



MINISTÉRIO DA  
CIÊNCIA, TECNOLOGIA  
E INOVAÇÕES



sid.inpe.br/mtc-m21c/2020/03.09.12.26-TDI

## CONTROLE DE ATITUDE DE UM SATÉLITE APLICANDO A UNIÃO DOS MÉTODOS SDRE E H-INFINITO

Ximena Celia Méndez Cubillos

Tese de Doutorado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle, orientada pelo Dr. Luiz Carlos Gadelha de Souza, aprovada em 13 de março de 2020.

URL do documento original:

<<http://urlib.net/8JMKD3MGP3W34R/4256CAP>>

INPE  
São José dos Campos  
2020

**PUBLICADO POR:**

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE  
Gabinete do Diretor (GBDIR)  
Serviço de Informação e Documentação (SESID)  
CEP 12.227-010  
São José dos Campos - SP - Brasil  
Tel.:(012) 3208-6923/7348  
E-mail: pubtc@inpe.br

**CONSELHO DE EDITORAÇÃO E PRESERVAÇÃO DA PRODUÇÃO INTELLECTUAL DO INPE - CEPPII (PORTARIA Nº 176/2018/SEI-INPE):****Presidente:**

Dra. Marley Cavalcante de Lima Moscati - Centro de Previsão de Tempo e Estudos Climáticos (CGCPT)

**Membros:**

Dra. Carina Barros Mello - Coordenação de Laboratórios Associados (COCTE)

Dr. Alisson Dal Lago - Coordenação-Geral de Ciências Espaciais e Atmosféricas (CGCEA)

Dr. Evandro Albiach Branco - Centro de Ciência do Sistema Terrestre (COCST)

Dr. Evandro Marconi Rocco - Coordenação-Geral de Engenharia e Tecnologia Espacial (CGETE)

Dr. Hermann Johann Heinrich Kux - Coordenação-Geral de Observação da Terra (CGOBT)

Dra. Ieda Del Arco Sanches - Conselho de Pós-Graduação - (CPG)

Silvia Castro Marcelino - Serviço de Informação e Documentação (SESID)

**BIBLIOTECA DIGITAL:**

Dr. Gerald Jean Francis Banon

Clayton Martins Pereira - Serviço de Informação e Documentação (SESID)

**REVISÃO E NORMALIZAÇÃO DOCUMENTÁRIA:**

Simone Angélica Del Ducca Barbedo - Serviço de Informação e Documentação (SESID)

André Luis Dias Fernandes - Serviço de Informação e Documentação (SESID)

**EDITORAÇÃO ELETRÔNICA:**

Ivone Martins - Serviço de Informação e Documentação (SESID)

Cauê Silva Fróes - Serviço de Informação e Documentação (SESID)



MINISTÉRIO DA  
CIÊNCIA, TECNOLOGIA  
E INOVAÇÕES



sid.inpe.br/mtc-m21c/2020/03.09.12.26-TDI

## CONTROLE DE ATITUDE DE UM SATÉLITE APLICANDO A UNIÃO DOS MÉTODOS SDRE E H-INFINITO

Ximena Celia Méndez Cubillos

Tese de Doutorado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle, orientada pelo Dr. Luiz Carlos Gadelha de Souza, aprovada em 13 de março de 2020.

URL do documento original:

<<http://urlib.net/8JMKD3MGP3W34R/4256CAP>>

INPE  
São José dos Campos  
2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

---

Méndez Cubillos, Ximena Celia.

M522c Controle de atitude de um satélite aplicando a união dos métodos SDRE e H-Infinito / Ximena Celia Méndez Cubillos. – São José dos Campos : INPE, 2020.  
xxviii + 138 p. ; (sid.inpe.br/mtc-m21c/2020/03.09.12.26-TDI)

Tese (Doutorado em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle) – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2020.

Orientador : Dr. Luiz Carlos Gadelha de Souza.

1. Controle SDRE. 2. Parametrização SDC. 3. Controle h-infinito. 4. União. 5. . Controle de atitude. I.Título.

CDU 629.7.062.2

---



Esta obra foi licenciada sob uma Licença [Creative Commons Atribuição-NãoComercial 3.0 Não Adaptada](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/).

This work is licensed under a [Creative Commons Attribution-NonCommercial 3.0 Unported License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/).

Aluno (a): *Ximena Celia Méndez Cubillos*

Título: "CONTROLE DE ATITUDE DE UM SATÉLITE APLICANDO A UNIÃO DOS MÉTODOS SDRE E H-INFINITO"

Aprovado (a) pela Banca Examinadora  
em cumprimento ao requisito exigido para  
obtenção do Título de *Doutor(a)* em  
*Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica  
Espacial e Controle*

Dr. Antonio Fernando Bertachini de  
Almeida Prado

  
\_\_\_\_\_  
Presidente / INPE / SJCampos - SP

( ) Participação por Video - Conferência

Aprovado ( ) Reprovado

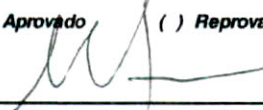
Dr. Luiz Carlos Gadelha de Souza

  
\_\_\_\_\_  
Orientador(a) / UFABC / Santo André - SP

( ) Participação por Video - Conferência

Aprovado ( ) Reprovado


Dr. Mario Cesar Ricci

  
\_\_\_\_\_  
Membro da Banca / INPE / SJCampos - SP

( ) Participação por Video - Conferência

Aprovado ( ) Reprovado

Dr. Alain Giacobini de Souza

  
\_\_\_\_\_  
Convidado(a) / ITA/DCTA / São José dos Campos - SP

( ) Participação por Video - Conferência

Aprovado ( ) Reprovado

Dr. Eloy Martins de Oliveira Junior

  
\_\_\_\_\_  
Convidado(a) / OPENCADD / São Paulo - SP

( ) Participação por Video - Conferência

Aprovado ( ) Reprovado

Este trabalho foi aprovado por:

( ) maioria simples

unanimidade

São José dos Campos, 13 de março de 2020



*“You are forever in my life  
You see me through the seasons,  
cover me with Your hand  
and lead me in Your righteousness”.*  
Through It All – Hillsong Worship.

*“So I will call upon Your name  
and keep my eyes above the waves,  
when oceans rise, my soul will rest in Your embrace.  
For I am Yours and You are mine.”*  
Oceans (Where Feet May Fail) – Hillsong United.





**Papy y Mamyta,**  
Nelson Fernando Méndez Correa y  
Elsa Catalina del Rosario Cubillos Cofrè.



## AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus em primeiro lugar, por tudo que tens feito e por tudo que vás fazer. Jamais compreenderei Teus propósitos, porém em Ti confio.

Ao meu orientador, Prof. Gadelha, meus profundos e sinceros agradecimentos. Por todos esses longos anos, por sua dedicação, paciência, respeito e acreditar em mim. Acreditar que apesar de haver tudo desabado em minha vida por um momento, voltaria a me reerguer e terminaríamos esta tese. E a finalizamos com sucesso! Obrigada professor, muito mesmo!

As amigas de infância, Kathryn e Gisella, *las chiquillas*.

As amigas Gabi e Sisa pela ajuda nos mais diversos momentos, pela força, pelo carinho, por tudo.

Aos amigos e afilhados Lucas Brou & Jéssica pela torcida e alento.

As amizades que o INPE me deu: Jey, Val, Eloy, Renata, Cassya, Alain, Tio Walter, Jairo.

Aos amigos da academia, Raquel, Dona Rita, e outros.

Aos meus tios, Mariana e Leopoldo Messenger pelo afago e apoio.

Ao meu tio da Austrália, Basilio Ormeño, mesmo tão longe, me apoiando.

Ao meu amado irmão e amigo Rúben Andres e sua esposa Fernanda. Ah meu irmão, como eu te amo, agradeço por cuidar tanto de mim.

Agradeço aos meus pais, pela base, por tudo que me transmitiram, construíram que cheguei aqui. É para vocês! Papy, meu cientista, pelo apoio incondicional que sempre tive e suas invenções mais mirabolantes que irão sempre me acompanhar. Mamyta, por sua delicadeza, sabedoria e força extraordinária de ir *adelante*. A cada manhã tenho a essência deles comigo, o timbre de suas vozes a ressoar meus ouvidos, seus sorrisos em meus olhos; seus ensinamentos em meu coração, e a fé em Cristo em minha vida.

Por fim, a vida é feita de ciclos, que venha o novo tempo, *Kairós*.



