças hipotéticas atuantes sobre um pistão de líquido são dadas pelo terceiro termo do lado esquerdo da Equação (4.13).

$$\mathbf{F}_{Hj} = \iiint_{VC} [\ddot{\mathbf{R}}_c + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{U}_{LSj} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})] \rho_L dV \quad (4.38)$$

onde  $\mathbf{F}_{Hj}$  é o vetor de forças hipotéticas atuantes sobre o pistão de líquido. Para o cálculo do desenvolvimento do escoamento no interior do elemento de *riser*, só serão consideradas as forças hipotéticas na direção do fluxo. A seguir serão determinadas as forças hipotéticas atuantes sobre o  $j$ -ésimo pistão de líquido, o qual encontra-se dentro do  $i$ -ésimo elemento de *riser*, assim como mostrado na Figura 4.12.

Figura 4.12 - Forças hipotéticas atuantes sobre o pistão de líquido na direção do fluxo.



Fonte: Produção do autor.

onde  $F_{Hj}$  é a força hipotética atuante na direção do fluxo. As forças hipotéticas na direção normal ao eixo do elemento de *riser* não serão consideradas no cálculo. Os pontos  $p_1$  e  $p_2$  representam as coordenadas de posição do pistão de líquido no sistema de coordenadas local.

A partir da Equação (4.38), a aceleração do ponto C na direção do fluxo pode ser aproximada como a média entre os valores nodais  $\ddot{u}_{i1}$  e  $\ddot{u}_{i2}$  da forma seguinte (vide Figura 4.12):

$$\ddot{\mathbf{R}}_c \cdot \mathbf{e}_1 = \frac{\ddot{u}_{i1} + \ddot{u}_{i2}}{2} \quad (4.39)$$

O vetor de velocidade angular do sistema de referência local  $\boldsymbol{\omega}$ , dado pela Equação (3.75), e o vetor  $\mathbf{r}$  podem ser expressos no sistema de coordenadas local como:

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\phi}_l = \omega_{l1} \mathbf{e}_1 + \omega_{l2} \mathbf{e}_2 + \omega_{l3} \mathbf{e}_3 \quad (4.40)$$

$$\mathbf{r} = s \mathbf{e}_1 \quad (4.41)$$

Logo, substituindo as Equações (4.39), (4.40), e (4.41) na Equação (4.38), e considerando só as forças hipotéticas na direção do fluxo, obtêm-se:

$$F_{Hj} = \frac{\rho_L A_{int}}{2} \left[ (p_2 - p_1) (\ddot{u}_{l1} + \ddot{u}_{l2}) - (p_2^2 - p_1^2) (\omega_{l2}^2 + \omega_{3l}^2) \right] \quad (4.42)$$

No caso em que um pistão de líquido se encontre distribuído em mais de um elemento de *riser*, o procedimento a realizar é determinar a força hipotética para cada elemento de *riser*, utilizando a Equação (4.42), e logo fazer a soma algébrica de cada uma das forças, assim como mostrado pelo sexto termo do lado direito da Equação (4.22).

## 5 ANÁLISE DO ESCOAMENTO: MÉTODOS DE SOLUÇÃO

Este capítulo apresenta a discretização temporal e os respectivos métodos numéricos utilizados na solução das equações que governam o movimento do escoamento em padrão golfadas de líquido no interior de um *riser* flexível.

As Equações (4.12) e (4.22) serão aplicadas a cada uma das células unitárias pertencentes ao domínio computacional, dando como resultado um sistema de equações o qual ao ser solucionado fornecerá como resultado os valores de  $U_{LSj}$  e  $P_{GBj}$  para cada uma das células unitárias em um instante de tempo novo.

Uma vez conhecidos os valores  $U_{LSj}$  e  $P_{GBj}$  em um instante de tempo novo, os deslocamentos de cada uma das células unitárias pertencentes ao domínio computacional serão determinados a partir das equações de conservação de massa das fases líquida e gasosa do escoamento em golfadas, calculando dessa forma o movimento do escoamento ao longo do *riser* flexível.

Durante o movimento das células unitárias ao longo do *riser* ocorrem as seguintes situações: entrada e saída das células do domínio computacional e coalescências entre as bolhas de gás de células unitárias adjacentes, o qual é um fenômeno que acontece com bastante frequência em transporte de fluidos bifásicos água-ar a através de um *riser*. A ocorrência destas situações serão verificadas após o cálculo da nova posição de cada uma das células unitárias.

### 5.1 Discretização das Equações

Nesta seção, se apresenta o cálculo do desenvolvimento do escoamento interno no *riser*, o qual é obtido a partir da solução do sistema formado pelas Equações (4.12) e (4.22), para todas as célula unitárias do escoamento interno pertencentes ao domínio computacional. As Equações (4.12) e (4.22) são reescritas aqui por conveniência:

$$U_{LSj-1} - U_{LSj} = (1 - R_{LBj}) \frac{L_{Bj}}{P_{GBj}} \frac{dP_{GBj}}{dt} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned}
P_{GBj} - P_{GBj+1} = & \rho_L g \sin \beta_3 L_{Bj+1} + \frac{\tau_{LBj+1} S_f L_{Bj+1}}{A_{int}} + \frac{\tau_{GBj+1} S_g L_{Bj+1}}{A_{int}} + \frac{\tau_{LSj} L_{Sj} \pi D_i}{A_{int}} \\
& (4.22) \\
& + \rho_L \sum_{i=1}^n (L_{Sjn} \sin \beta_n) + \frac{1}{A_{int}} \sum_{i=1}^n F_{Hn} + \rho_L L_{Sj} \frac{dU_{LSj}}{dt}
\end{aligned}$$

onde  $j$  indica o número de célula unitária de escoamento. Para a solução das Equações (4.22) será utilizado o método de Crank-Nicolson, o qual fornece um esquema implícito que tem acurácia de segunda ordem, tanto no espaço quanto no tempo. O procedimento de cálculo é baseado no trabalho de Rodrigues (2009).

Como pode ser observado, as Equações (4.12) e (4.22) encontram-se discretizadas em relação à coordenada espacial, portanto, agora será realizada a discretização temporal. Para isto, a primeira derivada no tempo das variáveis  $U_{LSj}$  e  $P_{GBj}$  será aproximada por

$$\frac{\partial U_{LSj}}{\partial t} = \frac{U_{LSj}^{t+\Delta t} - U_{LSj}^t}{\Delta t} \quad , \quad \frac{\partial P_{GBj}}{\partial t} = \frac{P_{GBj}^{t+\Delta t} - P_{GBj}^t}{\Delta t} \quad (5.1)$$

Da mesma forma, as variáveis no lado esquerdo das Equações (4.12) e (4.22) serão aproximadas por

$$U_{LSj-1} = \frac{U_{LSj-1}^{t+\Delta t} + U_{LSj-1}^t}{2} \quad , \quad U_{LSj} = \frac{U_{LSj}^{t+\Delta t} + U_{LSj}^t}{2} \quad (5.2)$$

$$P_{GBj} = \frac{P_{GBj}^{t+\Delta t} + P_{GBj}^t}{2} \quad , \quad P_{GBj+1} = \frac{P_{GBj+1}^{t+\Delta t} + P_{GBj+1}^t}{2} \quad (5.3)$$

As aproximações dadas pelas Equações (5.1), (5.2), e (5.3), são realizadas no tempo  $t + \Delta t/2$ . O restante de variáveis, nas Equações (4.12) e (4.22), serão consideradas no tempo  $t$ . Logo, substituindo as Equações (5.1), (5.2), e (5.3) nas Equações (4.12) e (4.22) obtêm-se:

$$\frac{U_{LSj-1}^{t+\Delta t} + U_{LSj-1}^t}{2} - \frac{U_{LSj}^{t+\Delta t} + U_{LSj}^t}{2} = \frac{P_{GBj}^{t+\Delta t} - P_{GBj}^t}{\Delta t} \left( \frac{R_{GBj} L_{Bj}}{P_{GBj}^t} \right) \quad (5.4)$$

$$\frac{P_{GBj}^{t+\Delta t} + P_{GBj}^t}{2} - \frac{P_{GBj+1}^{t+\Delta t} + P_{GBj+1}^t}{2} = \frac{U_{LSj}^{t+\Delta t} - U_{LSj}^t}{\Delta t} (\rho_L L_{Sj}) + \rho_L g \text{sen } \beta_3 L_{Bj+1} + \frac{\tau_{LBj+1} S_f L_{Bj+1}}{A_{int}} + \frac{\tau_{GBj+1} S_g L_{Bj+1}}{A_{int}} + \frac{\tau_{LSj} L_{Sj} \pi D_i}{A_{int}} + \rho_L \sum_{i=1}^n (L_{Sjn} \text{sen } \beta_n) + \frac{1}{A_{int}} \sum_{i=1}^n F_{Hn} \quad (5.5)$$

Dado que a tensão de cisalhamento  $\tau_{LSj}$  é dada pela Equação (4.23), de acordo com Rodrigues (??) o produto  $U_{LSj}|U_{LSj}|$  pode ser aproximado como  $U_{LSj}^{t+\Delta t}|U_{LSj}^t|$ . Logo, fazendo um arranjo de termos, as Equações (5.4) e (5.5) podem ser escritas da forma seguinte:

$$-U_{LSj-1}^{t+\Delta t} + P_{GBj}^{t+\Delta t} \left( \frac{2R_{GBj} L_{Bj}}{\Delta t P_{GBj}^t} \right) + U_{LSj}^{t+\Delta t} = U_{LSj-1}^t - U_{LSj}^t + \frac{2R_{GBj} L_{Bj}}{\Delta t} \quad (5.6)$$

$$-P_{GBj}^{t+\Delta t} + U_{LSj}^{t+\Delta t} \left( \frac{2\rho_L L_{Sj}}{\Delta t} + \frac{4f_{f,LSj}}{D_i} \frac{\rho_L L_{Sj} |U_{LSj}^t|}{D_i} \right) + P_{GBj+1}^{t+\Delta t} = P_{GBj}^t - P_{GBj+1}^t + U_{LSj}^t \left( \frac{2\rho_L L_{Sj}}{\Delta t} \right) - 2\Delta P_{Pj} - 2\Delta P_{Bj} - 2\Delta P_{Hj} \quad (5.7)$$

onde o termo  $\Delta P_{Pj}$  representa a queda de pressão devido ao peso do líquido no pistão da  $j$ -ésima célula unitária e ao peso do filme de líquido da  $(j+1)$ -ésima célula unitária de escoamento,  $\Delta P_{Bj}$  é a queda de pressão devida às forças de atrito existentes na região da bolha de gás da  $(j+1)$ -ésima célula unitária, e  $\Delta P_{Hj}$  é a queda de pressão devida às forças hipotéticas como consequência da dinâmica do *riser*. Os termos  $\Delta P_{Pj}$ ,  $\Delta P_{Bj}$ , e  $\Delta P_{Hj}$  são dados pelas seguintes equações:

$$\Delta P_{Pj} = \rho_L g \text{sen } \beta_3 L_{Bj+1} + \rho_L \sum_{i=1}^n (L_{Sjn} \text{sen } \beta_n) \quad (5.8)$$

$$\Delta P_{Bj} = \frac{\tau_{LBj+1} S_f L_{Bj+1}}{A_{int}} + \frac{\tau_{GBj+1} S_g L_{Bj+1}}{A_{int}} \quad (5.9)$$

$$\Delta P_{Hj} = \frac{1}{A_{int}} \sum_{i=1}^n F_{Hn} \quad (5.10)$$

Conforme indicado por Rodrigues (2009), devido à diferença na ordem de grandeza dos termos da Equação (5.7), é recomendado modificar a variável  $P_{GBj}$  pela variável  $H_{GBj}$ , a qual é chamada de fator de pressão e dada pela seguinte expressão:

$$H_{GBj} = \frac{P_{GBj}}{\rho_L} \quad (5.11)$$

Logo, substituindo a Equação (5.11) nas Equações (5.6) e (5.7) as seguintes equações são obtidas:

$$-U_{LSj-1}^{t+\Delta t} + H_{GBj}^{t+\Delta t} \left( \frac{2R_{GBj}L_{Bj}}{\Delta t H_{GBj}^t} \right) + U_{LSj}^{t+\Delta t} = U_{LSj-1}^t - U_{LSj}^t + \frac{2R_{GBj}L_{Bj}}{\Delta t} \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned} -H_{GBj}^{t+\Delta t} + U_{LSj}^{t+\Delta t} \left( \frac{2L_{Sj}}{\Delta t} + \frac{4f_{f,LSj}}{D_i} \frac{L_{Sj}|U_{LSj}^t|}{D_i} \right) + H_{GBj+1}^{t+\Delta t} = H_{GBj}^t - H_{GBj+1}^t \\ + U_{LSj}^t \left( \frac{2L_{Sj}}{\Delta t} \right) - \frac{2}{\rho_L} (\Delta P_{Pj} + 2\Delta P_{Bj} + 2\Delta P_{Hj}) \end{aligned} \quad (5.13)$$

Finalmente, as Equações (5.12) e (5.13) serão aplicadas a cada uma das  $n$  células unitárias pertencentes ao domínio computacional, dando como resultado um sistema formado por  $2n$  equações as quais deverão ser solucionadas de forma simultânea. Estas  $2n$  equações podem ser expressas em forma matricial da seguinte forma:

$$\mathbf{A}_F \mathbf{X}_F = \mathbf{B}_F \quad (5.14)$$

onde  $\mathbf{X}_F$  é o vetor que contém os valores  $U_{LSj}^{t+\Delta t}$  e  $P_{GBj}^{t+\Delta t}$  de cada uma das células unitárias pertencentes ao domínio computacional. Considerando que o domínio computacional é composto por  $n$  células unitárias de escoamento, o vetor  $\mathbf{X}_F$  e o vetor  $\mathbf{B}_F$  são de dimensões  $2n \times 1$ , enquanto que a matriz  $\mathbf{A}_F$ , a qual é uma matriz tridiagonal, é de dimensões  $2n \times 2n$ , e os quais são dados pelas seguintes expressões:



$$\mathbf{A}_F = \begin{bmatrix} \frac{2R_{GB1}L_{B1}}{\Delta t H_{GB1}^t} & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & \frac{2L_{S1}}{\Delta t} + \frac{4f_{f,LS1}L_{S1}|U_{LS1}^t|}{D_i} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{2R_{GBj}L_{Bj}}{\Delta t H_{GBj}^t} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & \frac{2L_{Sj}}{\Delta t} + \frac{4f_{f,LSj}L_{Sj}|U_{LSj}^t|}{D_i} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \frac{2R_{GBn}L_{Bn}}{\Delta t H_{GBn}^t} & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -1 & \frac{2L_{Sn}}{\Delta t} + \frac{4f_{f,LSn}L_{Sn}|U_{LSn}^t|}{D_i} \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

81

$$\mathbf{B}_F = \left\{ \begin{array}{l} U_{LS0}^{t+\Delta t} + U_{LS0}^t - U_{LS1}^t + \frac{2R_{GB1}L_{B1}}{\Delta t} \\ H_{GB1}^t - H_{GB2}^t + U_{LS1}^t \left( \frac{2L_{S1}}{\Delta t} \right) - \frac{2}{\rho_L} (\Delta P_{P1} + 2\Delta P_{B1} + 2\Delta P_{H1}) \\ \vdots \\ U_{LSj-1}^t - U_{LSj}^t + \frac{2R_{GBj}L_{Bj}}{\Delta t} \\ H_{GBj}^t - H_{GBj+1}^t + U_{LSj}^t \left( \frac{2L_{Sj}}{\Delta t} \right) - \frac{2}{\rho_L} (\Delta P_{Pj} + 2\Delta P_{Bj} + 2\Delta P_{Hj}) \\ \vdots \\ U_{LSn-1}^t - U_{LSn}^t + \frac{2R_{GBn}L_{Bn}}{\Delta t} \\ -H_{GBn+1}^{t+\Delta t} + H_{GBn}^t - H_{GBn+1}^t + U_{LSn}^t \left( \frac{2L_{Sn}}{\Delta t} \right) - \frac{2}{\rho_L} (\Delta P_{Pn} + 2\Delta P_{Bn} + 2\Delta P_{Hn}) \end{array} \right\}, \quad \mathbf{X}_F = \begin{bmatrix} H_{GB1}^{t+\Delta t} \\ U_{LS1}^{t+\Delta t} \\ \vdots \\ H_{GBj}^{t+\Delta t} \\ U_{LSj}^{t+\Delta t} \\ \vdots \\ H_{GBn}^{t+\Delta t} \\ U_{LSn}^{t+\Delta t} \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

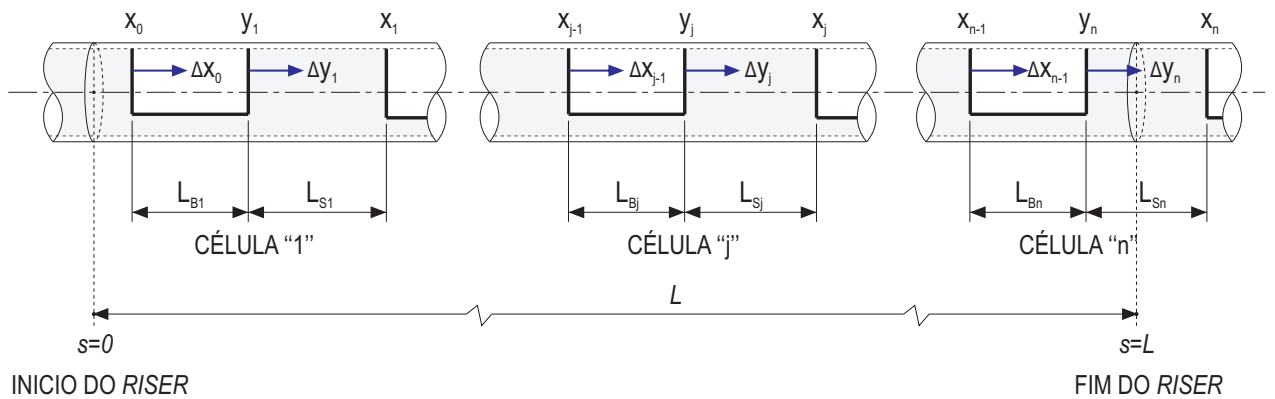
onde os subscritos 0 e  $n+1$  fazem referência as células unitárias que encontram-se fora do domínio computacional, antes da célula 1 e depois da célula  $n$ , respectivamente.

Durante a formação da matriz  $\mathbf{A}_F$  e do vetor  $\mathbf{B}_F$ , pode-se observar que as variáveis que as compõem estão avaliadas no tempo  $t$ , com exceção das variáveis  $U_{LS0}^{t+\Delta t}$  e  $H_{GBn+1}^{t+\Delta t}$ , as quais encontram-se avaliadas no tempo  $t + \Delta t$  e são chamadas de condições de contorno da Equação (5.14), as quais deverão ser definidas antes do cálculo do vetor  $\mathbf{X}_F$  em cada instante de tempo durante toda a simulação. Uma vez solucionada a Equação (5.14), os deslocamentos das células unitárias ao longo do *riser* serão determinados.

## 5.2 Cálculo dos deslocamentos das células

O movimento das células unitárias ao longo do *riser* serão determinados a partir do cálculo da nova posição das bolhas de gás de cada uma das células pertencentes ao domínio computacional. Para isto, serão determinadas as novas posições das coordenadas  $y_j$  e  $x_{j-1}$ , as quais representam a frente e a traseira da  $j$ -ésima bolha de gás, respectivamente, para  $j = 1, 2, \dots, n$ . A Figura 5.1, a qual é só esquemática, mostra os deslocamentos a determinar para as células 1,  $j$ , e  $n$ .

Figura 5.1 - Deslocamentos da frente e traseira das células 1,  $j$ , e  $n$  do escoamento.



Fonte: Produção do autor

O deslocamento da frente da bolha de gás da  $j$ -ésima célula unitária é obtido a partir da seguinte equação:

$$\frac{dy_j}{dt} = U_{TRj} \quad (5.17)$$

onde  $U_{TRj}$  é a velocidade de translação da  $j$ -ésima bolha de gás e é dada pela Equação (4.34). Utilizando o método das diferenças finitas, a nova posição da frente da bolha de gás da célula  $j$  pode ser calculada a partir da Equação (5.17), a qual pode ser reescrita como

$$y_j^{t+\Delta t} = y_j^t + U_{TRj}^t \Delta t \quad (5.18)$$

O cálculo do deslocamento da traseira da bolha de gás será realizado a partir de igualar o lado direito das Equações (4.7) e (4.12). Logo, a seguinte equação é obtida:

$$L_{Bj} \frac{dR_{LBj}}{dt} - (1 - R_{LBj}) \frac{dL_{Bj}}{dt} = (1 - R_{LBj}) \frac{L_{Bj}}{P_{GBj}} \frac{dP_{GBj}}{dt} \quad (5.19)$$

onde  $L_{Bj} = y_j - x_{j-1}$ . Devido à consideração de que a altura do filme de líquido não varia ao longo do *riser*, a derivada temporal da fração de líquido,  $R_{LBj}$ , é igual a zero. Logo, fazendo um rearranjo de termos, a Equação (5.19) pode ser reescrita como:

$$\frac{dx_{j-1}}{dt} = \frac{dy_j}{dt} + \frac{L_{Bj}}{P_{GBj}} \frac{dP_{GBj}}{dt} \quad (5.20)$$

Aplicando o método das diferenças finitas à Equação (5.20), a nova posição da traseira da  $j$ -ésima bolha de gás é dada pela seguinte equação:

$$x_{j-1}^{t+\Delta t} = x_{j-1}^t + U_{TRj}^t \Delta t + \frac{L_{Bj}^t}{P_{GBj}^t} \left( P_{GBj}^{t+\Delta t} - P_{GBj}^t \right) \quad (5.21)$$

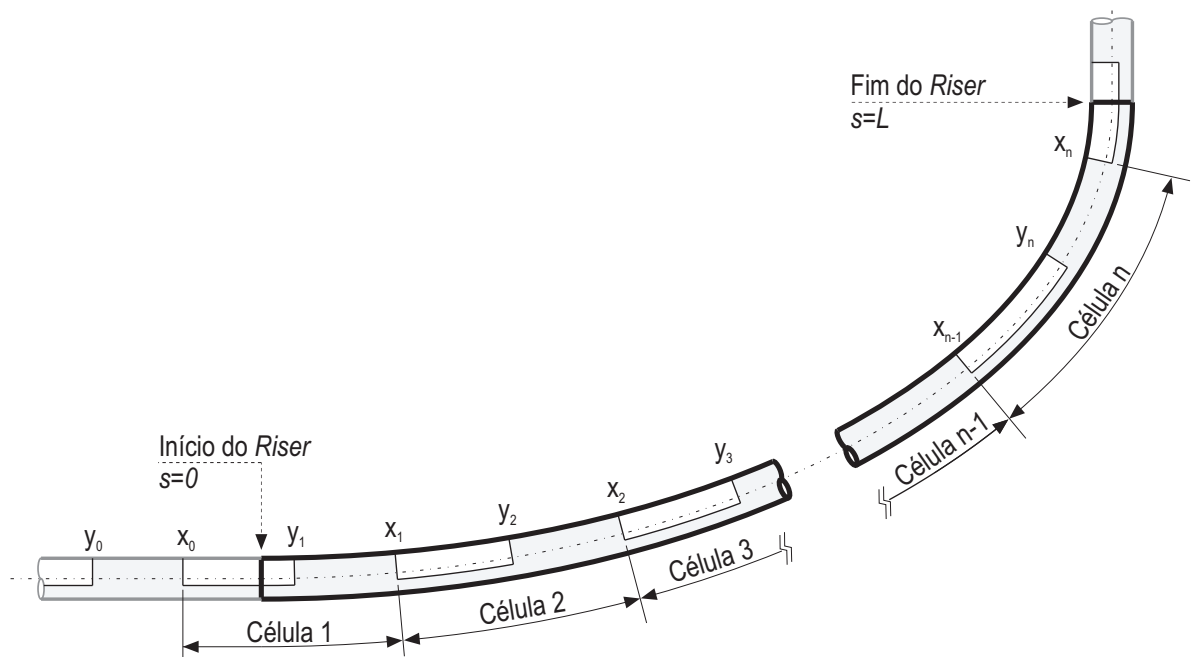
Considerando que o domínio computacional é composto por  $n$  células unitárias, por meio da solução da Equação (5.18) serão calculadas as novas posições das frentes das bolhas de gás das células 1 até a  $n$ :  $y_1$  até  $y_n$ . Por outro lado, a partir da Equação (5.21) serão calculadas as novas posições das traseiras das bolhas de gás das células 1 até a  $n$ :  $x_0$  até  $x_{n-1}$ , assim como mostrado na Figura 5.1.

### 5.3 Domínio computacional

O domínio computacional é a região espacial composta por células unitárias, para as quais as equações de conservação de massa e de conservação da quantidade de movimento serão solucionadas por meio das ferramentas da dinâmica de fluidos computacional (CFD).

Considerando que uma célula unitária de escoamento é composta por um pistão de líquido seguido de uma bolha de gás, nessa ordem, a célula  $j$  só pertence ao domínio computacional uma vez que a frente da sua correspondente bolha de gás,  $y_j$  para  $j = 1, 2, \dots, n$ , se encontre dentro do *riser*, assim como mostrado na Figura 5.2.

Figura 5.2 - Composição do domínio computacional para análise do escoamento.



Fonte: Produção do autor

A partir da Figura 5.2 pode-se observar, para um instante de tempo qualquer  $t$ , que o domínio computacional é composto pelas células 1 até a  $n$ , que satisfazem a condição  $0 \leq y_j \leq L$ , para  $j = 1, 2, \dots, n$ , onde  $L$  representa o comprimento total do *riser*. A coordenada  $x_0$  representa a frente do pistão de líquido da célula 0, a qual não pertence ao domínio computacional. A variável  $s$  é a coordenada longitudinal

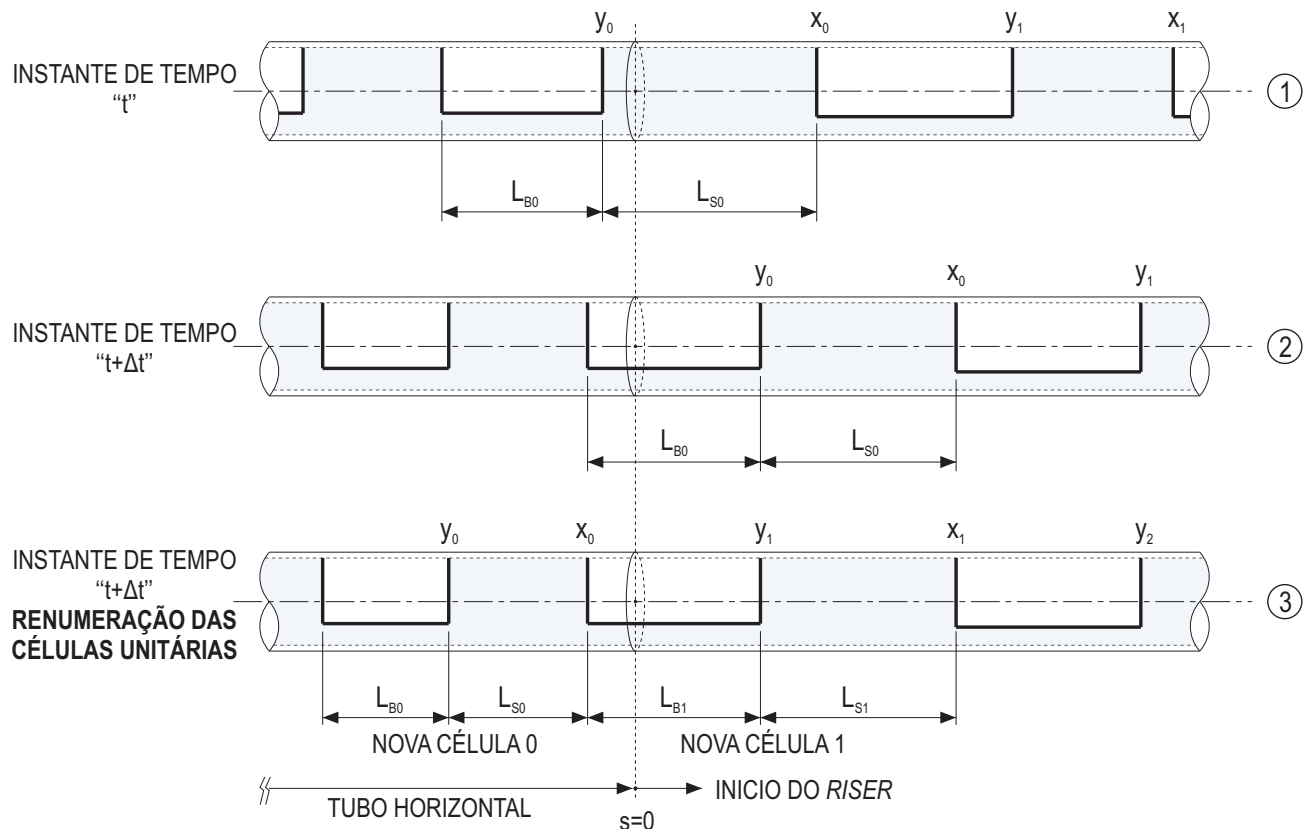
medida ao longo do *riser*.

É importante definir o domínio computacional a cada instante de tempo durante a simulação, isto porque a dinâmica do escoamento produz que as células unitárias constantemente entram e saem do *riser*. A seguir, serão apresentadas as condições sob as quais ocorrem a entrada e a saída de células unitárias do domínio computacional.

### 5.3.1 Entrada de uma célula unitária no domínio

O processo de ingresso de uma célula unitária de escoamento no domínio computacional é mostrado na Figura 5.3. Considera-se que antes de ingressar no *riser*, o escoamento encontra-se fluindo através de um tubo horizontal, cujo extremo final coincide com o extremo inicial do *riser*, o qual é definido pela coordenada  $s = 0$ .

Figura 5.3 - Processo de entrada de uma célula unitária no domínio computacional.



Fonte: Produção do autor

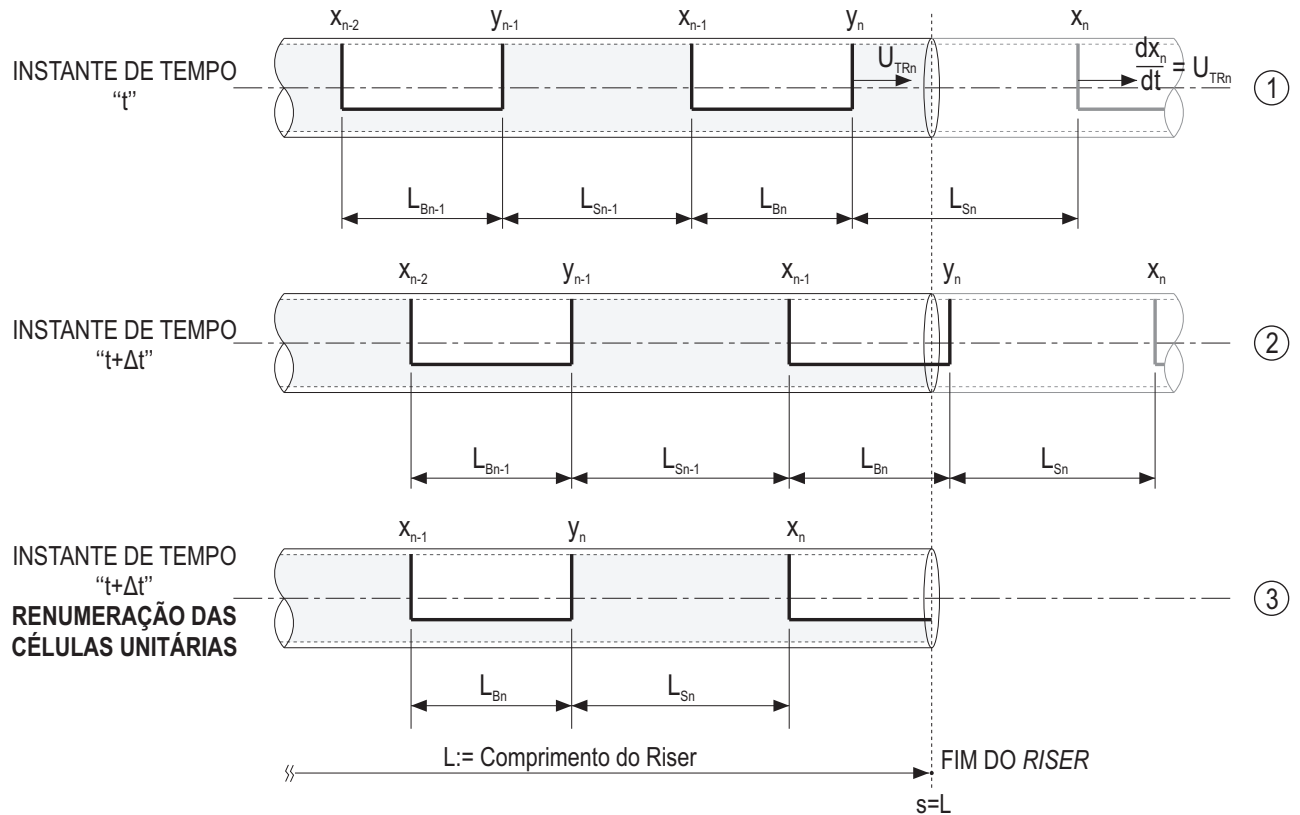
No instante de tempo  $t$ , configuração 1 na Figura 5.3, a coordenada  $y_0$ , a qual define a frente da bolha de gás da célula 0, encontra-se perto de ingressar no interior do *riser*, antes da coordenada  $s = 0$ . Durante o ingresso do pistão da célula unitária 0 no interior do *riser* ( $y_0 < 0$ ), considera-se que os comprimentos  $L_{S0}$  e  $L_{B0}$  permanecem constantes. É importante indicar que o deslocamento da coordenada  $x_0$  é obtido a partir da solução da Equação (5.21) para a célula 1.

Após um passo de tempo  $\Delta t$ , configuração 2 na Figura 5.3, o pistão de líquido 0 ingressou totalmente no interior do *riser* ( $x_0 \geq 0$  e  $y_0 \geq 0$ ), e é a partir desse instante de tempo que a célula 0 faz parte do domínio computacional. Seguidamente, a célula 0 se converte na nova célula 1 e se procede a realizar a renumeração das células. Por outro lado, após o processo descrito, uma nova célula 0 deverá ser definida, cujas propriedades serão determinadas a partir das propriedades físicas das fases líquida e gasosa. O cálculo das propriedades da célula 0 será realizado por meio do uso do modelo estacionário para escoamento em golfadas, o qual é mostrado no Apêndice A.

### 5.3.2 Saída de uma célula unitária do domínio

O processo de saída de uma célula unitária de escoamento do domínio computacional é mostrado na Figura 5.4.

Figura 5.4 - Processo de saída de uma célula unitária do domínio computacional.



Fonte: Produção do autor

No instante de tempo  $t$ , configuração 1 na Figura 5.4, a coordenada  $y_n$ , a qual define a frente da bolha de gás da célula  $n$ , encontra-se perto de sair do interior do riser, antes da coordenada  $s = L$ . Durante a saída do pistão da célula unitária  $n$  do interior do riser ( $x_n \geq L$  e  $y_n < L$ ), considera-se que o comprimento do pistão de líquido da célula  $n$  permanece constante, motivo pelo qual, a velocidade da frente do pistão e a velocidade de translação da bolha de gás da célula  $n$  são iguais. Esta consideração é feita porque, como pode ser visto na Figura 5.1, o deslocamento da coordenada  $x_n$  é desconhecido.

Após um passo de tempo  $\Delta t$ , configuração 2 na Figura 5.4, o pistão de líquido  $n$  saiu totalmente do interior do riser ( $x_n \geq L$  e  $y_n \geq L$ ), e é a partir deste instante de tempo que a célula  $n$  deixa de fazer parte do domínio computacional. Seguidamente, a célula  $n - 1$  se converte na nova célula  $n$ , configuração 3.

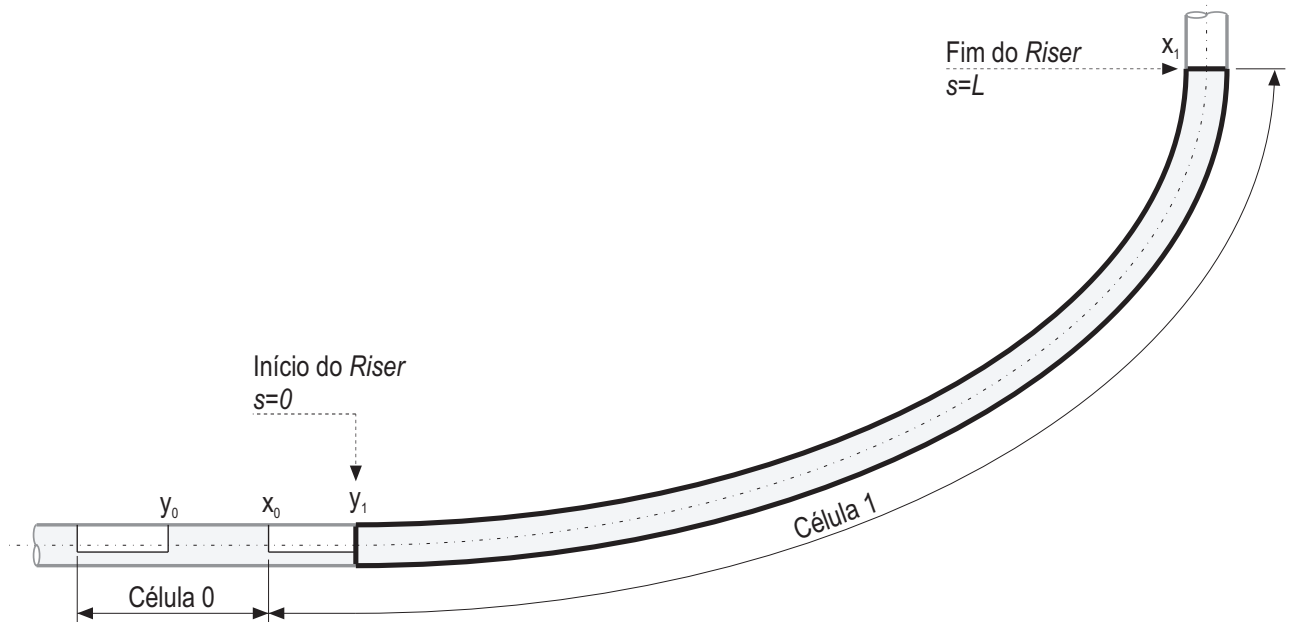
Pode-se observar nas configurações 1 e 2 uma extensão do *riser*, isto porque, como será explicado na seção seguinte, é necessário conhecer o deslocamento da frente do pistão da célula  $n$ ,  $x_n$  para poder determinar as condições de contorno relacionadas à Equação 5.14. Neste trabalho, considera-se que a extensão do *riser* tem a mesma inclinação do último elemento finito do *riser*.

#### 5.4 Condições de contorno do problema

Para poder solucionar a Equação (5.14) é necessário definir as condições de contorno dadas pelas variáveis  $U_{LS0}^{t+\Delta t}$  e  $H_{GBn+1}^{t+\Delta t}$  na Equação (5.16), às quais estão relacionadas as células 0 e  $n+1$  do escoamento e que não pertencem ao domínio computacional. A variável  $H_{GBn+1}^{t+\Delta t}$  está relacionada diretamente à variável  $P_{GBn+1}^{t+\Delta t}$ , a qual é a pressão da bolha de gás da célula que saiu do domínio computacional.

No instante de tempo  $t = 0$ , início da simulação, o *riser* encontra-se cheio de líquido e considera-se que existe uma célula unitária no domínio computacional, a célula 1, a qual é mostrada na Figura 5.5.

Figura 5.5 - Configuração inicial do escoamento em golfadas.



Fonte: Produção do autor



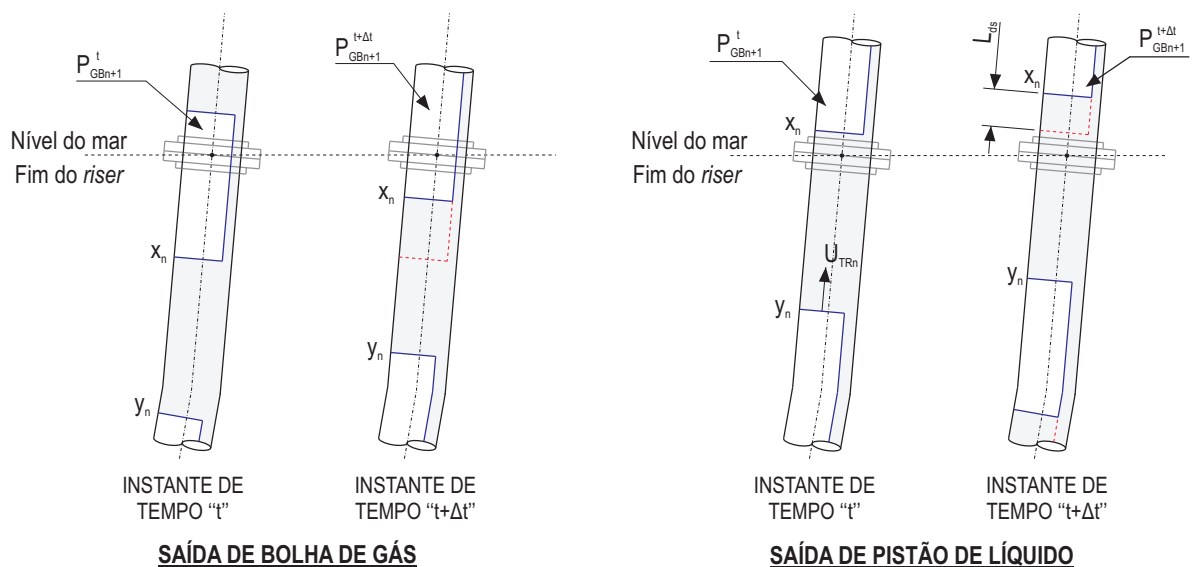
A célula 1 é composta por um pistão de líquido de comprimento igual ao comprimento inicial do *riser*, e por uma bolha de gás, a qual tem sua frente na coordenada de posição  $s = 0$ . Deverá também ser definida a célula 0, assim como suas propriedades correspondentes, as quais poderão ser obtidas a partir do uso do modelo estacionário do escoamento em padrão golfadas de líquido (vide Apêndice A). Por outro lado, considera-se no início que no topo do *riser* existe uma bolha de gás submetida à pressão atmosférica,  $P_{atm}$ . No instante de tempo  $t = 0$ , as condições de contorno são dadas pelas seguintes expressões:

$$U_{LS0}^{t+\Delta t} = U_{LS0}^t \quad (5.22)$$

$$P_{GBn+1}^{t+\Delta t} = P_{atm} \quad (5.23)$$

Para um instante de tempo qualquer  $t$ , a condição de contorno dada pela Equação (5.22) continua sendo utilizada, porém o cálculo da variável  $P_{GBn+1}^{t+\Delta t}$  será realizado de outra forma. Devido à intermitência do escoamento em golfadas, durante a saída das células de escoamento do *riser* podem ocorrer dois cenários: saída de uma bolha de gás ou saída de um pistão de líquido, assim como mostrado na Figura 5.6.