## RESUMO

A exploração espacial é um dos principais impulsionadores da inovação e de novas tecnologias, particularmente na indústria aeroespacial. Isso porque, as missões espaciais se tornam cada vez mais complexas, exigindo de seus subsistemas alta confiabilidade e menor custo. Cabe ressaltar, que colocar um satélite no espaço é um procedimento de alto custo, envolvendo várias etapas, onde o Sistema de Controle de Atitude (SCA) precisa ser robusto, confiável e ter bom desempenho. O SCA deve controlar altas velocidades angulares com grande precisão e ao mesmo tempo estabilizar a atitude a níveis compatíveis com os requisitos de apontamento da missão. Os subsistemas de um satélite associados aos seus sensores e atuadores que determinam o controle de atitude do satélite, muitas das vezes não podem ser reparados no espaço, logo seu bom funcionamento é fundamental para o sucesso da missão. Por outro lado, missões espaciais complexas possuem dinâmicas altamente não lineares, onde técnicas de controle lineares são incapazes de projetar o SCA que atendam aos requisitos da missão. Neste trabalho estuda-se o desempenho e a robustez da união das técnicas de controle SDRE (Equação de Ricatti Dependente do Estado) e do controle H-Infinity ( $H^\infty$ ). A primeira, possui a grande vantagem de abordar sistemas com dinâmica não linear, por meio da parametrização dos Coeficiente Dependente do Estado (SDC) e a segunda, é uma técnica que permite aumentar a robustez do controlador às perturbações temporárias e/ou persistentes e as incertezas do modelo. Inicialmente, projeta-se um controlador SDRE para uma plataforma 3D de um simulador de satélites que está sendo desenvolvida pela Universidade Federal do ABC (UFABC), a qual possui como atuadores rodas de reação e jato de gás. Mostrou-se que o controlador SDRE tem desempenho superior comparado ao Controlador LQR (Regulador Linear Quadrático). Em seguida investiga-se o desempenho e a robustez do controlador projetado através da união das técnicas, SDRE e  $H^\infty$  para o controle de atitude do satélite Amazônia 1. Essa investigação é realizada para quatro parametrizações SDC, que resultam em quatro dinâmicas pseudolineares, ou seja, dinâmicas dependentes do estado. Os critérios de desempenho utilizados são observabilidade, controlabilidade e principalmente o valor da banda passante do controlador. As quatro parametrizações são analisadas, confirmando-se a influência da parametrização SDC no desempenho e robustez do controlador SDRE +  $H^\infty$ . Por fim, pode-se dizer que a principal contribuição desse trabalho, é a investigação profunda da influência das quatro dinâmicas não lineares no desempenho e robustez do controlador SDRE +  $H^\infty$ . Além disso, o desenvolvimento de um algoritmo de controle não linear com maior flexibilidade, que permite ao projetista balancear performance da técnica SDRE com a robustez da técnica do  $H^\infty$ .

Palavras-chave: Controle SDRE. Parametrização SDC. Controle H-Infinity. União. Controle de Atitude. Sistemas Não Lineares.



# ATTITUDE CONTROL OF A SATELLITE APPLYING THE UNION OF THE SDRE AND H-INFINITY METHODS

## ABSTRACT

Space exploration is one of the main drivers of innovation and new technologies, particularly the aerospace industry. That is why, space missions become increasingly complex, requiring high reliability and lower cost from their sub-systems. It is worth mentioning that placing a satellite in space is a high-cost procedure, involving several steps, where the Attitude Control System (SCA) needs to be robust, reliable and perform well. The SCA must control high angular speeds with great precision while stabilizing the attitude at levels compatible with the mission's pointing requirements. The sub-systems of a satellite associated with its sensors and actuators that aim at determining and controlling the attitude of the satellite, often cannot be repaired in space, so its proper functioning is fundamental to the success of the mission. On the other hand, complex space missions have highly nonlinear dynamics, where linear control techniques are unable to design the SCA that meet the mission requirements. In this work we study the performance and robustness of the union of the SDRE control techniques (State-dependent Riccati Equation) and the H-Infinity control ( $H^\infty$ ). The first has the great advantage of approaching systems with non-linear dynamics, through parameterization of the State-Dependent Coefficient (SDC) and the second, is a technique that allows increasing the robustness of the controller to temporary and / or persistent disturbances and the uncertainties of the model. Initially, an SDRE controller is designed for a 3D platform of a satellite simulator that is being developed by the Federal University of ABC (UFABC), which has reaction wheels and gas jet actuators. It was shown that the SDRE controller has superior performance compared to the LQR Controller (Linear Quadratic Regulator). Then, the performance and robustness of the projected controller is investigated through the union of the techniques, SDRE and H infinity for the attitude control of the satellite Amazon 1. This investigation is carried out for four SDC parameterizations, which result in four pseudolinear dynamics, that is, state-dependent dynamics. The performance criteria used are observability, controllability and, mainly, the passband value of the controller. The four parameterizations are analyzed, confirming the influence of the SDC parameterization on the performance and robustness of the SDRE +  $H^\infty$  controller. Finally, it can be said that the main contribution of this work, is the deep investigation of the influence of the four non-linear dynamics on the performance and robustness of the SDRE +  $H^\infty$  controller. In addition, the development of a non-linear control algorithm with greater flexibility, which allows the designer to balance the performance of the SDRE technique with the robustness of the  $H^\infty$  technique.

Keywords: SDRE control. SDC parameterization. H-Infinity Control. Union. Attitude Control. Nonlinear Systems.





## LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
Figura 3.1 - Diagrama de Bloco de um Sistema SISO .....	18
Figura 3.2 - Configuração de pólos e zeros de um sistema de fase mínima G1(s) e de um sistema de fase não mínima G2(s).....	21
Figura 3.3 - Característica de ângulo e fase dos sistemas G1(s) e G2(s).....	21
Figura 3.4 – Operação de uma matriz sobre um vetor e seus valores singulares máximo e mínimo. ....	44
Figura 3.5 – Operação da matriz dada em (3.115) sobre os vetores de raio unitário. ....	45
Figura 3.6 – Diagrama de Bode do sistema dado em (3.116).....	46
Figura 3.7 – Diagrama de Bode do sistema dado em (3.116) destacando a norma $H^\infty$ . ....	47
Figura 3.8 – O Conceito de Estabilidade.....	47
Figura 3.9 - Estável, Neutro, Instável. ....	48
Figura 3.10 – A planta generalizada P. ....	56
Figura 3.11 – Configuração de controle com um grau de liberdade.....	58
Figura 3.12 – Nova estrutura da Figura 4.4.....	58
Figura 3.13 – Funções peso e sua estrutura na planta. ....	60
Figura 3.14 – Esquema de um sistema multivariável. ....	61
Figura 3.15 – Esquema correspondente à Equação 4.15. ....	62
Figura 3.16 – Comparando $W_S$ e $W_T$ .....	66
Figura 3.17 – Relação de desempenho. ....	68
Figura 5.1 – Simulador 3D de um SCA em construção na UFABC.....	78
Figura 6.1 – Resultado da simulação para posição angular dos eixos x (azul), y (vermelho) e z (verde) iguais a zero até a atitude final de $(20^0, 50^0,$ $-30^0)$ por meio do uso dos controladores LQR (em cima) e SDRE (abaixo). ....	87
Figura 6.2 – Resultado da simulação para velocidades angulares dos eixos x (azul), y (vermelho) e z (verde) inicialmente iguais a zero até a	

sua estabilização velocidade angular final zero por meio do uso dos controladores LQR (em cima) e SDRE (embaixo).....	88
Figura 6.3 – Resultado da simulação para a ação do atuador (Torque) dos eixos x (azul), y (vermelho) e z (verde) até a sua estabilização por meio do uso dos controladores LQR (em cima) e SDRE (abaixo). .....	89
Figura 6.4 – Resultado da simulação do SDRE no SCA do simulador em 3D da UFABC para o modo de operação do satélite de redução de velocidade angular para o modo de apontamento. Eixos x (azul), y (vermelho) e z (verde) da plataforma até (100°, 50°, 70°) (em cima), velocidades angulares (abaixo).....	90
Figura 6.5 – Resultado da simulação do SDRE referente as rodas de reação no SCA do simulador em 3D da UFABC. Eixos x (azul), y (vermelho) e z (verde).....	91
Figura 6.6 – Resultado da simulação SDRE para a ação do atuador (Torque) dos eixos x (azul), y (vermelho) e z (verde) até a sua estabilização do simulador em 3D da UFABC. ....	91
Figura 6.7 – Resultado da simulação SDRE para a ação dos Torques dos jatos de gás para a estabilização do simulador em 3D da UFABC. Eixos x (azul), y (vermelho) e z (verde). ....	92
Figura 6.8 – Resultado da simulação do SDRE no SCA do simulador em 3D da UFABC referente à energia da passagem jatos de gás e rodas de reação, eixos x (azul), y (vermelho) e z (verde). ....	92
Figura 6.9 – Desempenho e robustez do controlador SDRE + $H^\infty$ . ....	102
Figura 6.10 – Polos e zeros da Planta $G(s)$ - Parametrização A.....	104
Figura 6.11– Planta $G(s)$ em malha aberta - Parametrização A. ....	104
Figura 6.12 – Planta x Ganho; $L = G(s)K(s)$ - Parametrização A. ....	105
Figura 6.13 – Sensibilidade $S$ e Sensibilidade Complementar $T$ - Parametrização A.....	105
Figura 6.14 – Banda Passante objetivo inserido em +/- Gama - Parametrização A.....	106
Figura 6.15 – Quatérnio 1 - Parametrização A.....	106

Figura 6.16 – Quatérnio 2 - Parametrização A. ....	107
Figura 6.17 – Quatérnio 3 - Parametrização A. ....	107
Figura 6.18 – Velocidade Angular $W_1$ - Parametrização A. ....	108
Figura 6.19 – Velocidade Angular $W_2$ - Parametrização A. ....	108
Figura 6.20 – Velocidade Angular $W_3$ - Parametrização A. ....	109
Figura 6.21 – Torques nos três eixos - Parametrização A. ....	109
Figura 6.22 – Pólos e zeros da Planta $G(s)$ - Parametrização B. ....	110
Figura 6.23 – Planta $G(s)$ em malha aberta - Parametrização B. ....	111
Figura 6.24 – Planta x Ganho; $L = G(s)K(s)$ - Parametrização B. ....	111
Figura 6.25 – Sensibilidade $S$ e Sensibilidade Complementar $T$ - Parametrização B. ....	112
Figura 6.26 – Banda Passante objetivo inserido em +/- Gama - Parametrização B. ....	112
Figura 6.27 – Quatérnio 1 - Parametrização B. ....	113
Figura 6.28 – Quatérnio 2 - Parametrização B. ....	113
Figura 6.29 – Quatérnio 3 - Parametrização B. ....	113
Figura 6.30 – Velocidade Angular $W_1$ - Parametrização B. ....	114
Figura 6.31 – Velocidade Angular $W_2$ - Parametrização B. ....	114
Figura 6.32 – Velocidade Angular $W_3$ - Parametrização B. ....	115
Figura 6.33 – Torques nos três eixos - Parametrização B. ....	115
Figura 6.34 – Pólos e zeros da Planta $G(s)$ - Parametrização C. ....	117
Figura 6.35 – Planta $G(s)$ em malha aberta - Parametrização C. ....	117
Figura 6.36 – Planta x Ganho; $L = G(s)K(s)$ - Parametrização C. ....	118
Figura 6.37 – Sensibilidade $S$ e Sensibilidade Complementar $T$ - Parametrização C. ....	118
Figura 6.38 – Banda Passante objetivo inserido em +/- Gama - Parametrização C. ....	119
Figura 6.39 – Quatérnio 1- Parametrização C. ....	119
Figura 6.40 – Quatérnio 2 - Parametrização C. ....	119
Figura 6.41 – Quatérnio 3 - Parametrização C. ....	120
Figura 6.42 – Velocidade Angular $W_1$ - Parametrização C. ....	120
Figura 6.43 – Velocidade Angular $W_2$ - Parametrização C. ....	121

Figura 6.44 – Velocidade Angular $W_3$ - Parametrização C.....	122
Figura 6.45 – Torques nos três eixos - Parametrização C. ....	122
Figura 6.46 – Torques nos três eixos - Parametrização D .....	123
Figura 6.47– Planta $G(s)$ em malha aberta - Parametrização D.....	124
Figura 6.48 – Planta x Ganho; $L = G(s)K(s)$ - Parametrização D. ....	124
Figura 6.49 – Sensibilidade $S$ e Sensibilidade Complementar $T$ - Parametrização D.....	125
Figura 6.50 – Banda Passante objetivo inserido em +/- Gama - Parametrização D.....	125
Figura 6.51 – Quatérnio 1 - Parametrização D.....	126
Figura 6.52 – Quatérnio 2 - Parametrização D.....	126
Figura 6.53 – Quatérnio 3 - Parametrização D.....	127
Figura 6.54 – Velocidade Angular $W_1$ - Parametrização D.....	127
Figura 6.55 – Velocidade Angular $W_2$ - - Parametrização D.....	128
Figura 6.56 – Velocidade Angular $W_3$ - - Parametrização D.....	128
Figura 6.57 – Torques nos três eixos - Parametrização D. ....	129

## LISTA DE TABELAS

	<b><u>Pág.</u></b>
Tabela 6.1. Parâmetros da simulação.....	103
Tabela 6.2. Condições iniciais.....	103



## LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

3D	Três dimensões
ARE	<i>Algebraic Riccati Equation</i>
ETE - CMC	Engenharia e Tecnologia Espaciais – Mecânica Espacial e Controle
ESA	<i>European Space Agency</i>
$H^\infty$	H-Infinito
INPE	Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais
LQG	<i>Linear Quadratic Gaussian</i>
LQR	<i>Linear Quadratic Regulator</i>
MIMO	<i>Multiple Input Multiple Output</i>
MRPs	<i>Modified Rodrigues Parameters</i>
NLQR	<i>Nonlinear Quadratic Regulator</i>
P	Proporcional
PD	Proporcional Derivativo
PI	Proporcional Integral
PID	Proporcional Integral Derivativo
QFT	<i>Quantitative Feedback Theory</i>
SCA	Sistema de Controle e Atitude
SID	Serviço de Informação e Documentação
SDC	<i>State Dependent Coefficients</i>
SDRE	<i>State-Dependent Riccati Equation</i>
SPG	Serviço de Pós-Graduação
SVD	<i>Singular Value Decomposition</i>
TDI	Teses e Dissertações Internas
UFABC	Universidade Federal do ABC





## LISTA DE SÍMBOLOS

$A, B, C, D$	matrizes que representam o sistema em espaço de estados
$A(x), B(x), Q(x), R(x)$	matrizes que representam o sistema em função do estado
$G$	modelo da planta
$P$	planta generalizada
$K$	controlador
$r$	sinal de referência
$e$	erro ( $r-y$ )
$y$	sinal de saída
$d$	representam os sinais de perturbação
$\eta$	medida do ruído respectivamente
$w$	entrada exógena/externa dos comandos
$v$	entrada de controle para a configuração geral
$u$	sinal de controle
$z$	saída exógena/externa dos erros dos sinais
$J$	índice de desempenho
$L(x,u,t)$	função de ponderação
$N$	tempo fixo
$R(t), S(T), Q(T)$	matrizes de ponderação
$Q(x), R(x)$	matrizes pesos
$T(jw)$	função sensibilidade complementar
$S(jw)$	função sensibilidade
$W_T$	função peso em $T(jw)$
$W_S$	função peso em $S(jw)$
$W_{KS}$	função peso do controlador
$C_0$	matriz de controlabilidade
$G(t_0, T)$	gramiano de controlabilidade
$\bar{\sigma}$	máximo valor singular
$x_n$	variáveis de estados (ou estados)
$x^*$	mínimo local
$\lambda_m$	multiplicador de Lagrange
$\mathbb{R}$	plano real

$   $	módulo
$\  \ _{\infty}$	norma infinita
$\  \ _2$	norma-2
$F_i$	sistema de referência inercial
$F_b$	sistema fixo no corpo (plataforma)
$H$	momento angular ao redor do centro de massa
$M_T$	soma dos torques oriundos de perturbações externas
$\hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{b}_3$	versores do sistema de referências $F_b$
$I_{ii}$	momento de inércia ao redor do eixo $b_i$
$W$	velocidade angular de $F_b$ em relação a $F_i$
$\Omega$	velocidade angular das rodas de reação
$I$	momento de inércia
$I_w$	momento de inércia das rodas de reação
$S(x)$	matriz de ganho
$M_{pi}$	torque gerado em torno do eixo $i$
$d_i$	distância do eixo de rotação
$M_T$	torque total externo sobre o satélite
$T_i$	tração
$PA$	parametrização A
$PB$	parametrização B
$PC$	parametrização C
$PD$	parametrização D

## SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
1 INTRODUÇÃO .....	1
1.1 Motivação e justificativas.....	3
1.2 Objetivos .....	4
1.3 Organização da tese .....	5
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	7
3 CONCEITOS BÁSICOS.....	17
3.1 Função de transferência.....	17
3.2 Pólos e zeros da função de transferência .....	19
3.3 Sistemas de fase mínima e não mínima .....	20
3.4 Teoria de controle ótimo.....	21
3.4.1 Processo do modelo matemático .....	22
3.4.2 Restrições física.....	23
3.4.3 Índice de desempenho .....	23
3.4.4 Multiplicadores de Lagrange .....	25
3.4.4.1 A solução do problema de otimização por meio dos multiplicadores de Lagrange .....	27
3.5 Solução do problema de otimização contínua geral.....	29
3.5.1 Exemplo: menor distância entre dois pontos.....	31
3.6 Regulador linear quadrático no tempo contínuo.....	33
3.6.1 As equações do estado e de co-estado .....	34
3.6.2 Custo para entrada nula e equação de Lyapunov.....	35
3.6.2.1 Exemplo: propagação do custo de um sistema escalar não controlado .....	36
3.6.3 Estado final fixo e controle em malha aberta .....	38
3.6.3.1 Exemplo: controle em malha aberta de um sistema escalar .....	40
3.6.4 Estado final livre e controle em malha fechada .....	41
3.7 Teoria de controle robusto .....	42
3.7.1 Decomposição em valores singulares – SVD .....	42
3.7.2 Diagrama SVD: gráfico de bode MIMO .....	45