Figura 5.6 - Cenários ocorridos durante a saída do escoamento em golfadas.



Fonte: Produção do autor

Se uma bolha de gás estiver saindo do *riser*, será considerado que a pressão da célula  $n + 1$  no tempo  $t + \Delta t$ ,  $P_{GB}^{t+\Delta t}$ , é de igual valor à pressão da célula  $n + 1$  no tempo  $t$ ,  $P_{GB}^t$

$$P_{GBn+1}^{t+\Delta t} = P_{GBn+1}^t \quad (5.24)$$

Se o pistão de líquido da  $n$ -ésima célula unitária estiver saindo, a pressão  $P_{GB}^{t+\Delta t}$  será calculada a partir da seguinte expressão:

$$P_{GBn+1}^{t+\Delta t} = P_{GBn+1}^t - (L_{ds}) \left( 2 \frac{\tau_{LSn}}{D_i} + \rho_L g \sen \beta \right) \quad (5.25)$$

onde  $L_{ds}$  é o deslocamento da frente do pistão de líquido  $n$ . Para o cálculo de  $L_{ds}$  será considerado que a frente do pistão de líquido se desloca com velocidade igual a  $U_{TRn}$ , que é a velocidade de translação da sua correspondente bolha de gás, assim como já foi explicado na seção 6.3.2 (vide Figura 5.4). A variável  $L_{ds}$  é dada por:

$$L_{ds} = U_{TRn} \Delta t \quad (5.26)$$

A Tabela 5.1 mostra, em resumo, os valores utilizados para as condições de contorno  $U_{LS0}^{t+\Delta t}$  e  $P_{GBn+1}^{t+\Delta t}$ , para o instante de tempo inicial  $t = 0$ , e para um instante qualquer de tempo  $t$ .

Tabela 5.1 - Condições de contorno associadas à Equação (5.14).

Variável	$t = 0$	$t > 0$
$U_{LS0}^{t+\Delta t}$	$U_{LS0}^t$	$U_{LS0}^t$
$P_{GBn+1}^{t+\Delta t}$	$P_{atm}$	(a) $P_{GBn+1}^t$ (b) $P_{GBn+1}^t - (L_{ds}) \left( 2 \frac{\tau_{LSn}}{D_i} + \rho_L g \sen \beta \right)$

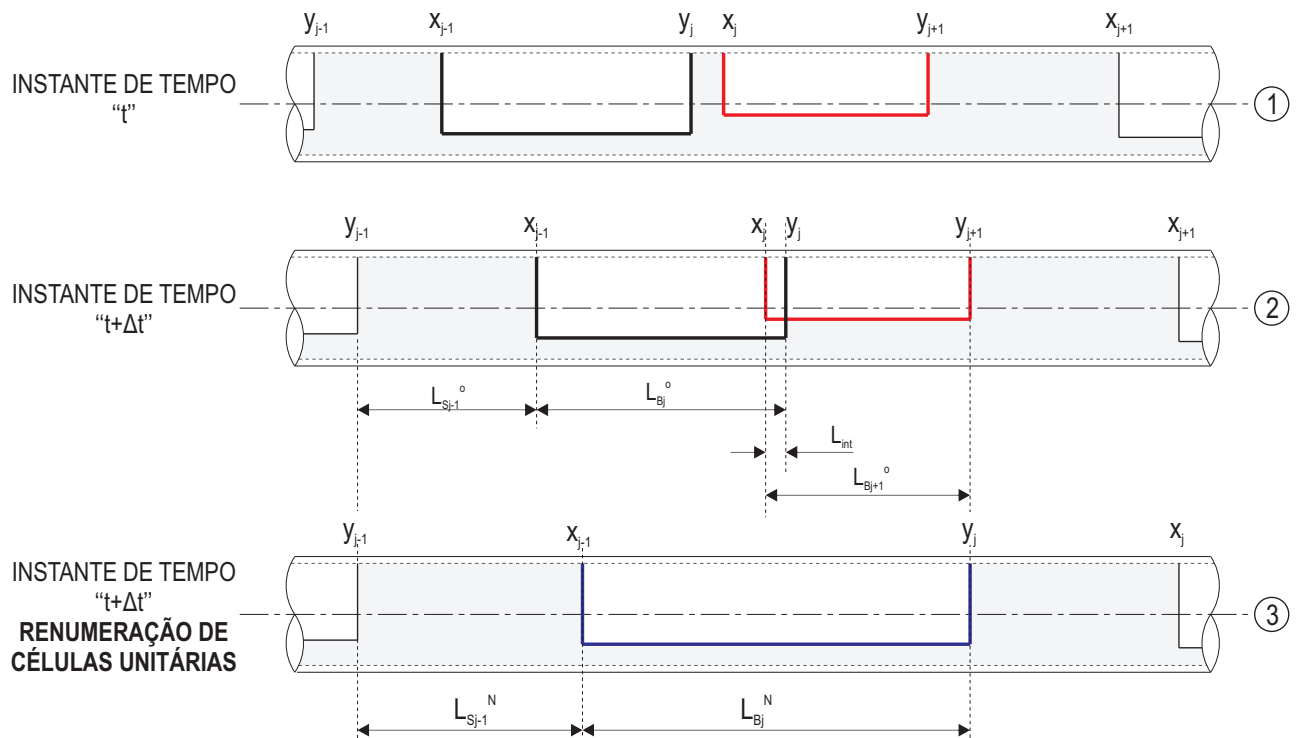
(a) Ocorre saída de bolha de gás.

(b) Ocorre saída de pistão de líquido.

## 5.5 Coalescência de bolhas de gás

Durante o desenvolvimento do escoamento interno, a frente de uma bolha de gás pode alcançar a traseira da bolha de gás da célula na sua frente, dando lugar a uma nova célula unitária. Este fenômeno é conhecido como coalescência de bolhas e é mostrado na Figura 5.7.

Figura 5.7 - Processo de coalescência das bolhas de gás  $j$  e  $j + 1$  do escoamento interno.



Fonte: Produção do autor

No instante de tempo  $t$ , configuração 1 na Figura 5.7, observa-se o pistão  $j$ , definido pelas coordenadas  $x_j$  e  $y_j$ , o qual tem um comprimento bastante pequeno. Após um passo de tempo  $\Delta t$ , configuração 2 na Figura 5.7, e considerando que a velocidade de translação da bolha de gás  $j$  é maior que a velocidade de translação da bolha de gás  $j + 1$ , eventualmente a coordenada  $y_j$  será maior que a coordenada  $x_j$  e o pistão  $j$  desaparecerá.

Durante a simulação, resulta quase impossível determinar o momento exato em que

a frente da bolha de gás  $j$  alcança a traseira da bolha de gás  $j+1$ . Devido a isso, será considerado que em algum instante de tempo, a frente da bolha de gás  $j$  ultrapassa a traseira da bolha de gás  $j+1$ , assim como mostrado na Figura 5.7. O comprimento de interferência entre ambas as bolhas de gás será considerado como sendo  $L_{int}$ .

Uma vez que ocorre a colisão, as bolhas de gás  $j$  e  $j+1$  formam a nova bolha de gás  $j$ , assim como mostrado na configuração 3 da Figura 5.7. Considera-se que a frente da bolha de gás  $j+1$  na configuração 2 passa a ser a frente da bolha de gás  $j$  na configuração 3. Logo, se procede a realizar a renumeração das células unitárias.

As dimensões com sobrescritos  $O$  e  $N$  indicam as dimensões no instante de tempo  $t + \Delta t$ , antes e depois de determinar as características da nova bolha de gás gerada, configurações 2 e 3, respectivamente.

A seguir, realiza-se a conservação da massa da fase líquida entre as coordenadas  $y_{j-1}$  e  $y_{j+1}$  da seguinte forma:

$$M_{LSj-1}^o + M_{LBj}^o + M_{LBj+1}^o - M_{int} = M_{LSj-1}^N + M_{LBj}^N \quad (5.27)$$

onde o lado esquerdo da Equação (5.27) representa a massa de líquido na configuração 2, e o lado direito da Equação (5.27) representa a massa de líquido na configuração 3.  $M_{LSj}$  é a massa de líquido no pistão  $j$ ,  $M_{LBj}$  é a massa do filme de líquido na região da bolha de gás  $j$ , e  $M_{int}$  é a massa de líquido na região de interferência entre as bolhas de gás  $j$  e  $j+1$ . As variáveis  $M_{LSj}$ ,  $M_{LBj}$ , e  $M_{int}$  são dadas pelas seguintes equações:

$$M_{LSj} = \rho_L L_{Sj} A \quad (5.28)$$

$$M_{LBj} = \rho_L L_{Bj} R_{LBj} A \quad (5.29)$$

$$M_{int} = \rho_L L_{int} R_{LBmin} A \quad (5.30)$$

onde  $R_{LBmin}$  é igual ao valor mínimo entre os valores  $R_{LBj}$  e  $R_{LBj+1}$ . Logo, a partir de igualar a distância entre os pontos  $y_{j-1}$  e  $y_{j+1}$ , na configuração 2, com a distância entre os pontos  $y_{j-1}$  e  $y_j$ , na configuração 3, pode-se obter a seguinte igualdade:

$$L_{Sj-1}^o + L_{Bj}^o + L_{Bj+1}^o - L_{int} = L_{Sj-1}^N + L_{Bj}^N \quad (5.31)$$

Assim, a partir da Equação (5.31), o comprimento do pistão de líquido  $j - 1$  pode ser calculado a partir da seguinte equação:

$$L_{Sj-1}^N = L_{Sj-1}^o + L_{Bj}^o + L_{Bj+1}^o - L_{int} - L_{Bj}^N \quad (5.32)$$

Substituindo as Equações (5.28), (5.29) e (5.32) na Equação (5.27), o comprimento da nova bolha de gás  $j$  pode ser determinado como:

$$L_{Bj}^N = \frac{(R_{LBj}^o - 1) L_{Bj}^o + (R_{LBj+1}^o - 1) L_{Bj+1}^o + (1 + R_{LBmin} - R_{LBj}^o - R_{LBj+1}^o) L_{int}}{(R_{LBmin} - 1)} \quad (5.33)$$

A Figura 5.8 apresenta o diagrama de fluxo do cálculo do desenvolvimento do escoamento interno ao longo de um *riser* flexível, enquanto que a Figura 5.9 apresenta as sub-rotinas que se utilizam em caso de: entrada de uma célula, saída de uma célula, e coalescência de bolhas de gás.

Figura 5.8 - Diagrama de fluxo do cálculo do desenvolvimento do escoamento interno.

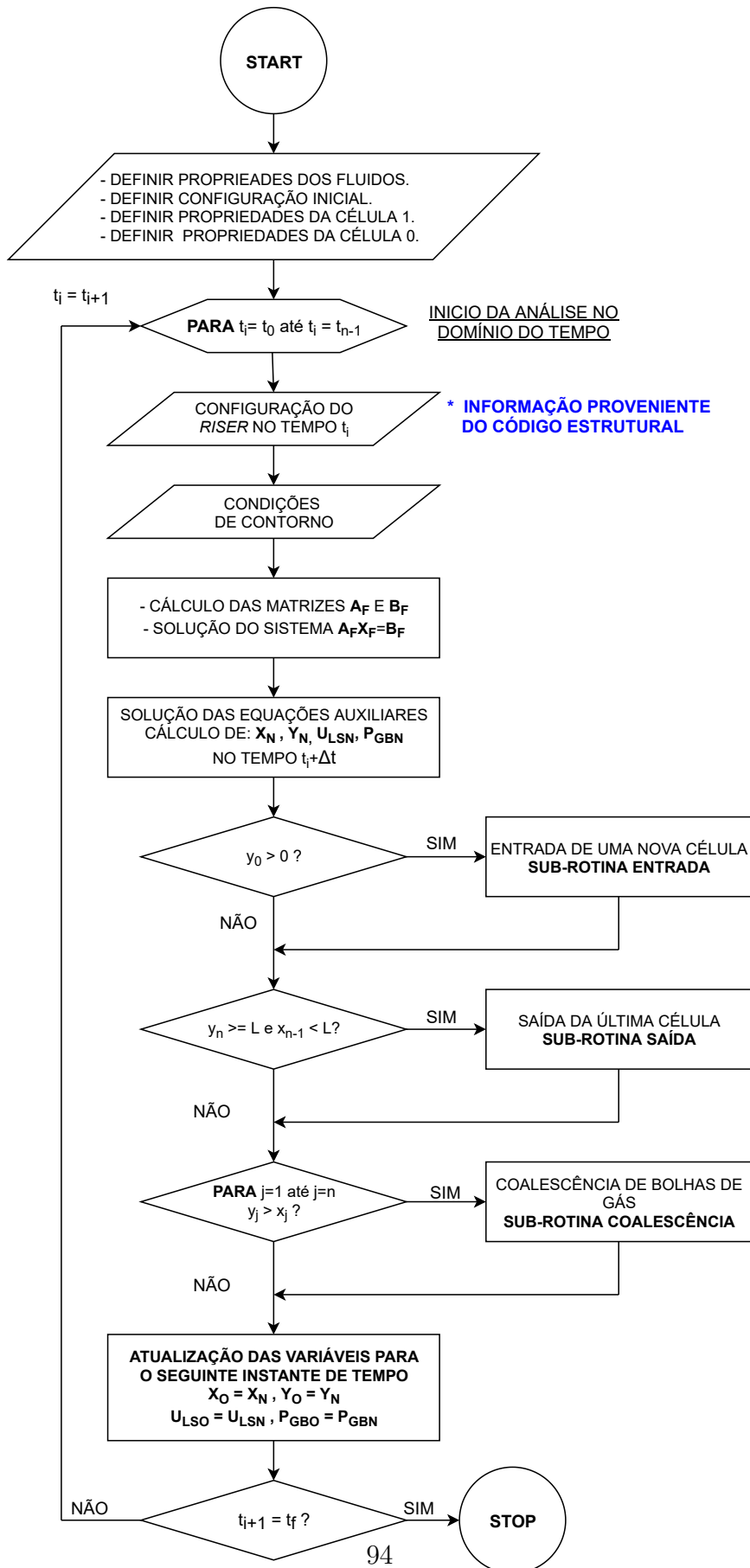
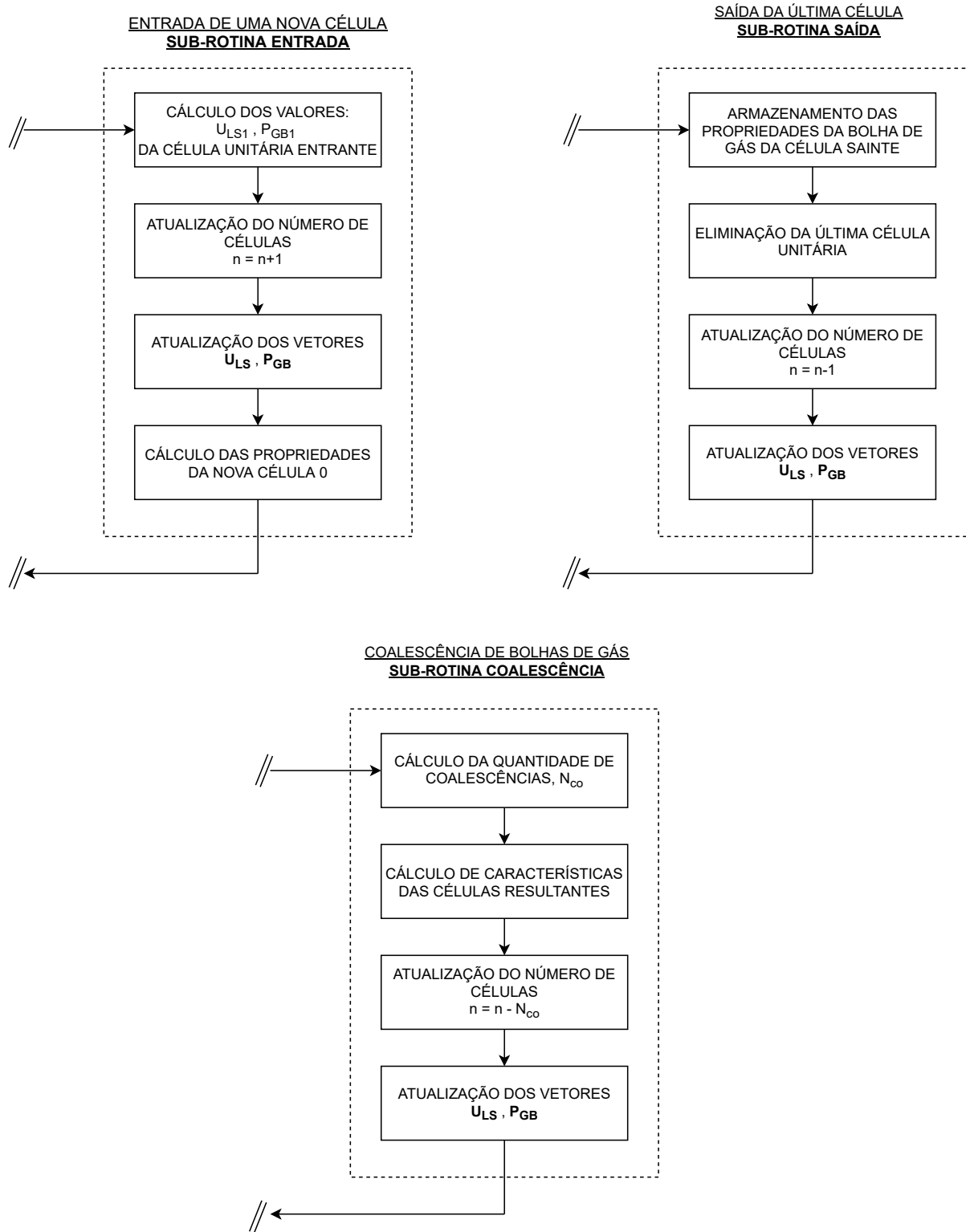


Figura 5.9 - Sub-rotinas: Entrada de uma célula, saída de uma célula, e coalescência de bolhas.



Fonte: Produção do autor

A partir da Figura 5.8,  $\mathbf{X}_N$  e  $\mathbf{Y}_N$  são os vetores que contém as posições das frentes dos pistões e das frentes das bolhas de gás  $x_j$  e  $y_j$ , respectivamente, para  $j = 1, 2, \dots, n$  em um instante de tempo  $t + \Delta t$ . Da mesma forma, os vetores  $\mathbf{U}_{LSN}$  e  $\mathbf{P}_{GBN}$  armazenam os valores de  $U_{LSj}$  e  $P_{GBj}$ , respectivamente. Por sua vez, as variáveis  $\mathbf{X}_O$ ,  $\mathbf{Y}_O$ ,  $\mathbf{U}_{LSO}$  e  $\mathbf{P}_{GBO}$  expressam as variáveis em um instante de tempo  $t$ .

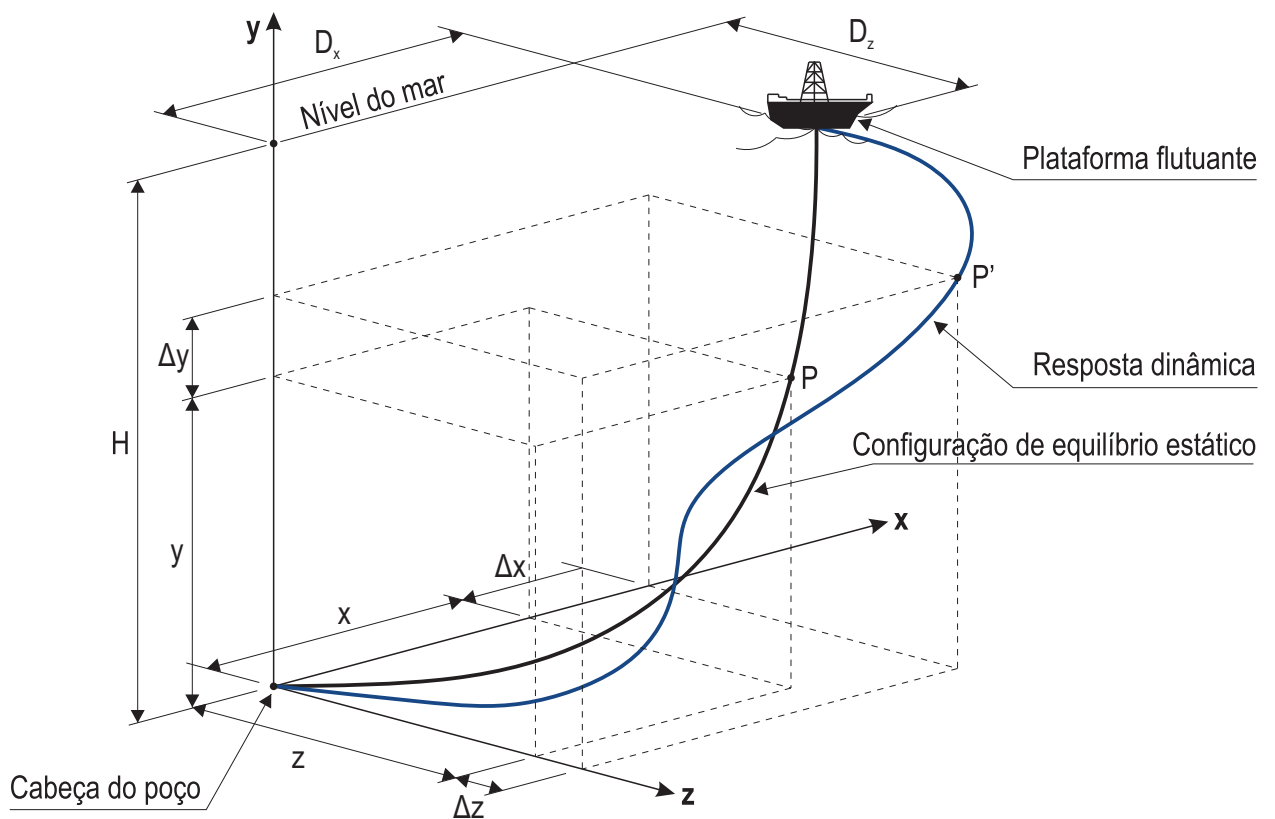
Como mostrado na Figura 5.8, para calcular o desenvolvimento do escoamento no interior do *riser*, a configuração do *riser* deverá ser proporcionada pelo código estrutural a cada instante de tempo, durante toda a simulação. Esta interação computacional será explicada com maior detalhe no Capítulo 7.



## 6 ANÁLISE DINÂMICA ESTRUTURAL

A resposta dinâmica do *riser* flexível, objeto deste estudo, é calculada a partir da sua configuração de equilíbrio estático (ver Figura 6.1). Neste capítulo serão mostradas as equações utilizadas para determinar a configuração de equilíbrio estático do *riser*, assim como também as equações de movimento do *riser* para calcular a sua resposta dinâmica.

Figura 6.1 - Configuração de equilíbrio estático e resposta dinâmica de um *riser* em catenária.



Fonte: Produção do autor

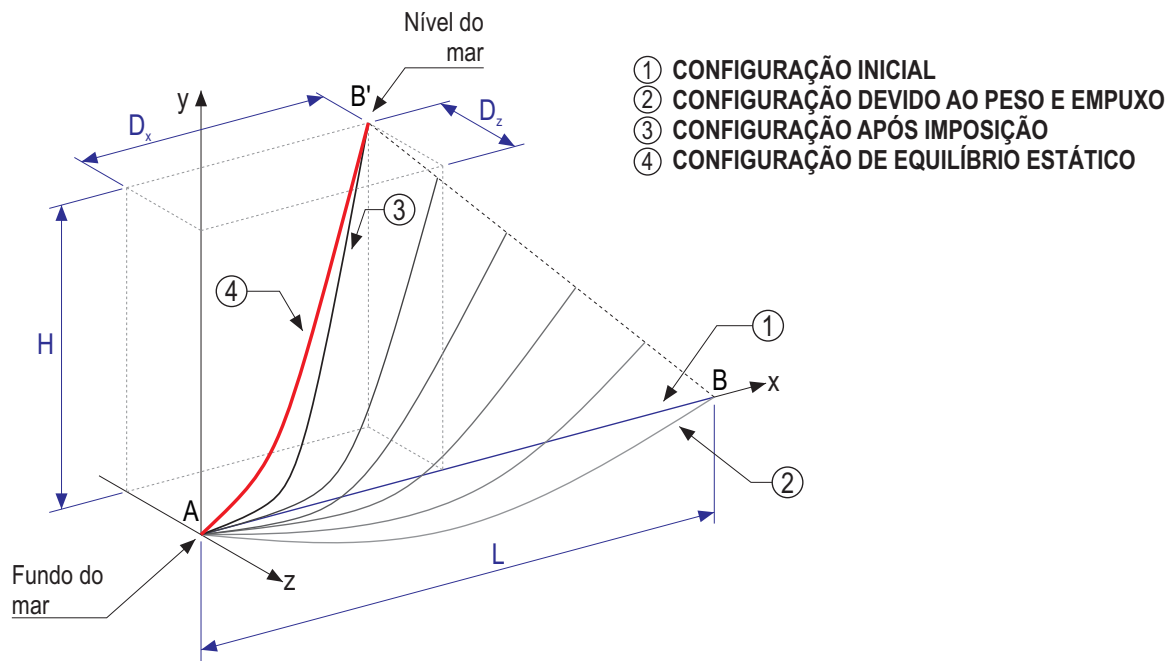
Na Figura 6.1,  $H$  é a profundidade do mar, e  $D_x$  e  $D_z$  são os deslocamentos da plataforma em relação aos eixos  $x$  e  $z$ , respetivamente. As coordenadas  $x$ ,  $y$ , e  $z$  representam a posição de um ponto  $P$  do *riser* na sua configuração de equilíbrio

estático.  $P'$  representa a posição do ponto  $P$  na sua configuração deslocada no instante de tempo  $t$ , e  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ , e  $\Delta z$  são os deslocamentos, nos eixos  $x$ ,  $y$ , e  $z$ , do ponto  $P$ , respectivamente.

### 6.1 Cálculo da configuração de equilíbrio estático

Para calcular a configuração de equilíbrio estático de um *riser* flexível, considera-se que a sua configuração inicial é dada por uma linha horizontal na direção do eixo  $x$ , a qual encontra-se articulada nos extremos A e B, assim como mostrado na Figura 6.2. Assim também, considera-se inicialmente que o *riser* está cheio de líquido no interior (água), porém sem sofrer nenhum deslocamento.

Figura 6.2 - Configurações inicial, final e intermediárias adotadas pelo *riser* durante o cálculo da sua configuração de equilíbrio estático.



Fonte: Produção do autor

O cálculo da configuração de equilíbrio estático é realizada em três etapas, as quais serão listadas a seguir.

1. Etapa 1: A partir da configuração 1, também chamada de configuração

inicial, o *riser* flexível será submetido à ação das forças devidas ao peso próprio da estrutura, ao efeito do peso do líquido no seu interior, e ao efeito do empuxo hidrodinâmico. Devido ao efeito das forças mencionadas, o *riser* adota a configuração 2, vide Figura 6.2.

2. Etapa 2: Uma vez determinada a configuração 2, deslocamentos serão impostos no extremo B do *riser*. Durante esse processo, o extremo B do *riser* é um extremo livre, sem restrições, enquanto que o extremo A permanece fixo. Na Figura 6.2, a linha tracejada definida pelos pontos B e B' representa o caminho que o extremo livre B percorre até atingir a configuração 3 do *riser*.
3. Etapa 3: Após a imposição de deslocamentos no extremo B, as forças devidas à correnteza serão aplicadas sobre o *riser* flexível, dando como resultado a configuração 4, a qual é a de equilíbrio estático.

Na análise estática, as configurações que adota o *riser*, após cada uma das três etapas mencionadas, são obtidas a partir da solução da seguinte equação de equilíbrio:

$$\mathbf{P} - \mathbf{Q} = \mathbf{0} \tag{6.1}$$

onde o vetor  $\mathbf{P}$  enumera as forças externas aplicadas sobre os nós da estrutura, e o vetor  $\mathbf{Q}$  enumera as forças internas atuantes sobre os nós da estrutura. O vetor de forças externas  $\mathbf{P}$  é devido ao efeito das forças independentes do tempo: peso próprio da estrutura, peso do líquido no interior do *riser*, empuxo, e forças de arrasto devidas à correnteza. Para o cálculo do vetor  $\mathbf{P}$ , os carregamentos externos serão concentrados em cada um dos nós do *riser*, mediante à aplicação do método dos elementos finitos (vide Apêndice B).

Para solucionar a Equação (6.1) o método incremental iterativo de Newton-Raphson para forças seguidoras será utilizado (vide Figura 6.3). Entende-se por forças seguidoras aquelas que, por sua definição, dependem dos deslocamentos da estrutura sobre a qual atuam. As equações a solucionar, por meio do uso do método de Newton-Raphson, são as seguintes:

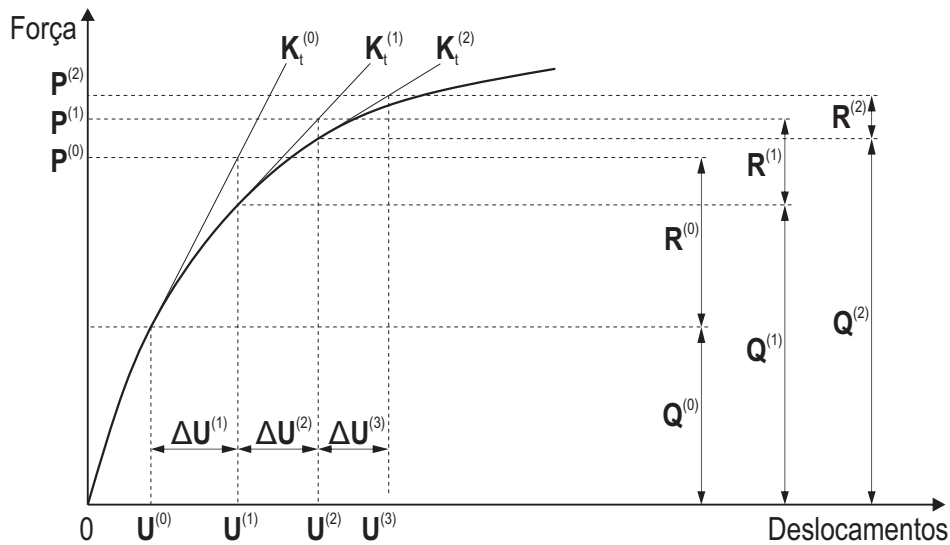
$$\mathbf{R}^{(i-1)} = \mathbf{P}^{(i-1)} - \mathbf{Q}^{(i-1)} \quad (6.2)$$

$$\mathbf{K}_t^{(i-1)} \Delta \mathbf{U}^{(i)} = \mathbf{R}^{(i-1)} \quad (6.3)$$

$$\mathbf{U}^{(i)} = \mathbf{U}^{(i-1)} + \Delta \mathbf{U}^{(i)} \quad (6.4)$$

onde  $\Delta \mathbf{U}$  representa a variação do vetor global de deslocamentos nodais,  $\mathbf{K}_t$  é a matriz de rigidez tangente da estrutura, e  $\mathbf{R}$  representa o vetor de forças residuais. Os sobrescritos indicam os números de iteração de cada uma das variáveis. O vetor de forças internas  $\mathbf{Q}$  é obtido a partir da montagem dos vetores de forças internas  $\mathbf{q}$  de cada elemento do *riser*. O cálculo do vetor  $\mathbf{q}$  foi realizado no capítulo 3. O cálculo do vetor de forças externas  $\mathbf{P}$  é mostrado no Apêndice B. O procedimento pelo método Newton-Raphson é mostrado na Figura 6.3.

Figura 6.3 - Método iterativo de Newton-Raphson para forças seguidoras.



Fonte: Produção do autor

Para solucionar a Equação (6.3) precisamos de definir as condições de contorno do problema. As condições de contorno utilizadas no cálculo da configuração de equilíbrio do *riser* são mostradas a seguir:

1. Configuração 1  $\rightarrow$  Configuração 2: Extremos A e B articulados.

$$\mathbf{d}_A = \mathbf{0} \quad , \quad \mathbf{d}_B = \mathbf{0} \quad (6.5)$$

2. Configuração 2  $\rightarrow$  Configuração 3: Extremo A articulado e extremo B livre.

$$\mathbf{d}_A = \mathbf{0} \quad (6.6)$$

3. Configuração 3  $\rightarrow$  Configuração 4: Extremos A e B articulados.

$$\mathbf{d}_A = \mathbf{0} \quad , \quad \mathbf{d}_B = \mathbf{0} \quad (6.7)$$

onde  $\mathbf{d}_A$  e  $\mathbf{d}_B$  representam os vetores de deslocamentos dos pontos A e B da Figura 6.2, respectivamente (vide Figura 3.5).

## 6.2 Análise dinâmica estrutural

As equações de movimento do elemento de *riser* serão obtidas a partir da aplicação do princípio estendido de Hamilton, o qual é dado pela seguinte expressão:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (K - E + W) dt = 0 \quad (6.8)$$

onde  $K$  é a energia cinética,  $E$  é a energia interna do elemento, e  $W$  é o trabalho realizado por todas as forças atuantes sobre o elemento de *riser*. Aplicando o operador variacional a cada um dos termos dentro do parêntese da Equação (6.8), e após aplicar o método dos elementos finitos, a seguinte equação é obtida:

$$\mathbf{M}_{\text{ris}} \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{Q}(\mathbf{U}) = \mathbf{P} \quad (6.9)$$

Na Equação (6.9),  $\mathbf{M}_{\text{ris}}$  é a matriz de massa do *riser*,  $\mathbf{Q}$  é o vetor de forças internas, e  $\mathbf{P}$  é o vetor de forças externas global aplicadas nos nós da estrutura.  $\mathbf{U}$ ,  $\dot{\mathbf{U}}$ , e  $\ddot{\mathbf{U}}$  são os vetores de deslocamentos nodais, velocidade nodais, e acelerações nodais, respetivamente. O procedimento para obter a Equação (6.9) a partir da Equação (6.8), assim como o método dos elementos finitos, são mostrados no Apêndice B.

Para o cálculo do vetor  $\mathbf{P}$  são consideradas as forças de natureza estática: peso do

*riser*, peso do fluido e o empuxo hidrodinâmico, assim como também as forças devidas à aceleração do escoamento interno,  $\mathbf{P}_{esc}$ , e as forças devidas à correnteza,  $\mathbf{P}_{mor}$ . A seguir serão calculadas os vetores de forças devidos à aceleração do escoamento interno e à correnteza.

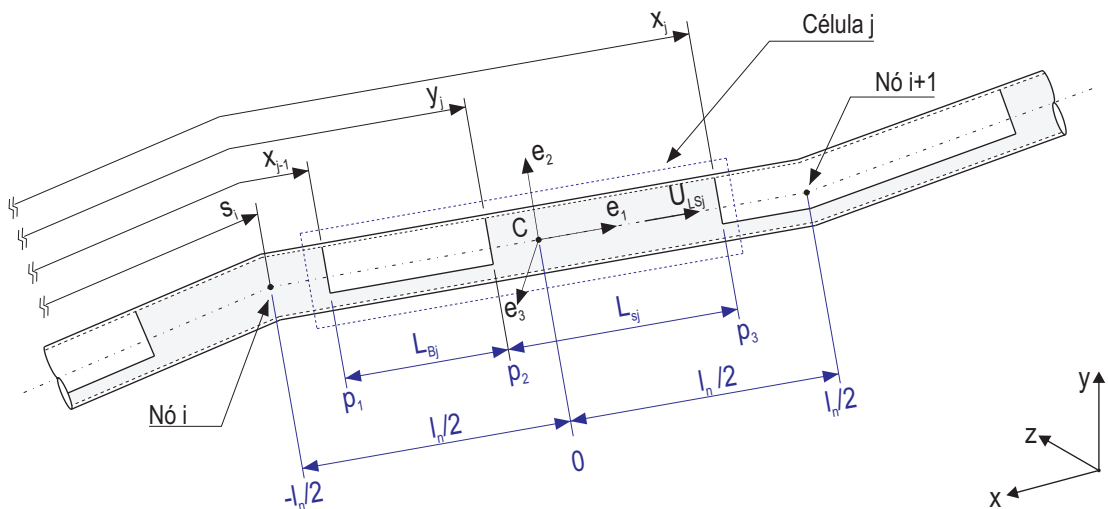
### 6.2.1 Vetor de forças devido ao escoamento interno

Para o cálculo do vetor de forças devido à dinâmica do escoamento interno,  $\mathbf{P}_{esc}$ , primeiro será calculado o vetor  $\mathbf{p}_{esc}$ , o qual corresponde a um elemento de *riser*. O vetor  $\mathbf{p}_{esc}$  será calculado a partir da expressão da força por unidade de comprimento devido à aceleração do escoamento interno, a qual é dada pela Equação (2.37) e é escrita aqui por conveniência:

$$\mathbf{f}_f = -\rho_L A_{int} \left[ \mathbf{a}_{rel} + \ddot{\mathbf{R}}_c + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}_{rel} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \right] \quad (2.37)$$

onde  $\ddot{\mathbf{R}}_c$  é a aceleração do ponto C, o qual é ponto médio do elemento de *riser* e origem do sistema de coordenadas co-rotacional. A Figura 6.4 mostra a *j*-ésima célula unitária de escoamento deslocando-se a través do *i*-ésimo elemento de *riser*.

Figura 6.4 - Escoamento em golfadas se movimentando ao longo de um elemento de *riser*.



Fonte: Produção do autor

Na Figura 6.4, a bolha de gás do escoamento, no sistema de coordenadas local, é definida pelas coordenadas  $p_1$  e  $p_2$ , enquanto o pistão de líquido é definido pelas coordenadas  $p_2$  e  $p_3$ . Como já foi mencionado anteriormente,  $x_j$  e  $y_j$  indicam a frente do pistão e a frente da bolha de gás, respectivamente, enquanto que  $S_i$  indica o comprimento do *riser* até o nó  $i$ .

A seguir será calculado o vetor de forças devido à aceleração  $\ddot{\mathbf{R}}_c$ , na Equação (2.37), que contribui à matriz de massa do sistema, e o qual será definido como  $\mathbf{p}_{\text{int}}$ . Para o cálculo de  $\mathbf{p}_{\text{int}}$  a Equação (B.11) será utilizada, logo tem-se:

$$\mathbf{p}_{\text{int},l} = - \int_{p_1}^{p_2} \mathbf{N}^T \rho_L A_{\text{int}} R_{LBj} \ddot{\mathbf{R}}_{c,l} ds - \int_{p_2}^{p_3} \mathbf{N}^T \rho_L A_{\text{int}} \ddot{\mathbf{R}}_{c,l} ds \quad (6.10)$$

onde  $\mathbf{p}_{\text{int},l}$  é o vetor de forças nodais no sistema de coordenadas local, e  $\ddot{\mathbf{R}}_{c,l}$  representa o vetor  $\ddot{\mathbf{R}}_c$  no sistema de coordenadas local. O vetor  $\ddot{\mathbf{R}}_{c,l}$  pode ser expresso da forma seguinte:

$$\ddot{\mathbf{R}}_{c,l} = \ddot{u}_c \mathbf{e}_1 + \ddot{v}_c \mathbf{e}_2 + \ddot{w}_c \mathbf{e}_3 \quad (6.11)$$

onde  $\ddot{u}_c$ ,  $\ddot{v}_c$ , e  $\ddot{w}_c$  representam as acelerações do ponto C nas direções  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$ , e  $\mathbf{e}_3$ , respectivamente. Como C é ponto médio do elemento, os valores de  $\ddot{u}_c$ ,  $\ddot{v}_c$ , e  $\ddot{w}_c$  podem ser aproximados como:

$$\ddot{\mathbf{R}}_{c,l} = \begin{Bmatrix} \ddot{u}_c \\ \ddot{v}_c \\ \ddot{w}_c \end{Bmatrix} = \mathbf{N}|_{s=0} \cdot \ddot{\mathbf{u}}_l \quad (6.12)$$

onde  $\ddot{\mathbf{u}}_l$  é o vetor de acelerações nodais no sistema de coordenadas local, e  $\mathbf{N}|_{s=0}$  indica a matriz de funções de forma avaliada no ponto  $s = 0$ . Em seguida, substituindo a Equação (6.12) na Equação (6.10) têm-se:

$$\mathbf{p}_{\text{int},l} = - \left( \rho_L A R_{LBj} \int_{p_1}^{p_2} \mathbf{N}^T \mathbf{N}|_{s=0} ds + \rho_L A \int_{p_2}^{p_3} \mathbf{N}^T \mathbf{N}|_{s=0} ds \right) \ddot{\mathbf{u}}_l \quad (6.13)$$

Na sequência, fazendo a transformação de coordenadas de local a global, o vetor  $\mathbf{p}_{\text{int}}$

pode ser obtido a partir da seguinte equação:

$$\mathbf{p}_{\text{int}} = -\mathbf{T} \left( \rho_L A R_{LBj} \int_{p_1}^{p_2} \mathbf{N}^T \mathbf{N} |_{s=0} ds + \rho_L A \int_{p_2}^{p_3} \mathbf{N}^T \mathbf{N} |_{s=0} ds \right) \mathbf{T}^T \ddot{\mathbf{u}} \quad (6.14)$$

onde  $\mathbf{T}$  é a matriz de transformação de coordenadas (definida no Apêndice B), e o termo entre parênteses representa a matriz de massa devida ao escoamento interno no sistema de coordenadas local. Logo, a Equação (6.14) pode ser reescrita como:

$$\mathbf{p}_{\text{int}} = -\mathbf{m}_{\text{int}} \ddot{\mathbf{u}} \quad (6.15)$$

onde  $\mathbf{m}_{\text{int}}$  representa a matriz de massa devida ao escoamento interno no sistema de coordenadas inercial. Logo, fazendo a montagem das matrizes de cada um dos elementos do *riser*, finalmente obtêm-se:

$$\mathbf{P}_{\text{int}} = -\mathbf{M}_{\text{int}} \ddot{\mathbf{U}} \quad (6.16)$$

Seguindo o mesmo procedimento realizado anteriormente, agora será calculado o vetor de forças nodais locais devido à aceleração de Coriolis,  $\mathbf{p}_{\text{cor},l}$ , o qual é dado pela seguinte equação:

$$\mathbf{p}_{\text{cor},l} = - \int_{x_2}^{x_3} \mathbf{N}^T \rho_L A_{\text{int}} (2\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{V}_{\text{rel}}) ds \quad (6.17)$$

onde  $\boldsymbol{\omega}_1$  é o vetor de velocidade angular do sistema de coordenadas co-rotacional, o qual é dado pela Equação (3.75), e  $\mathbf{V}_{\text{rel}}$  é o vetor de velocidade do escoamento expressado no sistema de coordenadas local. No cálculo de  $\mathbf{p}_{\text{cor},l}$ , o efeito produzido pela região da bolha de gás é desprezado. Logo, substituindo a Equação (2.7) na Equação (6.17) obtêm-se:

$$\mathbf{p}_{\text{cor},l} = - \int_{x_2}^{x_3} \mathbf{N}^T \rho_L A_{\text{int}} (-2\mathbf{S}(\mathbf{V}_{\text{rel}}) \boldsymbol{\omega}_1) ds \quad (6.18)$$

onde  $\mathbf{S}(\mathbf{V}_{\text{rel}})$  é a matriz antisimétrica do vetor  $\mathbf{V}_{\text{rel}}$ . Para determinar  $\mathbf{V}_{\text{rel}}$  utiliza-se



a consideração de que o elemento de *riser* pode ser considerado como sendo um elemento de viga reta. Logo, sabendo que a velocidade do líquido na golfada é dado pela variável  $U_{LSj}$ , o vetor  $\mathbf{V}_{\text{rel}}$  pode ser calculado como:

$$\mathbf{V}_{\text{rel}} = U_{LSj} \mathbf{e}_1 \quad (6.19)$$

Uma vez conhecido o vetor  $\mathbf{V}_{\text{rel}}$ , a matriz  $\mathbf{S}(\mathbf{V}_{\text{rel}})$  é calculada a partir da Equação (2.6), dando como resultado:

$$\mathbf{S}(\mathbf{V}_{\text{rel}}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -U_{LSj} \\ 0 & U_{LSj} & 0 \end{bmatrix} \quad (6.20)$$

Logo, substituindo a Equação (3.75) na Equação (6.21) obtem-se a seguinte equação:

$$\mathbf{p}_{\text{cor},1} = 2\rho_L A_{\text{int}} \int_{x_2}^{x_3} \mathbf{N}^T \mathbf{S}(\mathbf{V}_{\text{rel}}) \mathbf{G} ds \quad \dot{\mathbf{u}} \quad (6.21)$$

onde a matriz  $\mathbf{G}$  é dada pela Equação (3.74). Em seguida, será transformado o vetor  $\mathbf{p}_{\text{cor},1}$  ao sistema de coordenadas global mediante o uso da matriz de transformação  $\mathbf{T}$ , da seguinte forma:

$$\mathbf{p}_{\text{cor}} = \left[ \mathbf{T} \left( 2\rho_L A_{\text{int}} \int_{x_2}^{x_3} \mathbf{N}^T \mathbf{S}(\mathbf{V}_{\text{rel}}) \mathbf{G} ds \right) \right] \dot{\mathbf{u}} \quad (6.22)$$

onde o termo entre colchetes é a matriz de amortecimento devido à aceleração de Coriolis. Logo, a Equação (6.22) pode ser reescrita como:

$$\mathbf{p}_{\text{cor}} = \mathbf{c}_{\text{cor}} \dot{\mathbf{u}} \quad (6.23)$$

Finalmente, fazendo a montagem das matrizes de cada um dos elementos do *riser*, conclui-se:

$$\mathbf{P}_{\text{cor}} = \mathbf{C}_{\text{cor}} \dot{\mathbf{U}} \quad (6.24)$$

onde a matriz  $\mathbf{C}_{\text{cor}}$  é a matriz de amortecimento global devido à aceleração de Coriolis, a qual é chamada de matriz giroscópica. É importante mencionar que a matriz giroscópica só tem um efeito considerável sobre *risers* flexíveis a altas velocidades do escoamento interno. Este efeito foi estudado por Meléndez (2015), no seu estudo sobre a influência da matriz giroscópica sobre as frequências de vibração lineares de um *riser* em catenária com escoamento interno, onde o autor conclui que para um *riser* em catenária de 300 metros de comprimento a matriz giroscópica tem um efeito importante só para velocidades do escoamento interno por cima de 25 m/s.

Logo, o vetor de forças devida a aceleração do escoamento interno pode ser expresso da seguinte forma:

$$\mathbf{P}_{\text{esc}} = \mathbf{P}_{\text{int}} + \mathbf{P}_{\text{cor}} + \bar{\mathbf{P}}_{\text{esc}} \quad (6.25)$$

onde  $\bar{\mathbf{P}}_{\text{esc}}$  representa o vetor de forças devido aos termos restantes da aceleração do escoamento interno na Equação (2.37). Substituindo as Equações (6.16) e (6.24) na Equação (6.25), obtem-se:

$$\mathbf{P}_{\text{esc}} = -\mathbf{M}_{\text{int}}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}_{\text{cor}}\dot{\mathbf{U}} + \bar{\mathbf{P}}_{\text{esc}} \quad (6.26)$$

É importante mencionar que os vetores  $\mathbf{p}_{\text{int}}$  e  $\mathbf{p}_{\text{cor}}$ , Equações (6.15) e (6.23), respectivamente, foram calculados considerando só uma célula unitária do escoamento. No caso de haver mais células unitárias dentro do elemento de *riser*, as contribuições de cada uma das células deverão ser calculadas e somadas aos vetores  $\mathbf{p}_{\text{int}}$  e  $\mathbf{p}_{\text{cor}}$ .

### 6.2.2 Vetor de forças devido à correnteza

Para o cálculo do vetor de forças devido à correnteza  $\mathbf{P}_{\text{mor}}$ , adotaremos o procedimento realizado na seção anterior. Para isso, será determinado o vetor de forças devido à correnteza para um elemento de *riser*, a qual será identificada com a variável  $\mathbf{p}_{\text{mor}}$ . O vetor  $\mathbf{p}_{\text{mor}}$  será calculado a partir da expressão da força por unidade de comprimento devido à correnteza, a qual é dada pela Equação (2.39) e escrita aqui por conveniência

$$f_m = \frac{1}{2}C_D\rho_m D_e |V_{cn} - \dot{u}_n|(V_{cn} - \dot{u}_n) + C_M\rho_m \frac{\pi D_e^2}{4} \dot{V}_{cn} - C_A\rho_m \frac{\pi D_e^2}{4} \ddot{u}_n \quad (2.39)$$

onde  $\ddot{u}_n$  representa a aceleração normal ao eixo do elemento de *riser* e além disso, encontra-se no plano formado pelos vetores  $\mathbf{e}_2$  e  $\mathbf{e}_3$ , vide Figura 2.6.

A seguir será calculado o vetor de forças devido à aceleração  $\ddot{u}_n$ , na Equação (2.39), isto porque ele contribui à matriz de massa do sistema, e o qual será definido como  $\mathbf{p}_{\text{add}}$ . Para o cálculo de  $\mathbf{p}_{\text{add}}$  é necessário expressar a aceleração  $\ddot{u}_n$  no sistema de coordenadas local. Portanto tem-se:

$$\ddot{\mathbf{u}}_n = \begin{Bmatrix} 0 \\ \ddot{v} \\ \ddot{w} \end{Bmatrix} = \mathbf{N}_1 \ddot{\mathbf{u}}_l \quad (6.27)$$

onde as componentes  $\ddot{v}$  e  $\ddot{w}$  são as componentes da aceleração normal ao eixo do elemento de *riser* nas direções  $\mathbf{e}_2$  e  $\mathbf{e}_3$ , respectivamente, e a matriz  $\mathbf{N}_1$  é uma matriz de funções de forma a qual é dada pela seguinte expressão:

$$\mathbf{N}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_3 & 0 & 0 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & 0 & 0 & N_6 \\ 0 & 0 & N_7 & 0 & N_8 & 0 & 0 & 0 & N_9 & 0 & N_{10} & 0 \end{bmatrix} \quad (6.28)$$

Assim, utilizando a Equação (B.11), o vetor  $\mathbf{p}_{\text{add},l}$  pode ser calculado como:

$$\mathbf{p}_{\text{add},l} = - \int_{-l_n/2}^{l_n/2} \mathbf{N}^T C_A \rho_m A_{\text{ext}} \begin{Bmatrix} 0 \\ \ddot{v} \\ \ddot{w} \end{Bmatrix} ds \quad (6.29)$$

onde  $l_n$  é o comprimento do elemento de *riser*. Logo, substituindo a Equação (6.27) na Equação (6.29) obtêm-se:

$$\mathbf{p}_{\text{add},l} = - \int_{-l_n/2}^{l_n/2} \mathbf{N}^T C_A \rho_m A_{\text{ext}} \mathbf{N}_1 ds \quad \ddot{\mathbf{u}}_L \quad (6.30)$$

Em seguida, fazendo a transformação de coordenadas de local a global, e sabendo que  $C_A$ ,  $\rho_m$  e  $A_{\text{ext}}$  são constantes, obtêm-se a seguinte equação:

$$\mathbf{p}_{\text{add}} = -\mathbf{T} \left( C_A \rho_m A_{\text{ext}} \int_{-l_n/2}^{l_n/2} \mathbf{N}^T \mathbf{N}_1 ds \right) \mathbf{T}^T \ddot{\mathbf{u}} \quad (6.31)$$

onde o termo entre parênteses representa a matriz de massa do elemento de *riser* devida à correnteza no sistema de coordenadas local. Logo, a Equação (6.31) pode ser reescrita como:

$$\mathbf{p}_{\text{add}} = -\mathbf{m}_{\text{add}} \ddot{\mathbf{u}} \quad (6.32)$$

onde a matriz  $\mathbf{m}_{\text{add}}$  é a matriz de massa do elemento no sistema de coordenadas inercial. Finalmente, fazendo a montagem das matrizes de cada um dos elementos do *riser* conclui-se:

$$\mathbf{P}_{\text{add}} = -\mathbf{M}_{\text{add}} \ddot{\mathbf{U}} \quad (6.33)$$

Logo, o vetor de forças devido à correnteza pode ser expresso da seguinte forma:

$$\mathbf{P}_{\text{mor}} = \mathbf{P}_{\text{add}} + \bar{\mathbf{P}}_{\text{mor}} \quad (6.34)$$

onde  $\bar{\mathbf{P}}_{\text{mor}}$  representa o vetor de forças devido aos termos restantes da força por unidade de comprimento na Equação (2.39). Substituindo a Equação (6.33) na Equação (6.34), obtem-se:

$$\mathbf{P}_{\text{mor}} = -\mathbf{M}_{\text{add}} \ddot{\mathbf{U}} + \bar{\mathbf{P}}_{\text{mor}} \quad (6.35)$$

O vetor  $\mathbf{P}$ , na Equação (6.9) é dado pela seguinte equação:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_{\text{est}} + \mathbf{P}_{\text{esc}} + \mathbf{P}_{\text{mor}} \quad (6.36)$$

onde  $\mathbf{P}_{\text{est}}$  é o vetor de forças devido aos carregamentos de natureza estática. Logo, substituindo as Equações (6.36), (6.26) e (6.35) na Equação (6.9) tem-se:

$$\mathbf{M}_{\text{ris}}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{M}_{\text{add}}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{M}_{\text{int}}\ddot{\mathbf{U}} - \mathbf{C}_{\text{cor}}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{Q}(\mathbf{U}) = \mathbf{P}_{\text{est}} + \bar{\mathbf{P}}_{\text{esc}} + \bar{\mathbf{P}}_{\text{mor}} \quad (6.37)$$

Finalmente, agrupando termos e considerando a matriz de amortecimento estrutural,  $\mathbf{C}_{\text{str}}$ , a qual é modelada pelo amortecimento de Rayleigh, a Equação (6.37), para qualquer instante de tempo  $t$ , pode ser reescrita como:

$$\mathbf{M}_t\ddot{\mathbf{U}}_t + \mathbf{C}_t\dot{\mathbf{U}}_t + \mathbf{Q}_t(\mathbf{U}_t) = \bar{\mathbf{P}}_t \quad (6.38)$$

onde  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  e  $\bar{\mathbf{P}}$  são dadas pelas seguintes expressões:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_{\text{ris}} + \mathbf{M}_{\text{add}} + \mathbf{M}_{\text{int}} \quad (6.39)$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_{\text{str}} - \mathbf{C}_{\text{cor}} \quad (6.40)$$

$$\bar{\mathbf{P}} = \mathbf{P}_{\text{est}} + \bar{\mathbf{P}}_{\text{esc}} + \bar{\mathbf{P}}_{\text{mor}} \quad (6.41)$$

A Equação (6.38) tem como condições iniciais no tempo  $t = 0$  as seguintes relações:

$$\mathbf{U}_{t=0} = \mathbf{U}_0 = \mathbf{0} \quad \text{and} \quad \dot{\mathbf{U}}_{t=0} = \dot{\mathbf{U}}_0 = \mathbf{0} \quad (6.42)$$

### 6.3 Métodos de solução

Para o cálculo da resposta dinâmica, a qual será obtida a partir da solução da Equação (6.38), será utilizado o método HHT (Hilber-Hughes-Taylor), enquanto que para a solução das equações de equilíbrio não-linear, o método iterativo Newton-Raphson será utilizado.

#### 6.3.1 Método de Newton-Raphson

O esquema iterativo Newton-Raphson é implementado de acordo com o procedimento proposto por [Chopra \(2012\)](#).

1. Definição/inicialização das variáveis:

1.1. Inicializar o vetor de deslocamentos na configuração atual.

$$\mathbf{U}_{t+\Delta t}^{(0)} = \mathbf{U}_t \quad (6.43)$$

1.2. Inicializar o vetor de forças internas na configuração atual.

$$\mathbf{Q}_{t+\Delta t}^{(0)} = \mathbf{Q}_t \quad (6.44)$$

1.3. Inicializar o vetor de forças externas na configuração atual.

$$\mathbf{P}_{t+\Delta t}^{(0)} = \mathbf{P}_t \quad (6.45)$$

1.4. Cálculo do vetor de cargas residuais  $\mathbf{R}^{(0)}$  na configuração atual.

$$\mathbf{R}^{(0)} = \mathbf{P}_{t+\Delta t}^{(0)} - \mathbf{Q}_{t+\Delta t}^{(0)} \quad (6.46)$$

2. Cálculo para cada iteração  $i = 1, 2, 3, \dots$

2.1. Cálculo da matriz de rigidez tangente  $\mathbf{K}_T^{(i-1)}$ .

2.2. Cálculo do vetor de incrementos dos deslocamentos  $\Delta\mathbf{U}^{(i)}$  a partir da seguinte equação

$$\mathbf{K}_T^{(i-1)}\Delta\mathbf{U}^{(i)} = \mathbf{R}^{(i-1)} \quad (6.47)$$

No cálculo do vetor de incrementos do deslocamento, as condições de contorno são impostas por suportes fixos nos extremos do *riser*. Os suportes fixos permitem só deslocamentos rotacionais.

2.3. Cálculo do vetor de deslocamentos nodais atualizado  $\mathbf{U}^{(i)}$

$$\mathbf{U}_{t+\Delta t}^{(i)} = \mathbf{U}_{t+\Delta t}^{(i-1)} + \Delta\mathbf{U}^{(i)} \quad (6.48)$$

2.4. Cálculo da configuração atualizada do *riser* utilizando  $\mathbf{U}_{t+\Delta t}^{(i)}$ . A partir da configuração atualizada, o vetor de força internas atualizado  $\mathbf{Q}_{t+\Delta t}^{(i)}$  e o vetor de forças externas atualizado  $\mathbf{P}_{t+\Delta t}^{(i)}$  são calculados.

2.5. Cálculo do vetor de cargas residuais  $\mathbf{R}^{(i)}$  a partir da equação

$$\mathbf{R}^{(i)} = \mathbf{P}_{t+\Delta t}^{(i)} - \mathbf{Q}_{t+\Delta t}^{(i)} \quad (6.49)$$

2.6. Verificar a convergência por meio da Equação (6.58). Se o critério de convergência for satisfeito, o processo iterativo termina neste passo.

Se o critério de convergência não for satisfeito o processo iterativo continua.

3. Repetição para a próxima iteração. Substituir  $i$  por  $i + 1$  e repetir os passos 2.1 a 2.6.

### 6.3.2 Método Hilber-Hughes-Taylor - HHT

O método Hilber-Hughes-Taylor, implementado neste trabalho, é baseado no procedimento apresentado por Mourelle (1993). Para este trabalho, algumas modificações foram consideradas na implementação do método HHT, isto porque a matriz de massa do fluido interno varia através do tempo. O procedimento para a solução da Equação (6.38) é apresentado a seguir.

1. Cálculos iniciais,  $t = 0$ .
  - 1.1. Inicializar os parâmetros  $\mathbf{U}_0$  e  $\dot{\mathbf{U}}_0$ .
  - 1.2. Cálculo dos seguintes vetores e matrizes:  $\mathbf{M}_0$ ,  $\mathbf{K}_{T0}$ ,  $\mathbf{C}_0$ ,  $\mathbf{Q}_0$ , e  $\bar{\mathbf{P}}_0$ .
  - 1.3. Cálculo de  $\ddot{\mathbf{U}}_0$  a partir da solução da Equação (6.38), para  $t = 0$ .
  - 1.4. Seleção do passo de tempo  $\Delta t$ .
  - 1.5. Seleção das variáveis  $\alpha$ ,  $\gamma$ , e  $\beta$ .
  - 1.5. Cálculo das constantes:  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$ ,  $a_4$  e  $a_5$ .

$$a_0 = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \quad , \quad a_1 = \frac{\gamma}{\beta \Delta} \quad , \quad a_2 = \frac{1}{\beta \Delta} \quad (6.50)$$

$$a_3 = \frac{1}{2\beta} - 1 \quad , \quad a_4 = \frac{\gamma}{\beta} - 1 \quad , \quad a_5 = \left( \frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) \Delta t$$

2. Cálculo para cada instante de tempo  $i = 0, 1, 2, 3, \dots$

- 2.1. Inicializar variáveis para  $j = 1$ :

$$\mathbf{U}_{i+1}^{(j)} = \mathbf{U}_i \quad , \quad \dot{\mathbf{U}}_{i+1}^{(j)} = \dot{\mathbf{U}}_i \quad , \quad \ddot{\mathbf{U}}_{i+1}^{(j)} = \ddot{\mathbf{U}}_i \quad , \quad \mathbf{Q}_{i+1}^{(j)} = \mathbf{Q}_i \quad (6.51)$$

- 2.2. Cálculo do vetor de forças externas no tempo  $i$ ,  $\bar{\mathbf{P}}_i$ .

- 2.3. Cálculo do vetor de forças externas no tempo  $i + 1$ ,  $\bar{\mathbf{P}}_{i+1}^{(j)}$ .

2.4. Cálculo da matriz  $\hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{T}}$ , definida pela seguinte equação:

$$\left(\hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{T}}\right)_{i+1}^{(j)} = (1 + \alpha) (\mathbf{K}_{\mathbf{T}})_{i+1}^{(j)} + a_0 \mathbf{M}_i + a_1 \mathbf{C}_i \quad (6.52)$$

3. Para cada iteração  $j = 1, 2, 3, \dots$

3.1. Cálculo do vetor de cargas residuais,  $\mathbf{R}$ , a partir da seguinte equação

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{i+1}^{(j)} = & (1 + \alpha) \left( \bar{\mathbf{P}}_{i+1}^{(j)} - \mathbf{Q}_{i+1}^{(j)} \right) - \alpha \left( \bar{\mathbf{P}}_i - \mathbf{Q}_i \right) + (a_0 \mathbf{M}_i + a_1 \mathbf{C}_i) \mathbf{U}_i \\ & + (a_2 \mathbf{M}_i + a_4 \mathbf{C}_i) \dot{\mathbf{U}}_i + (a_3 \mathbf{M}_i + a_5 \mathbf{C}_i) \ddot{\mathbf{U}}_i - (a_0 \mathbf{M}_i + a_1 \mathbf{C}_i) \mathbf{U}_{i+1} \end{aligned} \quad (6.53)$$

3.2. Cálculo do vetor incremental de deslocamentos nodais  $\Delta \mathbf{U}^{(j)}$ :

$$\left(\hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{T}}\right)_{i+1}^{(j)} \Delta \mathbf{U}^{(j)} = \mathbf{R}_{i+1}^{(j)} \quad (6.54)$$

3.3. Cálculo dos vetores atualizados de deslocamentos nodais, velocidades nodais, e de acelerações nodais.

$$\mathbf{U}_{i+1}^{(j+1)} = \mathbf{U}_{i+1}^{(j)} + \Delta \mathbf{U}^{(j)} \quad (6.55)$$

$$\dot{\mathbf{U}}_{i+1}^{(j+1)} = a_1 \left( \mathbf{U}_{i+1}^{(j+1)} - \mathbf{U}_i \right) - a_4 \dot{\mathbf{U}}_i - a_5 \ddot{\mathbf{U}}_i \quad (6.56)$$

$$\ddot{\mathbf{U}}_{i+1}^{(j+1)} = a_0 \left( \mathbf{U}_{i+1}^{(j+1)} - \mathbf{U}_i \right) - a_2 \dot{\mathbf{U}}_i - a_3 \ddot{\mathbf{U}}_i \quad (6.57)$$

3.4. A partir do passo anterior, podemos calcular a configuração dinâmica atualizada do *riser*. Uma vez conhecida a configuração atualizada do *riser*, podemos determinar  $\mathbf{Q}_{i+1}^{(j+1)}$  e  $\bar{\mathbf{P}}_{i+1}^{(j+1)}$ .

3.5. Verificar a convergência por meio da Equação (6.58). Se o critério de convergência for satisfeito, o processo iterativo termina e imediatamente se pula para o passo 4. Se o critério de convergência não for satisfeito o processo iterativo continua.

3.6. Substituir  $j$  por  $j + 1$  e repetir passos 3.1 a 3.8.

4. Atualizar as matrizes  $\mathbf{M}_{i+1}$ ,  $\mathbf{K}_{i+1}$ , e  $\mathbf{C}_{i+1}$ .



5. Substituir  $i$  por  $i + 1$  e implementar passos 2 a 4 para o próximo passo de tempo.

### 6.3.2.1 CRITÉRIO DE CONVERGÊNCIA

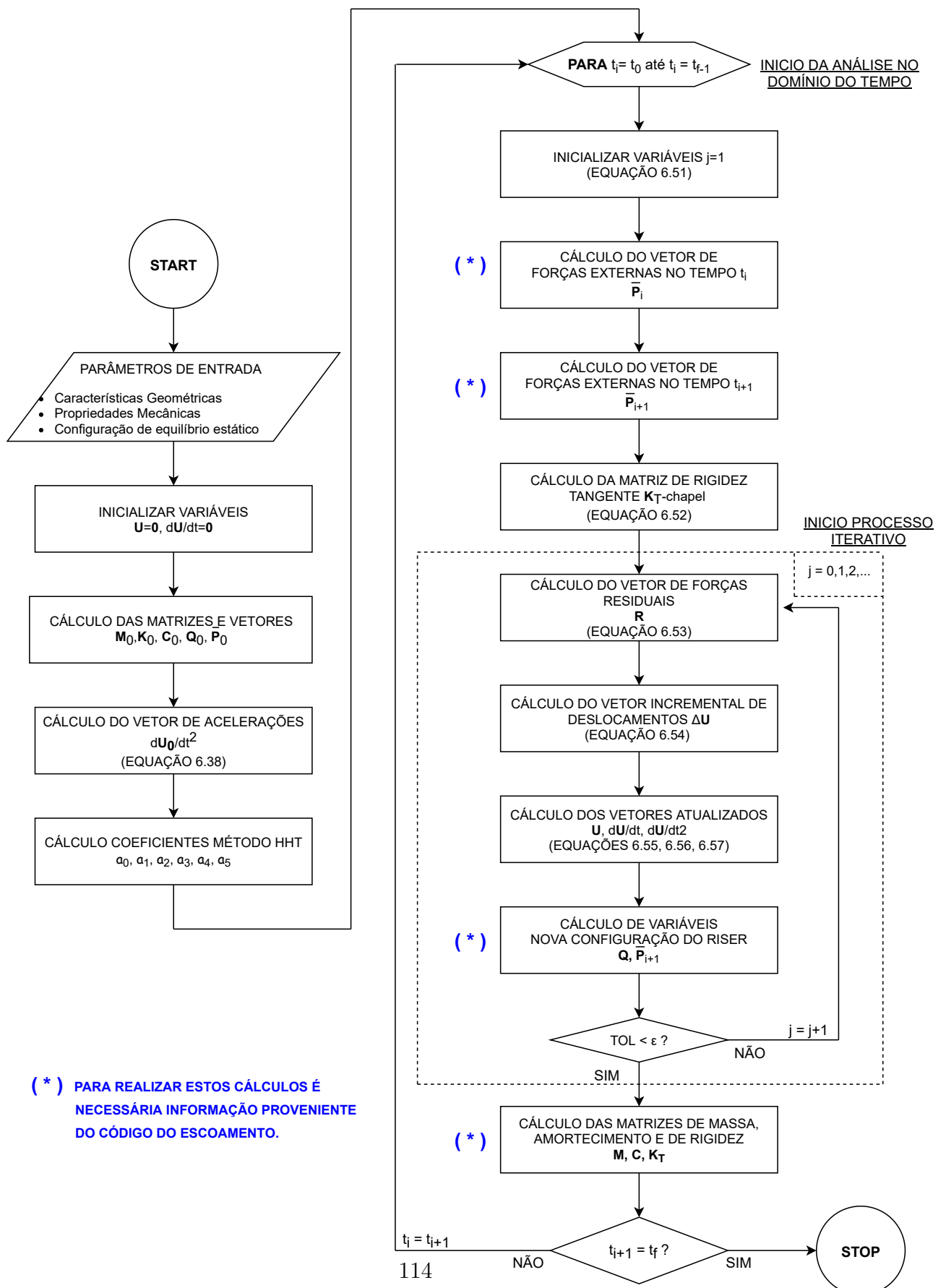
Para a análise dinâmica, utilizaremos o critério de convergência da energia, o qual foi proposto por Bathe (2006). Este critério de convergência compara o incremento de energia interna durante cada iteração (em geral, a quantidade de trabalho feito pelas forças residuais sobre o incremento dos deslocamentos) ao incremento inicial de energia interna. A convergência é atingida quando,

$$\Delta \mathbf{U}^{(j)\text{T}} \mathbf{R}^{(j)} < \epsilon_E \left( \Delta \mathbf{U}^{(1)\text{T}} \mathbf{R}^{(1)} \right) \quad (6.58)$$

onde  $\epsilon_E$  é uma tolerância de energia predefinida. Para este trabalho,  $\epsilon_E = 10^{-12}$ .

A Figura 6.5 mostra o esquema numérico de solução no domínio do tempo.

Figura 6.5 - Esquema numérico de solução para cálculo da resposta dinâmica de risers.



Para o cálculo da resposta dinâmica estrutural do *riser*, é necessária informação do código do escoamento para calcular os vetores de forças externas  $\bar{\mathbf{P}}_i$  e  $\bar{\mathbf{P}}_{i+1}$ , as quais são obtidas a partir da Equação (6.41). A mencionada informação também é necessária para poder realizar o cálculo das matrizes  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{C}$ , dadas pelas Equações (6.39) e (6.40). Esta interação computacional será explicada com maior detalhe no Capítulo 7.

### 6.3.3 Método de Levenberg - Marquardt

Neste trabalho, na primeira etapa de cálculo da configuração de equilíbrio estático do *riser*, especificamente nas primeiras iterações, surgiram dificuldades devido ao mau condicionamento do sistema dado pela Equação (6.3). Para solucionar este tipo de sistema, o método de Levenberg-Marquardt será utilizado.

Considere-se que o sistema de equações não linear dado pela Equação (6.3) é mal condicionado, e o qual pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\mathbf{K}_T \Delta \mathbf{U} - \mathbf{R} = \mathbf{0} \quad (6.59)$$

O método clássico de Levenberg-Marquardt propõe a solução da Equação (6.59),  $\Delta \mathbf{U}$ , por meio da seguinte expressão:

$$\Delta \mathbf{U} = (\mathbf{J}^T \mathbf{J} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{J}^T \mathbf{R} \quad (6.60)$$

onde  $\mathbf{J}$  é a matriz Jacobiana do sistema dado pela Equação (6.59), e a variável  $\lambda$ , a qual é  $\geq 0$ , é a constante de amortecimento de Levenberg-Marquardt. A matriz  $\mathbf{J}$  do sistema é igual a matriz de rigidez tangente  $\mathbf{K}_T$ , logo a Equação (6.60) pode ser reescrita como:

$$\Delta \mathbf{U} = (\mathbf{K}_T^T \mathbf{K}_T + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{K}_T^T \mathbf{R} \quad (6.61)$$

O cálculo da constante de amortecimento  $\lambda$  é feita de forma experimental. Uma das formas é começar testando valores baixos para  $\lambda$  e incrementar gradualmente até obter o valor adequado, o qual pode ser considerado como o primeiro com o qual o sistema fica bem-condicionado. Recomenda-se testar números potências de 10. Para valores altos da variável  $\lambda$ , o sistema definido pela Equação (6.59) pode-se

transformar em um sistema bem condicionado, porém, os resultados obtidos podem ser totalmente errados. Para valores baixos da variável  $\lambda$ , o sistema de equações pode continuar sendo mal-condicionado.

Para determinar se o sistema dado pela Equação (6.59) é mal condicionado, se determina o número de condicionamento da matriz de rigidez  $\mathbf{K}_T$ . Se o número de condicionamento da matriz  $\mathbf{K}_T$  é próximo de 1, dizemos que o sistema dado pela Equação (6.59) é bem condicionado; enquanto que se o valor do número de condicionamento for muito maior que 1, o sistema é mal condicionado.

## 7 FERRAMENTA COMPUTACIONAL SLUGFLEX

A ferramenta computacional SLUGFLEX foi desenvolvida com o objetivo de calcular a resposta dinâmica de *risers* sob o efeito de um escoamento bifásico gás-líquido em padrão golfadas (*slug flow*). Além dos efeitos devidos à dinâmica do escoamento interno, SLUGFLEX também considera os efeitos devidos a uma correnteza, assim como também os efeitos devidos aos deslocamentos verticais da plataforma de produção de petróleo. A ferramenta foi desenvolvida na plataforma de programação MATLAB, versão R2016a.

Este capítulo, no qual são apresentados detalhes da ferramenta computacional, está organizado da seguinte forma. Inicialmente será apresentado o funcionamento da ferramenta. Na sequência, será estudada a interação computacional entre o código estrutural e o código do escoamento, o que nos permitirá entender a forma em que estes trabalham e o tipo de informação que cada um dos códigos precisa do outro para seu correto funcionamento.

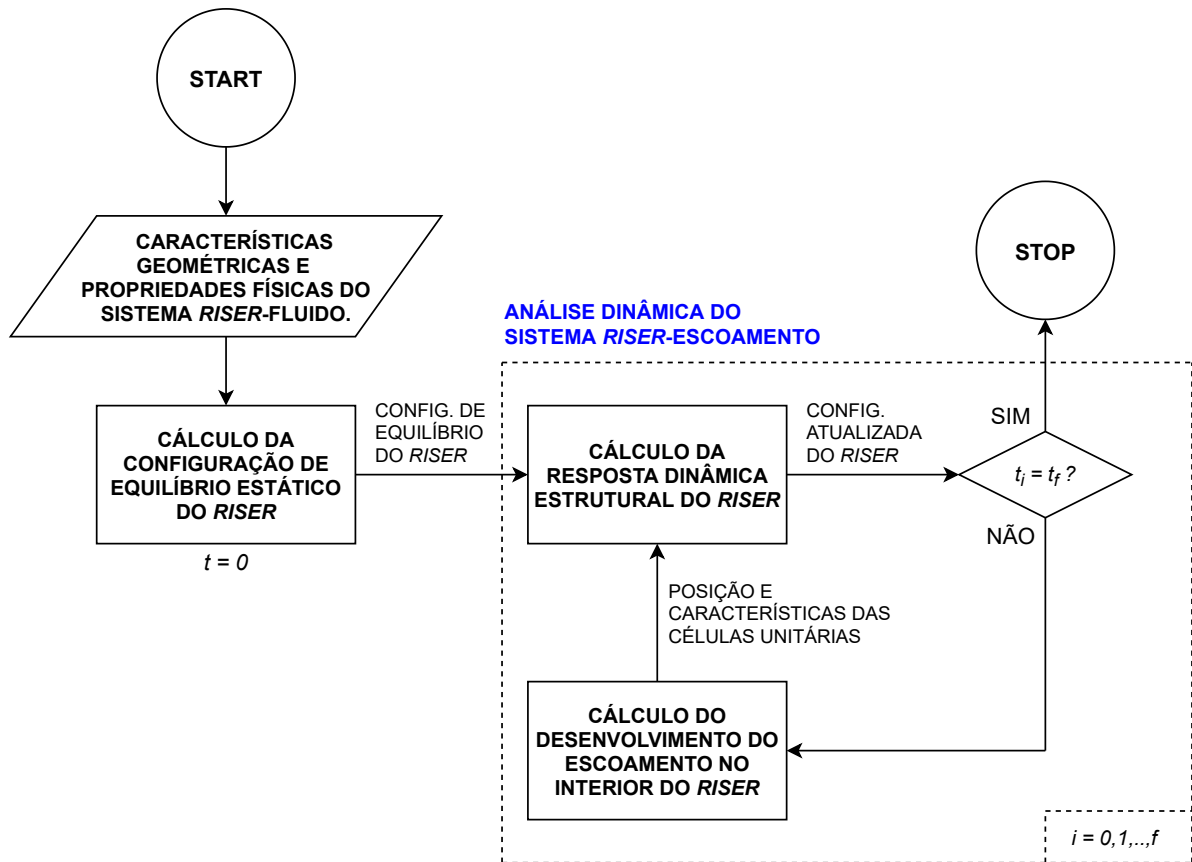
### 7.1 Funcionamento da ferramenta SLUGFLEX

A ferramenta computacional SLUGFLEX foi desenvolvida sobre a base de dois códigos computacionais, cada um dos quais possui uma série de sub-rotinas, as quais são chamadas repetidas vezes durante a execução da ferramenta computacional. Os códigos computacionais que compõem a ferramenta computacional são:

1. Código que calcula a resposta dinâmica estrutural do *riser*. Este código inclui o cálculo da configuração de equilíbrio estático do *riser*.
2. Código que calcula o desenvolvimento do escoamento no interior do *riser*.

Ambos os códigos interagem mediante o envio de informação de um para o outro, e viceversa. Figura 7.1 mostra um fluxograma do funcionamento da ferramenta computacional, a partir do qual pode-se observar a forma em que ambos os códigos trabalham.

Figura 7.1 - Fluxograma do funcionamento da ferramenta SLUGFLEX.



Fonte: Produção do autor

O procedimento que segue a ferramenta SLUGFLEX é descrito a seguir:

1. Inicialmente serão definidas as características geométricas e propriedades físicas do riser de produção, as propriedades físicas das fases líquida e gasosa que compõem o escoamento bifásico gás-líquido, e as características e propriedades físicas da água do mar.
  - Características geométricas e propriedades físicas do riser: comprimento inicial do riser,  $L$ , diâmetro interno,  $D_i$ , diâmetro externo,  $D_e$ , modulo de elasticidade,  $E$ , e massa por unidade de comprimento.
  - Propriedades físicas do escoamento em golfadas: densidade da fase líquida,  $\rho_L$ , densidade da fase gasosa,  $\rho_G$ , velocidade superficial da fase líquida,  $J_L$ , velocidade superficial da fase gasosa,  $J_G$ , viscosidade cine-

mática do líquido,  $\nu_L$ , viscosidade cinemática do gás,  $\nu_G$ , e a frequência do escoamento interno,  $\omega_f$ .

- Características e propriedades físicas da água do mar: densidade da água de mar,  $\rho_m$ , coeficiente de arrasto hidrodinâmico,  $C_D$ , coeficiente de inércia,  $C_M$ , coeficiente de massas adicionadas,  $C_A$ , e a velocidade da superfície do mar,  $v_{sup}$ .
2. Uma vez conhecidas as características e propriedades do sistema, será calculada a configuração de equilíbrio estático do *riser*. É importante mencionar que a configuração de equilíbrio é calculada com o *riser* cheio de líquido no interior. A solução da configuração de equilíbrio estático é explicada na seção 6.1.
  3. Para o cálculo da resposta estrutural dinâmica do *riser*, a configuração de equilíbrio estático será utilizada como condição inicial. A partir desta configuração serão determinadas as novas coordenadas de posição de cada uma das células unitárias no interior do *riser*, assim como também, os novos valores de velocidade do líquido no pistão,  $U_{LS}$ , e de pressão na bolha de gás,  $P_{GB}$ .
  4. Os resultados obtidos no passo anterior serão utilizados para determinar as forças devidas ao escoamento interno no *riser*. Logo, somando os outros efeitos atuantes sobre o *riser* de produção, a configuração de equilíbrio dinâmico será determinada a partir da Equação (6.38).
  5. Em seguida, a nova configuração de equilíbrio é utilizada para calcular o desenvolvimento do escoamento no interior do *riser*, e dessa forma o processo continua até atingir o valor de tempo final de simulação definido pelo usuário, como mostrado na Figura 7.1.

Uma vez conhecido o procedimento geral que segue a ferramenta SLUGFLEX para seu funcionamento, tal como acima descrito, é necessário dar detalhes sobre a interação dos códigos computacionais, o que será apresentado na seguinte seção.

## 7.2 Interação computacional dos códigos

Como já foi explicado, a interação computacional entre o código do escoamento e o código estrutural se dá por meio do envio de informação de um código para o outro. As Figuras 7.2 e 7.3 mostram a forma em que ambos os códigos computacionais interagem.

Figura 7.2 - Interação computacional do código do escoamento e do código estrutural -  
Parte 1 de 2.

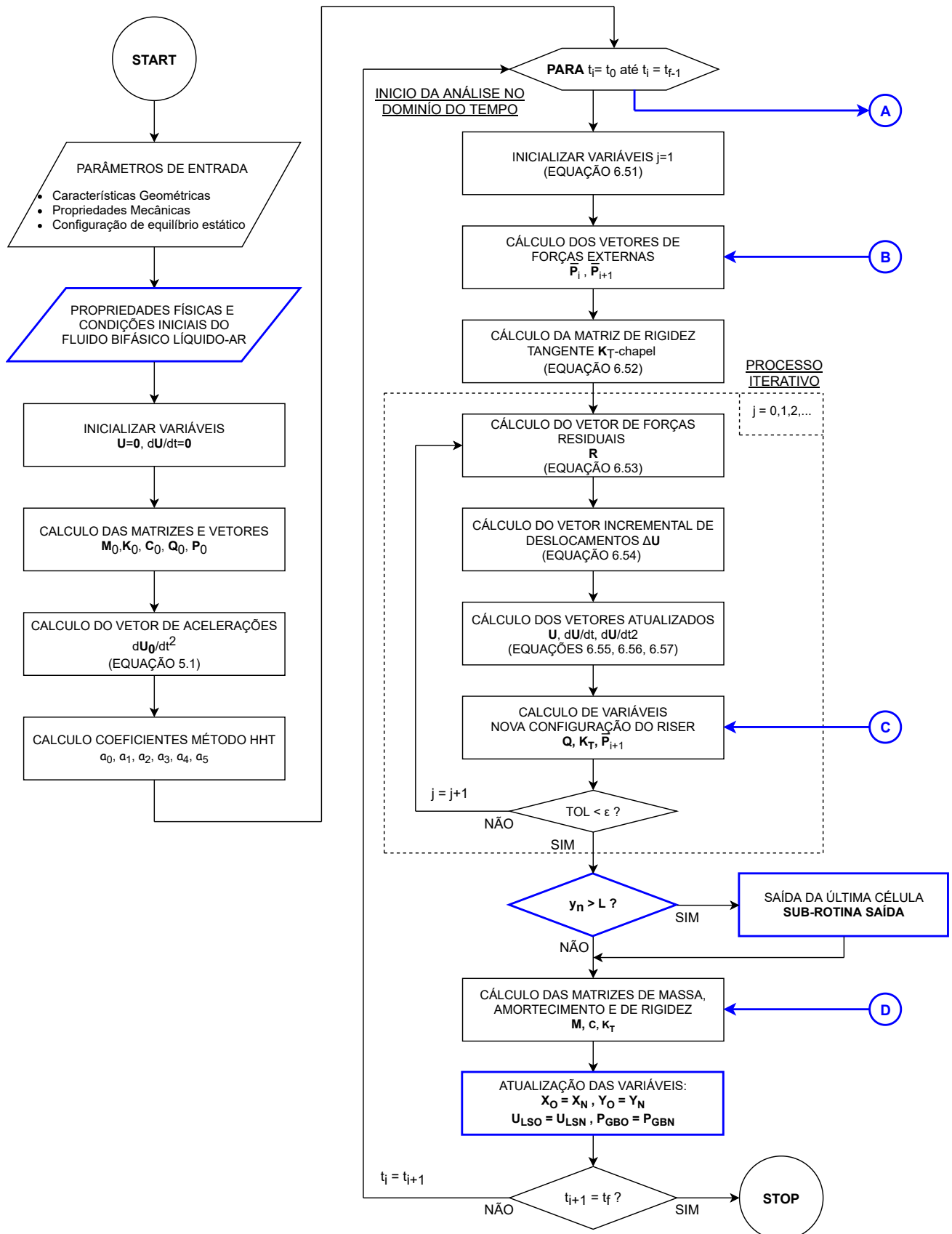
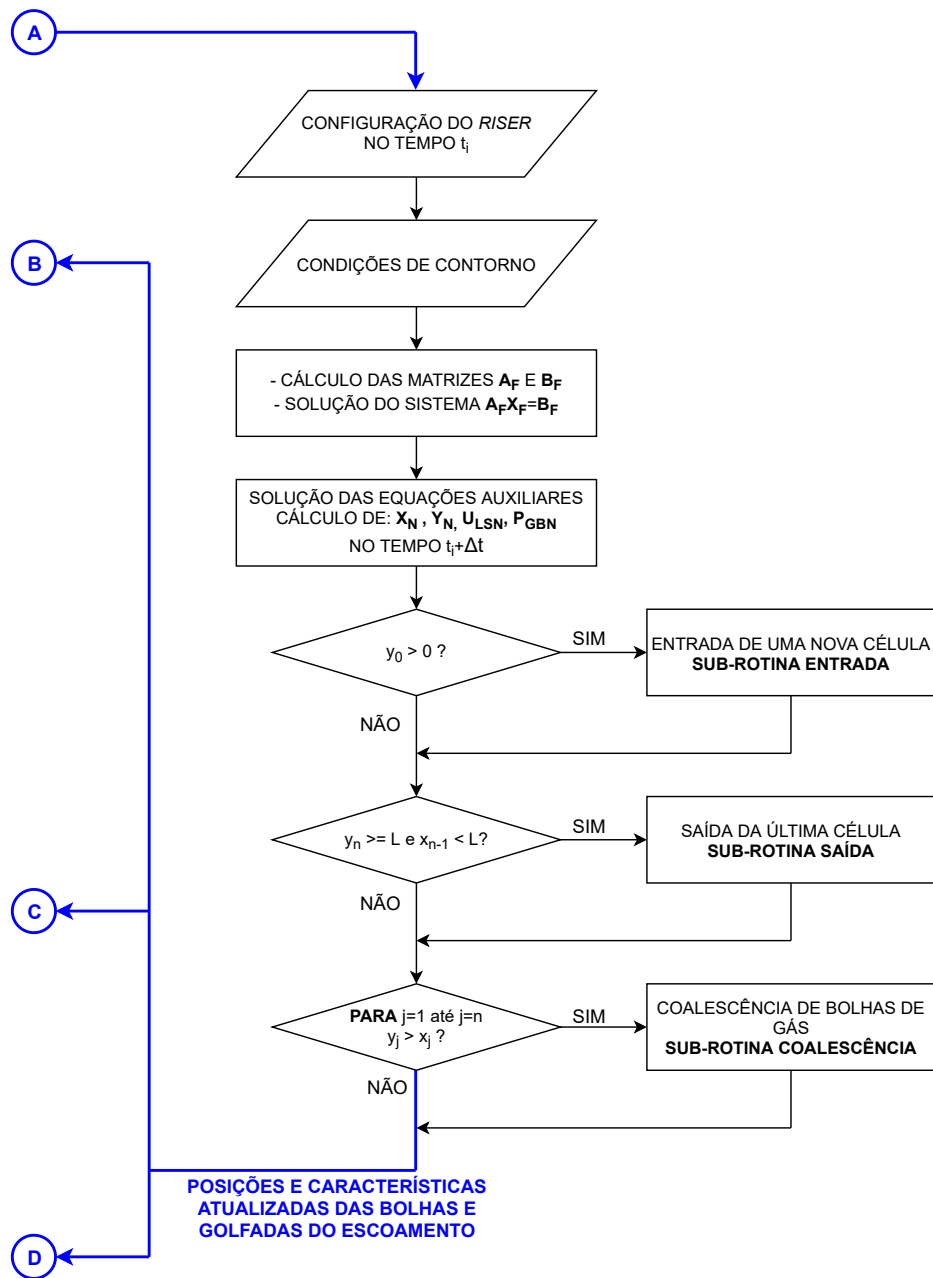




Figura 7.3 - Interação computacional do código do escoamento e do código estrutural - Parte 2 de 2.