3.7.3	Definição da norma $H^\infty$ - sistemas MIMO .....	46
3.8	O conceito de estabilidade .....	47
3.9	O controle clássico .....	48
3.10	O controle moderno.....	49
3.11	O controle ótimo .....	50
3.11.1	O SDRE .....	51
3.11.2	O regulador quadrático não linear .....	51
3.11.3	A parametrização SDC.....	53
3.12	O controle robusto.....	55
3.12.1	A técnica de controle H-infinito ( $H^\infty$ ) .....	56
3.12.2	Otimização do método de controle $H^\infty$ .....	63
3.12.3	Construção das funções peso.....	65
3.12.4	Incertezas de modelagem .....	68
4	METODOLOGIA.....	70
4.1	O controle H-infinito usando a técnica SDRE não linear .....	70
4.2	A união das técnicas SDRE e $H^\infty$ .....	71
4.3	Projeto do controlador SDRE .....	74
4.3.1	Controle não linear realimentado .....	76
5	MODELAGEM MATEMÁTICA .....	78
5.1	A plataforma de simulação de um SCA.....	78
5.2	Ângulos de euler .....	80
5.3	Rodas de reação .....	81
5.4	Obtenção das matrizes A e B.....	84
5.5	Propulsores .....	85
6	SIMULAÇÕES.....	87
6.1	Controlador SDRE baseado no SDC .....	87
6.2	Controlador SDRE h-infinito subótimo baseado no SDC .....	93
6.3	Cinemática de atitude do satélite .....	95
6.4	As possíveis parametrizações SCA da matriz $A(x)$ .....	98
6.4.1	Investigação do desempenho do controlador SDRE + $H^\infty$ .....	100
6.4.1.1	Resultados das simulações com a parametrização A.....	104
6.4.1.2	Resultados das simulações da parametrização B.....	110

6.4.1.3	Resultados das simulações com a parametrização C.....	117
6.4.1.4	Resultados das simulações com a parametrização D.....	123
6.5	Resumo do desempenho do controlador para diferentes parametrizações.....	130
7	CONCLUSÕES.....	131
7.1	Sugestões de trabalhos futuros.....	132
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	133



## 1 INTRODUÇÃO

Durante muito tempo, a humanidade tem ansiosamente contemplado o céu e seus mistérios. A observação e curiosidade sobre o espaço exterior têm sido sempre constantes. À procura de outros planetas, formas, civilizações em que a exploração do espaço é o que desperta o desejo do ser humano. A exploração espacial se iniciou logo após o término da segunda guerra mundial. O mundo se separou em duas partes, a Guerra Fria se iniciava. Com lançamento do primeiro satélite artificial, o Sputnik em 1957, iniciou-se a largada para a corrida espacial, a conquista do homem no espaço, a exploração espacial (WINTER; MELO, 2007). Segundo a agência espacial europeia, ESA (2018), em mais de 60 anos de atividades espaciais, cerca de 5250 lançamentos resultaram em aproximadamente 42 mil artefatos espaciais rastreados.

Colocar um satélite em órbita é um procedimento caro e arriscado; anos de pesquisa e milhões de dólares são transformados em um artefato que, posto em órbita, estará longe de qualquer possibilidade de manutenção caso algo de errado ocorra (GONZALES, 2009). O objetivo principal das missões é oferecer mais autonomia para as espaçonaves e, por conseguinte, diminuir o custo das missões (GARWIN, 1958). As demandas de missões espaciais estão cada vez mais complexas e tem exigido da indústria aeroespacial o aprofundamento de pesquisa e desenvolvimento, a fim de obter subsistemas com maior desempenho e robustez, em particular o Sistema de Controle e Atitude (SCA) da espaçonave o qual pode ser considerado como o subsistema vital para o sucesso da missão espacial (DE SOUZA, 2017).

O SCA de qualquer tipo de satélite deve ter a capacidade de: determinar a atitude atual, computar o erro entre a atitude atual e desejada e aplicar torques apropriados para remover o erro (MURPHY; WIE, 2004). A tendência é que cada vez mais futuras missões espaciais envolvam grandes estruturas e cada vez mais leves. Nas quais podem ser: antenas, escudos solares, velas solares e painéis solares. Contudo com grandes estruturas, acarreta um desafio para o projeto de sistema de controle. Os recentes desenvolvimentos em controle

robusto permitem lidar com questões levantadas por essas estruturas (BODINEAU et. al, 2004).

Conforme Wertz (1978) uma vasta gama de equipamentos encontra-se disponíveis para aplicações em controle de atitude e órbita. Exemplos como: sensores (sensores de horizonte, do sol, de estrelas, giroscópios, magnetômetros e acelerômetros); atuadores: jatos de gás, bobinas magnéticas, rodas de reação. Satélites com componentes rígido-flexíveis, como grandes painéis, braços robóticos, rodas de reação, e antenas são sistemas espaciais que possuem uma dinâmica não linear. E conseqüentemente, exigem de um SCA bom desempenho, autonomia e robustez. Pois, devem levar em conta efeitos da flexibilidade, correndo o risco de não funcionar adequadamente ou mesmo levar o sistema à instabilidade (HUGHES, 1974).

Dizer que um sistema é robusto, está diretamente ligado a sua estabilidade e o desempenho. O estudo da robustez implica em estudar a sensibilidade do sistema quanto as perturbações temporárias e/ou persistentes e as incertezas do modelo. Incertezas no modelo podem ser divididas em incerteza paramétrica (incerteza estruturada) e incerteza não-estruturada. A incerteza paramétrica é muitas vezes mais fácil de caracterizar (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2001). Um controlador que seja capaz de garantir desempenho satisfatório, manter a estabilidade frente a erros de modelagem e variações paramétricas da planta pode então ser chamado de robusto (SANTOS,2018).

O projeto de um sistema de controle é geralmente fundamentado em um modelo do processo, seja este adquirido por identificação ou pelo equacionamento das leis físicas que regulam o comportamento dinâmico do sistema. Existem uma apreciável quantidade de técnicas de controle disponíveis para se projetar controladores a sistemas cada vez mais complexos. Porém, a aptidão de selecionar a técnica mais apropriada para a resolução do problema e aplicá-la de forma eficaz, pode ser um trabalho ainda mais difícil mesmo para problemas relativamente simples. Ademais, as propostas de controle robusto disponíveis na literatura são aplicadas em sistemas lineares, exigindo assim a linearização e a



redução dos modelos, perdendo assim, a autenticidade do modelo real. E por natureza, os sistemas físicos do mundo real são não lineares (CHEN, 1999).

Este trabalho apresenta o uso de técnicas de controle não lineares e de controle robusto em diversos casos, ressaltando o que há de melhor em cada método, com exemplos, resultados de simulação e análises a respeito de cada metodologia. Propondo no final, a mescla de duas técnicas: o método de controle Equação de Riccati Dependente do Estado (*State-Dependent Riccati Equation - SDRE*) com o método de H-Infinito ( $H^\infty$ ), ou seja, a aplicação do controle robusto  $H^\infty$  em sistemas não lineares.

Além disso, nesta tese investiga-se o importante aspecto da união das técnicas SDRE e H-Infinito que está associado a parametrização dos coeficientes dependentes do estado (*State Dependent Coefficients - SDC*) o qual admite obter o sistema linear dependente do estado. Essa parametrização permite utilizar teoria de controle não linear quadrática (*Nonlinear Quadratic Regulator - NLQR*), com a mesma filosofia da técnica do Regulação Quadrática Linear (*Linear Quadratic Regulator - LQR*). Ressalta-se ainda, que todas as investigações examinadas nesta tese são estritamente numericamente. Desta forma, tais simulações e conclusões representam um passo para o uso prático do método NLQR.

## **1.1 Motivação e justificativas**

O método de controle SDRE é uma extensão do LQR e tem a principal vantagem de tratar sistemas com dinâmica não linear, enquanto as vantagens do método H-Infinito ( $H^\infty$ ) é a sua robustez. O  $H^\infty$  é um método de controle linear conhecido por sua robustez, estabilidade e bom desempenho. Isto significa um bom desempenho apesar da variação de parâmetros, condições ambientais e/ou condições operacionais como mudanças de carga e ou perturbações. Tais variações são introduzidas no sistema como incerteza do modelo. No entanto, o método  $H^\infty$  tem sido aplicado a sistemas lineares. Só recentemente, que tem sido investigado a aplicação da união das técnicas SDRE +  $H^\infty$  a fim de projetar controladores com características ótimas a

sistemas não lineares objetivando obter controladores com maior desempenho e mais robusto.

## 1.2 Objetivos

O principal objetivo desta tese consiste em estudar e aplicar a união da técnica de controle H-Infinito ( $H^\infty$ ) com o método de controle não linear SDRE a fim de projetar um Sistema de Controle de Atitude (SCA) para um satélite de dinâmica não-linear. Para se familiarizar com ambos os métodos, inicialmente aplica-se o método SDRE para projetar o SCA de um simulador de satélites em 3D com dinâmica não linear (ARENA, 2011) que está sendo construído pela Universidade Federal do ABC (UFABC). O simulador é semelhante ao do INPE, o qual foi investigado por Gonzáles (2009). A diferença está no fato de que o SCA do simulador do INPE estudado utilizou rodas de reação como atuadores, enquanto o simulador tem como atuadores, rodas de reação e jatos de gás. Em seguida, utilizando a dinâmica do satélite Amazonia-1, tem-se como objetivo uma investigação conceitual de como escolher a parametrização do coeficiente dependente do estado (SDC). Essa investigação visa obter uma parametrização que melhore o desempenho do controlador projetado pela união das técnicas H-Infinito e SDRE. Portanto, a questão da influência da parametrização SDC no desempenho do controlador oriundo da união das técnicas SDRE + H-Infinito é um dos principais pontos investigados nesse trabalho. Ressaltando-se que a investigação de um maior desempenho do controlador SDRE + H-Infinito não linear utilizando este maior grau de liberdade é um dos objetivos explorados nesta tese. Por fim, espera-se que os resultados obtidos da aplicação dessa nova estratégia de controle, permitam aprofundar: 1) os estudos das características da dinâmica não linear de modelos matemático do satélite e 2) as potencialidades de desempenho e de robustez da união dos métodos  $H^\infty$  e do SDRE não linear, no escopo de implementação computacional, a fim de dar ao projetista mais uma estratégia no projeto de um SCA do satélite e/ou espaçonave.

### 1.3 Organização da tese

Esta tese apresenta a seguinte estrutura:

- Capítulo 2: Uma vasta Revisão Bibliográfica é exposta, em que são abordadas o desenvolvimento das técnicas SDRE e  $H^\infty$ , separadas, as motivações, as tentativas e recomendações para a união das duas técnicas de controle agindo juntas.
- Capítulo 3: exhibe alguns dos Conceitos Básicos da teoria de controle em geral que são utilizados neste trabalho. A seguir, aspectos fundamentais da teoria de controle ótimo em que se destaca a solução do problema de otimização. Baseada essencialmente na equação de Riccati.
- Capítulo 4: apresenta as Metodologias de Controle utilizadas neste trabalho. Inicia-se o capítulo com uma breve apresentação sobre o conceito de estabilidade e depois os tipos de controle, clássico, moderno, ótimo e robusto em que há também um breve resumo a respeito de incertezas. Porém, dá-se ênfase as técnicas SDRE,  $H^\infty$  e a união entre ambas.
- Capítulo 5: apresenta o modelamento do simulador 3D do SCA que está sendo construído pela UFABC (Universidade Federal do ABC). E a aplicação do método SDRE para se projetar um controlador baseado nos atuadores de jato de gás e de rodas de reação .
- Capítulo 6: apresenta as simulações, em que se inicia com uma comparação do SDRE ao LQR. E a seguir, o SDRE e as dinâmicas do SDC com o H-Infinito.
- Capítulo 7: apresenta as conclusões, contribuições deste estudo e as ideias para trabalhos futuros.



## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O controle SDRE emergiu nos meados da década de 1990, fornecendo uma estrutura de projeto sistemática e efetiva para sistemas não lineares. Motivado pela técnica de controle LQR (*Linear Quadratic Regulator*) a qual consiste na solução da equação algébrica de Riccati (*Algebraic Riccati Equation - ARE*). Cloutier et al. (1996), foi um dos pioneiros que estendeu a técnica LQR, resultando no problema do Regulador Quadrático Não Linear (NLQR) o qual se utiliza da parametrização baseada nos Coeficientes Dependentes do Estado (*State Dependent Coefficients - SDC*) como apontado em Cloutier (1997) e Cloutier et al. (1996). O trabalho de Cloutier et al. (1996) foi um dos primeiros a explorar o método SDRE aplicado a sistemas não lineares com detalhes, proporcionando uma compreensão mais profunda da técnica, suas capacidades e limitações. Além de afirmar que a técnica SDRE é uma metodologia de projeto de controle emergente.

Assim sendo, a técnica do SDRE; às vezes referida como a equação de Riccati congelada (ÇIMEN, 2010); vem se tornando muito popular dentro da comunidade de controle, proporcionando um algoritmo muito eficaz para sintetizar controles com realimentação não lineares, permitindo que as não linearidades nos estados sejam preservadas no sistema, oferecendo assim também maior flexibilidade no projeto do controlador através de matrizes de ponderação dependentes do estado (ÇIMEN, 2008).

Uma análise profunda sobre a teoria do SDRE foi feita por Çimen (2008). Ele apresentou em seu trabalho as capacidades e a flexibilidade de projetar o SDRE para resolver problemas de controle ótimos não lineares e a teoria desenvolvida até o momento. A existência de soluções, bem como as propriedades de otimização e estabilidade associadas aos controladores SDRE e exibiu também questões que ainda estavam abertas para investigação da técnica SDRE.

A parametrização SDC é um método que consiste em fatorar as equações diferenciais do sistema de maneira a fazer aparecer produtos entre vetores de estado e matrizes dependentes dos estados (BIGOT, 2015). Çimen (2010) ainda é mais detalhista, dizendo que método SDC implica na fatorização (ou seja, a

parametrização) da dinâmica não linear no produto de uma função com valor de matriz (que depende do estado) e do vetor de estado. Ao fazê-lo, o algoritmo SDRE capta completamente as não linearidades do sistema, trazendo o sistema não linear para uma estrutura linear com matrizes de coeficientes dependente do estado (SDC) e minimizando um índice de desempenho não necessariamente quadrático com estrutura não linear.

A falta de singularidade na parametrização SDC cria graus de liberdade adicionais que podem ser usados para melhorar o desempenho do controlador (ÇİMEN, 2010). Uma ARE usando as matrizes SDC é então resolvida em linha para dar a lei de controle subótima. Os coeficientes desta ARE variam com o ponto dado no espaço de estados.

Erdem e Alleyne (2004) desenvolveram um controle SDRE atuando em tempo real num robô flexível. Os resultados mostraram que o controle SDRE supera o controle LQR mesmo quando os mesmos parâmetros de projeto são usados. Shawky et al (2002) modelou uma barra flexível com peso na ponta através da abordagem lagrangiana e dos métodos dos modos assumidos e levou em consideração incertezas paramétricas. O foco foi o desenvolvimento não linear do controle  $H^\infty$  com a junção ao controle SDRE e a resolução da equação de Riccati como função do estado. Assumiu que todos os estados da planta estavam disponíveis para medição. Os resultados foram bem-sucedidos, a metodologia de controle proposta baseou-se na minimização do efeito da perturbação na posição da ponta. Shawky et al (2013) expandiu o sucesso do controlador não linear do SDRE comparando-o com o controle PD (Proporcional Derivativo), o resultado foi o projeto de um controlador com maior robustez, já que o modelamento e introdução das incertezas que o método de controle  $H^\infty$  permite foi feita.

Bogdanov e Wan (2007) desenvolveram uma abordagem de controle de voo baseada em uma equação de Riccati dependente do estado e sua aplicação a helicópteros autônomos. O modelo dinâmico não linear de seis graus de liberdade que foi manipulado em uma forma pseudolinear onde as matrizes do sistema são explicitamente função do estado atual. Uma equação padrão

de Riccati é então resolvida numericamente em cada passo do loop de controle com 50 Hz para projetar a lei de controle de realimentação de estado não linear online.

Para Gonzales (2009) o SDRE é um método computacionalmente mais simples que outras técnicas não lineares e apresenta um desempenho equivalente aos sistemas lineares. Em seu trabalho, apresentou seu bom desempenho e robustez do controlador SDRE associado a um filtro de Kalman num projeto onde a parametrização SCA é utilizada no modelo não linear de um simulador do Sistema de Controle de Atitude (SCA) de satélites. O desempenho do controlador SDRE foi apresentado no domínio do tempo e comparado com o controlador LQR convencional.

O algoritmo de controle SDRE depende da solução de uma equação de Riccati em tempo contínuo em cada atualização de tempo. Esta abordagem foi aplicada para o controle de veículos aéreos autônomos experimentais com sucesso por Katsev e Cockburn (2007). Nesse trabalho verificou-se que a aplicação da técnica SDRE precisa desenvolver recursos computacionais mais complexos a fim de incorporar a dinâmica não linear no projeto do controlador e assim melhorar o desempenho e a robustez do o algoritmo de controle bem como sua implementação computacional. Esse aspecto do desenvolvimento e implementação computacional do controlador SDRE+ $H^\infty$  é investigado neste trabalho.

Shihabudheen et al. (2015) desenvolveu a modelagem, dinâmica e controle de uma barra flexível. Um modelo completo que contou com efeitos de amortecimento e fricção, além da inércia do rotor e flexão da articulação, além da carga útil em sua extremidade. O SDRE foi projetado para rastreamento de posição e supressão da vibração. A eficácia e viabilidade do algoritmo de controle proposto foram verificadas por simulações numéricas.