Fonte: Produção do autor

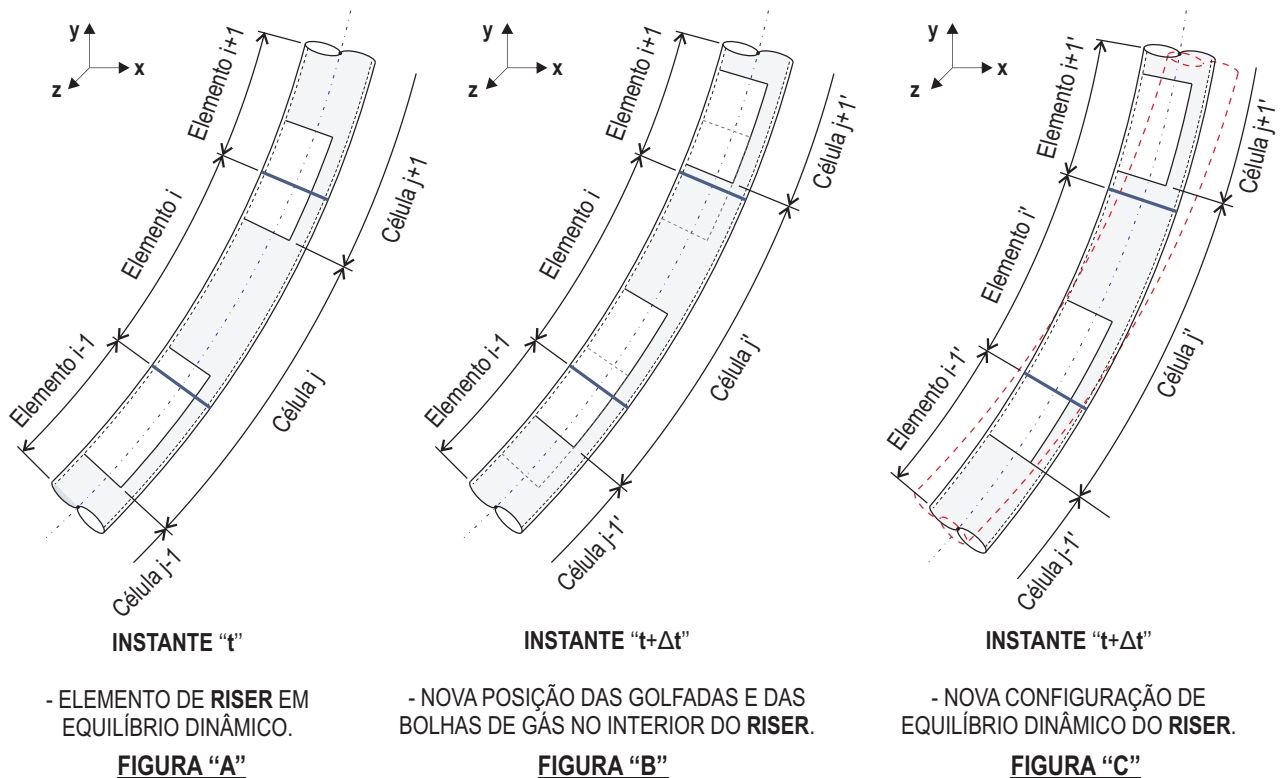
A Figura 6.5 é a base para a elaboração do fluxograma mostrado na Figura 7.2. Neste último, foram adicionados alguns símbolos gráficos relacionados ao código do escoamento, os quais estão em cor azul. Por outro lado, as linhas indicadas com as letras A, B, C e D indicam que as linhas de processo continuam na Figura 7.3.

A Figura 7.3 mostra basicamente o fluxograma do código do desenvolvimento do escoamento em golfadas recebendo e enviando informação ao código estrutural.

A partir da Figura 7.2, a linha azul denotada pela letra A é a linha de processo que inicia o cálculo do desenvolvimento do escoamento em um determinado instante de tempo, mostrado na Figura 7.3. As linhas de processo B, C e D representam informação que envia o código do escoamento ao código estrutural: posição das bolhas de gás e dos pistões de líquido do escoamento em golfadas, assim como as suas correspondentes características; esta informação é utilizada para determinar os vetores de forças externas  $\bar{P}_i$  e  $\bar{P}_{i+1}$ , assim como também as matrizes de massa  $M$ , e de amortecimento  $C$ .

A Figura 7.4 mostra a forma em que a configuração de equilíbrio dinâmico de um elemento de *riser* é obtida.

Figura 7.4 - Interação gráfica dos códigos computacionais.



Fonte: Produção do autor

A partir da Figura 7.4, a letra  $i$  faz referência ao número de elemento finito de *riser*, a letra  $j$  faz referência ao número de célula unitária do escoamento interno, e o sobrescrito ( $'$ ) indica mudanças em relação à configuração no instante de tempo  $t$ .

Inicialmente, tem-se a configuração de equilíbrio dinâmico no instante de tempo  $t$ , Figura 7.4 (A). Após um passo de tempo  $\Delta t$ , as células unitárias do escoamento deslocam-se ao longo do elemento de *riser*, adquirindo novas posições, assim como mostrado na Figura 7.4(B). Durante este processo, considera-se que o elemento de *riser* permanece fixo, sem sofrer deslocamento nem deformações. Por outro lado, é importante destacar que existe uma contribuição por parte da dinâmica do *riser* sob o movimento das células unitárias, a qual é considerada no cálculo das forças hipotéticas, vide Equação (4.42).

Utilizando as novas posições e novas características das células unitárias do escoamento interno, calcula-se a nova configuração de equilíbrio dinâmico do *riser* no instante de tempo  $t + \Delta t$ , assim como mostrado na Figura 7.4(C). Além disso, a Figura mostra a configuração do *riser* no instante de tempo  $t$  em linha segmentada e vermelha, isto com o objetivo de mostrar as mudanças na configuração do *riser*.

Em resumo, o código estrutural envia informação ao código do escoamento no instante de tempo  $t$ . Logo, com essa informação, o código do escoamento determina a nova posição das bolhas e pistões do escoamento interno no instante de tempo  $t + \Delta t$ . Finalmente, com essa última informação, a nova configuração de equilíbrio dinâmico do *riser* é calculada no instante de tempo  $t + \Delta t$ .

A seguir serão listadas as informações que ambos os códigos enviam um ao outro.

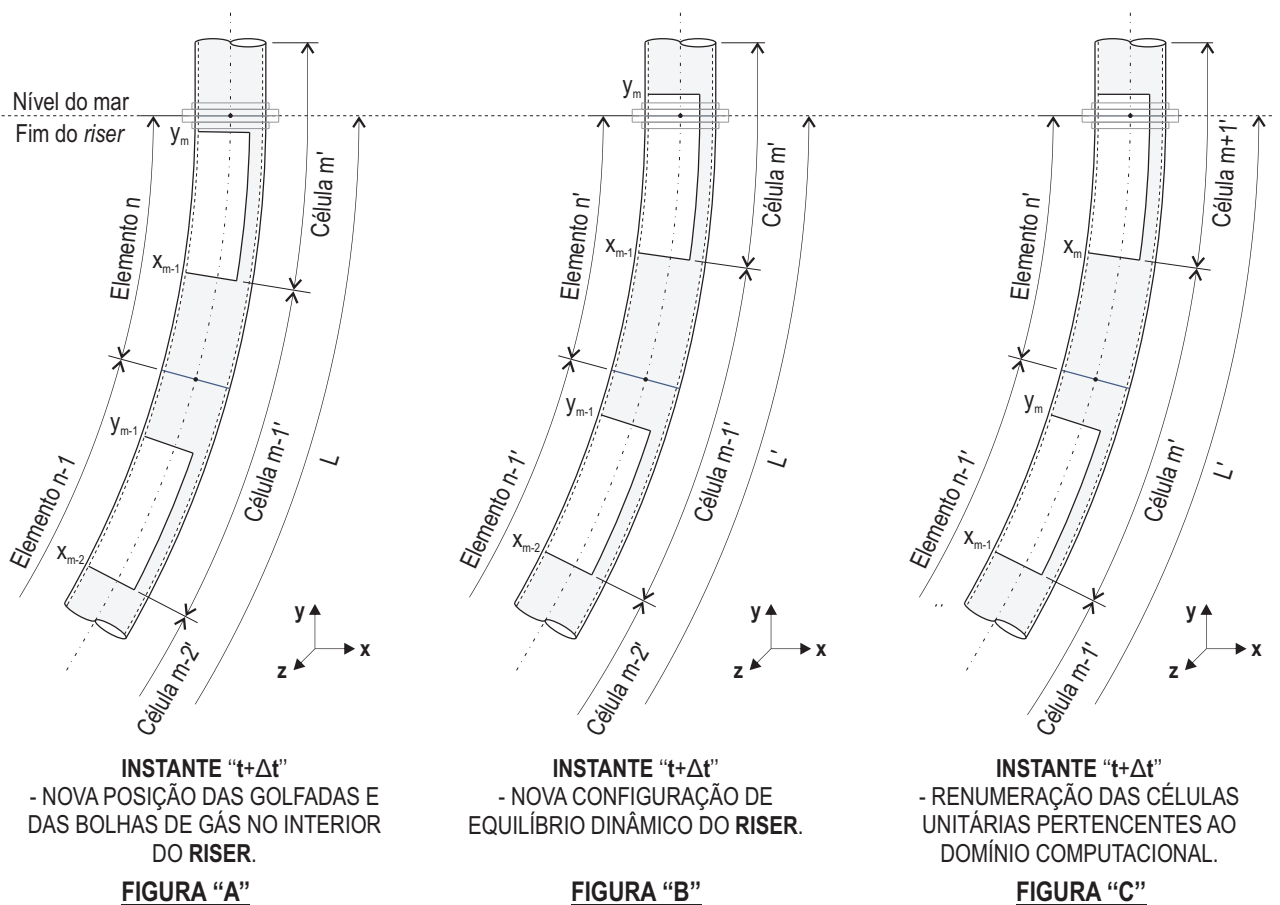
1. Informação enviada pelo código estrutural ao código do escoamento, no instante de tempo  $t$ :
  - 1.1. Coordenadas de posição de cada um dos nós do *riser*.
  - 1.2. Vetor de velocidades nodais do *riser*,  $\dot{\mathbf{U}}$ .
  - 1.3. Vetor de acelerações nodais do *riser*,  $\ddot{\mathbf{U}}$ .
2. Informação enviada pelo código do escoamento ao código estrutural, no instante de tempo  $t + \Delta t$ :
  - 2.1. Velocidade do líquido no pistão de cada célula unitária,  $U_{LSj}$ , para  $j = 0, 1, \dots, m$ .

- 2.2. Pressão da bolha de gás,  $P_{GBj}$ , para  $j = 1, 2, \dots, m$ .
- 2.3. Posição da frente do pistão de líquido,  $x_j$ , para  $j = 0, 1, \dots, m$ .
- 2.4. Posição da frente da bolha de gás,  $y_j$ , para  $j = 0, 1, \dots, m$ .
- 2.5. Altura do filme de líquido de cada uma das células unitárias.

### 7.2.1 Verificação da saída de uma célula

Após o cálculo da configuração de equilíbrio dinâmico do *riser*, deverá ser verificada a ocorrência da saída de uma célula unitária do domínio computacional mais uma vez, a qual pode-se dar sob as condições mostradas na Figura 7.5.

Figura 7.5 - Verificação da saída de uma célula do domínio computacional.



Fonte: Produção do autor

Considere-se que após o desenvolvimento do escoamento em golfadas no interior do *riser*, a frente da bolha de gás da célula  $m$ , a qual é a última célula unitária do domínio computacional, encontre-se perto de sair do domínio computacional, assim como mostrado na Figura 7.5, onde o comprimento do *riser* é dado pela variável  $L$ .

Em seguida, calculando a nova configuração de equilíbrio dinâmico do *riser*, pode ocorrer que o novo comprimento do *riser*,  $L'$ , seja menor que o anterior,  $L' < L$ , dando como resultado que a frente do pistão da célula  $m'$  saia do *riser*, assim como mostrado na Figura 7.5(B).

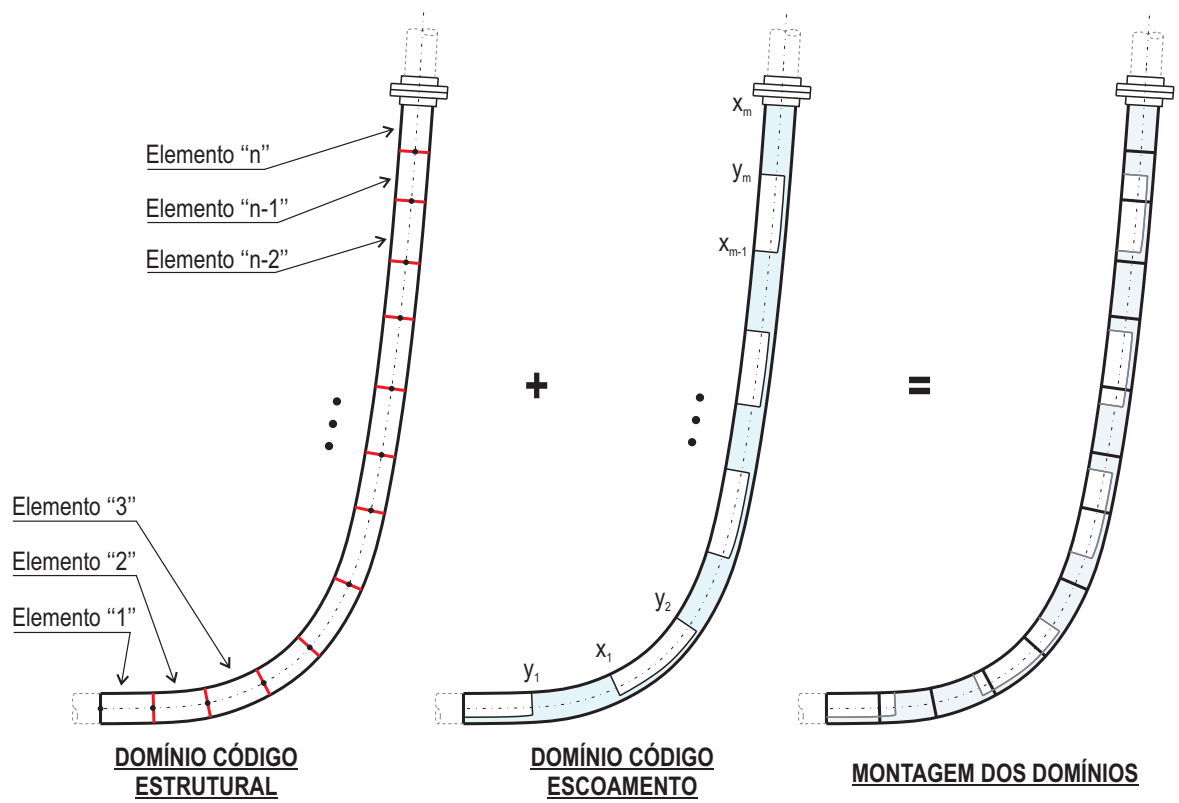
Devido à saída da célula  $m$  do domínio computacional, temos que realizar a renumeração das células unitárias pertencentes ao domínio computacional, assim como realizado na Figura 7.5(C).

### 7.2.2 Montagem dos domínios computacionais

Durante a solução da Equação (6.38), é necessário calcular todas as variáveis afetadas pela dinâmica do escoamento interno em golfadas: a matriz de massa do sistema  $\mathbf{M}_t$ , a matriz de amortecimento  $\mathbf{C}_t$ , e o vetor de forças externas  $\bar{\mathbf{P}}_t$ , assim como mostrado na Figura 7.2.

Para realizar o cálculo das variáveis  $\mathbf{M}_t$ ,  $\mathbf{C}_t$  e  $\bar{\mathbf{P}}_t$ , é necessário realizar a montagem de ambos os domínios computacionais, é dizer, a posição de cada elemento finito de *riser* com a posição de cada célula unitária de escoamento, a fim de poder determinar, a cada instante de tempo, a quantidade de células unitárias existentes em cada elemento finito *riser*, isto com o objetivo de poder aplicar as equações desenvolvidas na seção 6.2. A montagem de ambos os domínios computacionais é mostrado na Figura 7.6.

Figura 7.6 - Montagem dos domínios computacionais do *riser* e do escoamento bifásico.



Fonte: Produção do autor

## 8 RESULTADOS

A ferramenta computacional SLUGFLEX, foi desenvolvida com o objetivo de calcular a resposta dinâmica de *risers* flexíveis em catenária sobre a influência de um escoamento interno bifásico em padrão golfadas de líquido, considerando os efeitos produzidos por uma correnteza marítima, assim como também, os efeitos devidos aos deslocamentos da plataforma de produção.

Para garantir o correto funcionamento da ferramenta SLUGFLEX, esta foi validada por meio da comparação dos resultados numéricos obtidos com os resultados experimentais obtidos por [Valdivia \(2008\)](#). O experimento de Valdivia consistiu de um tubo flexível de silicone em catenária sob o efeito de um escoamento bifásico gás-líquido.

Da mesma forma, foram realizadas verificações dos códigos e sub-rotinas implementadas durante o desenvolvimento da ferramenta SLUGFLEX, mediante a comparação com resultados experimentais e numéricos da literatura. A seguir, serão enumeradas as verificações que foram realizadas.

- 8.1. Verificação dos resultados numéricos obtidos com o código computacional para análise dinâmico de estruturas, para a qual foram utilizados os resultados obtidos pelos trabalhos de [Jelenić e Crisfield \(2001\)](#), [Hsiao et al. \(1999\)](#), e [Le et al. \(2012\)](#).
- 8.2. Validação dos resultados numéricos, obtidos pelo autor, por meio da comparação com os resultados experimentais obtidos por [Chen e Jendrzeczyk \(1985\)](#), e com os resultados numéricos obtidos por [\(LIN; TSAI, 1997\)](#). Este passo tem como objetivo verificar a implementação da sub-rotina que calcula as forças devidas a um escoamento interno monofásico.
- 8.3. Verificação da implementação da sub-rotina que calcula as forças hidrodinâmicas devidas a uma correnteza. Para este passo, os resultados numéricos foram comparados com os resultados obtidos pelo software ORCAFLEX, e com os resultados numéricos obtidos por [Neto \(2016\)](#).
- 8.4. Validação da ferramenta computacional SLUGFLEX, a qual calcula o desenvolvimento do escoamento em padrão golfadas de líquido no interior de um *riser* flexível, para a qual foram comparados os resultados numéricos com os resultados experimentais obtidos por [Valdivia \(2008\)](#).

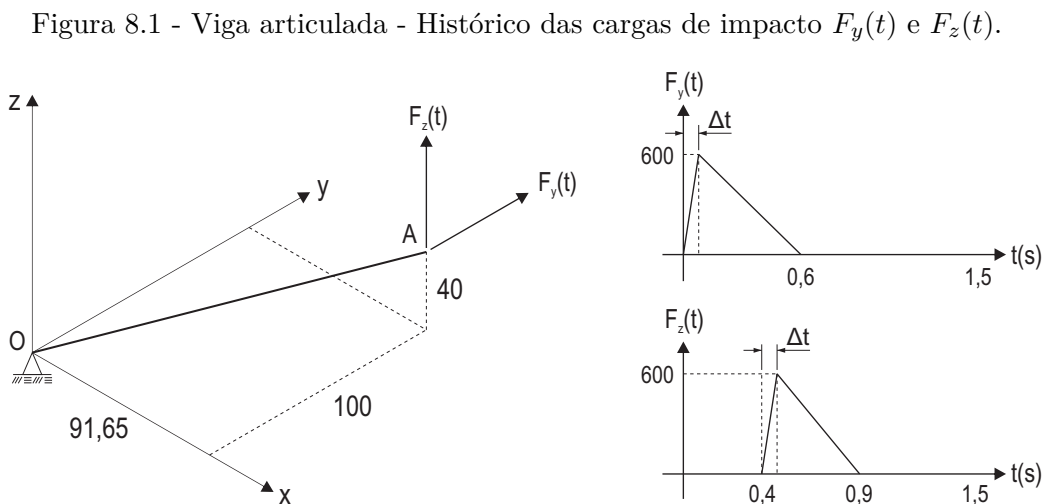
Após a verificação da implementação dos códigos e das sub-rotinas mencionadas, e após a validação da ferramenta computacional SLUGFLEX, serão mostrados os resultados numéricos para o estudo de um *riser* flexível em catenária de dimensões reais.

## 8.1 Verificação do código computacional para análise dinâmica de estruturas

O correto funcionamento do código computacional para análise dinâmica de estruturas em três dimensões, implementado para este trabalho, será verificado com resultados numéricos obtidos por autores da presente literatura. Nesta etapa, vamos verificar a correta implementação e correto funcionamento dos métodos numéricos implementados para cálculo da resposta dinâmica estrutural, os quais são: método de Newton-Raphson e o método HHT- $\alpha$ .

### 8.1.1 CASO 1: Viga articulada flexível

Este caso foi estudado por Jelenić e Crisfield (2001), e por Hsiao et al. (1999). Na Figura 8.1 apresentamos uma viga flexível, definida pelos pontos O e A, articulada no ponto O, a qual esta submetida ao efeito de duas cargas de impacto  $F_y(t)$  e  $F_z(t)$  as quais atuam sobre o ponto A (extremo livre). O histórico de cada uma das forças é mostrado na Figura 8.1.



Fonte: Adaptada de Silva (2013).

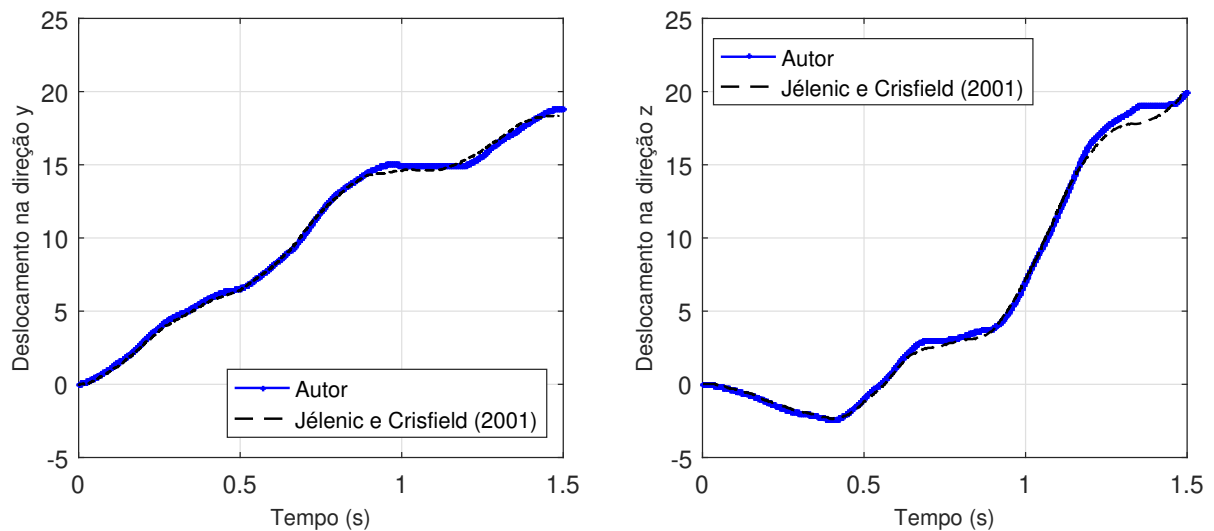


As propriedades geométricas e mecânicas da viga articulada são: Área da seção transversal  $A = 9$ , momento polar de inércia  $J = 13,5$ , momentos de inércia dos eixos principais  $I_2 = I_3 = 6,75$ , densidade  $\rho = 0,0078$ , e coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$ . Para este estudo, três valores diferentes para o módulo de elasticidade serão utilizados:  $E_1 = 2,1 \times 10^6$ ,  $E_2 = 2,1 \times 10^9$ , e  $E_3 = 6,3 \times 10^6$ .

Para os três casos simulados, a análise dinâmica foi realizada utilizando 20 elementos finitos de igual tamanho. O tempo de simulação foi configurado em 1,5 s, com um passo de tempo,  $\Delta t$ , fixo de 0,001 s. O critério de convergência foi considerado igual a  $10^{-12}$ .

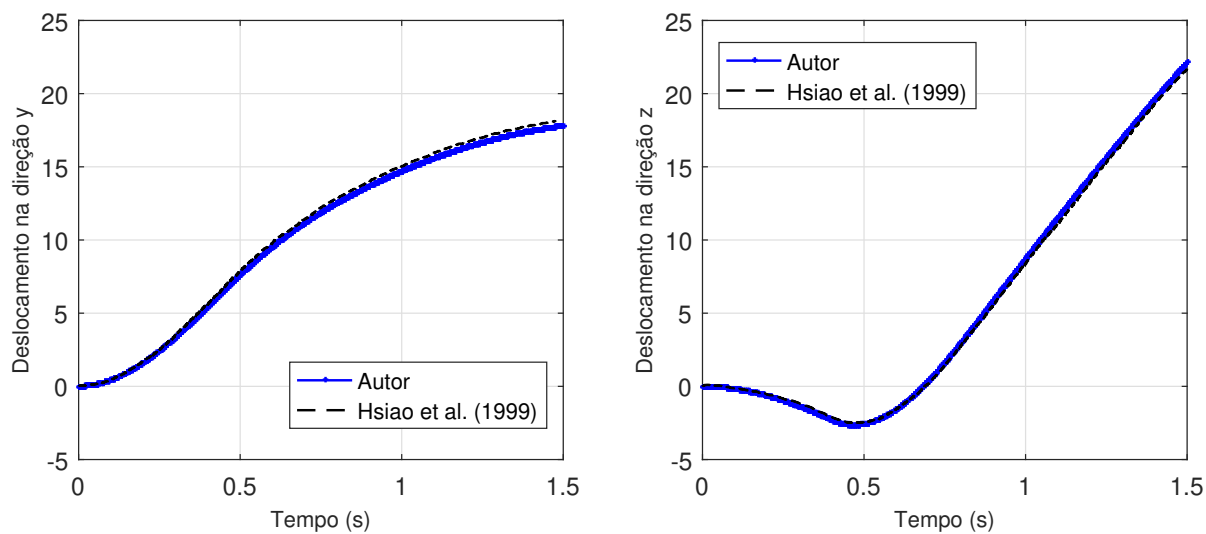
As Figuras 8.2, 8.3 e 8.4 mostram os deslocamentos do extremo livre para  $E_1$ ,  $E_2$  e  $E_3$ , respectivamente. Para  $E_1$ , os resultados são comparados aos resultados obtidos por Jelenić e Crisfield (2001). Para  $E_2$  e  $E_3$  os resultados são comparados com os obtidos por Hsiao et al. (1999).

Figura 8.2 - Deslocamentos do extremo livre da viga, para  $E = 2,1 \times 10^6$ .



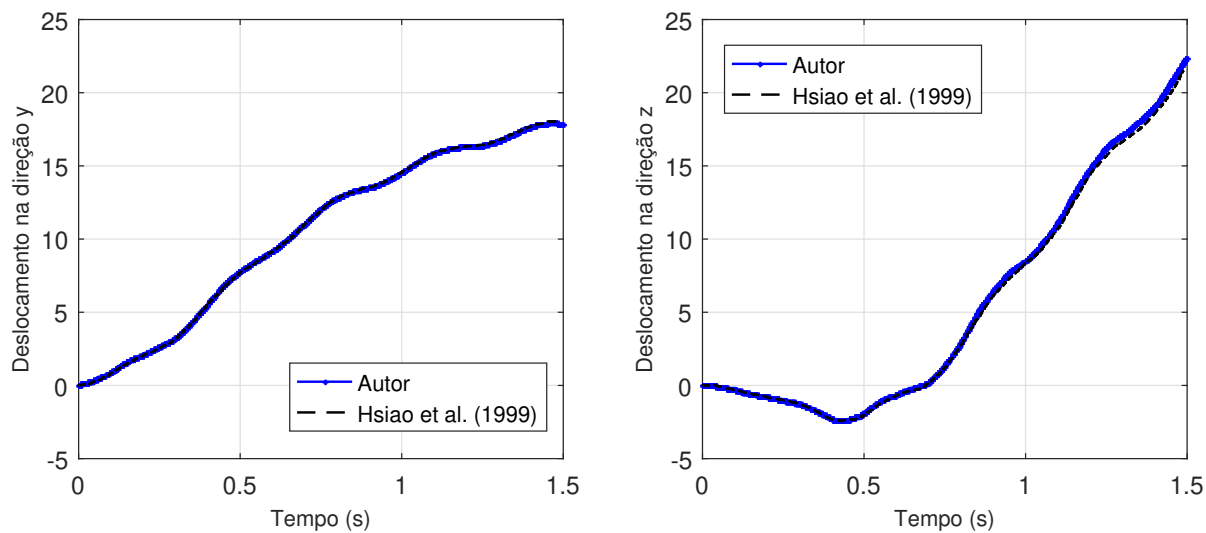
Fonte: Produção do autor.

Figura 8.3 - Deslocamentos do extremo livre da viga, para  $E = 2,1 \times 10^9$ .



Fonte: Produção do autor.

Figura 8.4 - Deslocamentos do extremo livre da viga, para  $E = 6,3 \times 10^6$ .



Fonte: Produção do autor.

A partir das Figuras 8.2, 8.3 e 8.4, pode-se observar a excelente concordância entre

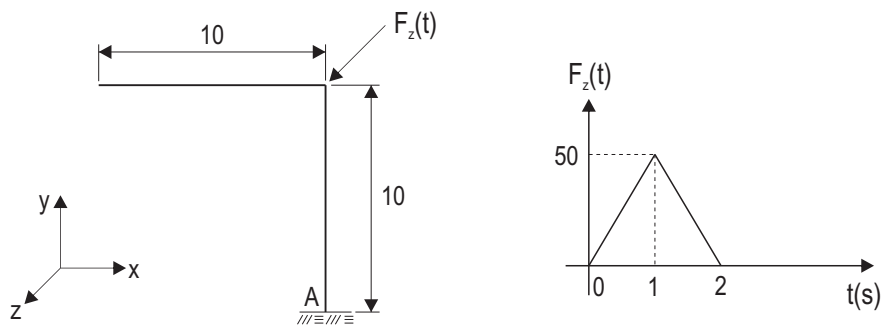
as respostas obtidas pelo código computacional, desenvolvido neste trabalho, e as respostas obtidas pelos autores da literatura.

### 8.1.2 CASO 2: Pórtico em L

Este caso foi estudado por Le et al. (2012). A Figura 8.5 mostra um pórtico em L submetido ao efeito de uma carga  $F_z(t)$ , a qual é aplicada no cotovelo do pórtico. O pórtico se encontra no plano  $xy$ , e está engastado no ponto A. O histórico da carga  $F_z(t)$  é mostrado na Figura 8.5.

As propriedades geométricas e mecânicas do material do pórtico são: massa por unidade de comprimento  $A\rho = 1$ , tensor de inércia espacial  $\mathbf{I}\rho = \text{diag}(20, 10, 10)$ ,  $EA = 10^6$ ,  $EI = 10^3$ ,  $GA = 10^6$ , e  $GJ = 10^3$ .

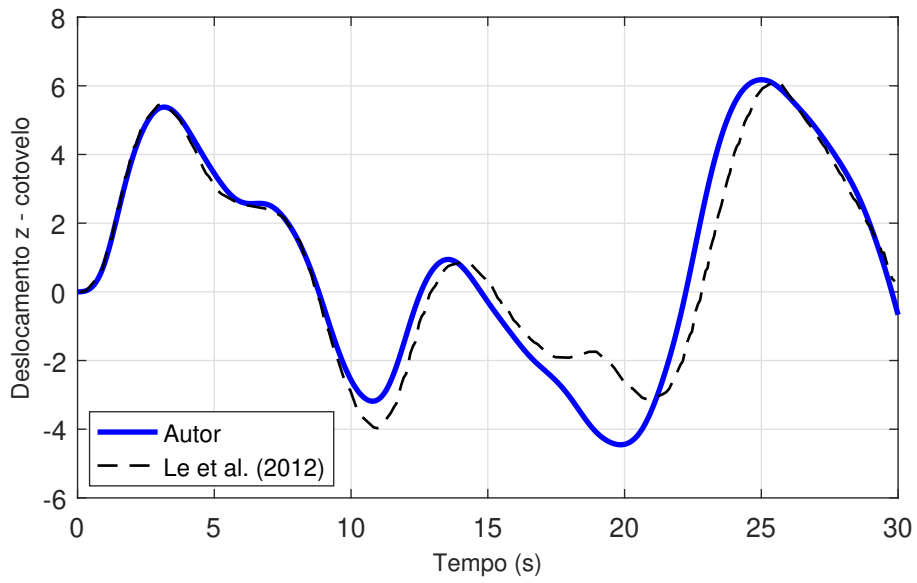
Figura 8.5 - Pórtico em L - Histórico da carga  $F_z(t)$ .



Fonte: Adaptado de Le et al. (2012).

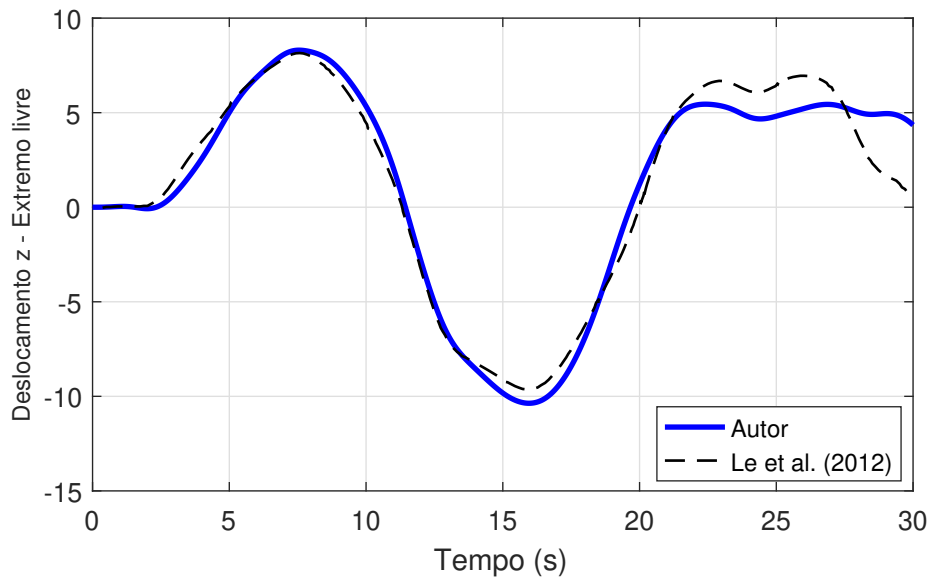
A análise dinâmica foi realizada utilizando 20 elementos finitos de igual tamanho, 10 elementos para cada uma das vigas. O tempo de simulação foi configurado em 30 s, com um passo de tempo,  $\Delta t$ , fixo de 0,01 s. O critério de convergência foi considerado igual a  $10^{-12}$ . As Figuras 8.6 e 8.7 mostram os deslocamentos na direção  $z$  do cotovelo do pórtico e do extremo livre, respectivamente.

Figura 8.6 - Deslocamento do cotovelo do pórtico na direção z.



Fonte: Produção do autor.

Figura 8.7 - Deslocamento do extremo livre do pórtico na direção z.



Fonte: Produção do autor.

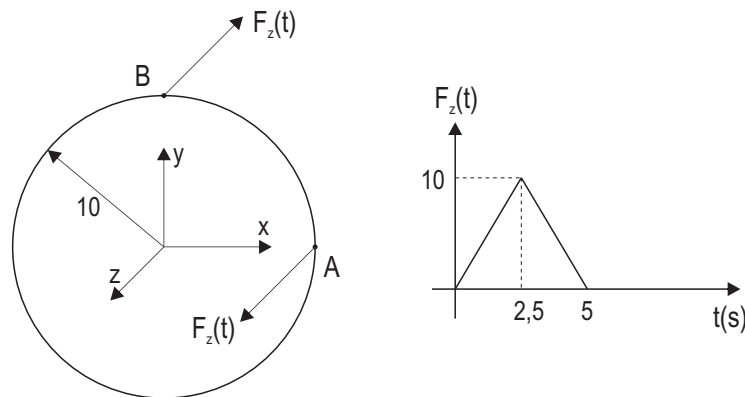
A partir das Figuras 8.6 e 8.7, pode-se observar a boa aproximação entre as respostas obtidas pelo código computacional desenvolvido e as respostas obtidas por Le et al. (2012). Existem pequenas diferenças, porém, as respostas são bastante próximas.

### 8.1.3 CASO 3: Anel com rotações finitas

Este caso foi estudado por Le et al. (2012). A Figura 8.8 mostra um anel submetido ao efeito de duas cargas, as quais são aplicadas nos pontos A e B. O histórico da força  $F_z(t)$  é mostrado na Figura 8.8. Neste exemplo, não se aplicam condições de contorno estáticas ou cinemáticas, em outras palavras, o anel pode-se deslocar livremente no espaço de acordo com as leis da dinâmica.

As propriedades geométricas e mecânicas do material do anel são: massa por unidade de comprimento  $A\rho = 1$ , tensor de inércia espacial  $\mathbf{I}\rho = \text{diag}(20, 10, 10)$ ,  $EA = 10^4$ ,  $EI = 500$ ,  $GA = 10^4$ , e  $GJ = 500$ . A análise dinâmica foi realizada utilizando 32 elementos finitos de igual tamanho. O tempo de simulação foi configurado em 150 s, com um passo de tempo fixo de 0,05 s.

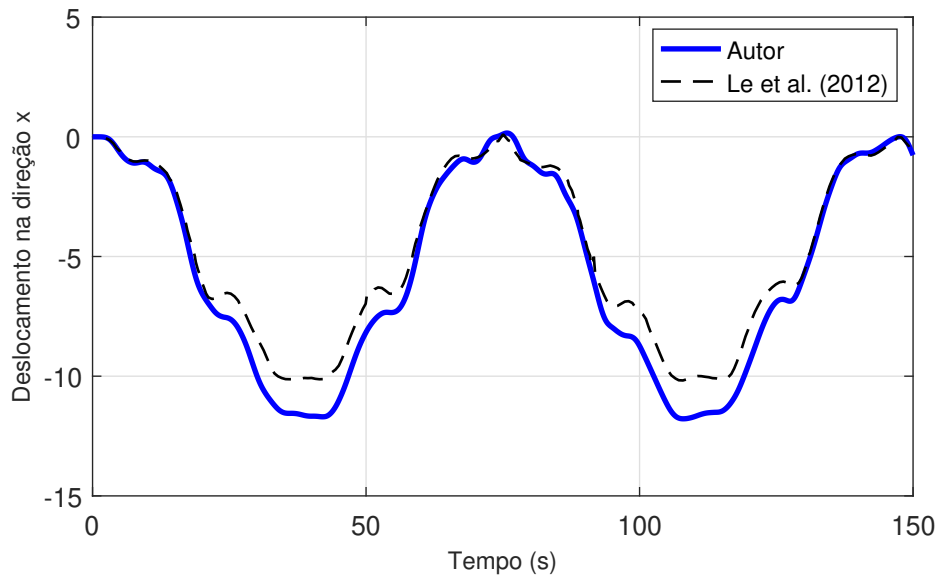
Figura 8.8 - Anel com rotações finitas - Cargas aplicadas.



Fonte: Adaptado de Le et al. (2012).

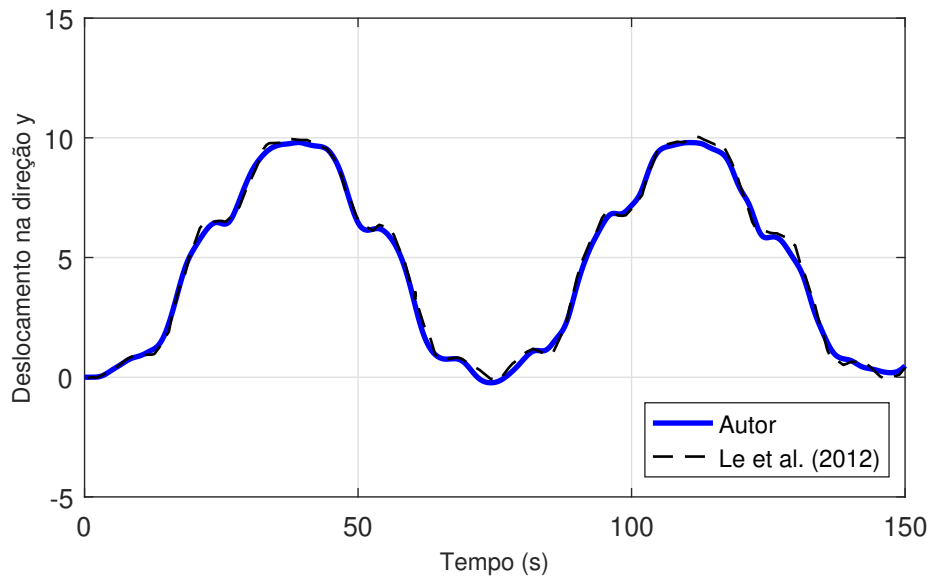
As Figuras 8.9, 8.10 e 8.11 mostram os deslocamentos nas direções x, y e z, respectivamente. Os resultados são comparados com os obtidos por Le et al. (2012).