Çimen (2010) mostrou que uma das principais vantagens do SDRE é a flexibilidade que a técnica permite na construção das matrizes peso  $Q(x)$  e  $R(x)$ , uma vez que essas matrizes de ponderação permitem melhorar o desempenho do controlador e a energia do sinal de controle. Sobre como selecionar essas

matrizes de ponderação  $Q(x)$  e  $R(x)$  parametrizadas na forma SDC é apresentado por Cloutier e Stansbery (2002). Bigot (2015) estudou o controlador SDRE aplicando-o a um modelo não linear de um braço robótico rotativo rígido-flexível formado por uma haste flexível acoplada a um servomotor. Desenvolveu um algoritmo para a melhor definição das matrizes peso  $Q(x)$  e  $R(x)$ , baseando-se nos pontos da fronteira de Pareto. No final demonstrou que o SDRE permite obter um melhor desempenho que o LQR.

György et al. (2016) desenvolveram um estudo teórico do desempenho do SDRE de uma dinâmica simples não linear em tempo contínuo e discreto. A parametrização SDC cria graus de liberdade adicionais que podem ser usados não só para melhorar o desempenho do controlador, mas também para evitar singularidades ou perda de controle, além de afetar a estabilidade, robustez e rejeição de perturbações, oferecendo assim um artifício mais flexível de controle não linear (LIN et al., 2015).

Enquanto algumas técnicas não lineares abordam apenas a estabilidade, o método SDRE aborda diretamente o desempenho através da especificação do índice de desempenho do problema do regulador não linear. Além disso, o estado dependente do estado e as ponderações de controle podem ser ajustadas para afetar diretamente o desempenho. Os graus de liberdade de projeto estão disponíveis devido a parametrização SDC. Tais graus de liberdade não estão disponíveis nas técnicas tradicionais de controle não linear (MENON; OHLMEYER, 2004).

Romero e Souza (2019) estudaram as matrizes SDC e seus desafios. A questão da influência da parametrização do SDC. Pois, nem todas as matrizes SDC cumprem os requisitos SDRE. Os autores levantaram as opções de descrição da cinemática do satélite, ângulos de Euler, vetor de Gibbs, parâmetros de Rodrigues modificados (*Modified Rodrigues Parameters* - MRPs), quaternions etc. E ressaltaram que algumas formulações cinemáticas do SCA não atendem aos requisitos do SDRE.

As questões de velocidade e desempenho computacional da implementação prática da equação de Riccati dependente do estado (SDRE) foram



apresentadas por Menon et al (2002). Embora o potencial do SDRE seja bem reconhecido, a aceitação da técnica pela indústria tem sido lenta. As principais razões para isso são: a) Ao contrário da tecnologia de controle linear, a abordagem SDRE requer métodos numéricos avançados para sua implementação; b) a percepção de que esta técnica pode não ser computacionalmente viável de forma real. Assim, os autores desenvolveram um pacote de software para implementação em tempo real da técnica SDRE. A execução deste software a frequência de amostragem de até 2 kHz em problemas do tamanho comumente encontrado em aplicações de controle de voo de mísseis é demonstrada em processadores comerciais. A precisão computacional dessas implementações mostrou-se comparável a outros softwares.

Em Ke et al. (2017) desenvolveu-se o método SDRE e o comparou com o LQG (*Linear Quadratic Regulator*) no acoplamento de dois pequenos satélites em órbita. Na qual, se acoplavam com o objetivo de manutenções que viessem a ser necessárias no decorrer da missão. Nas simulações, o controlador SDRE se saiu bem melhor que o LQR, nos requisitos de tempo para estabilização do sistema e menor gasto de combustível.

Resumidamente, as aplicações do SDRE estão cada vez mais abrangentes, desde de acordo Stepien *et al.* (2019) envolvendo satélites e artefatos espaciais (STANSBERRY; CLOUTIER, 2000), projetos integrados de orientação e controle (PALUMBO; JACKSON, 1999), projetos de piloto automático (CLOUTIER; STANSBERRY, 2001), robótica (KORAYEM; NEKOO , 2015), controle de sistemas com efeitos parasitários (FRIEDLAND, 1997), controle de pâncreas humano artificial (PARRISH; RIDGELY, 1997), controle de ventilador de dutos (SZNAIER et al., 2000) e sistemas magnéticos incluindo levitação (ERDEM; ALLEYNE, 1999).

Foi nos anos 80 que o método de controle robusto  $H^\infty$  ganhou destaque, quando Zames (1981) enfatizou que o método permitia trabalhar com incertezas da planta. Inicialmente, a proposta original do problema de controle  $H^\infty$  foi desenvolvido no domínio da frequência, contudo, por meio dos artigos de Doyle

*et al.* (1989) e Doyler e Glover (1989) em que abordaram o método no domínio do tempo, o  $H^\infty$  ganhou notoriedade em toda engenharia.

Spector e Flahner, (1990) ressaltam que um dos problemas mais relevantes no projeto de controle de um sistema é, simultaneamente, alcançar bom desempenho e robustez. Entretanto, sabe-se que esses critérios de desempenho são conflitantes. Outro aspecto importante, é a imprecisão do modelo, uma vez que uma modelagem linear não é fidedigna a realidade, logo considerar as imprecisões e as variação dos parâmetros do modelo no projeto do controlador é fundamental para se obter bom desempenho e robustez. E como mostrou Souza (1992) essa é a grande vantagem da metodologia de controle  $H^\infty$ , pois permite a incorporação de incertezas paramétricas e não paramétricas do projeto do controlador.

Bibel e Malyevac, (1992), apresentaram um guia para a escolha das matrizes pesos do método  $H^\infty$ . Os autores ressaltaram o quanto é importante possuir a habilidade certa de montar as tais funções pesos. E que isso se obtém através do conhecimento profundo das características do sistema a ser modelado e o que se deseja obter de resposta de desempenho. Não é um processo simples.

Bodineau et al. (2006) reforçou que as futuras missões espaciais são susceptíveis de envolver estruturas grandes e leves. Havendo a necessidade do uso de um controle robusto. Estruturas flexíveis possuem características de grande impacto no projeto. O grande desafio do projeto de controle reside nas incertezas da dinâmica que acarreta com os apêndices flexíveis. As técnicas de controle robusto, como o  $H^\infty$ , QFT (*Quantitative Feedback Theory*), e a iteração  $\mu$  (*mi síntese*) foram os métodos utilizados no trabalho.

Oliveira et al. (2009) apresentou a aplicação da técnica  $H^\infty$  ao modelo de uma aeronave flexível. Foram estudados apenas os primeiros modos de flexão da estrutura, na qual sua modelagem fora utilizando as equações de Lagrange. Os resultados apresentaram um bom controlador, robusto, que rastreou o ângulo de arfagem e atenuou o primeiro modo flexível. Xu et.al.(2016) utilizou o controle robusto  $H^\infty$  no controle de veículos aéreos não tripulados, melhorando a capacidade de voo frente a perturbações como o vento.

Apesar de haver inúmeros trabalhos do bom emprego do método de controle  $H^\infty$  sua aplicação sempre esteve limitada a sistemas lineares, que segundo Santos (2018) pode levar o sistema a um desempenho pobre. Portanto, uma alternativa surgiu quando Cloutier et al. (1996) apresentou a extensão dessa técnica a sistemas não lineares baseado na parametrização SDC, surgia assim uma alternativa para a extensão do controle  $H^\infty$ .

Beikzadeh e Taghirad (2012) desenvolveram um projeto de filtro H-Infinito com o SDRE, a fim de remediar os efeitos da incerteza de modelagem, ruído de medição e perturbações de entrada. O filtro proposto foi construído com base no critério de minimização da norma infinita. A eficácia do robusto filtro SDRE foi demonstrada através de simulações numéricas em que ele sua performance é superior ao SDRE convencional na presença de incertezas do modelo, distúrbios e ruídos de medição e em termos de erro de estimativa.

Santos e Souza (2017) desenvolveram um controle H-Infinito baseado no SDRE para um sistema não linear bem conhecido na literatura, um carro pêndulo invertido. A modelagem da planta e a obtenção da estrutura SDC para o projeto de controle  $H^\infty$  são deduzidas em detalhes. Além disso, uma matriz de ponderação sobre a energia da variável de saída a ser controlada é utilizada na função custo do problema de controle  $H^\infty$ . Visando ter-se maior flexibilidade no ajuste da energia associada aos estados. Das simulações, verificou-se a eficácia da técnica de controle  $H^\infty$  baseado em SDRE com matriz de ponderação da energia da variável de saída.

Wang et al. (2017) ressaltam que o avanço computacional teve importância prática no método SDRE além ampliar a gama de aplicações. Seu trabalho propôs uma abordagem do controle SDRE/ $H_2$ - $H^\infty$ , duas técnicas numéricas para calcular a solução da equação de Riccati. A primeira baseia-se na busca da solução estacionária da equação em cada etapa e a segunda baseia-se na busca da solução mínima de desigualdade de matriz linear (*Linear Matrix Inequality* - LMI). A eficácia da técnica proposta foi demonstrada por simulações no exemplo clássico do pêndulo invertido.

Nekoo (2019) propôs um controlador SDRE para sistemas não lineares invariantes no tempo, considerando a incerteza da planta. A aplicação do método proposto foi testada em um manipulador, um braço flutuante no espaço, expresso em duas equações diferenciais para ganhos da lei de controle adaptativo. Os resultados obtidos no controle do braço de dois graus de liberdade foram excelentes. A estabilidade da base do braço robótico espacial foi conseguida dentro dos critérios de desempenho do sistema.

Nguyen et al. (2019) implementou o SDRE e um controlador proporcional integral derivativo (PID) para o controle de manobras *Rendezvous* e foi realizada uma comparação entre dois métodos. Nas simulações, ambos os métodos tiveram sucesso em acompanhar a trajetória, contudo o sistema atingiu o estado estacionário mais rapidamente com o método SDRE. E no final, os autores ressaltam que a escolha do melhor método a ser aplicado será de acordo com os requisitos do projeto.

Akhloumadi e Ivanov (2019) desenvolveram o controle SDRE para uma espaçonave com três rodas de reação; observaram a necessidade de resolver a ARE por meio de um algoritmo mais direto, e para isto utilizaram a decomposição de Schur. Este método usa valores próprios e seus vetores próprios correspondentes da matriz Hamiltoniana para resolver a ARE. O método foi computacionalmente mais rápido que os métodos iterativos aplicados em outro trabalho desenvolvido por Navabi e Akhloumadi (2017).

Vale notar, que o bom desempenho de um sistema de controle está associado com a capacidade de este considerar no seu projeto o conjunto de equações não lineares que capturam completamente a dinâmica do sistema, especialmente na presença de diferentes fontes de perturbações. Portanto, para lidar com a descrição da dinâmica não linear, devem ser adotadas técnicas de controle não lineares, a fim de explorar a precisão do conjunto de equações. Diferentes técnicas não lineares já foram exploradas como o controle adaptativo (DE QUEIROZ et al., 2000) (N.WU et al., 2013), modo deslizante (PUKDEBOON, 2012) e torque calculado (YOON; AGRAWAL, 2009). No entanto, essas soluções não atendem a nenhuma condição de otimização ou subotimização.

Cada vez mais, os profissionais da engenharia de controle estão usando o método SDRE em uma variedade de aplicações do mundo real. O controle SDRE é uma metodologia altamente promissora e emergente para projetar controladores não lineares que podem ser implementados em tempo real e, em essência, fornece uma abordagem unificada para uma grande variedade de sistemas não lineares e um grande número de aplicações em campos de estudo diversos, como evidenciados pelo crescente número de documentos de aplicação na última década (ÇIMEN, 2010).

Por outro lado, a lei de controle do tipo LQR baseada na metodologia SDRE possui a vantagem de calcular a cada instante um novo está o qual é realimentado no modelo e assim usado para calcular uma nova solução da ARE e, por conseguinte, obtendo um novo controlador SDRE. Cabe mencionar que foi Cloutier et al. (1996) quem primeiro investigou e propôs a união dessas duas técnicas SDRE- $H^\infty$  para um simulador 2D. Esta união é uma generalização do controlador H-Infinito para sistemas não lineares, que utiliza a estrutura da técnica SDRE baseada na parametrização SDC. Por fim, ressalta-se que este trabalho tem como objetivo principal a investigação e a aplicação da união dessas duas técnicas SDRE+ $H^\infty$  para se projetar um Sistema de Controle de Atitude (SCA) de um satélite em 3D. Esse estudo representa, portanto, uma melhoria na aplicação da técnica de controle padrão do SDRE. Como resultado, mostra-se que o controlador baseado na união SDRE+ $H^\infty$  tem bom desempenho e apresenta grande robustez, uma vez que este é projetado considerando a dinâmica não linear do satélite.



### 3 CONCEITOS BÁSICOS

#### 3.1 Função de transferência

Na teoria de controle, as funções ditas funções de transferência são comumente usadas para caracterizar as relações de entrada-saída de componentes ou sistemas que podem ser descritos por equações diferenciais lineares invariantes no tempo. A função de transferência de um sistema representado por equações diferenciais lineares invariantes no tempo é definida como a relação entre a transformada de Laplace do sinal de saída (função resposta) e a transformada de Laplace do sinal de entrada (função de excitação), na hipótese de que todas as condições iniciais são nulas (OGATA, 1997).

Considere-se o sistema linear invariante no tempo definido pela seguinte equação diferencial:

$$a_0^{(n)}y + a_1^{(n-1)}\dot{y} + \dots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y = b_0^{(m)}x + b_1^{(m-1)}\dot{x} + \dots + b_{m-1}\dot{x} + b_m x \quad (n \geq m) \quad (3.1)$$

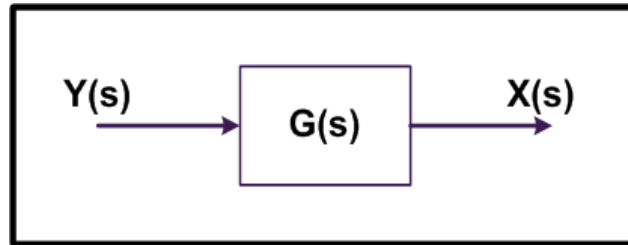
em que  $y$  é o sinal de saída do sistema e  $x$  é o sinal de entrada. A função de transferência deste sistema é obtida tomando-se as transformadas de Laplace de ambos os membros da equação (3.1), na hipótese de que todas as condições iniciais são nulas, ou

$$\begin{aligned} \text{Função de Transferência} = G(s) &= \frac{L[\text{Saída}]}{L[\text{Entrada}]}\Bigg|_{\text{condições iniciais}=0} \\ &= \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Usando-se o conceito de função de transferência é possível representar a dinâmica de sistemas por equações algébricas em  $s$ . A aplicabilidade do conceito da função de transferência é limitada a equações diferenciais lineares invariantes no tempo. A função de transferência é uma propriedade intrínseca do sistema,

independentemente da magnitude e da natureza do sinal de entrada ou função de excitação.

Figura 3.1 - Diagrama de Bloco de um Sistema SISO



A Figura 3.1 mostra um diagrama de blocos simples, que demonstra graficamente a função de transferência. Neste sistema,  $Y(s)$  é a entrada e  $X(s)$  é a saída e a função de transferência é  $G(s)$ . A entrada, a saída e a função de transferência são quantidades complexas porque elas consistem em uma amplitude e fase. A Equação 3.3 mostra uma função de transferência para o sistema generalizado na Figura 3.1.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \quad (3.3)$$

A Equação 3.3 é uma forma generalizada de uma função de transferência para um determinado sistema. A função de transferência é uma propriedade de um sistema próprio, independente da amplitude e da natureza da entrada e, dá uma descrição completa das características dinâmicas do sistema. Que não fornece qualquer informação sobre a estrutura física do sistema, mas funções de transferência de muitos sistemas fisicamente diferentes podem ser idênticas (CRAIG, 2004).



### 3.2 Pólos e zeros da função de transferência

a) Definição de pólos e zeros (OGATA,1997): Um pólo de uma função de transferência  $G(s)$  é um valor de  $s$  (real, imaginário ou complexo) que faz o denominador de  $G(s)$  igual à zero. Um zero de uma função de transferência  $G(s)$  é um valor de  $s$  (real, imaginário ou complexo) que faz o numerador de  $G(s)$  igual à zero. Considere agora a função de transferência  $G(s)$ , conforme foi definida na Equação 3.3, depois de reduzida para forma de fração, Equação 3.4.

$$G(s) = \frac{q(s)}{p(s)} \quad (3.4)$$

- b) Equação Característica (OGATA,1997): O polinômio  $p(s)$  é chamado de polinômio característico de  $G(s)$ , ou o polinômio característico do sistema. A equação  $p(s) = 0$  é chamada de a “equação característica” do sistema.
- c) Pólos da função de transferência (OGATA,1997):As raízes do polinômio característico são chamadas de pólos de  $G(s)$  ou pólos do sistema. Ou seja, os pólos são as soluções da equação característica.
- d) Zeros da função de transferência (OGATA,1997): As raízes do numerados de  $G(s)$  ( $q(s)$ ) são chamadas de zeros de  $G(s)$  ou zeros do sistema. Ou seja, os zeros são as soluções da equação  $q(s) = 0$ .

**Exemplo:** Considere a função de transferência  $G(s)$  dada por

$$G(s) = \frac{2 \cdot (s + 30)}{s(s + 2)(s^2 + 2s + 2)}$$

Para se encontrar os zeros de  $G(s)$  faz-se:  $(s + 30) = 0$  assim então,  $s = -30$ . E para encontrar os pólos de  $G(s)$ , faz-se:  $s(s + 2)(s^2 + 2s + 2) = 0$ . Resolvendo o polinômio tem-se respectivamente o seguinte conjunto solução:  $S = \{ 0, -2, (-1 \pm$

j)). Sendo que, das raízes temos que: 2 são reais e 2 são complexos. Como  $s = 0$  é um pólo de  $G(s)$ , costuma-se dizer que este sistema tem um “pólo na origem”.