Figura 8.9 - Deslocamento do ponto B na direção do eixo x.



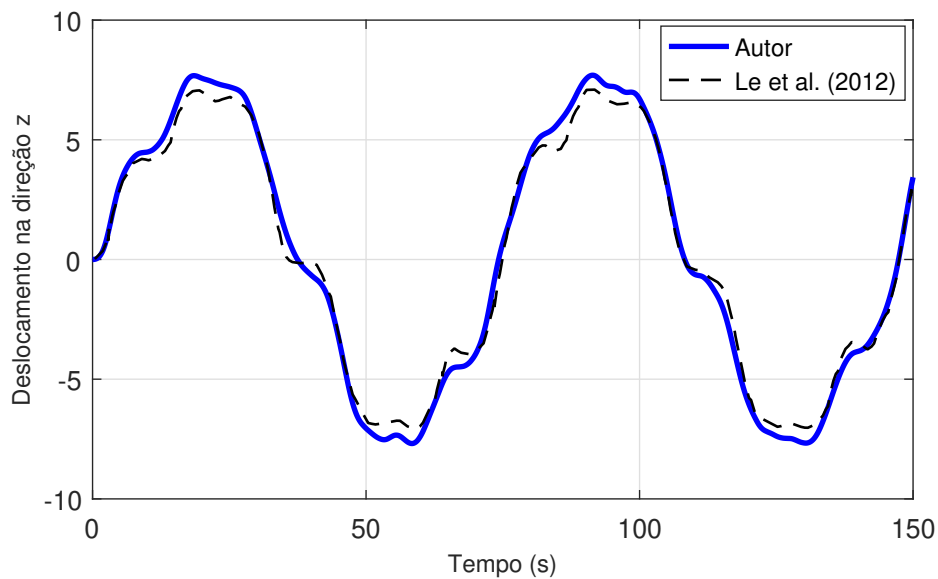
Fonte: Produção do autor.

Figura 8.10 - Deslocamento do ponto B na direção do eixo y.



Fonte: Produção do autor.

Figura 8.11 - Deslocamento do ponto B na direção do eixo  $z$ .



Fonte: Produção do autor.

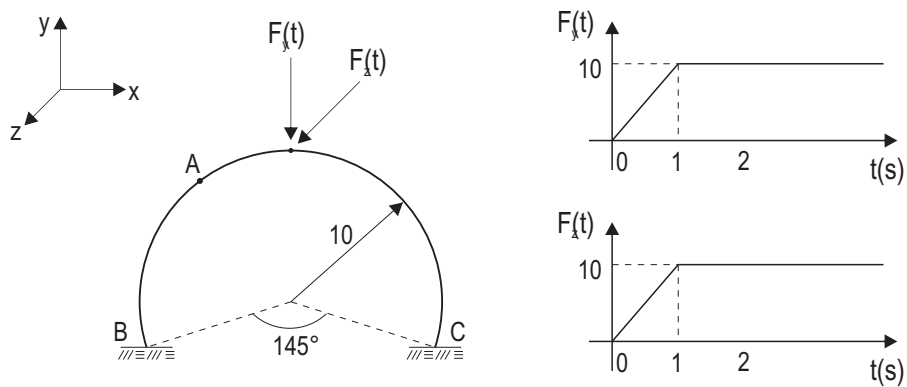
A partir das Figuras 8.9, 8.10 e 8.11, pode-se observar a excelente aproximação entre as respostas obtidas pelo código computacional implementado neste trabalho e as respostas obtidas por Le et al. (2012).

#### 8.1.4 CASO 4: Arco circular de grande altura

Nesse exemplo, proposto por Le et al. (2012), analisa-se a resposta dinâmica de um arco circular de grande altura, quando está submetido a dois carregamentos tipo rampa,  $F_y(t)$  e  $F_z(t)$ , atuantes nas direções  $y$  e  $z$ , respectivamente. A Figura 8.12 mostra o arco circular de grande altura e o histórico das forças atuantes nele. O arco circular está engastado nos extremos B e C, além disso, o comprimento de arco definido pelos pontos B e A representa a terceira parte do comprimento total do arco circular.

As propriedades geométricas e mecânicas do material do arco circular são: massa por unidade de comprimento  $A\rho = 1$ , tensor de inércia espacial  $\mathbf{I}\rho = \text{diag}(20, 10, 10)$ ,  $EA = 10^4$ ,  $EI = 500$ ,  $GA = 10^4$ , e  $GJ = 500$ . A análise dinâmica foi realizada utilizando 12 elementos finitos de igual tamanho. O tempo de simulação foi configurado em 30 s, com um passo de tempo fixo de 0,1 s.

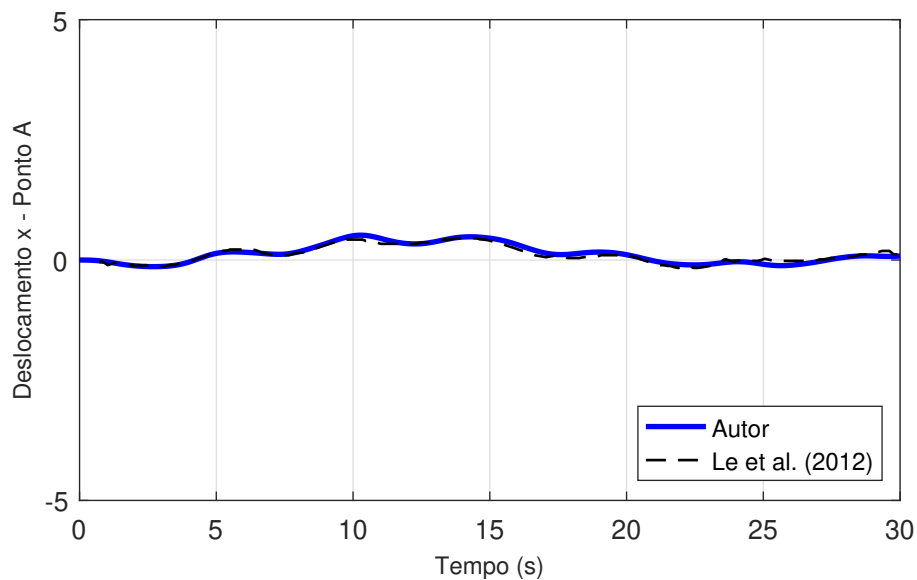
Figura 8.12 - Arco circular de grande altura - Histórico das cargas  $F_y(t)$  e  $F_z(t)$ .



Fonte: Adaptado de Le et al. (2012).

As Figuras 8.13, 8.14 e 8.15 mostram os deslocamentos do ponto A nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente. Os resultados são comparados com os obtidos por Le et al. (2012).

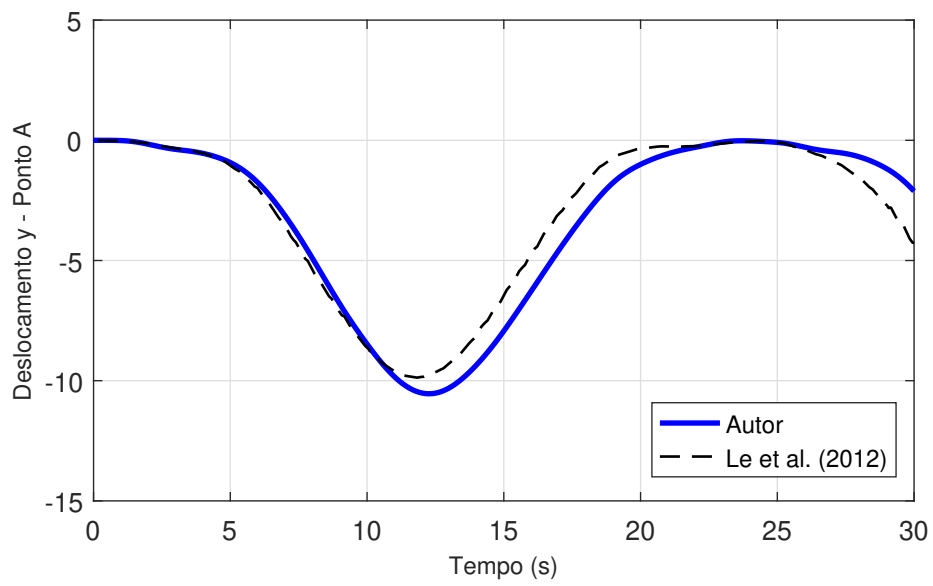
Figura 8.13 - Deslocamento do ponto A na direção do eixo  $x$ .



Fonte: Produção do autor.

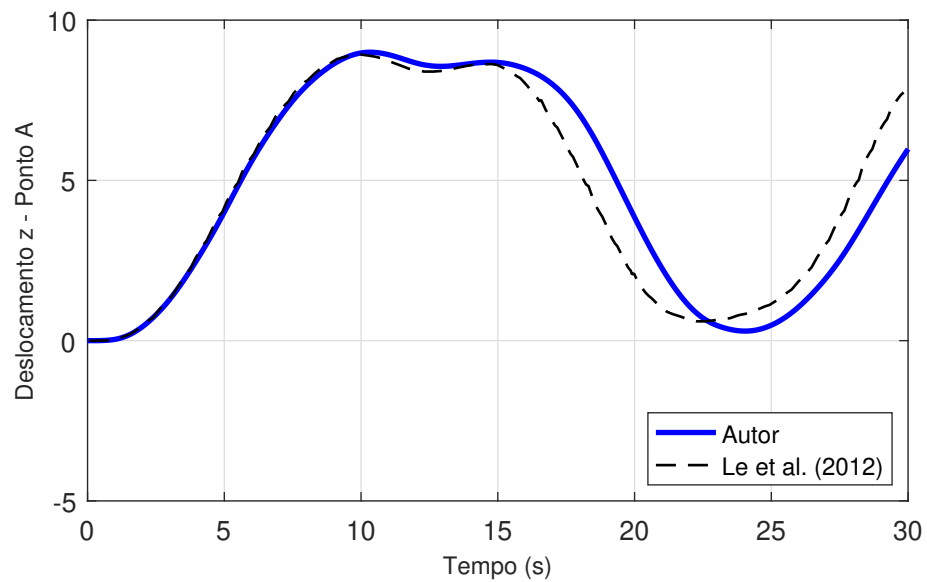


Figura 8.14 - Deslocamento do ponto A na direção do eixo  $y$ .



Fonte: Produção do autor.

Figura 8.15 - Deslocamento do ponto A na direção do eixo  $z$ .



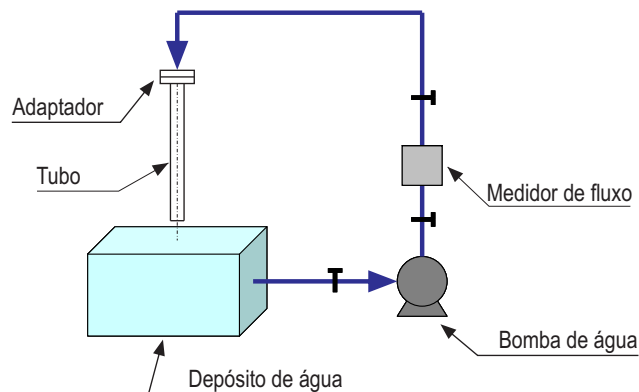
Fonte: Produção do autor.

A partir das Figuras 8.13, 8.14 e 8.15, pode-se observar a excelente aproximação entre as respostas obtidas pelo código computacional implementado neste trabalho e as respostas obtidas por Le et al. (2012).

## 8.2 Verificação da sub-rotina que calcula as forças devidas ao escoamento interno

Com o objetivo de verificar a implementação da sub-rotina que calcula as forças devidas a um escoamento interno sobre um tubo flexível, os resultados numéricos serão comparados com os resultados experimentais obtidos por Chen e Jendrzejczyk (1985), assim como também, com os resultados numéricos obtidos por Lin e Tsai (1997). O experimento realizado por Chen e Jendrzejczyk, vide Figura 8.16, teve como objetivo estudar os diferentes tipos de instabilidades ocorridos em tubos para transporte de fluidos.

Figura 8.16 - Esquema de instalação experimental realizado por Chen e Jendrzejczyk.



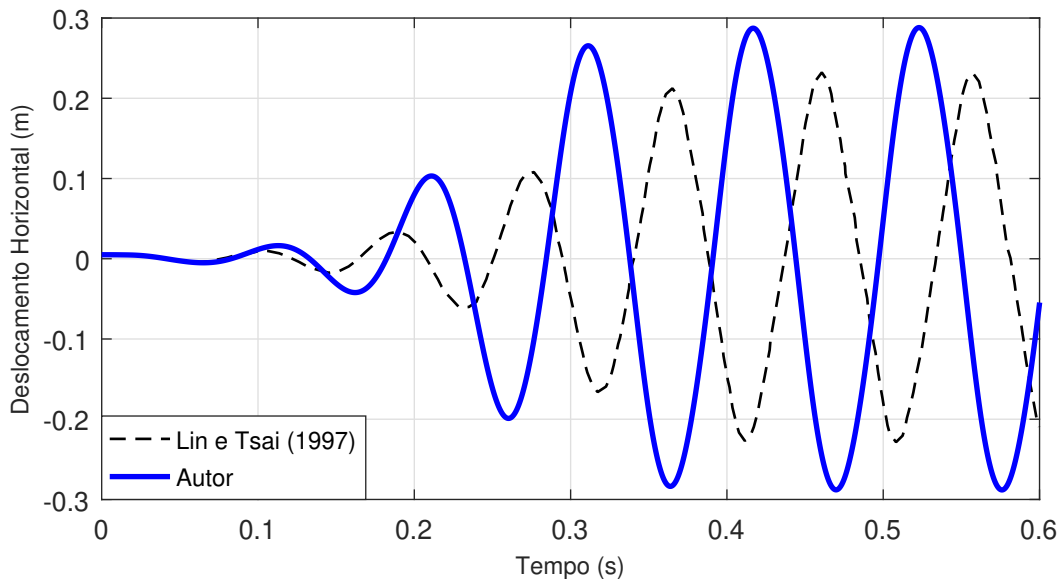
Fonte: Produção do autor.

O tubo flexível tem um comprimento de 0,6858 m., uma seção transversal circular com um diâmetro externo igual a 9,525 mm., e com um diâmetro interno igual a 6,35 mm. O tubo tem um módulo de elasticidade,  $E$ , de valor igual a  $2,5217 \times 10^8$  N/m<sup>2</sup>, e uma densidade igual a 852,59 kg/m<sup>3</sup>. O escoamento circulando no interior do tubo é água com uma densidade igual a 1000 kg/m<sup>3</sup>. Nas simulações, o tubo flexível foi discretizado utilizando 40 elementos finitos de igual tamanho. O passo de tempo considerado foi de 0,001 s.

Para esta verificação, os resultados a comparar são as amplitudes de oscilação dos deslocamentos e as frequências de vibração do extremo livre do tubo no ciclo limite, as quais são produzidas pela dinâmica do escoamento interno. O ciclo limite é um período de oscilação onde a amplitude e a frequência são constantes. Para calcular as amplitudes e frequências de oscilação no ciclo limite, um deslocamento  $\Delta x$ , na direção horizontal, será aplicado no extremo livre do tubo (LIN; TSAI, 1997).

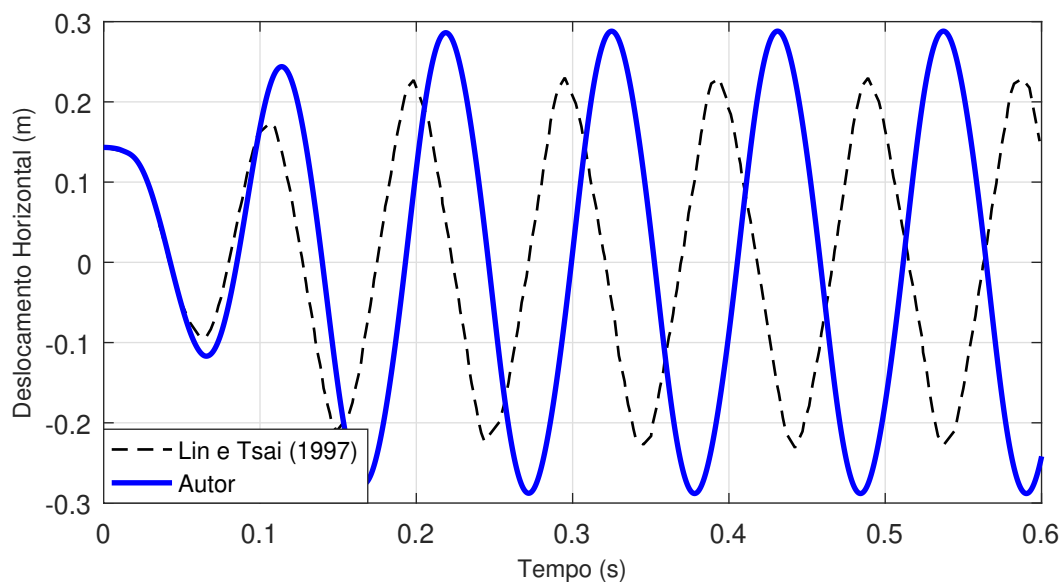
As Figuras 8.17, 8.18, e 8.19 foram realizadas considerando deslocamentos de 0,005 m., 0,14 m., e 0,26 m., respectivamente, e mostram a comparação entre os resultados numéricos obtidos por Lin e Tsai (1997) e os obtidos pela sub-rotina desenvolvida neste trabalho. Para a elaboração das figuras foi considerada uma velocidade do escoamento de 24,4m/s.

Figura 8.17 - Deslocamento horizontal do extremo livre.  $\Delta x = 0,005$  m.,  $V = 24,4$ m/s.



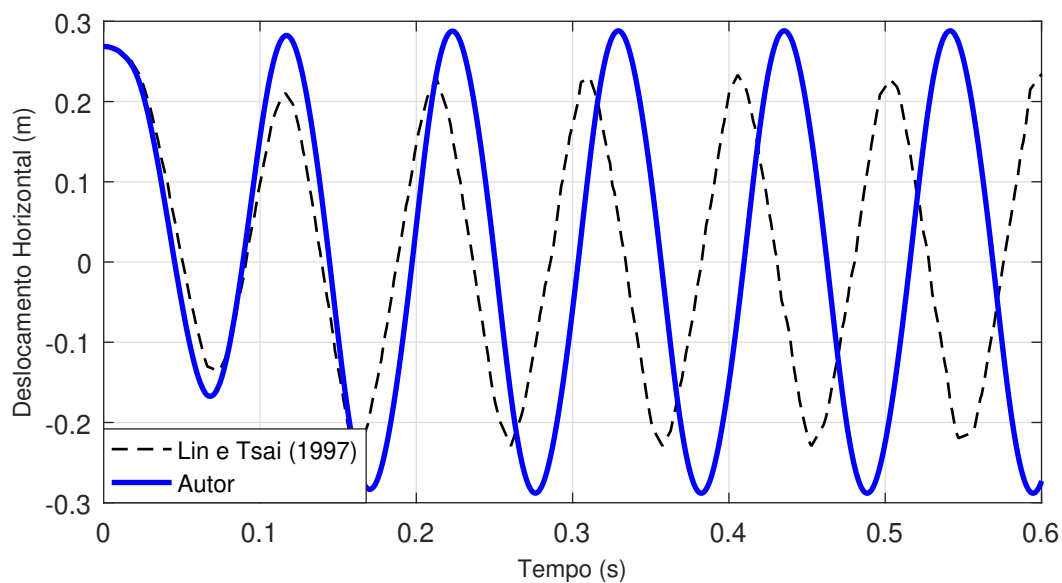
Fonte: Produção do autor.

Figura 8.18 - Deslocamento horizontal do extremo livre.  $\Delta x = 0,14$  m.,  $V = 24,4$  m/s.



Fonte: Produção do autor.

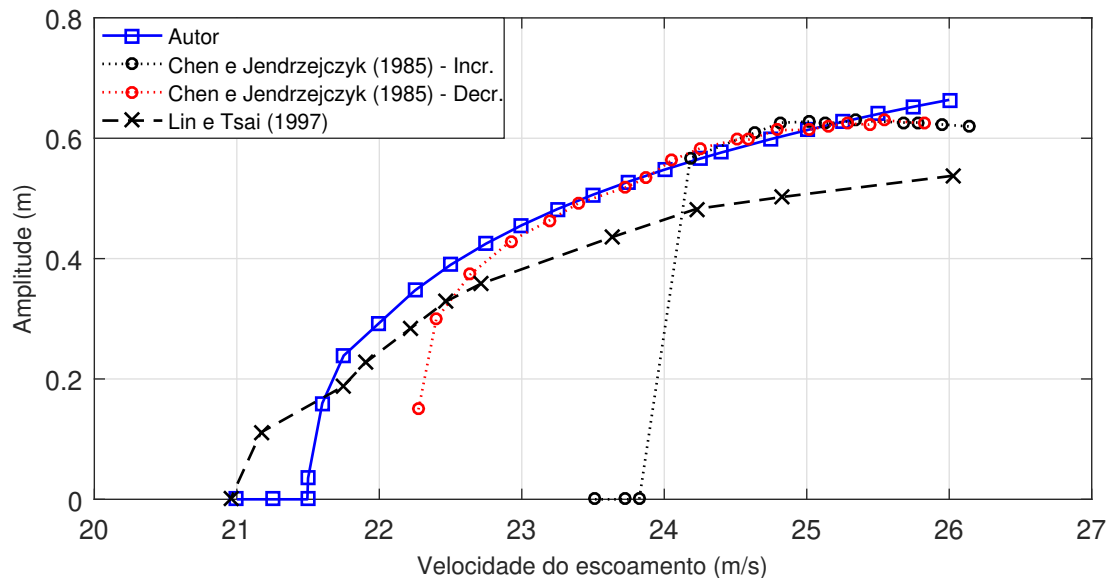
Figura 8.19 - Deslocamento horizontal do extremo livre.  $\Delta x = 0,26$  m.,  $V = 24,4$  m/s.



Fonte: Produção do autor.

Os resultados numéricos, obtidos pelo autor, mostram maiores valores de amplitude de oscilação, porém, menores valores de frequência de oscilação da resposta. Uma das principais características das simulações apresentadas, é que, sem importar o valor do deslocamento inicial no extremo livre, a resposta atinge o mesmo valor de amplitude de oscilação no ciclo limite, que no caso é de 0,5763 m.

Figura 8.20 - Amplitude de oscilação para diferentes valores de velocidade do escoamento.



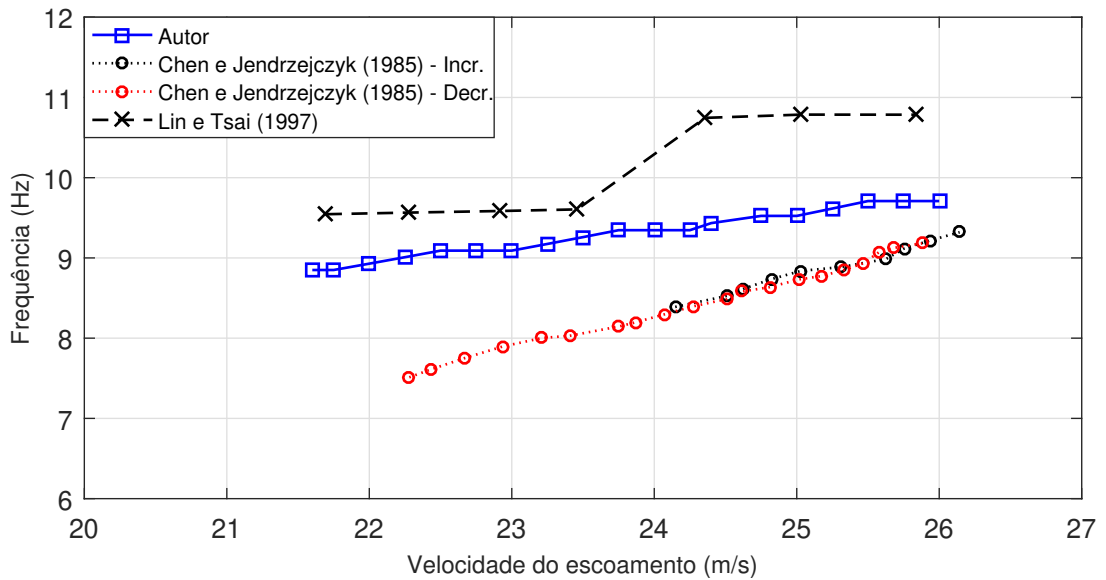
Fonte: Produção do autor.

A Figura 8.20 mostra os valores de amplitude de oscilação do deslocamento horizontal para diferentes valores de velocidade do escoamento. Os resultados experimentais foram realizados de duas formas, uma de elas foi incrementando o valor da velocidade da água e a outra foi diminuindo o valor da velocidade da água. Segundo o obtido pelo autor, a resposta entra em ciclo limite a partir de velocidades do escoamento maiores a 21,5 m/s, entanto que, com o experimento foi obtido um valor de 22,2 m/s.

De acordo com a Figura 8.20, existe uma boa concordância entre os resultados numéricos, obtidos neste trabalho, e os resultados experimentais. As diferenças podem ser atribuídas às condições não ideais do experimento.

A Figura 8.21 mostra os resultados obtidos para o valor da frequência de oscilação, no ciclo limite, para diferentes valores de velocidade de escoamento. A partir da Figura 8.21, pode-se observar a boa aproximação entre os resultados obtidos neste trabalho com os resultados experimentais obtidos por Chen e Jendrzejczyk.

Figura 8.21 - Frequências de oscilação no ciclo limite para diferentes valores de velocidade do escoamento.



Fonte: Produção do autor.

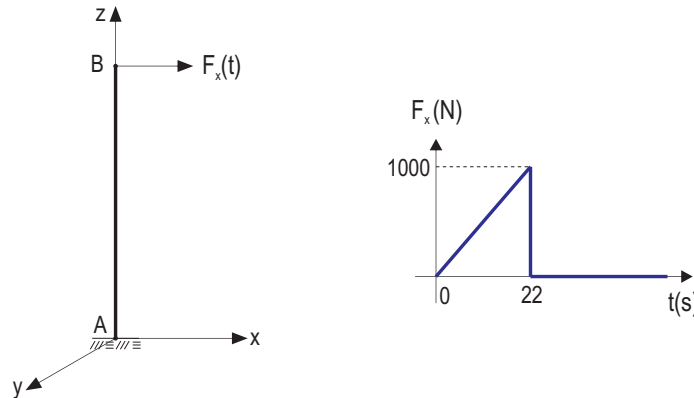
Os resultados numéricos obtidos mediante a sub-rotina que calcula as forças devidas ao escoamento interno, mostraram boa concordância quando comparados aos resultados experimentais obtidos por Chen e Jendrzejczyk. Portanto, conclui-se que a verificação da sub-rotina computacional foi satisfatória.

### 8.3 Verificação da sub-rotina que calcula as forças devidas à correnteza

Com o objetivo de verificar a implementação da sub-rotina que calcula as forças devidas à correnteza sobre um *riser* em catenária, os resultados numéricos obtidos para um tubo vertical submerso no mar serão comparados com os resultados numéricos obtidos por Neto (2016), assim como também, com os resultados numéricos obtidos usando o software ORCAFLEX. O problema a simular consiste de um tubo

vertical submetido à ação das forças hidrodinâmicas e à ação de uma força lateral, cujo histórico é mostrado na Figura 8.22.

Figura 8.22 - Tubo vertical a simular - Histórico da carga  $F_x(t)$ .



Fonte: Neto (2016).

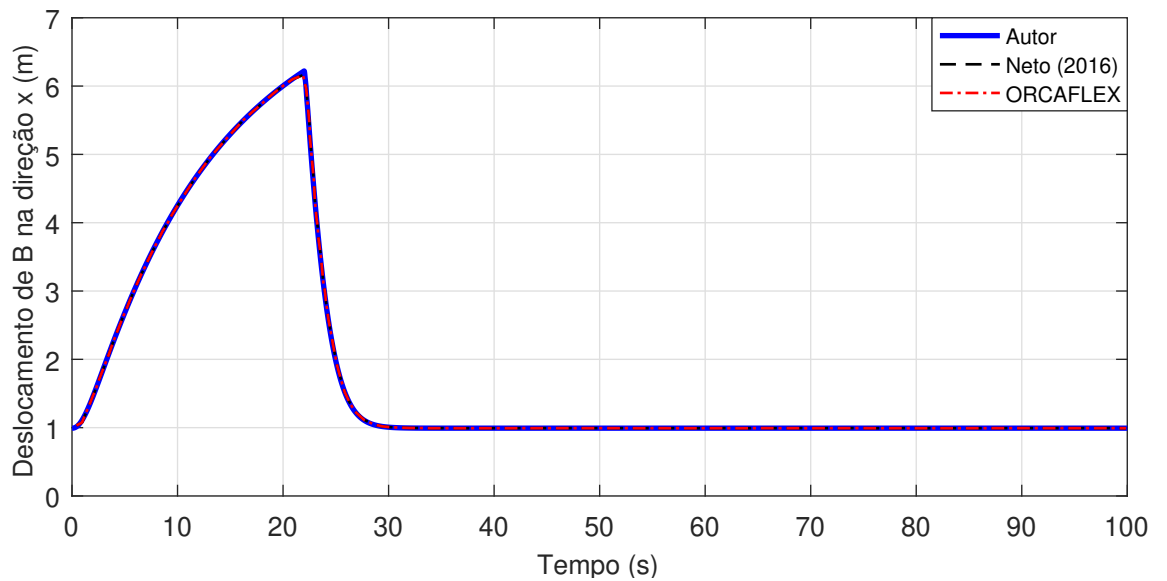
Na resolução, foram consideradas as mesmas direções dos eixos coordenados utilizado por Neto (2016), assim como mostrado na Figura 8.22. O tubo, o qual é engastado no extremo inferior A e livre no extremo superior B, tem um comprimento de 10 m., uma seção transversal circular com um diâmetro externo igual a 0,05 m., e com um diâmetro interno igual a 0,04 m. O tubo tem um módulo de elasticidade,  $E$ , de valor igual a  $200 \times 10^9$  N/m<sup>2</sup>, uma densidade igual a 8000 kg/m<sup>3</sup>, e um coeficiente de Poisson igual a 0,3.

A água do mar tem uma densidade de 1024 kg/m<sup>3</sup>, e os valores do coeficiente de arrasto hidrodinâmico e do coeficiente de massas adicionadas foram considerados iguais a 1. Nas simulações, o tubo foi discretizado utilizando 40 elementos finitos de igual tamanho. O passo de tempo considerado foi de 0,01 s.

Para realizar a verificação da sub-rotina, dois casos serão considerados para a velocidade da correnteza, a qual é constante ao longo do eixo  $z$ : (1) velocidade de correnteza de 1 m/s na direção do eixo  $x$ , e (2) velocidade de correnteza de 1 m/s na direção do eixo  $y$ . A Figura 8.23 mostra os resultados obtidos para o deslocamento do ponto B na direção do eixo  $x$ , para o caso 1. Para ambos os casos estudados, a resposta dinâmica foi calculada a partir da configuração de equilíbrio estático, a qual foi determinada considerando os efeitos devidos à correnteza; por isso que em

algumas das simulações o ponto B já encontra-se deslocado. É importante mencionar que os resultados obtidos mediante o software ORCAFLEX foram extraídos do trabalho de Neto (2016).

Figura 8.23 - Caso 1. Deslocamento do ponto B na direção do eixo  $x$ .

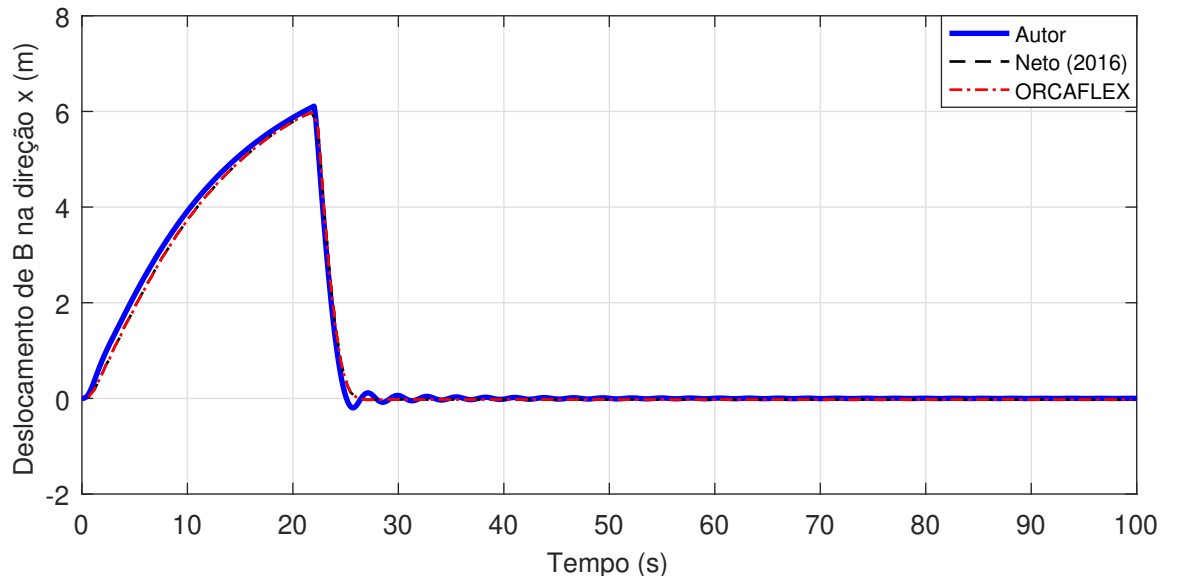


Fonte: Produção do autor.

A partir da Figura 8.23, pode-se observar que os resultados numéricos obtidos são muito bons quando comparados aos outros resultados. As Figuras 8.24 e 8.25 mostram os resultados obtidos para os deslocamentos do ponto B nas direções dos eixos  $x$  e  $y$ , respectivamente, para o caso 2.

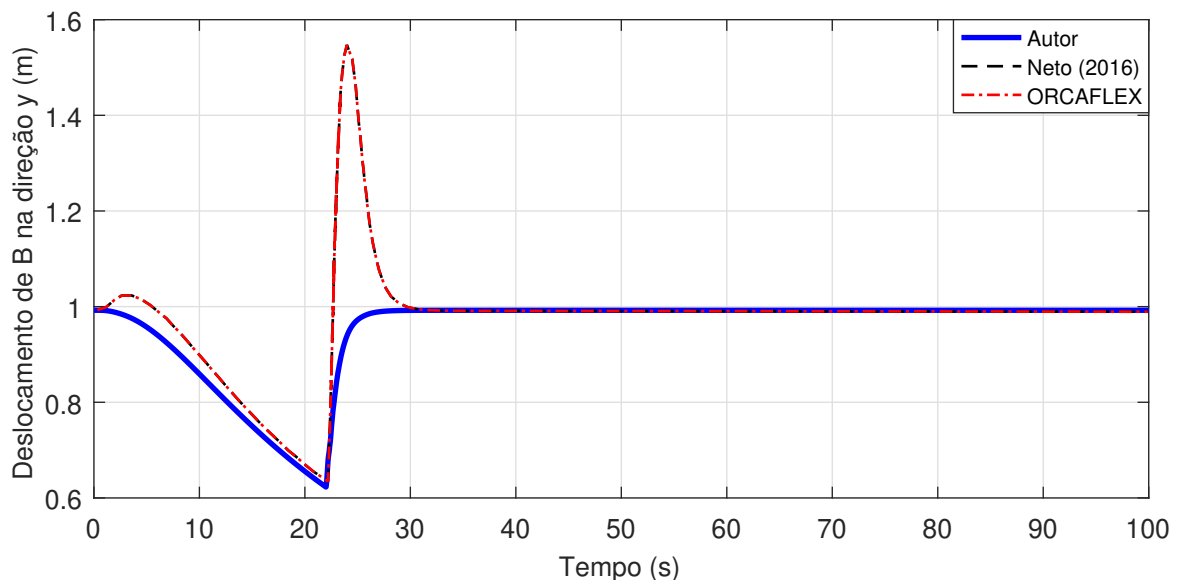


Figura 8.24 - Caso 2. Deslocamento do ponto B na direção do eixo x.



Fonte: Produção do autor.

Figura 8.25 - Caso 2. Deslocamento do ponto B na direção do eixo y.



Fonte: Produção do autor.

As Figuras 8.24 e 8.25 mostram os deslocamentos do ponto B nas direções dos eixos  $x$  e  $y$ , respectivamente. Ao contrário do caso anterior, agora existem diferenças entre os resultados, especificamente quando comparamos o deslocamento na direção  $y$ . Esta diferença ocorre a partir do instante de tempo  $t = 22s$ , que é quando se deixa de aplicar a força  $F_x$ , até o segundo 30, momento a partir do qual as respostas obtidas pelo software ORCAFLEX, por Neto e pela sub-rotina desenvolvida neste trabalho, atingem o mesmo valor de deslocamento do ponto B na direção  $y$ , 1m.

Apesar das diferenças encontradas nas simulações, pode-se dizer que os resultados numéricos mostraram uma boa concordância quando comparados aos outros resultados. Portanto, conclui-se que a verificação da sub-rotina computacional foi satisfatória.

#### 8.4 Validação da ferramenta computacional

Para poder validar a ferramenta SLUGFLEX, os resultados numéricos serão comparados com os resultados experimentais obtidos por Valdivia (2008). O experimento realizado por Valdivia, o qual foi realizado nas instalações do LabPetro na UNICAMP, consistiu em passar água e ar através de um modelo reduzido de riser. A Figura 8.26 mostra a instalação do aparato experimental.

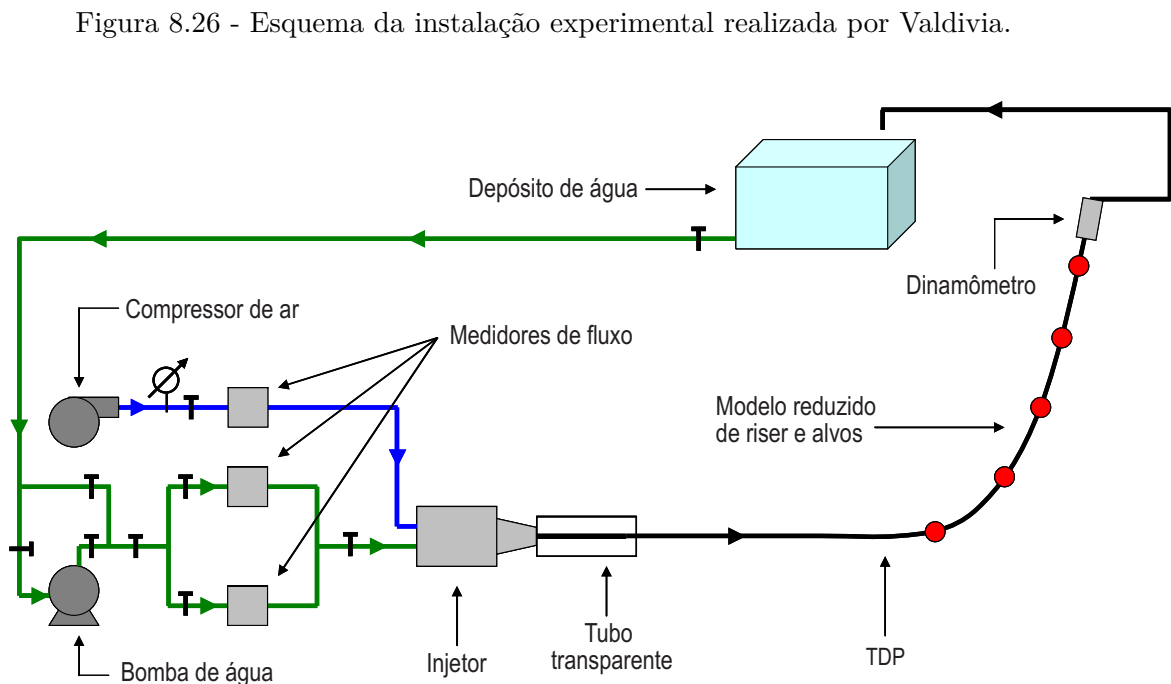
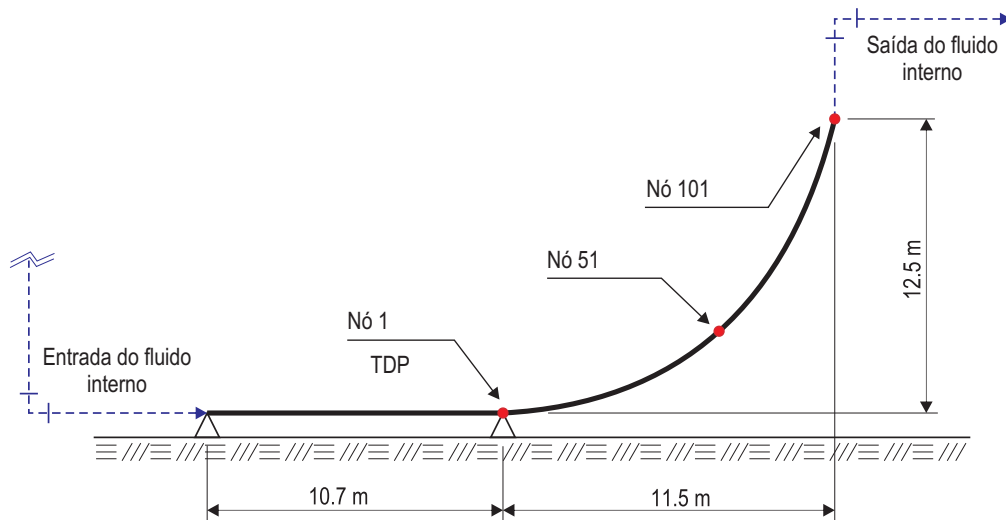


Figura 8.26 - Esquema da instalação experimental realizada por Valdivia.

Fonte: Valdivia (2008).

O modelo reduzido de *riser* é um tubo de silicone de 28,7 metros, o qual consiste de uma linha horizontal de 10,7 metros, a qual termina no TDP (touch down point, ponto que coincide com o nó número 1 do modelo), e de um tubo em catenária de 18 metros de comprimento, assim como mostrado na Figura 8.27. O modelo reduzido de *riser* tem uma seção transversal circular com um diâmetro externo igual a 0,025m. e um diâmetro interno igual a 0,019m, um módulo de elasticidade de 1255KN/m<sup>2</sup>, uma massa por unidade de comprimento igual a 0,254kg/m, e um coeficiente de Poisson igual a 0,5.

Figura 8.27 - Características geométricas do modelo experimental realizado por Valdivia.



Fonte: Produção do autor.

Os experimentos conduzidos foram realizados no ar, e assim, as forças devidas a correnteza não foram consideradas dentro do cálculo. O líquido considerado foi água com uma densidade de 998 kg/m<sup>3</sup>, e o gás considerado foi ar a pressão atmosférica, com uma densidade de 1,21 kg/m<sup>3</sup>. As velocidades superficiais das fases líquida e gasosa são iguais a 0,55 m/s, entanto que a frequência do escoamento em golfadas é igual a 0,98Hz. Durante as simulações numéricas, no ingresso do *riser* foram consideradas células unitárias com valores de frequência de  $\pm 0,18$ Hz a partir do valor de 0,98Hz, isto com o objetivo de conseguir células unitárias de diferentes comprimentos.

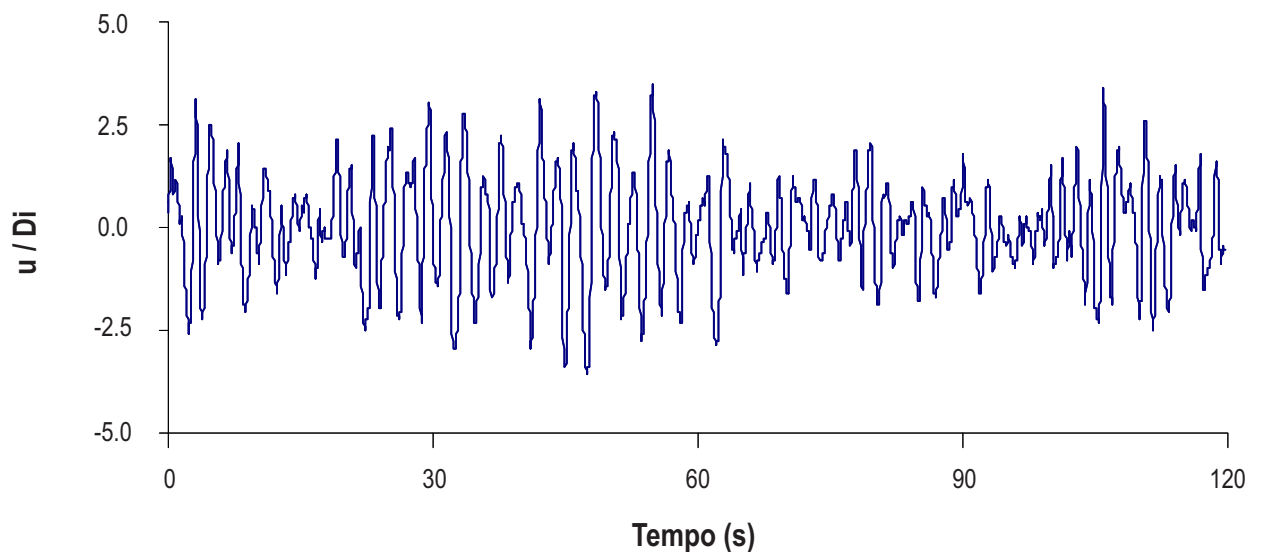
As simulações iniciam com o tubo cheio de água, tempo a partir do qual os pistões de

líquido e as bolhas de gás do escoamento em golfadas iniciam seu passo a través do tubo. Nas simulações, um intervalo de tempo de 120 segundos, de 180 a 300 segundos, foi considerado, assim como também um passo de tempo de 0,01 segundos. Cem elemento finitos foram utilizados na discretização do modelo reduzido de *riser*.

#### 8.4.1 Comparação dos deslocamentos

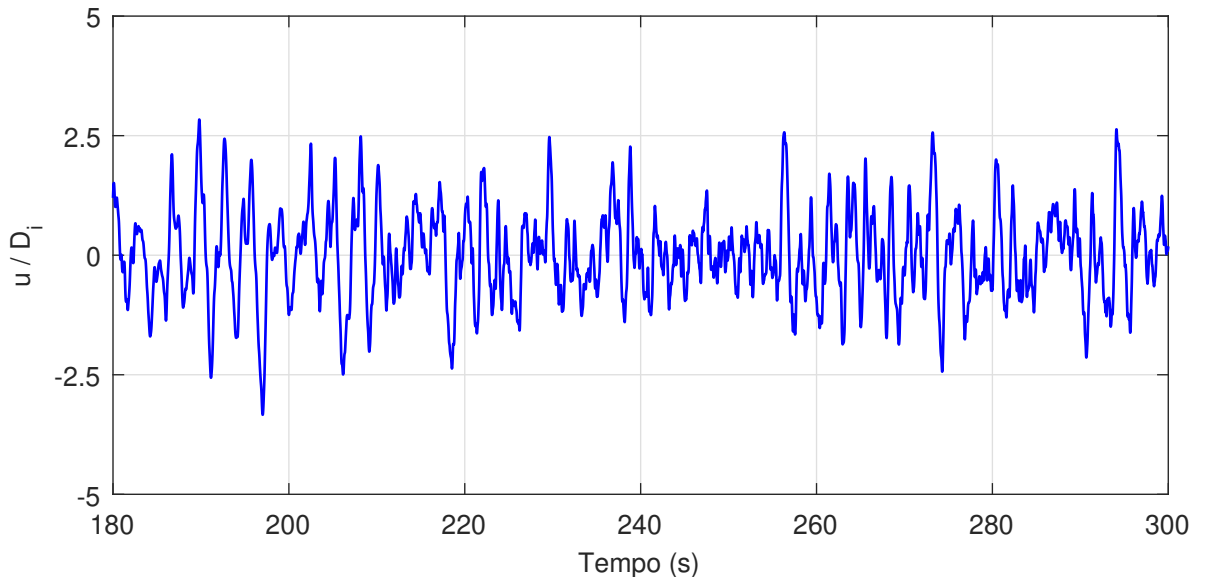
A seguir serão comparados os valores numéricos e experimentais obtidos para as variáveis adimensionais  $u/D_i$  e  $v/D_i$ , onde  $u$  e  $v$  representam os deslocamentos horizontal e vertical do ponto meio do modelo reduzido de *riser* (nó 51), respectivamente, e  $D_i$  é o diâmetro interno do modelo. As Figuras 8.28 e 8.29 mostram os resultados experimentais e numéricos obtidos para a variável  $u/D_i$ , respectivamente. Figura 8.30 mostra a resposta em frequência da variável  $u/D_i$ .

Figura 8.28 - Resultado experimental para o deslocamento horizontal adimensional do nó 51.



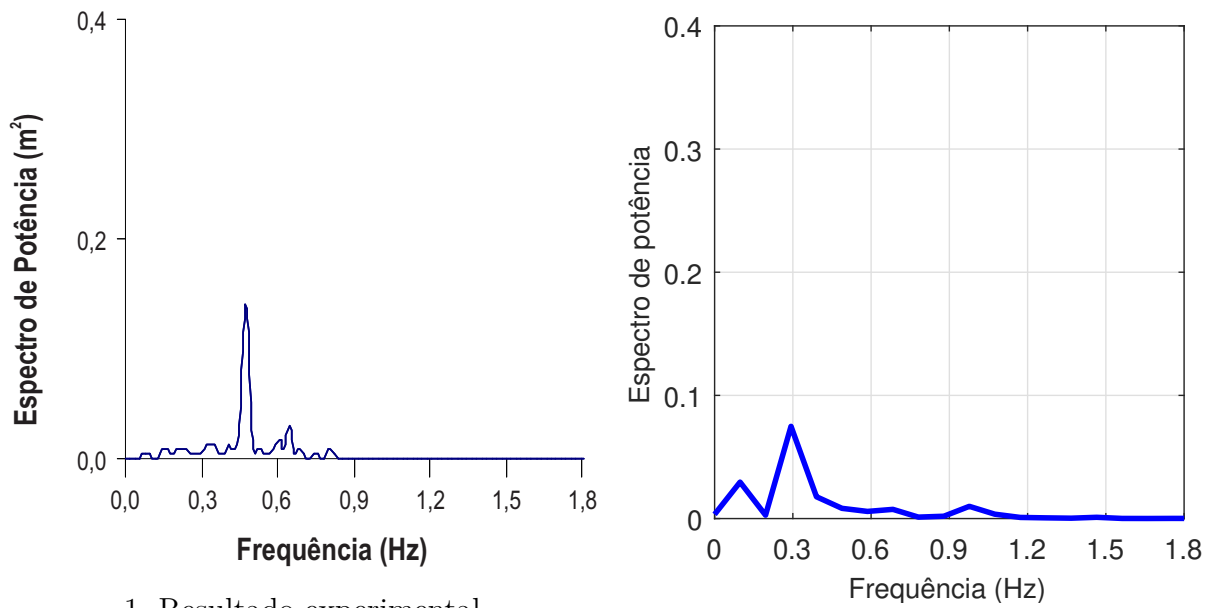
Fonte: Valdivia (2008).

Figura 8.29 - Resultado numérico para o deslocamento horizontal adimensional do nó 51.



Fonte: Produção do autor.

Figura 8.30 - Comparação entre as respostas em frequência para a variável  $u/D_i$ .



1. Resultado experimental.

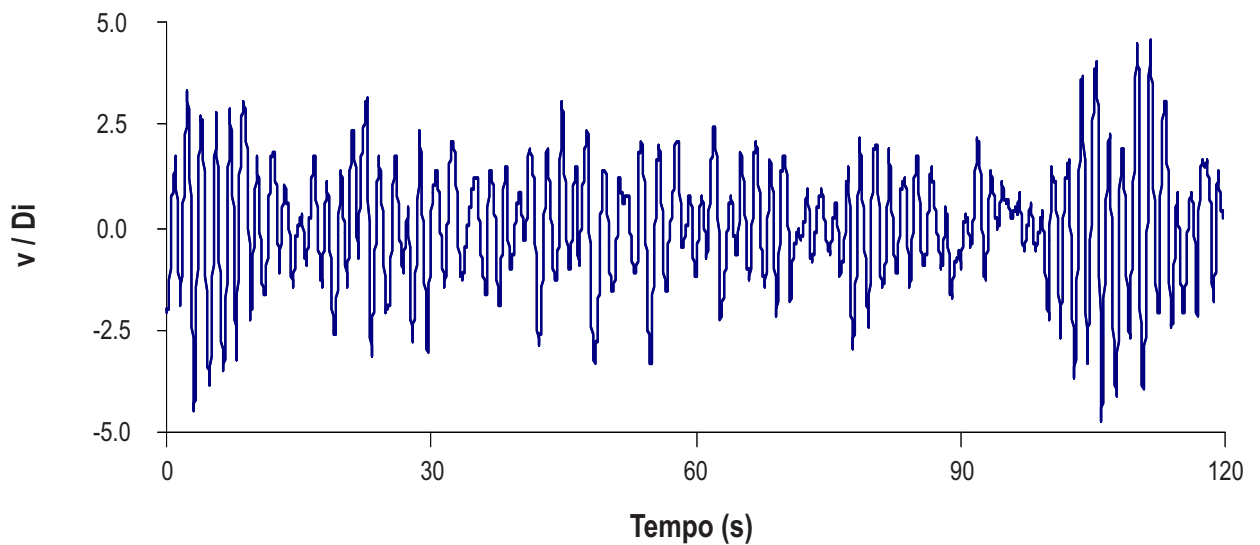
2. Resultado numérico.

Fonte: Produção do autor.

A partir das Figuras 8.28 e 8.29 pode-se observar a boa aproximação entre as respostas obtidas para a variável  $u/D_i$ . Em ambos os casos a resposta é bastante irregular, o qual é devido a que as células unitárias mudam seu comprimento ao longo do modelo reduzido de *riser*; no caso experimental a resposta chega a tomar valores de  $-3,0$  e  $+3,0$ , enquanto que na simulação numérica, esta chega a tomar valores de  $-3,2$  e  $+2,7$ . A partir da Figura 8.30, a frequência dominante para o caso experimental é de  $0,47\text{Hz}$ , entanto que para o caso numérico, a frequência dominante é de  $0,3\text{Hz}$ .

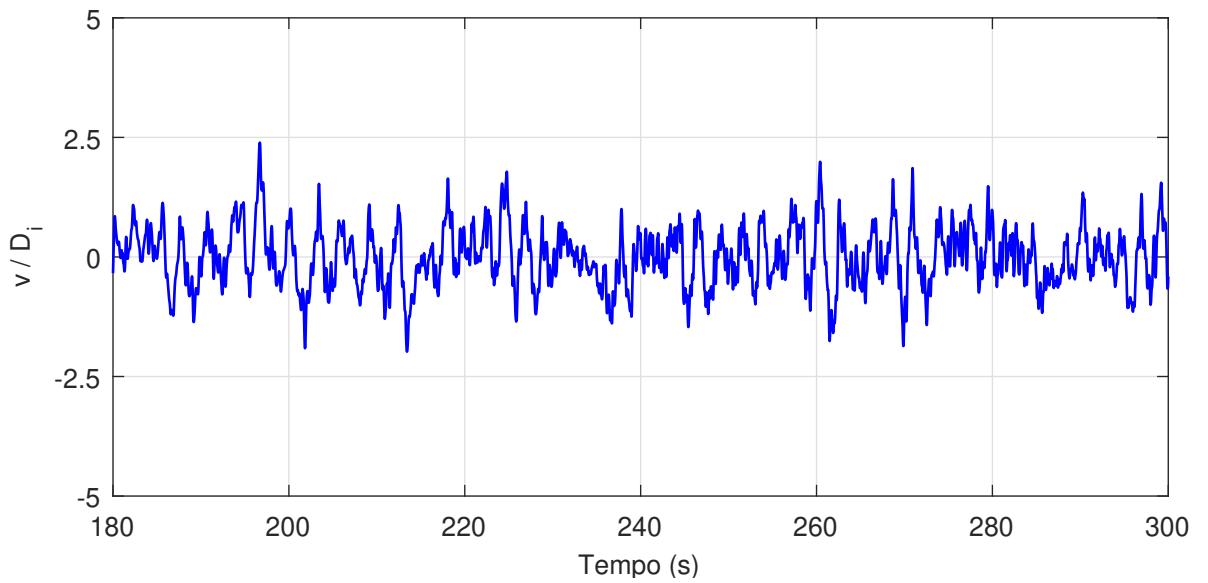
As Figuras 8.31 e 8.32 mostram os resultados experimentais e numéricos obtidos para a variável  $v/D_i$ , respectivamente. Figura 8.33 mostra a resposta em frequência da variável  $v/D_i$ .

Figura 8.31 - Resultado experimental para o deslocamento vertical adimensional do nó 51.



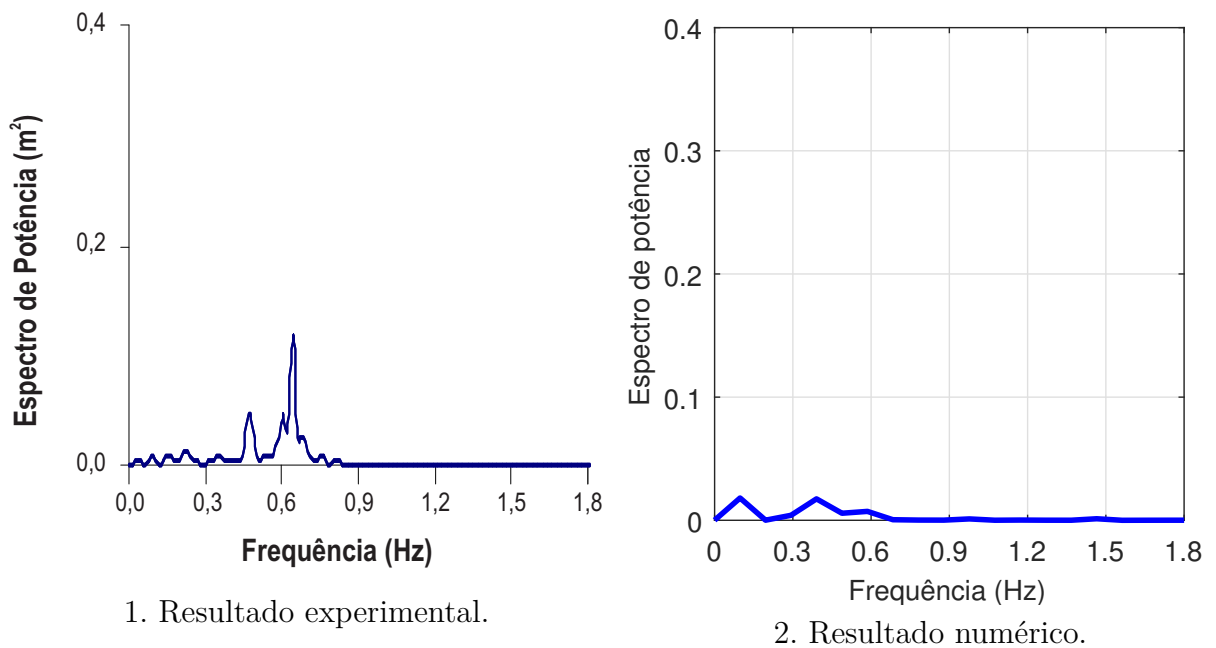
Fonte: Valdivia (2008).

Figura 8.32 - Resultado numérico para o deslocamento vertical adimensional do nó 51.



Fonte: Produção do autor.

Figura 8.33 - Comparação entre as respostas em frequência para a variável  $v/D_i$ .



1. Resultado experimental.

2. Resultado numérico.

Fonte: Produção do autor.

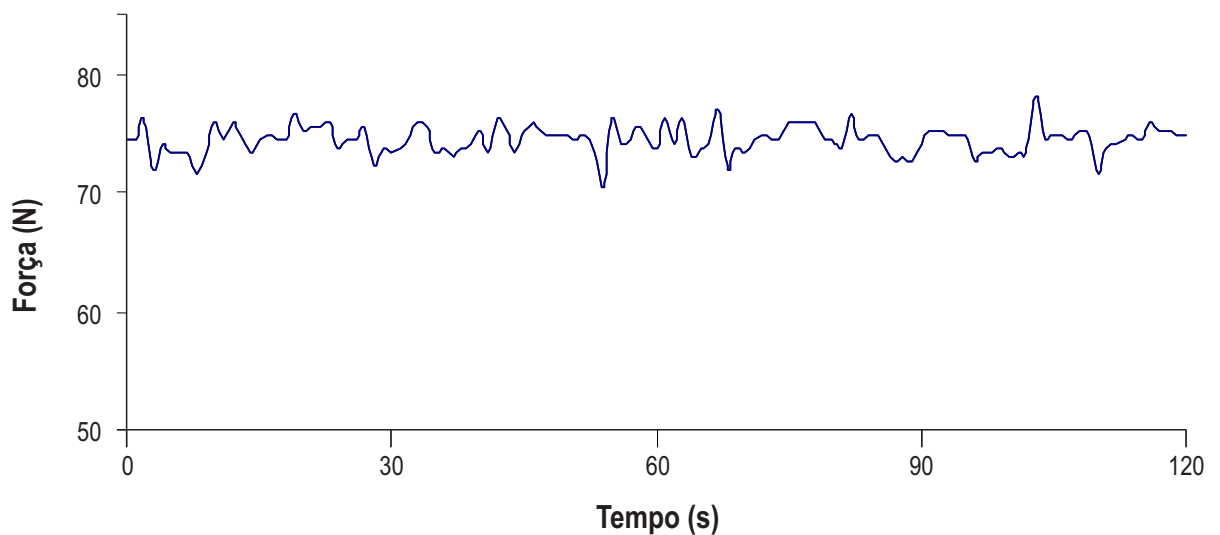
A partir da comparação das Figuras 8.31 e 8.32, pode-se observar a boa concordância entre as respostas obtidas para a variável  $v/D_i$ . No caso experimental a resposta da variável  $v/D_i$  chega a tomar valores de  $-4,5$  e  $+4,5$ , enquanto que na simulação numérica, esta chega a tomar valores de  $-2,0$  e  $+2,5$ . A partir da Figura 8.33, a frequência dominante no caso experimental é de  $0,65\text{Hz}$ , entanto que no caso numérico obteve-se uma frequência dominante de  $0,1\text{Hz}$ , seguido de uma segunda frequência igual a  $0,4\text{Hz}$ .

#### 8.4.2 Comparação da força axial no topo

A seguir, serão comparados os resultados experimentais e numéricos obtidos para a força axial no topo (nó 101). As Figuras 8.34 e 8.35 mostram os resultados experimentais e numéricos obtidos para a força axial no topo, respectivamente.

A partir das Figuras 8.34 e 8.35 pode-se observar a boa aproximação entre ambas as respostas. No caso numérico, a força axial oscila entre  $70\text{N}$  e  $78\text{N}$ , entanto que na simulação numérica, os valores da forças axial oscilam entre  $81\text{N}$  e  $70\text{N}$ .

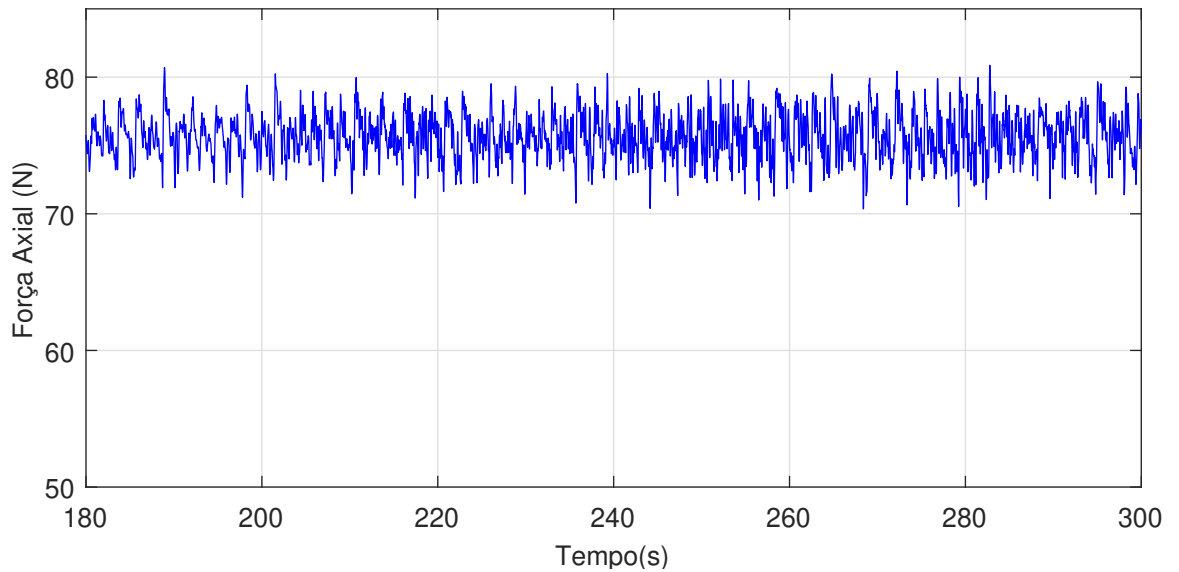
Figura 8.34 - Resultados experimentais obtidos para a força axial no topo.



Fonte: Valdivia (2008).



Figura 8.35 - Resultados numéricos obtidos para a força axial no topo.



Fonte: Produção do autor.

A partir das comparações realizadas, os resultados numéricos obtidos por meio da ferramenta computacional SLUGFLEX, em geral, mostram boa concordância em relação aos resultados experimentais obtidos por Valdivia. Por tanto, pode-se concluir que a verificação da ferramenta computacional SLUGFLEX é satisfatória.

### 8.5 Resultados numéricos riser real

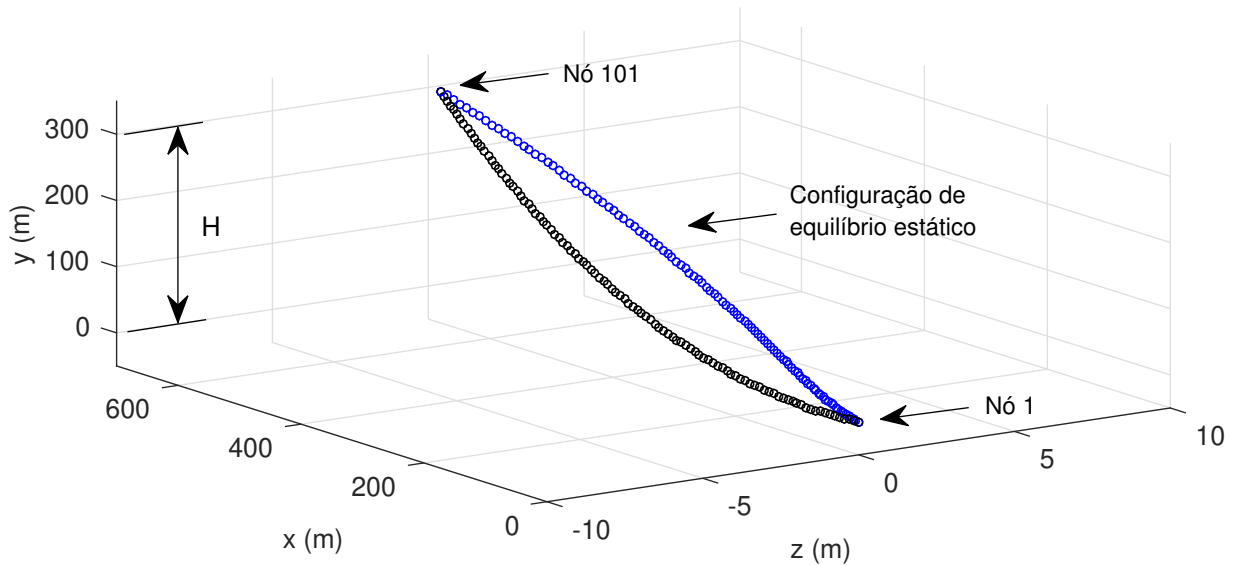
Após a validação da ferramenta computacional, a influência de um escoamento bifásico em padrão golfadas de líquido sobre um *riser* em catenária será estudada. O *riser*, tem um comprimento de 770 metros com uma seção transversal circular de diâmetro externo igual a 0,40m. e um diâmetro interno igual a 0,36m, um módulo de elasticidade de  $2,06 \times 10^{11} \text{N/m}^2$ , e uma densidade de  $7870 \text{kg/m}^3$ .

A densidade da água de mar é igual a  $1025 \text{kg/m}^3$ , enquanto que os coeficientes de arrasto, inércia e de massas adicionadas foram considerados iguais a 0,7, 2,0 e 1,0, respectivamente. O perfil de velocidade da água de mar foi modelado a partir de uma lei de potência, assumindo uma correnteza unidirecional e de acordo com *DNV-RP-C205-Rules and standards*, a qual é dada pela seguinte expressão:

$$V_{c(y)} = V_{c(H)} \left( \frac{y}{H} \right)^{1/7} \quad (8.1)$$

onde a variável  $V_{c(y)}$  representa a velocidade da água de mar a uma altura  $y$ , e a variável  $V_{c(H)}$  representa a velocidade da água de mar na superfície, a qual é considerada igual a 1m/s. A direção da correnteza é dada pelo vetor  $\{1, 0, 1\}^T$ . A configuração de equilíbrio estática do *riser*, a partir da qual é realizada a análise estrutural dinâmica, é mostrada na Figura 8.36, onde a linha preta representa a configuração de equilíbrio do *riser* sem considerar os efeitos devidos à correnteza.

Figura 8.36 - Configuração de equilíbrio estático do *riser* em catenária.



Fonte: Produção do autor.

O escoamento interno foi considerado como sendo uma mistura de água e gás. A densidade da água é  $998\text{kg/m}^3$ . O gás foi considerado como sendo ar, com uma densidade igual a  $1,21\text{kg/m}^3$ . Para estimar os valores das velocidades superficiais das fases líquida e gasosa, uma capacidade média de produção do *riser* de 180000 BPD (barris por dia) foi considerado. Para este estudo três casos são considerados, os quais são mostrados na Tabela 8.1.

Tabela 8.1 - Casos considerados para o escoamento em golfadas.

Caso	Velocidade superficial da fase líquida (m/s)	Velocidade superficial da fase gasosa (m/s)	Frequência do escoamento (Hz)	Tipo de célula
1	3	3	3,00	a
	3	6	2,50	b
	3	9	2,00	c
2	6	3	3,00	a
	6	6	2,50	b
	6	9	2,00	c
3	9	3	3,00	a
	9	6	2,50	b
	9	9	2,00	c

Fonte: Produção do autor.

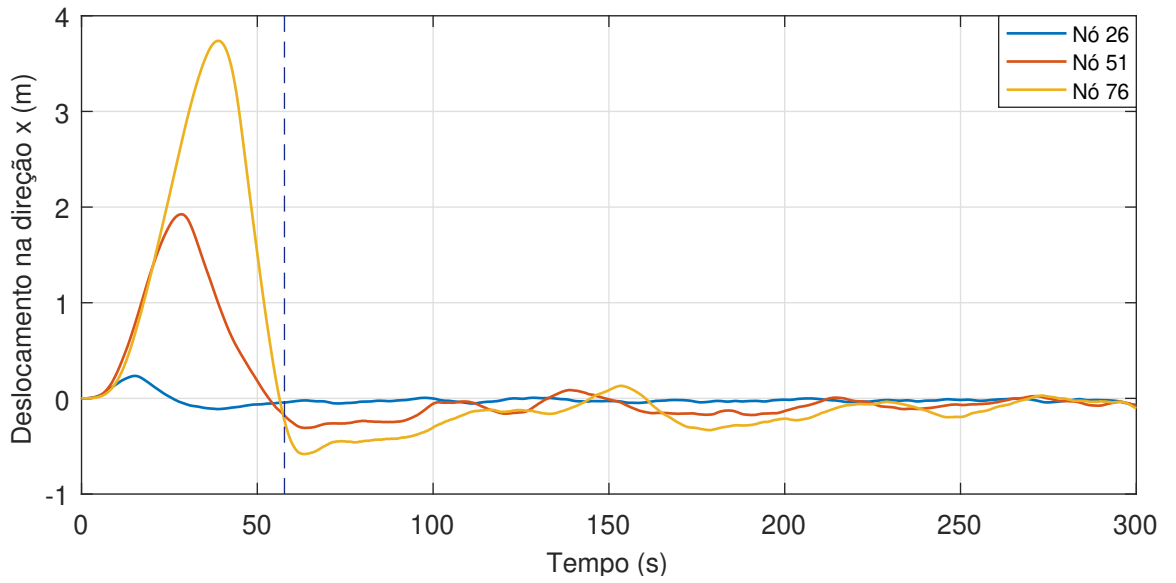
As propriedades mostradas na Tabela 8.1 permitem calcular as características da célula 0, a qual é originada cada vez que uma célula unitária ingressa no domínio computacional do escoamento, assim como explicado na seção 5.3.1. Em cada um dos casos simulados será considerado uma distribuição aleatória das células unitárias no seu ingresso ao *riser*, podendo escolher entre os tipos a, b e c.

As simulações iniciam com o *riser* cheio de água, tempo a partir do qual os pistões de líquido e as bolhas de gás do escoamento em golfadas iniciam seu movimento. Nas simulações, um tempo de 300 segundos foi configurado, com um passo de tempo de 0,01 segundos. Cem elementos finitos foram utilizados na discretização do *riser*.

A seguir serão mostrados os resultados para o caso 1: deslocamentos, força axial no topo, momentos de torção e momentos fletores. Logo, uma imposição de deslocamento vertical no topo será considerada, e finalmente, uma análise estrutural para diferentes valores da velocidade superficial da fase líquida do escoamento bifásico será realizada.

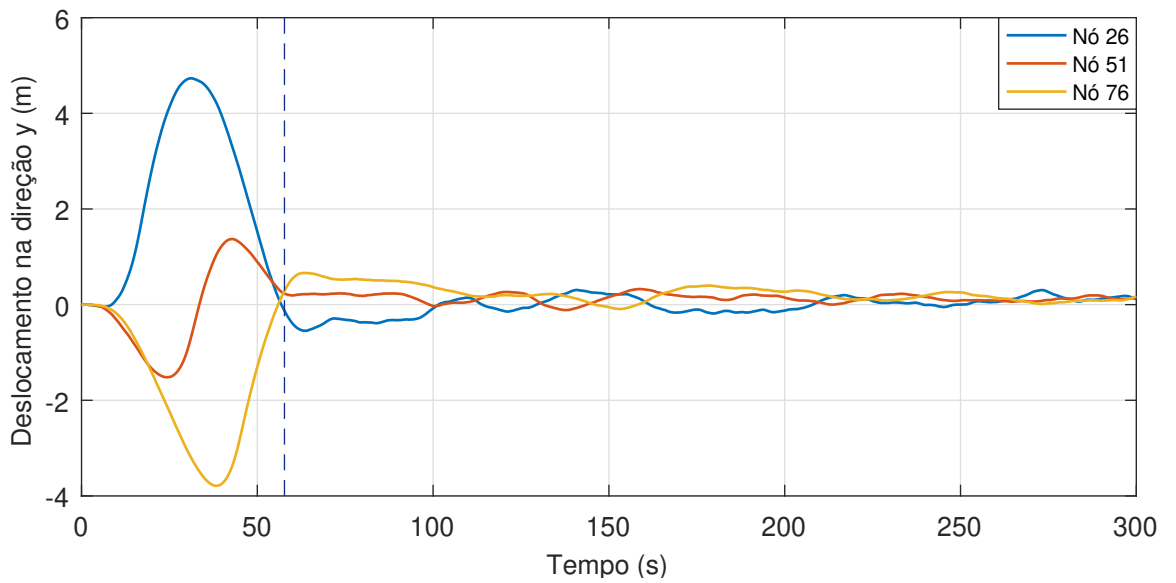
As Figuras 8.37, 8.38 e 8.39 mostram os resultados para os deslocamentos dos nós 26, 51 e 76 do *riser* na direção do eixo  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente. A linha vertical tracejada em cor azul, a qual se encontra no instante de tempo  $t = 57,2s$ , indica o momento em que a primeira bolha de gás a entrar no *riser* sai do mesmo, e a partir do qual, pode-se dizer que o *riser* está cheio de escoamento bifásico em golfadas.

Figura 8.37 - Deslocamentos dos nós 26, 51 e 76 na direção  $x$ .



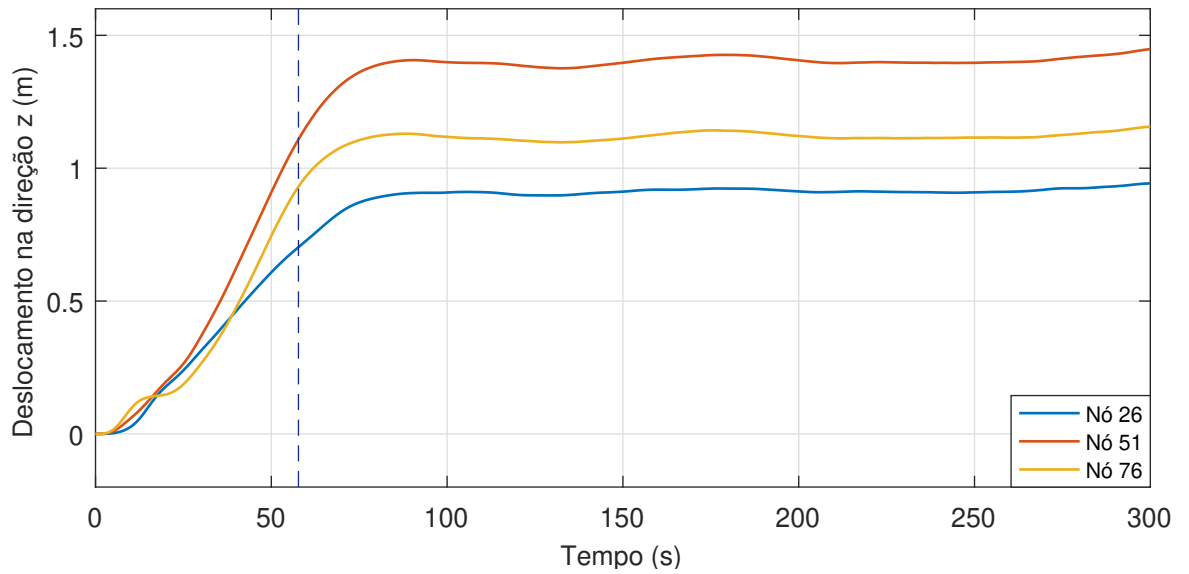
Fonte: Produção do autor.

Figura 8.38 - Deslocamentos dos nós 26, 51 e 76 na direção  $y$ .



Fonte: Produção do autor.

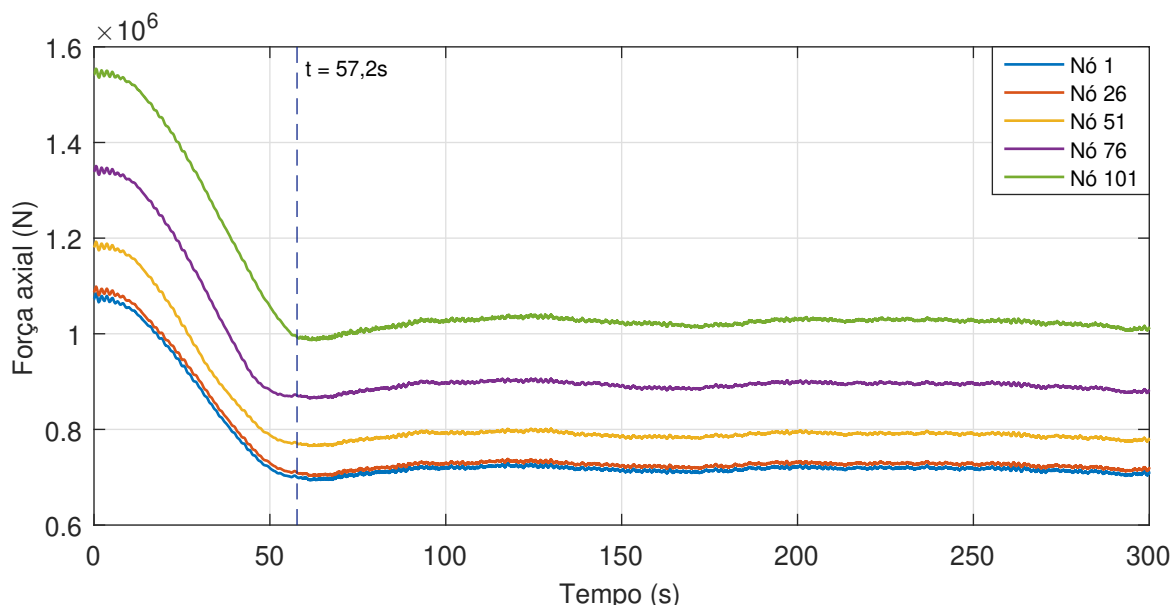
Figura 8.39 - Deslocamentos dos nós 26, 51 e 76 na direção  $z$ .



Fonte: Produção do autor.

Pode-se observar que os máximos valores de deslocamentos, nas direções dos eixos  $x$  e  $y$ , ocorrem durante o movimento da primeira bolha de gás do escoamento ao longo do *riser*; enquanto que na direção do eixo  $z$ , os valores máximos de deslocamentos ocorrem após a saída da primeira bolha de gás do *riser*. Após o instante de tempo  $t = 57,2s$ , os deslocamentos tendem a um mesmo valor, com pequenas amplitudes de oscilação.

Figura 8.40 - Força axial efetiva ao longo do *riser*.



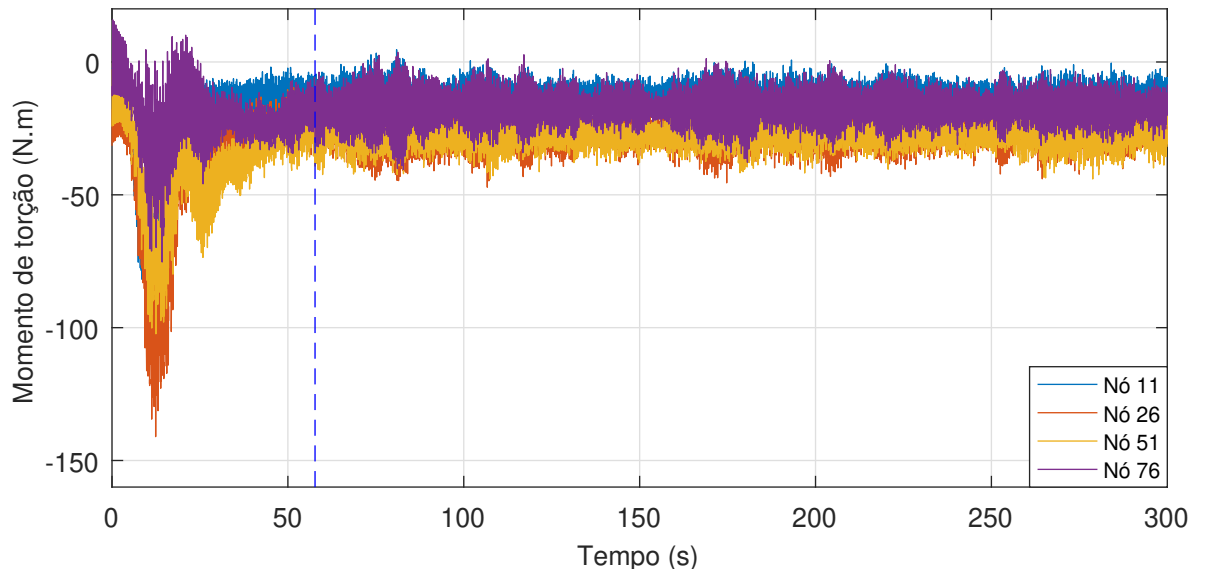
Fonte: Produção do autor.

A Figura 8.40 mostra os resultados obtidos para a força axial nos nós 1, 26, 51, 76, e 101. Como era esperado, a força axial se incrementa ao longo do *riser*. Considerando que inicialmente o *riser* está cheio de água, após o instante de tempo  $t = 0s$  os valores da força axial efetiva para cada nó diminuem até o instante de tempo  $t = 57,2s$ , isto porque o peso do escoamento no interior do *riser* diminui.

Após o instante de tempo  $t = 57,2s$  a resposta da força axial é bem comportada, e suas amplitudes de oscilação se incrementam à medida que nos aproximamos do topo do *riser*. Foram encontradas amplitudes de oscilação de 12,56kN, 12,70kN, 13,44kN, 14,93kN e 16,95kN para os nós 1, 26, 51, 76 e 101, respectivamente.

Os momentos do *riser* são obtidos a partir do sistema de coordenadas local associado a cada elemento de *riser*. A partir da Figura 3.4, o momento  $M_1$  é o momento de torção o qual ocorre ao redor do eixo  $\mathbf{e}_1$ ; enquanto que os momentos  $M_3$  e  $M_2$  são momentos fletores os quais ocorrem ao redor de eixos paralelos à  $\mathbf{e}_2$  e  $\mathbf{e}_3$ , respectivamente. A seguir, serão mostrados os resultados obtidos para os momentos de torção e fletores para os nós 11, 26, 51 e 76, onde o nó 11 é o ponto de máxima curvatura do *riser*.

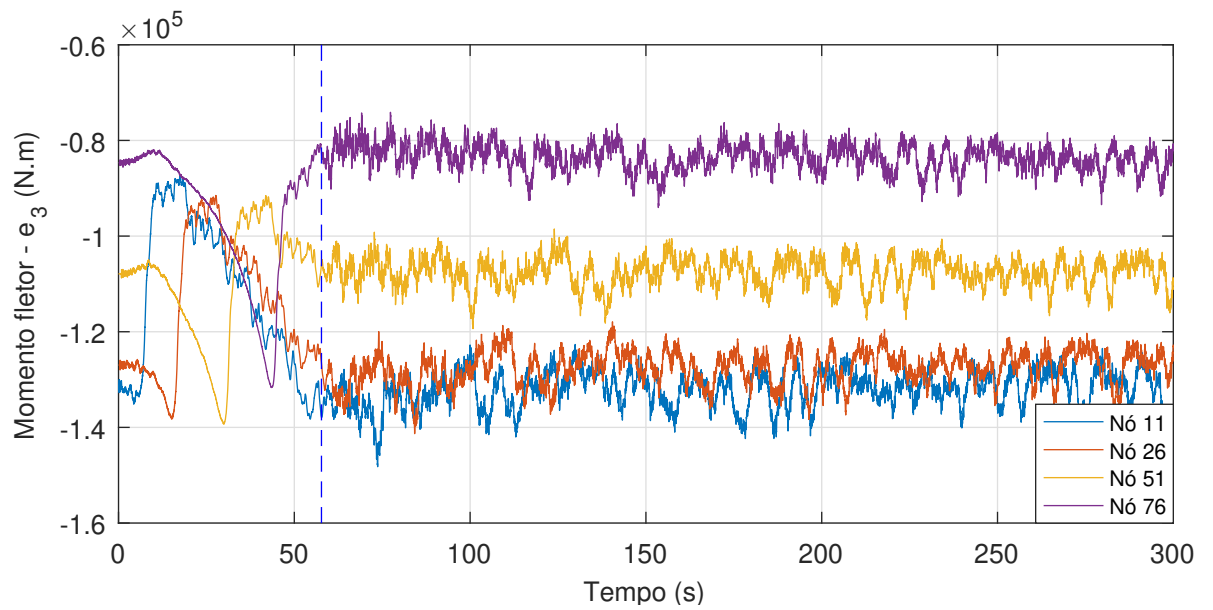
Figura 8.41 - Momentos de torção aplicados nos nós 11, 26, 51 e 76.



Fonte: Produção do autor.

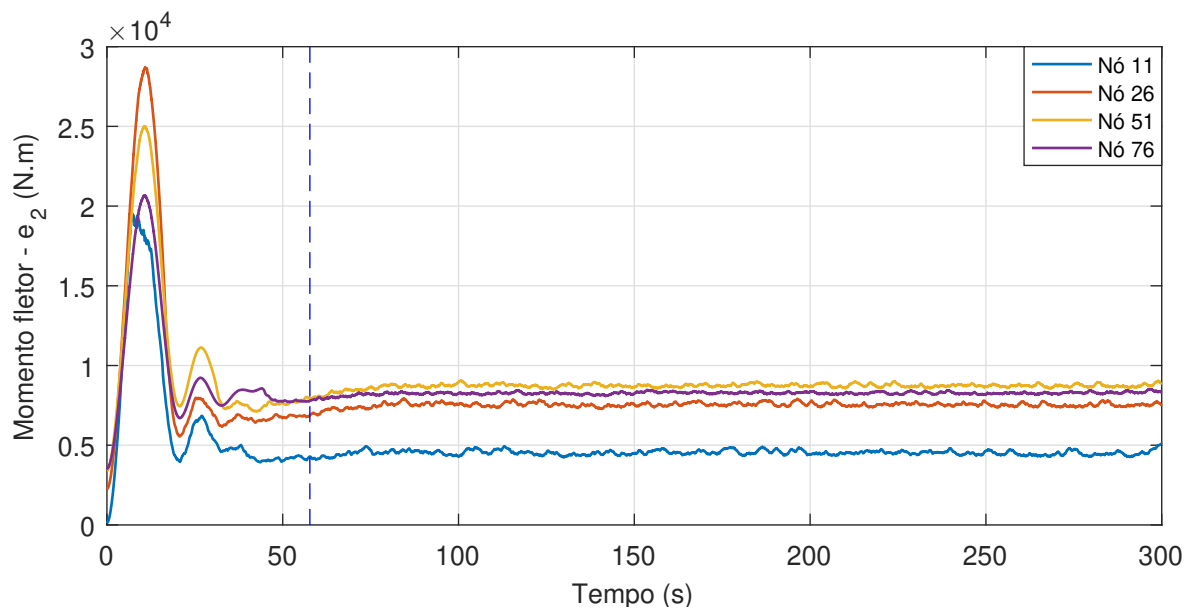
A Figura 8.41 mostra os resultados para os momentos de torção, os quais têm valores bastante pequenos quando comparados com os momentos fletores, os quais são mostrados nas Figuras 8.42 e 8.43. Os efeitos de torção são devidos à dinâmica do escoamento interno e à correnteza.

Figura 8.42 - Momento fletor referente ao eixo  $e_3$  nos nós 11, 26, 51 e 76.



Fonte: Produção do autor.

Figura 8.43 - Momento fletor referente ao eixo  $e_2$  nos nós 11, 26, 51 e 76.



Fonte: Produção do autor.



A partir da Figura 8.42, os momentos fletores aplicados sobre o nó 11 ao redor de um eixo paralelo a  $\mathbf{e}_3$  são os de maior valor, tanto no início da simulação como no final da mesma. O valor dos momentos fletores na Figura 8.42 aumentam à medida que o nó em análise se aproxima do ponto de máxima curvatura (nó 11). Já os momentos fletores aplicados ao redor de um eixo paralelo a  $\mathbf{e}_2$ , mostrados na Figura 8.43, têm um comportamento diferente, além de valores mais baixos.

### 8.5.1 Imposição de deslocamentos

A seguir, serão determinados os deslocamentos, força axial e momentos fletores para um *riser* em catenária quando uma imposição de deslocamentos é aplicada no topo. O deslocamento imposto é calculado a partir da seguinte equação:

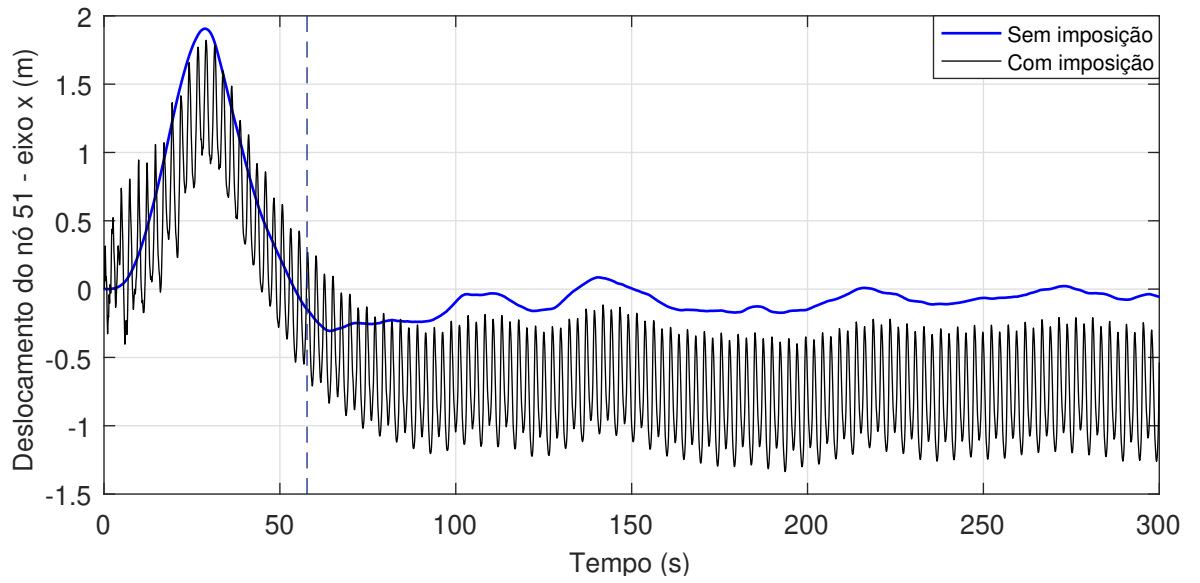
$$h_{(t)} = A_s \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi}{T_e} t \right) \quad (8.2)$$

onde  $h_{(t)}$  é o deslocamento vertical do topo do *riser*,  $A_s$  é a amplitude de oscilação do sinal,  $T_e$  é o período do sinal, e  $t$  é o instante de tempo. Para este trabalho, a amplitude de oscilação do sinal será considerado igual a 1,2m, enquanto que o período do sinal toma um valor de 2,4s.

Para poder entender as mudanças que ocorrem devido à aplicação de uma imposição de deslocamentos no topo de um *riser* em catenária, os resultados numéricos obtidos serão comparados com os obtidos para um *riser* em catenária sem imposição de deslocamentos. Para isto, os dados utilizados na seção 8.5, caso 1, são considerados.

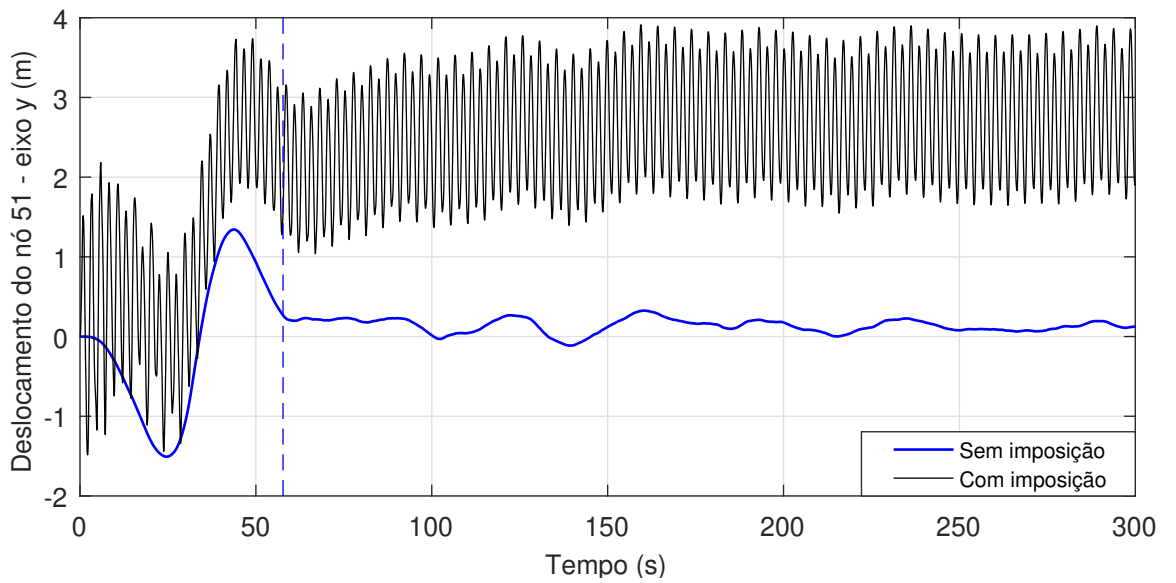
As Figuras 8.44, 8.45 e 8.46 mostram os deslocamentos do nó 51 nas direções dos eixos  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  e  $\mathbf{z}$ , respectivamente.

Figura 8.44 - Comparação dos deslocamentos do nó 51 na direção  $x$ .



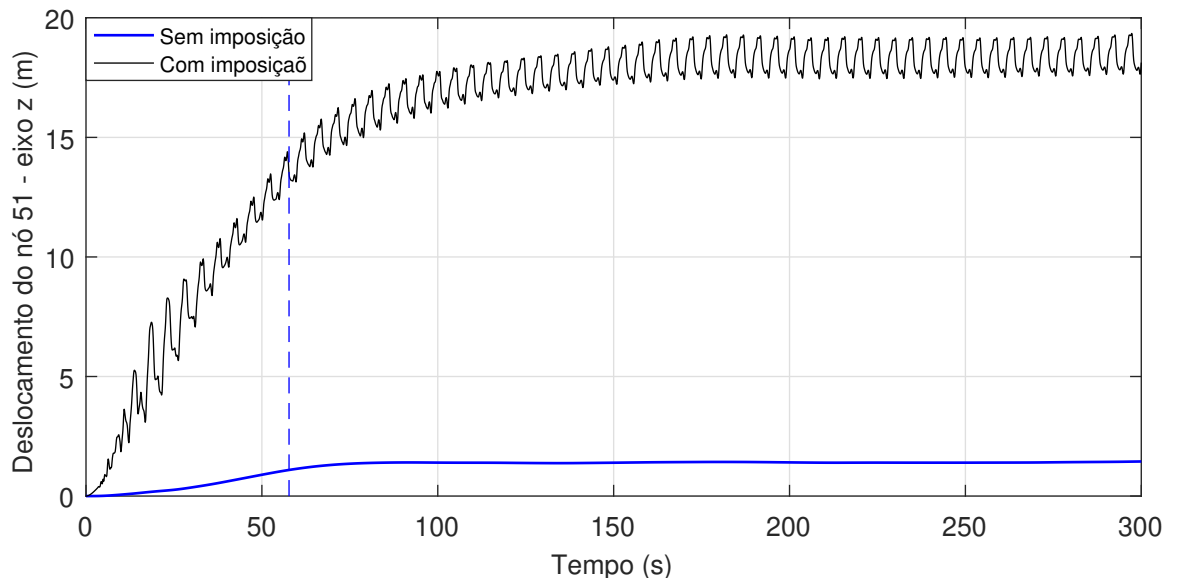
Fonte: Produção do autor.

Figura 8.45 - Comparação dos deslocamentos do nó 51 na direção  $y$ .



Fonte: Produção do autor.

Figura 8.46 - Comparação dos deslocamentos do nó 51 na direção  $z$ .

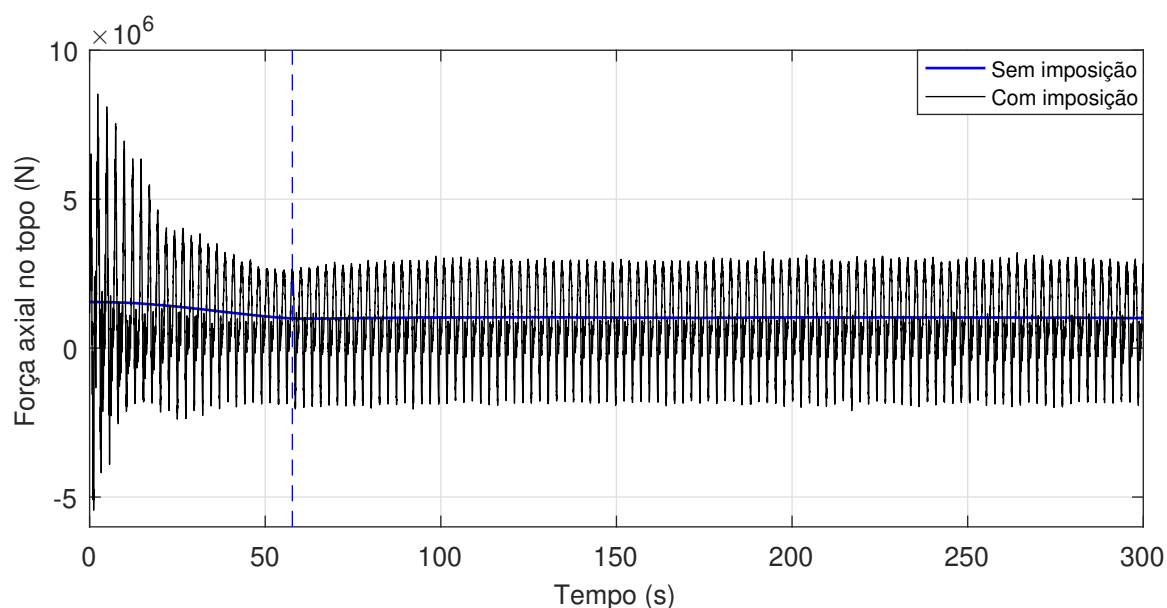


Fonte: Produção do autor.

Vê-se nas Figura 8.44, 8.45 e 8.46, que a aplicação de deslocamentos no topo do *riser* resulta em um incremento no valor das amplitudes de oscilação dos deslocamentos, por exemplo: no caso do deslocamento na direção  $x$  houve um incremento no valor da amplitude de oscilação da resposta de aproximadamente 0,34m; no caso do deslocamento na direção  $y$  houve um incremento no valor da amplitude de oscilação de aproximadamente 1m.; enquanto que no caso do deslocamento na direção  $z$ , a imposição gera amplitudes de oscilação de 0,85m., e além disso, a imposição de deslocamentos no topo produz um enorme deslocamento médio da resposta de aproximadamente 17 m.

A Figura 8.47 mostra a comparação entre os resultados obtidos para a força axial no topo, considerando e sem considerar a imposição de deslocamentos no topo do *riser*.

Figura 8.47 - Comparação da força axial no topo.

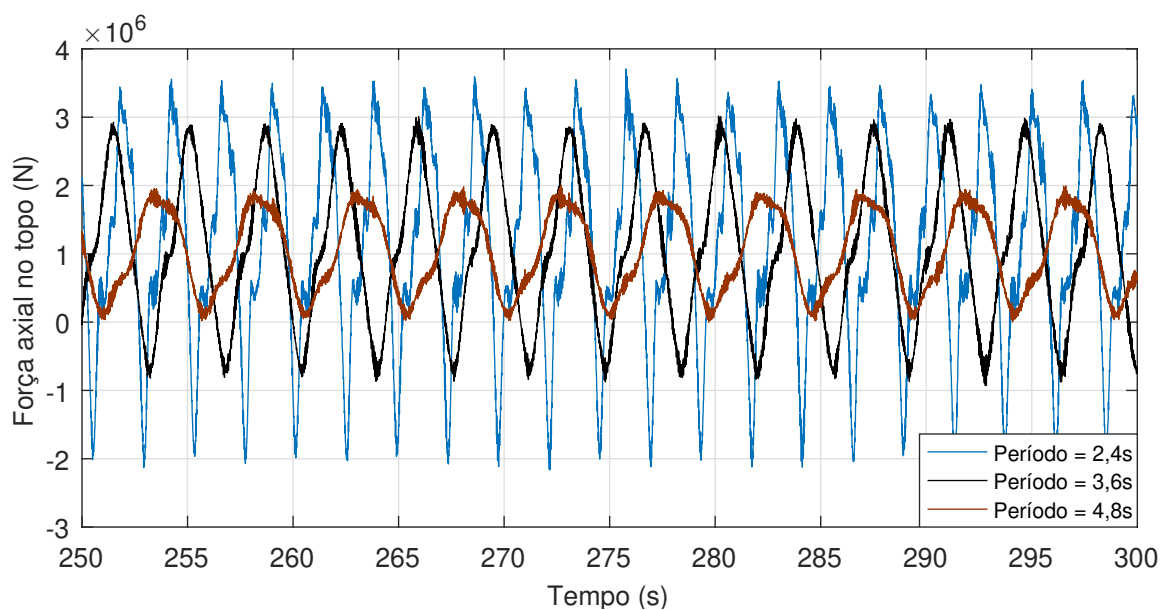


Fonte: Produção do autor.

De acordo com a Figura 8.47, no intervalo entre  $t = 0\text{s}$  e  $t = 57,2\text{s}$ , o valor da força axial no topo atinge valores bastante altos, de até 8530kN. Após o instante de tempo  $t = 57,2\text{s}$ , o aumento no valor da amplitude de oscilação foi calculado em 2600kN. A partir deste resultado, conclui-se que é muito importante, no caso de considerar imposição de deslocamento no topo do *riser*, fazer uma análise detalhada sobre os esforços que ocorrem no *riser* durante a primeira etapa do desenvolvimento do escoamento bifásico, isto devido aos grandes carregamentos atuantes sobre a estrutura.

A seguir, serão analisados os efeitos devidos às mudanças no valor do período  $T_e$ , na Equação (8.2), sobre a força axial no topo, para o qual três diferentes valores de período do sinal da imposição de deslocamentos serão considerados: 2,4Hz, 3,6Hz e 4,8Hz.

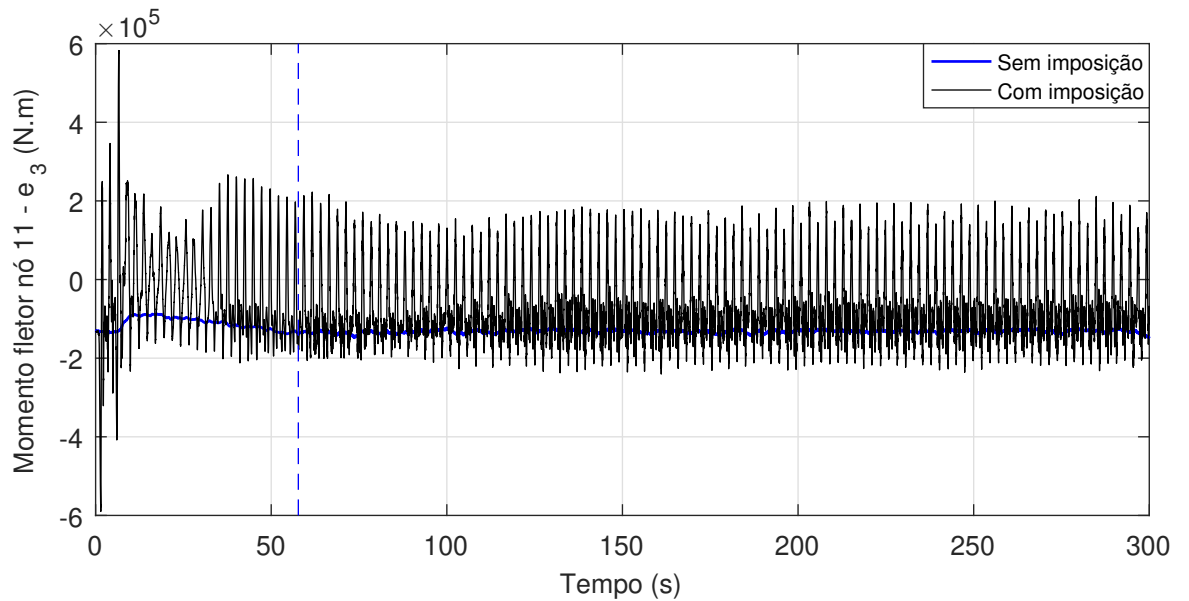
Figura 8.48 - Força axial no topo para diferentes valores do período  $T_e$ .



Fonte: Produção do autor.

A partir da Figura 8.48, se observa que um incremento no valor do período do sinal resulta em uma diminuição na amplitude de oscilação da resposta; por exemplo, para períodos de 2,4s, 3,6s e 4,8s foram calculadas amplitudes de oscilação de 2800kN, 1850kN e 900kN, respectivamente. A Figura 8.49 mostra a comparação entre os resultados obtidos para o momento fletor do nó 11, ponto de máxima curvatura.

Figura 8.49 - Momento fletor no nó 11 referente ao eixo  $e_3$ .

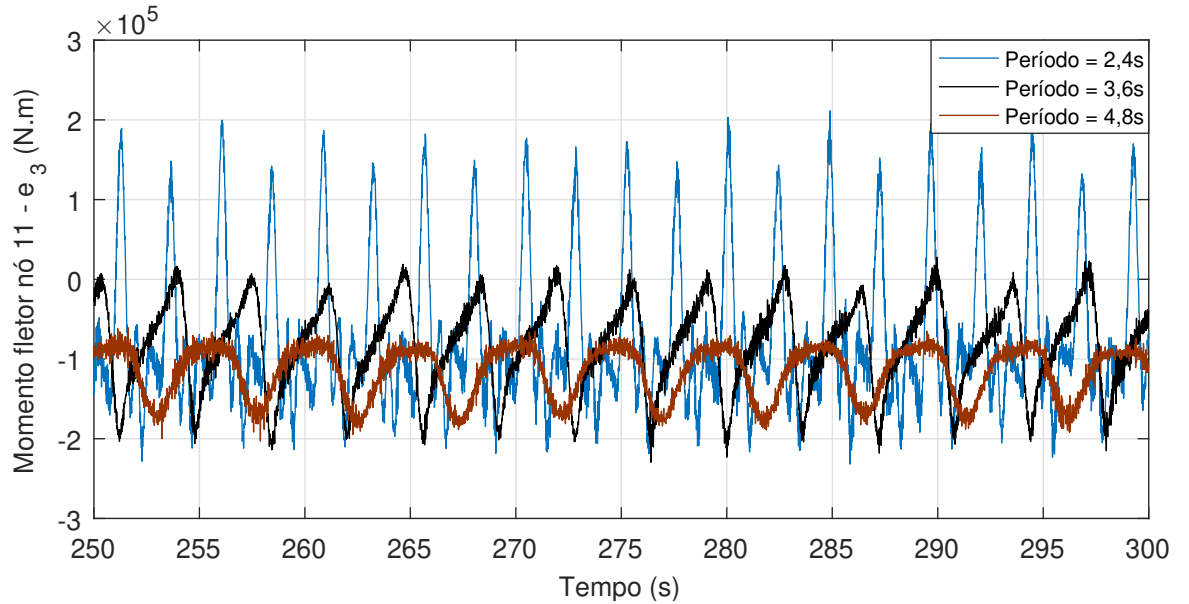


Fonte: Produção do autor.

Os resultados mostram um enorme incremento nas amplitudes de oscilação do momento fletor do nó 11, quando são aplicados deslocamentos impostos no topo do *riser*; inclusive, o momento fletor atinge valores bastante altos no intervalo de tempo de 0s a 57,2s, de até 580kN-m. Após o instante de tempo  $t = 57,2$ s, pode-se calcular, em relação à simulação sem imposição de deslocamentos, um aumento de 200kN-m no valor da amplitude de oscilação da resposta.

Como realizado anteriormente, os efeitos produzidos pelas mudanças no valor do período  $T_e$  sobre o momento fletor do nó 11 serão analisados, para o qual três diferentes valores para o período  $T_e$  serão considerados: 2,4Hz, 3,6Hz e 4,8Hz.

Figura 8.50 - Momento fletor no nó 11, referente ao eixo  $e_3$ , para diferentes valores do período  $T_e$ .



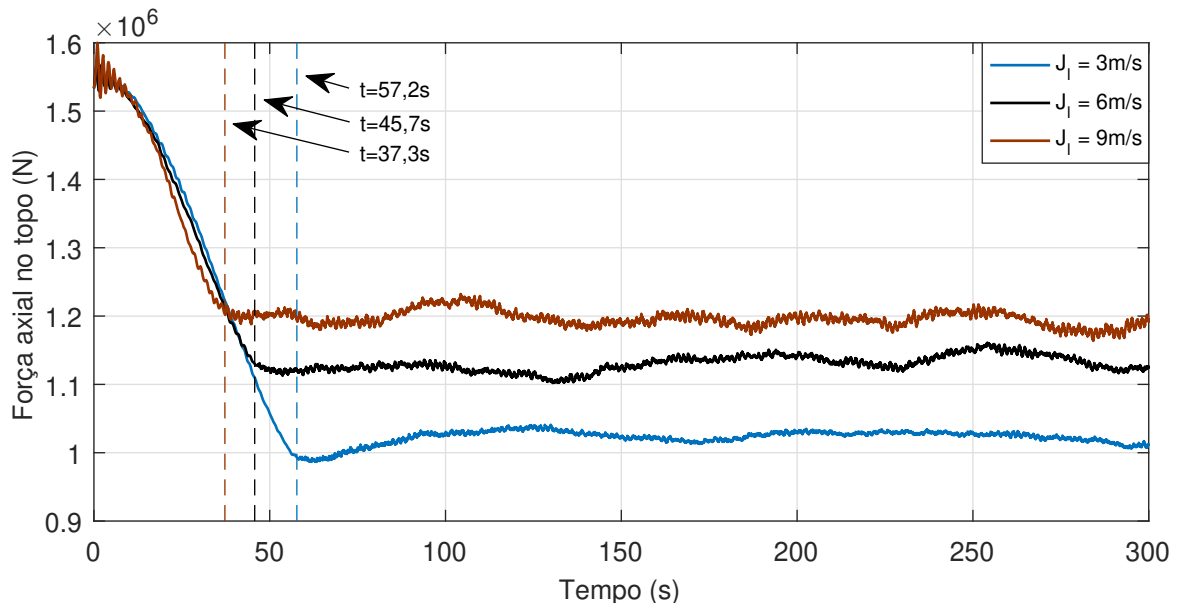
Fonte: Produção do autor.

Assim como ocorrido com a força axial, um incremento no valor do período do sinal resulta em uma diminuição na amplitude de oscilação da resposta; por exemplo, para períodos de 2,4Hz, 3,6Hz e 4,8Hz foram calculadas amplitudes de oscilação da resposta de 200kN-m, 110kN-m e 50kN-m, respectivamente.

### 8.5.2 Análise estrutural para diferentes valores da velocidade superficial do líquido

A Figura 8.51 mostra os resultados para a força axial no topo para os casos 1, 2 e 3 da Tabela 8.1. As linhas tracejadas indicam o instante de tempo em que a primeira bolha de gás que entrou no *riser* abandona o mesmo.

Figura 8.51 - Força axial no topo para diferentes valores de  $J_l$ .

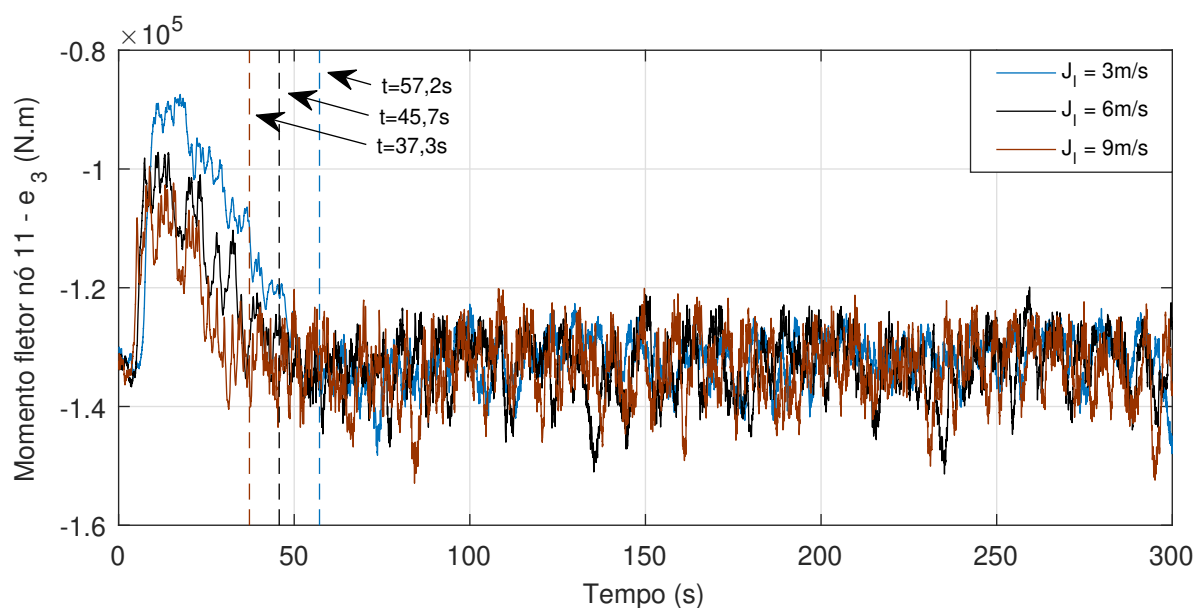


Fonte: Produção do autor.

A partir da Figura 8.51, se observa que um incremento no valor da velocidade superficial da fase líquida,  $J_l$ , resulta em um incremento no valor da força axial no topo. Ao incrementar o valor de  $J_l$  de 3m/s a 6m/s, um incremento médio de 123kN na força axial no topo foi calculado, enquanto ao incrementar de 6m/s a 9m/s, um incremento médio de 51,9kN na força axial no topo foi calculado.



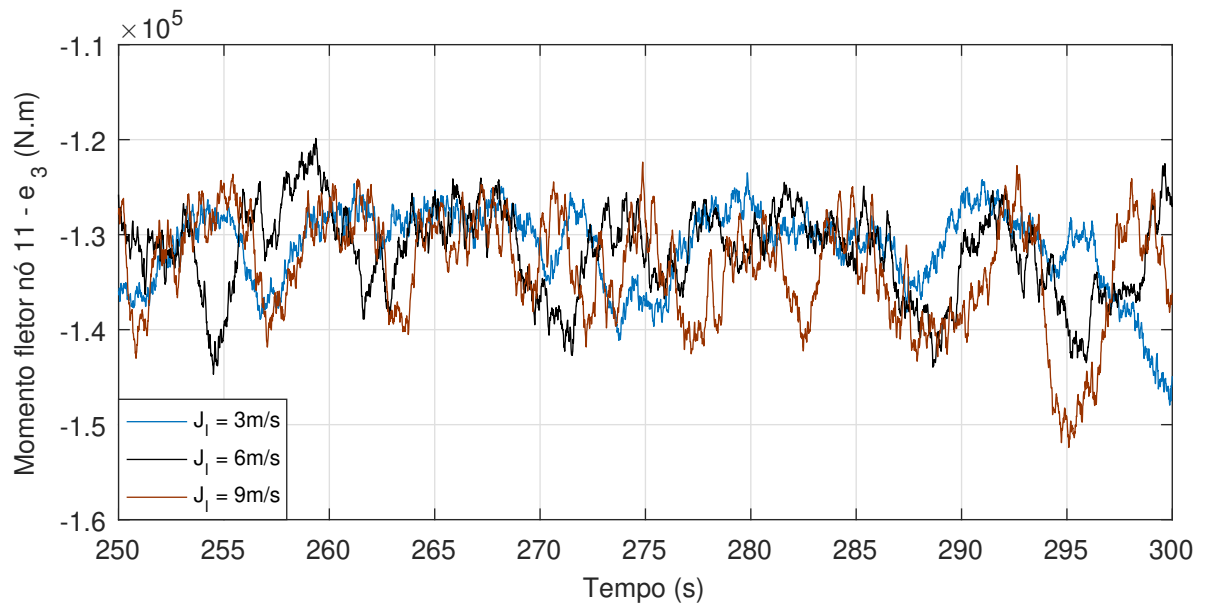
Figura 8.52 - Momento fletor nó 11, referente ao eixo  $e_3$ , para diferentes valores de  $J_l$ .



Fonte: Produção do autor.

A Figura 8.52 mostra os valores do momento fletor no nó 11 para diferentes valores da velocidade superficial da fase líquida do escoamento. Nas simulações, observa-se que os valores máximos do momento fletor no nó 11 ocorrem após a saída da primeira bolha de gás do *riser*. A Figura 8.53 mostra com maior detalhe os momentos fletores no nó 11.

Figura 8.53 - Momento fletor nó 11, referente ao eixo  $e_3$ , para diferentes valores de  $J_l$ , últimos 50s.



Fonte: Produção do autor.

### 8.5.2.1 Comentários em relação às simulações numéricas

Para as simulações numéricas foi utilizado um computador com as seguintes características:

- Processador: Intel(R) Core i7
- Memória instalada: 8,00 GB
- Tipo de sistema: Sistema operacional de 64 bits

O tempo de simulação foi configurado em 300 segundos, com um passo de tempo de 0,01s. Nas simulações, 100 elementos finitos de igual comprimento foram utilizados. O tempo médio de processamento para cada uma das simulações foi de aproximadamente 8 horas.

## 9 CONCLUSÕES

Neste trabalho foi desenvolvida a ferramenta SLUGFLEX, a qual calcula a resposta dinâmica tridimensional de *risers* flexíveis em catenária sob os efeitos de um escoamento bifásico líquido-gás em padrão golfadas de líquido. A ferramenta computacional foi desenvolvida sobre a base de dois códigos computacionais: o código de análise estrutural dinâmico e o código que calcula o desenvolvimento do escoamento em golfadas ao longo do *riser* em catenária. Ambos os códigos trabalham de forma conjunta, trocando informação durante todo o tempo da simulação.

Para validar os resultados obtidos por meio da ferramenta computacional, previamente as sub-rotinas e códigos computacionais, os quais são utilizados durante todo o tempo da simulação, passaram por um processo de verificação, o qual consistiu na comparação dos resultados numéricos com dados da presente literatura. Os códigos e sub-rotinas verificados são:

- Código computacional para análise tridimensional dinâmico de estruturas;
- Sub-rotina que calcula as forças devidas ao escoamento no interior de um *riser*;
- Sub-rotina que calcula as forças devidas à correnteza;

Uma vez que a verificação do código e das sub-rotinas computacionais foi satisfatória, o seguinte passo foi a validação da ferramenta computacional SLUGFLEX, a qual foi realizada mediante a comparação dos resultados numéricos com os resultados experimentais obtidos por Valdivia nas instalações do LabPetro na UNICAMP. Neste processo de validação, os resultados numéricos mostraram uma excelente concordância com os resultados experimentais, podendo dizer ao final desta comparação, que a validação tem sido satisfatória.

Uma vez validada a ferramenta computacional SLUGFLEX, resultados numéricos foram obtidos para o caso de um *riser* em catenária de dimensões reais. Além de considerar os efeitos devidos ao escoamento interno e os efeitos de uma correnteza, a ferramenta SLUGFLEX também considera os efeitos de deslocamentos da plataforma de produção de petróleo. Logo, a partir dos resultados obtidos, as seguintes conclusões foram obtidas:

1. De acordo com os resultados obtidos, os pontos críticos de um *riser* em catenária encontram-se no topo do *riser* e no ponto de máxima curvatura. Isto porque o valor máximo da força axial ocorre no topo do *riser*, enquanto os máximos valores dos momentos fletores ocorrem no ponto de máxima curvatura. Por tanto, esse dois pontos deverão ser monitorados com frequência para evitar a ocorrência de esforços indesejáveis na estrutura.
2. Durante as simulações realizadas considerando os deslocamentos da plataforma de produção de petróleo, obteve-se como resultado incrementos importantes nas amplitudes de oscilação da resposta estrutural dos deslocamentos, da força axial, e dos momentos fletores ao longo do *riser*. Este resultado é de particular interesse, isto porque os deslocamentos da plataforma sempre acontecem neste tipo de esquema. Por outro lado, também foi analisada a influência do período do sinal dos deslocamentos da plataforma sobre a força axial e sobre o momento fletor, obtendo como resultado que à medida que o período do sinal aumenta, as amplitudes de oscilação da força axial e do momento fletor diminuem.
3. Em seguida, foi analisada a influência da velocidade superficial da fase líquida sobre a resposta estrutural do *riser* em catenária. A partir desta análise, encontrou-se que os aumentos na velocidade superficial da fase líquida do escoamento geram aumentos no valor da força axial ao longo de todo o *riser*. Por outro lado, o incremento da velocidade superficial da fase líquida não tem um efeito importante sobre o momento fletor.
4. Por último, a partir das simulações realizadas conclui-se: que as forças devidas ao escoamento interno que mais impacto têm sobre a dinâmica estrutural do *riser* são as devidas à aceleração local e à aceleração de corpo rígido . As forças devidas à aceleração de Coriolis, só tem um efeito importante sobre a dinâmica do *riser* a altas velocidades do escoamento interno, coisa que não acontece nos *risers* porque as velocidades de operação são moderadas. Por outro lado, as forças do escoamento devidas à aceleração angular tiveram um efeito desprezível sobre a resposta dinâmica do *riser*.

## 9.1 Trabalhos futuros

### 9.1.1 Análise estrutural

Nos futuros trabalhos, além dos efeitos considerados neste trabalho para o cálculo da resposta dinâmica estrutural do *riser*, efeitos como a interação do *riser* com o solo marinho, ou vibração induzida por vórtices (VIV) deverão ser tomadas em consideração. Ambos os efeitos mencionados foram estudados pelos pesquisadores em mecânica de *risers*, porém ainda não foram acoplados com um código de desenvolvimento do escoamento.

Uma desvantagem da ferramenta computacional, é que só trabalha com *risers* em catenária; motivo pelo qual, outros tipos de configuração deverão ser consideradas, como por exemplo: *risers* em configuração *lazy-wave*, *risers* na configuração tipo S, *risers* híbridos, entre outros.

### 9.1.2 Escoamento bifásico

Para simular o escoamento bifásico em padrão golfadas de líquido, um modelo matemático mais completo deverá ser proposto e validado. Entre as principais desvantagens desta ferramenta computacional tem-se: considerar a região da bolha de Taylor como uma região de fluido estratificado, considerar que a fase líquida do escoamento é não-aerada, e por último, considerar que a altura do filme de líquido permanece constante durante seu desenvolvimento no interior do *riser*. Por tanto, uma das sugestões para futuros trabalhos é considerar a equação de conservação da quantidade de movimento para o escoamento na direção perpendicular à direção do fluxo.



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALMEIDA, V. R.; CONTE, M. G.; COZIN, C.; BARBUTO, F.; MORALES, R. E. Numerical simulation of two-phase slug flow from horizontal to upward inclined pipe using a hybrid code based on slug tracking and slug capturing methodologies. In: JOURNEYS IN MULTIPHASE FLOWS, 4., 2017. **Proceedings ...** São Paulo: ABCM, 2017. 16
- ALMROTH, B. O.; BROGAN, F. **The STAGS computer code**. Washington: NASA, 1978. 38 p. 9
- ALVES, J. **A mistificação do pré-sal está afundando o Brasil**. 2015. Disponível em: <<https://www.ecodebate.com.br/2015/04/08/>>. Acesso em: 20 fev. 2019. 2
- ARGYRIS, J. An excursion into large rotations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 32, n. 1-3, p. 85–155, 1982. 9, 25
- ATHISAKUL, C.; MONPRAPUSSORN, T.; CHUCHEEPSAKUL, S. A variational formulation for three-dimensional analysis of extensible marine riser transporting fluid. **Ocean Engineering**, v. 38, n. 4, p. 609–620, 2011. 11
- BAI, Y.; BAI, Q. **Subsea pipelines and risers**. Oxford: Elsevier, 2005. 840 p. 72
- BARNEA, D.; TAITEL, Y. A model for slug length distribution in gas-liquid slug flow. **International Journal of Multiphase Flow**, v. 19, n. 5, p. 829–838, 1993. 14, 15
- BARRE, F.; BERNARD, M. The cathare code strategy and assessment. **Nuclear Engineering and Design**, v. 124, n. 3, p. 257–284, 1990. 13
- BATHE, K.-J. **Finite element procedures**. New Jersey: Prentice Hall, 2006. 1037 p. 11, 113
- BELTRÁN, F.; CERROLAZA, M. Análisis dinámico de estructuras sometidas a cargas no lineales. **Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería**, v. 5, n. 4, p. 473–502, 1989. 34, 35
- BENDIKSEN, K. H.; MAINES, D.; MOE, R.; NULAND, S. The dynamic two-fluid model olga: theory and application. **SPE Production Engineering**, v. 6, n. 2, p. 171–180, 1991. 14

BORDALO, S. N.; MOROOKA, C. K.; OLIVEIRA, A. P. Modeling the forces induced by the two-phase flow on deep water production risers. In: SPE ARTIFICIAL LIFT CONFERENCE, 2015. **Proceedings ...** Salvador, Bahia: Society of Petroleum Engineers, 2015. 17

CHAI, Y. T.; VARYANI, K. S. An absolute coordinate formulation for three-dimensional flexible pipe analysis. **Ocean Engineering**, v. 33, n. 1, p. 23–58, 2006. 10

CHATJIGEORGIU, I. K. Hydroelastic response of marine risers subjected to internal slug-flow. **Applied Ocean Research**, v. 62, p. 1–17, 2017. 17, 184

CHEN, S. S.; JENDRZEJCZYK, J. A. General characteristics, transition, and control of instability of tubes conveying fluid. **The Journal of the Acoustical Society of America**, v. 77, n. 3, p. 887–895, 1985. 127, 138

CHOPRA, A. K. **Dynamics of structures: theory and applications to earthquake engineering**. 4. ed. New Jersey: Prentice Hall, 2012. 944 p. 109

CHUCHEEPSAKUL, S.; HUANG, T.; MONPRAPUSSORN, T. Influence of transported fluid on behavior of an extensible flexible riser/pipe. In: INTERNATIONAL OFFSHORE AND POLAR ENGINEERING CONFERENCE, 9., 1999. **Proceedings ...** Brest, France: International Society of Offshore and Polar Engineers, 1999. 7

CRISFIELD, M. A. A consistent co-rotational formulation for non-linear, three-dimensional, beam-elements. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 81, n. 2, p. 131–150, 1990. 9, 37, 42

\_\_\_\_\_. **Nonlinear finite element analysis of solids and structures: Volume 2: advanced topics**. West Sussex: John Wiley & Sons, 1997. 494 p. 24, 37, 38, 40, 41, 45, 54

DAS, I. A. F. **The characteristics and forces due to slugs in an'S' shaped riser**. 190 p. Thesis (Doctoral) — Cranfield University, Cranfield, 2003. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/1826/3655>>. Acesso em: 25 ago. 2015. 16

DUKLER, A. E.; HUBBARD, M. G. A model for gas-liquid slug flow in horizontal and near horizontal tubes. **Industrial & Engineering Chemistry Fundamentals**, v. 14, n. 4, p. 337–347, 1975. 12

FATMALA, N. **Subsea pipeline engineering**. 2016. Disponível em: <<http://nfatmala.blogspot.com/2016/02/flexible-pipe.html>>. 3



FERNANDES, R. C.; SEMIAT, R.; DUKLER, A. E. Hydrodynamic model for gas-liquid slug flow in vertical tubes. **AICHE Journal**, v. 29, n. 6, p. 981–989, 1983. 12

GRANADOS, S. J. **Comportamento estático tridimensional de vigas submetidas a carregamentos no topo de tração e torção**. 74 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) — Universidade Federal do ABC, Santo André, 2017. 9

HSIAO, K. M.; LIN, J. Y.; LIN, W. Y. A consistent co-rotational finite element formulation for geometrically nonlinear dynamic analysis of 3-d beams. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 169, n. 1-2, p. 1–18, 1999. 9, 127, 128, 129

IRANI, M. B. **Some aspects of marine riser analysis**. 117 p. Thesis (Doctoral) — University of British Columbia, Vancouver, 1989. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/2429/29117>>. Acesso em: 12 jul. 2015. 10

ISSA, R. I.; KEMPF, M. H. W. Simulation of slug flow in horizontal and nearly horizontal pipes with the two-fluid model. **International Journal of Multiphase Flow**, v. 29, n. 1, p. 69–95, 2003. 14

JELENIĆ, G.; CRISFIELD, M. A. Dynamic analysis of 3d beams with joints in presence of large rotations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 190, n. 32-33, p. 4195–4230, 2001. 9, 127, 128, 129

KJELDBY, T. K.; HENKES, R.; NYDAL, O. J. Slug tracking simulation of severe slugging experiments. **International Journal of Mechanical and Mechatronics Engineering**, v. 78, p. 928–933, 2011. 16

KORDKHEILI, S. A. H.; BAHAI, H.; MIRTAHERI, M. An updated lagrangian finite element formulation for large displacement dynamic analysis of three-dimensional flexible riser structures. **Ocean Engineering**, v. 38, n. 5-6, p. 793–803, 2011. 11

LE, T. N.; BATTINI, J. M.; HJIAJ, M. Dynamics of 3d beam elements in a corotational context: a comparative study of established and new formulations. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 61, p. 97–111, 2012. 9, 127, 131, 133, 135, 136, 138

LEE, P. J. **Introduction to offshore pipelines and risers**. 2009. Disponível em: <[http://www.jylpipeline.com/Pipeline\\_2009C\\_Brief.pdf](http://www.jylpipeline.com/Pipeline_2009C_Brief.pdf)>. 1

LIN, Y. H.; TSAI, Y. K. Nonlinear vibrations of timoshenko pipes conveying fluid. **International Journal of Solids and Structures**, v. 34, n. 23, p. 2945–2956, 1997. 127, 138, 139

LUPPI, A.; COUSIN, G.; O’SULLIVAN, R. Deepwater hybrid riser systems. In: OFFSHORE TECHNOLOGY CONFERENCE, 2014. **Proceedings ...** Kuala Lumpur, Malaysia, 2014. 3

MEDINA, J. J. V. **Flexible pipes: slug flow and structure coupling**. 38 p. Thesis (Doctoral) — Norwegian University of Science and Technology, Trondheim, 2018. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/11250/2571154>>. Acesso em: 20 nov. 2018. 17, 18

MELÉNDEZ, J. A. **Vibrações livres de risers em catenária com escoamento interno**. 112 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) — Universidade Federal do ABC, Santo André, 2015. 106

MELÉNDEZ, J. A.; AVILA, J. P. J. A parametric analysis of the influence of the internal slug flow on the dynamic response of flexible marine risers. **Ocean Engineering**, v. 174, p. 169–185, 2019. 18

MERIAM, J. L.; KRAIGE, L. G. **Engineering mechanics: dynamics**. 7. ed. New Jersey: John Wiley & Sons, 2012. 723 p. 32

MOURELLE, M. M. **Análise dinâmica de sistemas estruturais constituídos por linhas marítimas**. 305 p. Tese (Doutorado em Ciências em Engenharia Civil) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1993. 10, 111

NETO, A. G. Dynamics of offshore risers using a geometrically-exact beam model with hydrodynamic loads and contact with the seabed. **Engineering Structures**, v. 125, p. 438–454, 2016. 11, 127, 142, 143, 144

NUCLEAR POWER. **Moody diagram**. 2014. Disponível em: <<https://www.nuclear-power.net/nuclear-engineering/fluid-dynamics/major-head-loss-friction-loss/moody-diagram/>>. Acesso em: 15 ago. 2019. 71

NYDAL, O. J.; BANERJEE, S. Dynamic slug tracking simulations for gas-liquid flow in pipelines. **Chemical Engineering Communications**, v. 141, n. 1, p. 13–39, 1996. 14, 17, 59

ORTEGA, A. **Dynamic response of flexible risers due to unsteady slug flow**. 105 p. Thesis (Doctoral) — Norwegian University of Science and Technology, Trondheim, 2015. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/11250/2354059>>. Acesso em: 20 jul. 2015. 17

PATEL, M. H. **Dynamics of offshore structures**. Oxford: Butterworths, 2013. 402 p. 35

PATEL, M. H.; SEYED, F. B. Internal flow-induced behaviour of flexible risers. **Engineering Structures**, v. 11, n. 4, p. 266–280, 1989. 16, 17, 18

POLLIO, A.; MOSSA, M. A comparison between two simple models of a slug flow in a long flexible marine riser. **arXiv preprint arXiv:0911.1873**, 2009. 17

RANKIN, C.; BROGAN, F. An element independent corotational procedure for the treatment of large rotations. **Journal of Pressure Vessel Technology**, v. 108, n. 2, p. 165–174, 1986. 9

RANSOM, V. H.; WAGNER, R. J.; TRAPP, J. A.; CARLSON, K. E.; KISER, D. M.; KUO, H. H.; CHOW, H.; NELSON, R. A.; JAMES, S. W. **Relap5/mod1 code manual volume 1: system models and numerical methods**. [S.l.]: Idaho National Engineering Laboratory, 1982. 113 p. 13

RENAULT, F. **A Lagrangian slug capturing scheme for gas-liquid flows in pipes**. 118 p. Thesis (Doctoral) — Norwegian University of Science and Technology, Trondheim, 2007. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/11250/233339>>. Acesso em: 10 fev. 2016. 14, 16

RODRIGUES, H. T. **Simulação numérica do escoamento bifásico gás-líquido no padrão de golfadas utilizando um modelo Lagrangeano de seguimento de pistões**. 180 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica e de Materiais) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2009. 14, 15, 16, 20, 60, 70, 78, 80

SHAMES, I. H. **Mechanics of fluids**. 4. ed. New York: McGraw-Hill, 2003. 861 p. 59, 64

SHOHAM, O. **Mechanistic modeling of gas-liquid two-phase flow in pipes**. Texas: Society of Petroleum Engineers, 2006. 396 p. 5, 6, 13

SILVA, W. A. D. **Análise dinâmica não-linear de pórticos espaciais utilizando a formulação corrotacional**. 176 p. (Publicação E.TD-A/11). Tese

(Doutorado em Estruturas e Construção Civil) — Universidade de Brasília, Brasília, 2013. Disponível em:  
<<https://repositorio.unb.br/handle/10482/16632>>. Acesso em: 18 dez. 2016. 9, 128

SPARKS, C. P. The influence of tension, pressure and weight on pipe and riser deformations and stresses. **Journal of Energy Resources Technology**, v. 106, n. 1, p. 46–54, 1984. 10

SPURRIER, R. A. Comment on "singularity-free extraction of a quaternion from a direction-cosine matrix". **Journal of Spacecraft and Rockets**, v. 15, n. 4, p. 255–255, 1978. 28

TAITEL, Y.; BARNEA, D. Two-phase slug flow. **Advances in Heat Transfer**, v. 20, n. 1, p. 83–132, 1990. 12, 17, 68, 70, 73, 74, 181, 182, 184

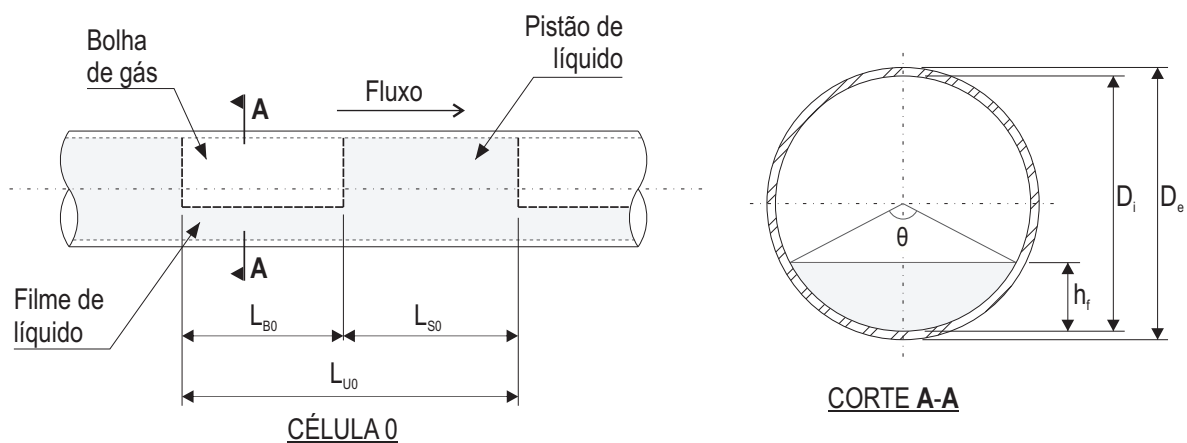
TAKAFUJI, F. C. d. M. **Dinâmica tridimensional de risers**. 313 p. Tese (Doutorado em Engenharia) — Universidade de São Paulo, São Paulo, 2010. Disponível em:  
<<https://doi.org/10.11606/T.3.2010.tde-19082010-112620>>. Acesso em: 24 fev. 2016. 11

VALDIVIA, P. G. **Estudo experimental e numérico da dinâmica de movimento de riser em catenária com escoamento interno**. 98 p. Dissertação (Mestrado em Ciências e Engenharia de Petróleo) — Universidad Estadual de Campinas, Campinas, 2008. Disponível em:  
<<http://repositorio.unicamp.br/jspui/handle/REPOSIP/263632>>. Acesso em: 12 dez. 2015. 16, 17, 18, 127, 146, 148, 150, 152

## APÊNDICE A - MODELO ESTACIONÁRIO DO ESCOAMENTO EM GOLFADAS

O modelo estacionário do escoamento em golfadas será utilizado para determinar as características da célula 0, a qual em algum instante de tempo fará seu ingresso no domínio computacional do escoamento. Para este modelo serão utilizadas as equações e relações propostas por Taitel e Barnea (1990). O cálculo das propriedades da célula 0 será realizado no início da simulação computacional, como condição inicial do escoamento, e imediatamente após o ingresso de uma célula unitária no domínio computacional. Considera-se que a célula 0 encontra-se em posição horizontal, assim como mostrado na Figura A.1.

Figura A.1 - Célula "0" do escoamento em golfadas e características geométricas.



Fonte: Produção do autor.

As propriedades a determinar são: velocidade de translação,  $U_{TR0}$ , velocidade do líquido no pistão,  $U_{LS0}$ , altura do filme de líquido,  $h_f$ , comprimento da célula unitária  $L_{U0}$ , comprimento da bolha de gás e do pistão de líquido,  $L_{B0}$  e  $L_{S0}$ , respectivamente. Os dados de entrada para determinar as características do escoamento são: velocidade superficial da fase líquida,  $J_L$ , velocidade superficial da fase gasosa,  $J_G$ , frequência do escoamento em golfadas,  $\omega_f$ , a viscosidade cinemática das fases líquida e gasosa, assim como também as densidades de ambas as fases.

### A.1 Velocidade de translação da bolha de gás

A velocidade de translação da bolha de gás da célula 0 é dada pela seguinte equação:

$$U_{TR0} = CU_S + U_d \quad (\text{A.1})$$

onde  $C$  é uma constante, a qual neste trabalho será considerada igual a 1.2. A variável  $U_S$  é a velocidade da mistura, a qual, considerando um escoamento não aerado, pode ser calculada como a soma das velocidades superficiais das fases líquida e gasosa,  $U_S = J_L + J_G$ . A variável  $U_d$  representa a velocidade das bolhas de gás em água parada e pode ser calculada, para o caso horizontal, como:

$$U_d = 0.54\sqrt{gD_i} \quad (\text{A.2})$$

### A.2 Velocidade do líquido no pistão

A velocidade do líquido no pistão da célula 0 é calculada a partir da seguinte equação:

$$U_{LS0} = J_L + J_G \quad (\text{A.3})$$

### A.3 Altura do filme de líquido

Para calcular a altura do filme de líquido será utilizada a equação apresentada por Taitel e Barnea (1990), a qual foi deduzida a partir das equações de conservação do momento linear para cada uma das fases do escoamento bifásico gás-líquido estratificado, e a qual é dada por:

$$\frac{dh_f}{dz} = \frac{\frac{\tau_f S_f}{A_f} - \frac{\tau_G S_G}{A_G} - \tau_i S_i \left( \frac{1}{A_f} + \frac{1}{A_G} \right) + (\rho_L - \rho_G)g \sen \beta}{(\rho_L - \rho_G)g \cos \beta - \rho_L \nu_f \frac{(u_t - u_L) R_s}{R_f^2} \frac{dR_f}{dh_f} - \rho_G \nu_G \frac{(u_t - u_b)(1 - R_s)}{(1 - R_f)^2} \frac{dR_f}{dh_f}} \quad (\text{A.4})$$

onde a Equação (A.4) foi escrita com os mesmos símbolos utilizados por Taitel e Barnea (1990). Agora, considerando a região da bolha de gás como sendo uma região de escoamento estratificado, a altura do filme de líquido é constante e portanto o lado esquerdo da Equação (A.4) é igual a zero e, conseqüentemente, o numerador do lado direito da Equação (A.4) também é igual a zero. Logo, a altura do filme de

líquido para um escoamento estratificado é obtido a partir da seguinte equação, a qual será escrita de acordo com a simbologia utilizada neste trabalho:

$$\frac{\tau_{LB}S_{LB}}{A_{LB}} - \frac{\tau_{GB}S_{GB}}{A_{GB}} - \tau_{IB}S_{IB} \left( \frac{1}{A_{LB}} + \frac{1}{A_{GB}} \right) + (\rho_L - \rho_G)g \sin \beta = 0 \quad (\text{A.5})$$

A partir da Equação (A.5),  $A_{LB}$  e  $A_{GB}$  são as áreas da seção transversal pelas quais escoam as fases líquida e gasosa, respectivamente.  $S_{LB}$ ,  $S_{GB}$ , e  $S_{IB}$  são os perímetros molhados na região da bolha de gás da fase líquida, da fase gasosa, e da interface entre as fases líquida e gasosa, respectivamente. O ângulo  $\beta$  indica a inclinação do tubo, que para nosso caso é horizontal.

Para solucionar a Equação (A.5), as variáveis  $\theta$ ,  $A_{LB}$ ,  $A_{GB}$ ,  $S_{LB}$ ,  $S_{GB}$ ,  $S_{IB}$ , e  $R_{LB}$  serão expressas em função da altura do filme de líquido,  $h_f$ , da seguinte forma:

$$\theta = 2 \arccos \left( 1 - \frac{2h_f}{D_i} \right) \quad (\text{A.6})$$

$$A_{LB} = \left( \frac{D_i}{2} \right)^2 \frac{(\theta - \sin \theta)}{2} \quad , \quad A_{GB} = A_{int} - A_{LB} \quad (\text{A.7})$$

$$S_{LB} = \frac{\theta D_i}{2} \quad , \quad S_{GB} = \pi D_i - S_f \quad , \quad S_{IB} = \frac{D_i}{2} (2 - 2 \cos \theta)^{0.5} \quad (\text{A.8})$$

$$R_{LB} = \frac{A_{LB}}{A_{int}} = \frac{1}{2\pi} (\theta - \sin \theta) \quad (\text{A.9})$$

As variáveis  $\tau_{LB}$  e  $\tau_{GB}$ , as quais são dadas pelas Equações (4.24) e (4.25), respectivamente, também serão expressas em função da variável  $h_f$ , e para isso precisamos determinar as variáveis  $U_{LB0}$  e  $U_{GB0}$ , as quais correspondem à velocidade do filme de líquido e a velocidade do gás na bolha da célula 0, respectivamente, e as quais estão dadas pelas seguintes equações:

$$U_{LB0} = U_{TR0} \left( 1 - \frac{1}{R_f} \right) + U_{LS0} \left( \frac{1}{R_f} \right) \quad (\text{A.10})$$

$$U_{GB0} = U_{TR0} \quad (\text{A.11})$$

Por outro lado, para o cálculo da variável  $\tau_{IB}$  será utilizada a seguinte equação:

$$\tau_{IB} = \frac{\rho_G U_{R0} |U_{R0}| f_{f,IBj}}{2} \quad (\text{A.12})$$

onde  $f_{f,IB}$  é o fator de atrito na interface, e o qual pode ser considerado, de acordo com Chatjigeorgiou (2017), igual ao fator de atrito do gás na bolha,  $f_{f,IB} = f_{f,GB}$ . A variável  $U_{R0}$  é a velocidade relativa entre as fases gasosa e líquida da célula 0, e pode ser calculada como:

$$U_{R0} = U_{GB0} - U_{LB0} \quad (\text{A.13})$$

Finalmente, uma vez que as variáveis foram expressas em função da altura do filme de líquido,  $h_f$ , esta pode ser calculada a partir da Equação (A.5).

#### A.4 Comprimentos da célula unitária

O comprimento da célula unitária será calculada a partir da seguinte expressão:

$$L_{U0} = \frac{U_{TR0}}{\omega_f} \quad (\text{A.14})$$

onde  $\omega_f$  é a frequência do escoamento. Logo, o comprimento da bolha de gás é calculada a partir da seguinte equação, a qual foi obtida por Taitel e Barnea (1990) a partir de utilizar a lei de conservação da massa do líquido na célula unitária:

$$J_L = U_{LS0} R_{LS0} + U_{TR0} (1 - R_{LS0}) \frac{L_{B0}}{L_{U0}} - \frac{U_{TR0}}{L_{U0}} \int_0^{L_{B0}} R_{GB0} ds \quad (\text{A.15})$$

onde  $R_{GB0}$  é a fração de gás na região da bolha, e  $ds$  é um elemento diferencial de comprimento da célula unitária. Logo, devido a que  $R_{GB0}$  é constante ao longo do comprimento da região da bolha de gás, o comprimento da bolha de gás pode ser obtido a partir da seguinte equação:

$$L_{B0} = L_{U0} \left( \frac{U_{LS0} - J_L}{U_{TR0} (1 - R_{LB0})} \right) \quad (\text{A.16})$$



Finalmente, o comprimento do pistão de líquido pode ser obtido a partir da seguinte equação:

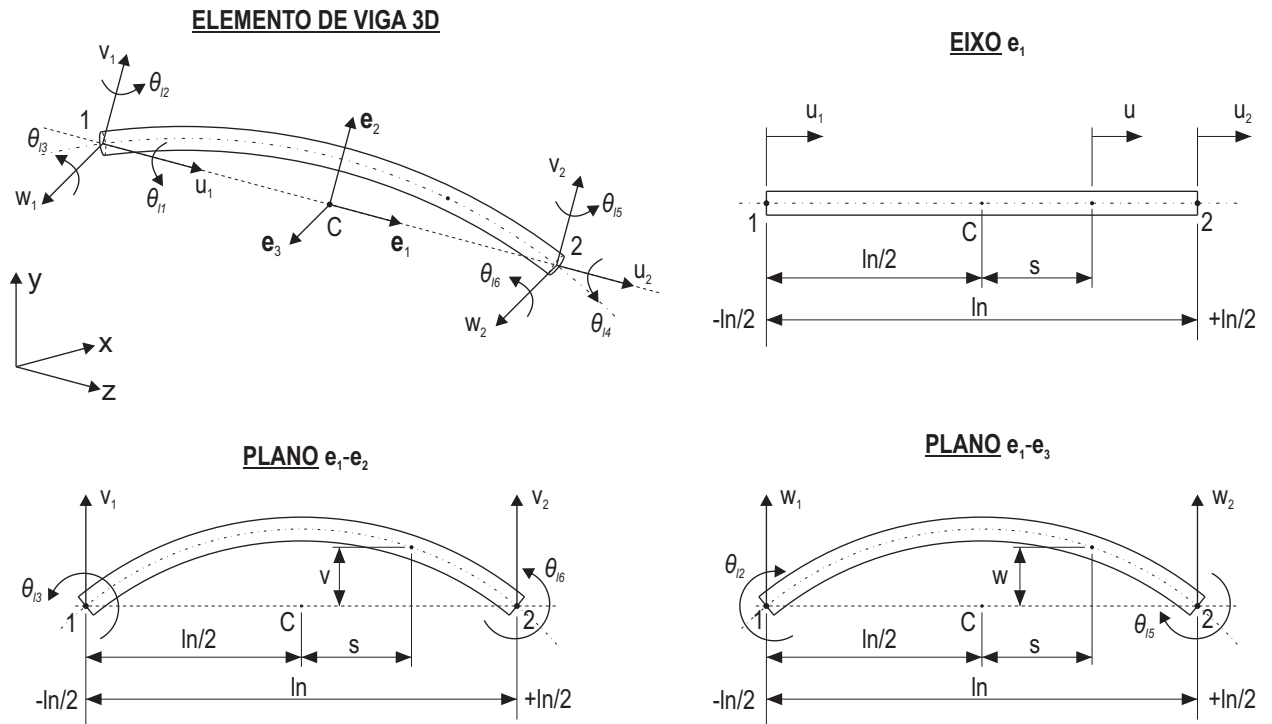
$$L_{S0} = L_{U0} - L_{B0} \quad (\text{A.17})$$



## APÊNDICE B - MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

O *riser* é discretizado em vários elementos finitos de igual comprimento, com a característica de que cada elemento terá seu próprio sistema de coordenadas local. Considera-se um elemento de *riser* definido pelos pontos 1 e 2, assim como mostrado na Figura B.1

Figura B.1 - Elemento de *riser* e seus correspondentes deslocamentos nodais.



Fonte: Produção do autor.

onde  $l_n$  é a distância entre os pontos 1 e 2,  $C$  é a origem do sistema de coordenadas local e ponto meio entre os pontos 1 e 2, e a coordenadas  $s$  mede a posição de um ponto qualquer do elemento de *riser* em relação ao ponto  $C$ , na direção do eixo  $e_1$ .

Os deslocamentos locais de um ponto do elemento de *riser*, podem ser determinados por meio da interpolação de um polinômio sobre os valores nodais dos deslocamentos. Os deslocamentos a determinar são:  $u$  na direção do eixo  $e_1$ ,  $v$  no plano formado pelos vetores  $e_1$  e  $e_2$ , e  $w$  no plano formado pelos vetores  $e_1$  e  $e_3$ .

O deslocamento  $u$  será aproximado a partir da interpolação de um polinômio lineal sobre os deslocamentos  $u_1$  e  $u_2$ , correspondentes ao nós 1 e 2, respectivamente. O deslocamento  $v$  será aproximado por um polinômio de interpolação de terceiro grau sobre os deslocamentos  $v_1$ ,  $\theta_{l_3}$ ,  $v_2$ , e  $\theta_{l_6}$ . Para o caso do deslocamento  $w$ , este será aproximado por meio da interpolação de um polinômio de terceiro grau sobre os deslocamentos  $w_1$ ,  $\theta_{l_2}$ ,  $w_2$ , e  $\theta_{l_5}$ . A seguir serão mostradas as expressões utilizadas para os deslocamentos  $u$ ,  $v$ , e  $w$ .

$$u = N_1u_1 + N_2u_2 \quad (\text{B.1})$$

$$v = N_3v_1 + N_4\theta_{l_2} + N_5v_2 + N_6\theta_{l_5} \quad (\text{B.2})$$

$$w = N_7w_1 + N_8\theta_{l_3} + N_9w_2 + N_{10}\theta_{l_6} \quad (\text{B.3})$$

onde  $N_i$ , para  $i = 1, 2, \dots, 10$ , são chamadas de funções de forma e são dadas pelas seguintes expressões:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{2} - \frac{s}{l_n} & N_2 &= \frac{1}{2} + \frac{s}{l_n} \\ N_3 &= \frac{1}{2} - \frac{3s}{2l_n} + \frac{2s^3}{l_n^3} & N_4 &= \frac{l_n}{8} - \frac{s}{4} - \frac{s^2}{2l_n} + \frac{s^3}{l_n^2} \\ N_5 &= \frac{1}{2} + \frac{3s}{2l_n} - \frac{2s^3}{l_n^3} & N_6 &= -\frac{l_n}{8} - \frac{s}{4} + \frac{s^2}{2l_n} + \frac{s^3}{l_n^2} \\ N_7 &= \frac{1}{2} - \frac{3s}{2l_n} + \frac{2s^3}{l_n^3} & N_8 &= -\frac{l_n}{8} + \frac{s}{4} + \frac{s^2}{2l_n} - \frac{s^3}{l_n^2} \\ N_9 &= \frac{1}{2} + \frac{3s}{2l_n} - \frac{2s^3}{l_n^3} & N_{10} &= \frac{l_n}{8} + \frac{s}{4} - \frac{s^2}{2l_n} - \frac{s^3}{l_n^2} \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Logo, as Equações (B.1), (B.2) e (B.3) podem ser expressas da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \mathbf{N}\mathbf{u}_1 \quad (\text{B.5})$$

onde  $\mathbf{u}_1$  é o vetor de deslocamentos nodais.  $\mathbf{N}$  é chamada de matriz de funções de forma e é dada pela seguinte expressão:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_3 & 0 & 0 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & 0 & 0 & N_6 \\ 0 & 0 & N_7 & 0 & N_8 & 0 & 0 & 0 & N_9 & 0 & N_{10} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.6})$$

Da mesma forma em que foram aproximados os deslocamentos  $u$ ,  $v$ , e  $w$ , o ângulo de rotação do elemento de *riser* ao redor do eixo  $\mathbf{e}_1$  será aproximado mediante a interpolação de um polinômio lineal sobre os deslocamentos  $\theta_{l1}$  e  $\theta_{l4}$ , da seguinte forma:

$$\theta_1 = N_1\theta_{l1} + N_2\theta_{l4} \quad (\text{B.7})$$

Os ângulos de rotação ao redor dos eixos  $\mathbf{e}_2$  e  $\mathbf{e}_3$ ,  $\theta_2$  e  $\theta_3$ , respectivamente, são dados pelas seguintes equações:

$$\theta_2 = -\frac{dw}{ds} \quad (\text{B.8})$$

$$\theta_3 = \frac{dv}{ds} \quad (\text{B.9})$$

## B.1 Vetor de forças nodais de um elemento de riser

Os carregamentos atuantes sobre um elemento de *riser*, neste trabalho, tem sido expressos na forma de forças por unidade de comprimento, como por exemplo as forças devidas ao peso, forças devidas à correnteza, dadas pela Equação (2.39), e as forças devidas ao escoamento interno, dadas pela Equação (2.33).

Para calcular o vetor de forças nodais do elemento,  $\mathbf{p}$ , é necessário concentrar os carregamentos atuantes sobre o *riser* em ambos os nós do elemento. As forças por unidade de comprimento atuantes sobre o elemento de *riser* serão representadas pela variável  $\mathbf{f}$ . O vetor  $\mathbf{f}$  será expresso no sistema de coordenadas co-rotacional, o qual é definido pelos vetores  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ , da forma seguinte:

$$\mathbf{f} = f_1 \mathbf{e}_1 + f_2 \mathbf{e}_2 + f_3 \mathbf{e}_3 \quad (\text{B.10})$$

onde  $f_1$ ,  $f_2$ , e  $f_3$  representam as forças distribuídas atuantes sobre o elemento de *riser* nas direções  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$ , e  $\mathbf{e}_3$ , respectivamente. Seguidamente, a força  $\mathbf{f}$  será concentrada nos nós do elemento de *riser* mediante a seguinte expressão (vide Cook (??)):

$$\mathbf{p}_1 = \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{N}^T \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix} ds \quad (\text{B.11})$$

onde o vetor  $\mathbf{p}_1$  é o vetor de forças nodais no sistema de coordenadas local.  $\mathbf{N}$  é a matriz de funções de forma do elemento de *riser*, dada pela Equação (B.6), e os pontos  $x_1$  e  $x_2$  indicam os limites sobre os quais a força  $\mathbf{f}$  é aplicada.

Finalmente, o vetor  $\mathbf{p}$  é obtido a partir de aplicar uma transformação de coordenadas sobre o vetor  $\mathbf{p}_1$ , da seguinte forma:

$$\mathbf{p} = \mathbf{T} \mathbf{p}_1 \quad (\text{B.12})$$

onde a matriz  $\mathbf{T}$  é a matriz de transformação de coordenadas, a qual transforma vetores do sistema de coordenadas local ( $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ) ao sistema de coordenadas inercial ( $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ ). A matriz  $\mathbf{T}$  é dada pela seguinte expressão:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{bmatrix} \quad (\text{B.13})$$

onde a matriz  $\mathbf{E}$  é a tríade relacionada ao sistema de de coordenadas co-rotacional do elemento de *riser*,  $\mathbf{E} = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]$ .

## B.2 Equação de movimento de um elemento de riser

Para obter as equações de movimento do elemento de *riser*, o princípio estendido de Hamilton será utilizado, o qual é dado pela seguinte expressão:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (K - E + W) dt = 0 \quad (\text{B.14})$$

onde  $K$  é a energia cinética,  $E$  é a energia interna do elemento, e  $W$  é o trabalho realizado por todas as forças atuantes sobre o elemento de *riser*.

A variação da energia de deformação do elemento de *riser*,  $\delta E$ , pode ser calculada a partir da seguinte expressão:

$$\delta E = \mathbf{q}_i^T \delta \mathbf{u} = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{q}_i \quad (\text{B.15})$$

onde  $\mathbf{q}_i$  é o vetor de forças internas, e  $\mathbf{u}$  é o vetor de deslocamentos do elemento de *riser*. Aplicando o operador variacional sobre o trabalho realizados pelas forças externas, obtêm-se:

$$\delta W = \mathbf{p}^T \delta \mathbf{u} = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{p} \quad (\text{B.16})$$

onde  $\mathbf{p}$  é o vetor de forças atuantes sobre os nós do elemento de *riser*. A seguir será calculada a energia cinética de um elemento de *riser*.

### B.2.1 Energia cinética de um elemento de riser

A energia cinética de um elemento de *riser* é calculada a partir da seguinte expressão:

$$K = K_1 + K_2 \quad (\text{B.17})$$

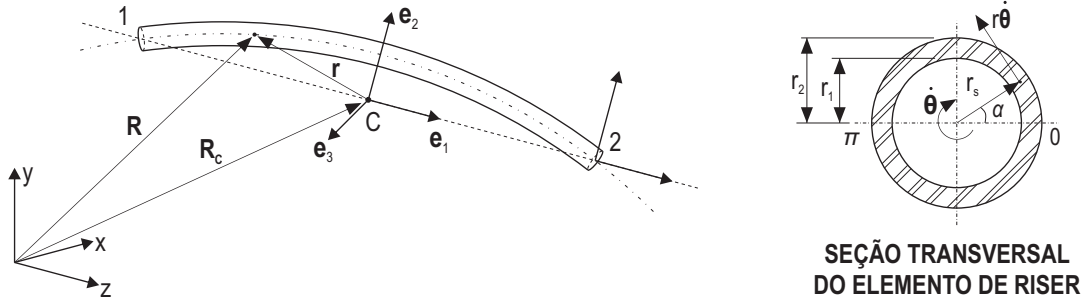
onde  $K_1$  representa a energia cinética de translação do elemento de *riser*, e  $K_2$  representa a energia cinética devida à velocidade de rotação do elemento de *riser* ao redor do seu próprio eixo, o qual será considerado como sendo o eixo  $\mathbf{e}_1$ . Os termos  $K_1$  e  $K_2$  são dados pelas seguintes expressões:

$$K_1 = \frac{1}{2} \int \dot{\mathbf{R}}^T \dot{\mathbf{R}} dm \quad (\text{B.18})$$

$$K_2 = \frac{1}{2} \int (r_s \dot{\theta})^T (r_s \dot{\theta}) dm \quad (\text{B.19})$$

onde  $\dot{\mathbf{R}}$  é o vetor velocidade de um ponto qualquer do elemento de *riser*,  $r_s \dot{\theta}$  representa o vetor velocidade do elemento de *riser* devido à rotação ao redor do seu próprio eixo, e  $dm$  é a massa do elemento diferencial de *riser*, assim como mostrado na Figura B.2.

Figura B.2 - Coordenadas de posição de um ponto do elemento de viga tridimensional.



Fonte: Produção do autor.

onde os valores  $r_1$  e  $r_2$  correspondem aos raios interno e externo da seção transversal do elemento de *riser*, e  $\alpha$  é o ângulo de azimute. Para o cálculo de  $K_1$ , o diferencial de massa pode ser expresso como  $dm = \rho A ds$ , e o vetor velocidade  $\dot{\mathbf{R}}$  pode ser aproximado como:

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{N} \dot{\mathbf{u}}_1 \quad (\text{B.20})$$

Substituindo a Equação (B.20) na Equação (B.18), têm-se a seguinte relação:

$$K_1 = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}_1^T \left( \rho_r A \int_{-l_n/2}^{l_n/2} \mathbf{N}^T \mathbf{N} ds \right) \dot{\mathbf{u}}_1 \quad (\text{B.21})$$

onde o termo em parêntese representa a matriz de massa do elemento de *riser*



devido ao movimento de translação no sistema de coordenadas local, e o qual será representado pela variável  $\mathbf{m}_{\text{tra},l}$ . Agora, transformando o vetor  $\mathbf{u}_l$  ao sistema de coordenadas global tem-se:

$$K_1 = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}^T (\mathbf{T} \mathbf{m}_{\text{tra},l} \mathbf{T}^T) \dot{\mathbf{u}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{m}_{\text{tra}} \dot{\mathbf{u}} \quad (\text{B.22})$$

onde a variável  $\mathbf{m}_{\text{tra}}$  representa a matriz de massa do elemento de *riser* devido ao movimento de translação no sistema de coordenadas global. Seguidamente, será calculado a energia cinética  $K_2$ , para o qual utilizaremos a seguinte aproximação:

$$\dot{\theta} = \mathbf{N}_\theta \mathbf{u}_l \quad (\text{B.23})$$

onde a matriz  $\mathbf{N}_\theta$  é dada pela seguinte expressão:

$$\mathbf{N}_\theta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.24})$$

Substituindo a Equação (B.24) na Equação (B.19), e considerando o diferencial de massa  $dm$  como  $dm = \rho_r r_s dr_s d_\alpha ds$ , a energia cinética é dada pela seguinte equação:

$$K_2 = \frac{1}{2} \mathbf{u}_l^T \left( \rho_r J \int_{-l_n/2}^{l_n/2} \mathbf{N}_\theta^T \mathbf{N}_\theta ds \right) \mathbf{u}_l \quad (\text{B.25})$$

onde  $J$  é o momento polar de inércia. O termo entre parêntese é a matriz de massa devida ao movimento de rotação no sistema de coordenadas local. Logo, transformando o vetor  $\mathbf{u}_l$  ao sistema de coordenadas global, obtêm-se:

$$K_2 = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}^T (\mathbf{T} \mathbf{m}_{\text{rot},l} \mathbf{T}^T) \dot{\mathbf{u}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{m}_{\text{rot}} \dot{\mathbf{u}} \quad (\text{B.26})$$

Logo, substituindo as Equações (B.22) e (B.26) na Equação (B.17), a energia cinética para o elemento de *riser* é dada por:

$$K = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{m}_{\text{ris}} \dot{\mathbf{u}} \quad (\text{B.27})$$

onde  $\mathbf{m}_{ris}$  é a matriz de massa de um elemento de *riser*, a qual é dada pela soma das matrizes  $\mathbf{m}_{tra}$  e  $\mathbf{m}_{rot}$ . A seguir será aplicado o operador variacional sobre a Equação (B.27), obtendo a seguinte expressão

$$\delta K = \delta \dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{m}_{ris} \dot{\mathbf{u}} \quad (\text{B.28})$$

Logo, substituindo as Equações (B.15), (B.16), e (B.28) na Equação (B.14), obtêm-se a seguinte equação:

$$\int_{t_1}^{t_2} [\delta \dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{m}_{ris} \dot{\mathbf{u}} - \delta \mathbf{u}^T \mathbf{q} + \delta \mathbf{u}^T \mathbf{p}] dt = 0 \quad (\text{B.29})$$

O primeiro termo dentro do parêntese na Equação (B.31), será integrado por partes, e logo, a seguinte igualdade é obtida:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta \dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{m}_{ris} \dot{\mathbf{u}}) dt = - \int_{t_1}^{t_2} (\delta \mathbf{u}^T \mathbf{m}_{ris} \ddot{\mathbf{u}}) dt \quad (\text{B.30})$$

Substituindo a Equação (B.30) na Equação (B.31) obtêm-se:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta \mathbf{u}^T [-\mathbf{m}_{ris} \ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{q} + \mathbf{p}] dt = 0 \quad (\text{B.31})$$

O deslocamento  $\delta \mathbf{u}$  é arbitrário, e considerado diferente de zero. Logo, a equação de movimento para um elemento de *riser* é dado pela seguinte equação:

$$\mathbf{m}_{ris} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{q} = \mathbf{p} \quad (\text{B.32})$$

Logo, fazendo a montagem dos vetores e matrizes de todos os elementos do *riser*, a Equação de movimento para o sistema é dada por:

$$\mathbf{M}_{ris} \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{Q} = \mathbf{P} \quad (\text{B.33})$$

onde vetor de forças externas  $\mathbf{P}$  é devido à aceleração do escoamento interno, à correnteza, e às forças de natureza estática. A matriz de massa do elemento de *riser*,  $\mathbf{m}_{ris}$ , é dada pela seguinte expressão:

$$\mathbf{m}_{\text{ris}} = \frac{\rho_r A l_n}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 0 & 0 & 0 & 22l_n & 0 & 54 & 0 & 0 & 0 & -13l_n \\ 0 & 0 & 156 & 0 & -22l_n & 0 & 0 & 0 & 54 & 0 & 13l_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 140\frac{J}{A} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 70\frac{J}{A} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -22l_n & 0 & 4l_n^2 & 0 & 0 & 0 & -13l_n & 0 & -3l_n^2 & 0 \\ 0 & 22l_n & 0 & 0 & 0 & 4l_n^2 & 0 & 13l_n & 0 & 0 & 0 & -3l_n^2 \\ 70 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 0 & 0 & 0 & 13l_n & 0 & 156 & 0 & 0 & 0 & -22l_n \\ 0 & 0 & 54 & 0 & -13l_n & 0 & 0 & 0 & 156 & 0 & 22l_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 70\frac{J}{A} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 140\frac{J}{A} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 13l_n & 0 & -3l_n^2 & 0 & 0 & 0 & 22l_n & 0 & 4l_n^2 & 0 \\ 0 & -13l_n & 0 & 0 & 0 & -3l_n^2 & 0 & -22l_n & 0 & 0 & 0 & 4l_n^2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.34})$$

## **PUBLICAÇÕES TÉCNICO-CIENTÍFICAS EDITADAS PELO INPE**

### **Teses e Dissertações (TDI)**

Teses e Dissertações apresentadas nos Cursos de Pós-Graduação do INPE.

### **Manuais Técnicos (MAN)**

São publicações de caráter técnico que incluem normas, procedimentos, instruções e orientações.

### **Notas Técnico-Científicas (NTC)**

Incluem resultados preliminares de pesquisa, descrição de equipamentos, descrição e ou documentação de programas de computador, descrição de sistemas e experimentos, apresentação de testes, dados, atlas, e documentação de projetos de engenharia.

### **Relatórios de Pesquisa (RPQ)**

Reportam resultados ou progressos de pesquisas tanto de natureza técnica quanto científica, cujo nível seja compatível com o de uma publicação em periódico nacional ou internacional.

### **Propostas e Relatórios de Projetos (PRP)**

São propostas de projetos técnico-científicos e relatórios de acompanhamento de projetos, atividades e convênios.

### **Publicações Didáticas (PUD)**

Incluem apostilas, notas de aula e manuais didáticos.

### **Publicações Seriadas**

São os seriados técnico-científicos: boletins, periódicos, anuários e anais de eventos (simpósios e congressos). Contam destas publicações o Internacional Standard Serial Number (ISSN), que é um código único e definitivo para identificação de títulos de seriados.

### **Programas de Computador (PDC)**

São a seqüência de instruções ou códigos, expressos em uma linguagem de programação compilada ou interpretada, a ser executada por um computador para alcançar um determinado objetivo. Aceitam-se tanto programas fonte quanto os executáveis.

### **Pré-publicações (PRE)**

Todos os artigos publicados em periódicos, anais e como capítulos de livros.