A equação característica deste sistema é:

$$p(s) = s(s + 2)(s^2 + 2s + s) = s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 4s$$

### 3.3 Sistemas de fase mínima e não mínima

Um sistema pode ter zeros no semiplano direito e ser também estável. Funções de transferência com zeros no semiplano direito são classificadas como de fase não mínima. Se os zeros de uma função de transferência são todos refletidos para o semiplano oposto, de forma simétrica em relação ao eixo imaginário, não haverá mudança no módulo da função de transferência original, havendo apenas mudança na fase. Quando se compara a variação de fase dos dois sistemas, observa-se que a variação de fase de um sistema com todos os zeros no semiplano esquerdo é sempre menor, com  $w$  variando de zero a infinito. Portanto, a função de transferência com todos os seus zeros no semiplano esquerdo é dita de fase mínima (OGATA,1997).

Seja uma função de transferência  $G_2(s)$ , com  $|G_2(s)| = |G_1(s)|$  e todos os zeros de  $G_1(s)$  refletidos, simetricamente ao eixo imaginário, no semiplano direito, é chamada de função de transferência de fase não mínima. Assim, uma função de transferência é dita de fase mínima se todos os seus zeros estão no semiplano esquerdo do plano  $s$ . E ela será chamada de função de transferência de fase não mínima se tiver zeros no semiplano direito.

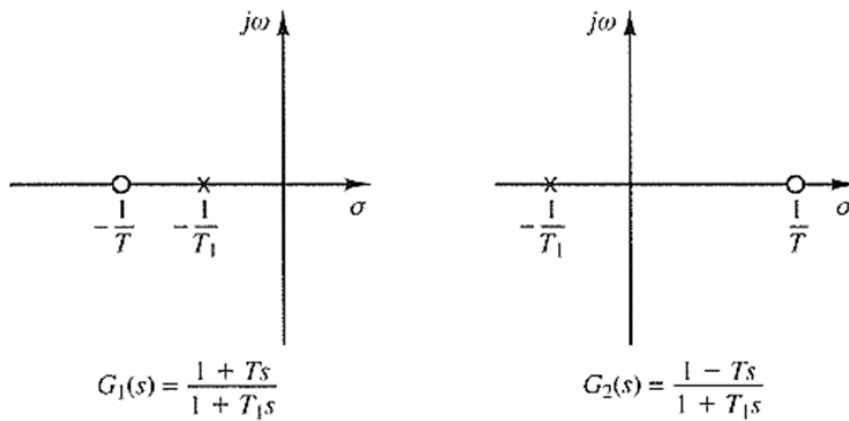
O significado do termo fase mínima deve ser entendido como sendo a menor variação possível de fase para uma dada curva de módulo. Como no exemplo:

$$G_1(j\omega) = \frac{1 + j\omega T}{1 + j\omega T_1}, \quad G_2(j\omega) = \frac{-1 + j\omega T}{1 + j\omega T_1}, \quad 0 < T_1 < T$$

As configurações de pólos e zeros destes sistemas são indicados na Figura 3.2. As duas funções de transferência têm o mesmo comportamento para o módulo,

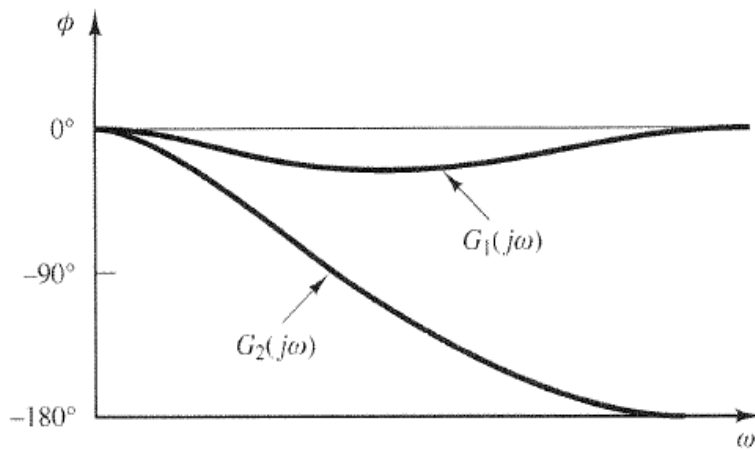
conforme a frequência varia Figura 3.3. Todavia, o comportamento de fase é diferente.

Figura 3.2 - Configuração de pólos e zeros de um sistema de fase mínima  $G_1(s)$  e de um sistema de fase não mínima  $G_2(s)$ .



Fonte: Adaptada de Ogata (1997).

Figura 3.3 - Característica de ângulo e fase dos sistemas  $G_1(s)$  e  $G_2(s)$ .



Fonte: Adaptada de Ogata (1997).

### 3.4 Teoria de controle ótimo

Nessa seção apresenta-se os conceitos básicos para o desenvolvimento da teoria do controle ótimo (SANTOS, 2018).

### 3.4.1 Processo do modelo matemático

O processo de modelagem matemática tem por objetivo, segundo Santos (2018), obter uma descrição algébrica que represente o sistema dada uma entrada ou conjunto de entradas. Deste modo, sistemas que podem ser descritos por equações diferenciais ordinárias na forma de variáveis de estados. Portanto, conforme Kirk (1998) se  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ , ...  $x_n(t)$  são variáveis de estados (ou estados) do processo no instante  $t$ , e  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$ , ...,  $u_m(t)$  são as entradas de controle do processo no instante  $t$ , então o sistema pode ser descrito por  $n$  equações diferenciais de primeira ordem.

$$\dot{x}_1(t) = f_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) \quad (3.5)$$

$$\dot{x}_2(t) = f_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) \quad (3.6)$$

$\vdots = \vdots$

$$\dot{x}_n(t) = f_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) \quad (3.7)$$

O vetor de estado do sistema, por sua vez, é definido como:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

E

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

é o vetor de controle. Dessa maneira, as equações de estados 3.5 e 3.8 podem ser representadas de forma geral por

$$\dot{x}(t) = f(x, u) \quad (3.10)$$

Significados úteis a seguir são utilizados: i) trajetória de estado: o histórico dos valores de estado no intervalo  $[t_0, t_f]$ , denotada por  $x$ ; ii) controle ou histórico de controle: o histórico dos valores das entradas de controle durante o intervalo  $[t_0, t_f]$ , denotada por  $u$ .

### **3.4.2 Restrições física**

As restrições físicas correspondem às restrições nos valores dos estados e do controle. Por exemplo, no problema de levar um carro de um ponto a outro em um tempo mínimo. Note que se a aceleração do carro é uma entrada de controle, visivelmente ela tem um limite superior que depende da capacidade do motor do carro. Trata-se de uma restrição física imposta ao controle. Com certeza, uma das variáveis de estado será a posição do carro. Para esta também se podem colocar limites superior e inferior, os quais estão pertinentes aos pontos de partida e chegada do carro.

### **3.4.3 Índice de desempenho**

O índice de desempenho é empregado para avaliar quantitativamente o desempenho de um sistema. Por conseguinte, o controle ótimo é definido como aquele que minimiza (ou maximiza) essa medida de desempenho. Para Kirk (1998), o índice de desempenho a ser utilizados para um dado sistema é uma escolha do especialista e está relacionada ao tipo de problema com o qual está lidando. Para Athans e Falb (2007), a intuição e experiência do especialista possui um papel importante na determinação da função de custo (índice de desempenho) do problema a ser resolvido. Contudo, existem alguns problemas corriqueiros que podem ser listados em controle ótimo, referentes aos índices de desempenho:

- **Problemas de tempo mínimo**

Suponha que se deseja encontrar o controle  $u_k$  que leva o sistema de um dados estado inicial  $x_0$  até um estado final desejado  $x \in \mathbb{R}^n$  em tempo mínimo. Então, um índice de desempenho adequado a esse problema seria

$$J = N = \sum_{k=0}^{N-1} 1, \quad (3.11)$$

com a condição de contorno  $x_N = x$ . No domínio do tempo contínuo, o equivalente seria:

$$J = t_f - t_0 \quad (3.12)$$

Em um problema desse tipo não é levado em conta o gasto de controle nem a trajetória a ser seguida.

- **Problemas de esforço de controle mínimo**

Nesse caso o objetivo é encontrar o controle  $u_k$  que leva o sistema de estado  $x_0$  ao estado final desejado  $x$  em um tempo fixo  $N$ , com esforço de controle mínimo. Assim,

$$J = \sum_{k=0}^{N-1} |u_k| \quad (3.13)$$

Suponha que se deseja encontrar o controle  $u_k$  que minimiza a energia do estado final e de todos os estados intermediários. Um índice adequado a esse objetivo é dado por,

$$J = \frac{1}{2} s x_N^T x_N + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} (q x_k^T x_k + r u_k^T u_k) \quad (3.14)$$

Na qual  $q$ ,  $r$  e  $s$  são fatores de ponderação. Pela equação, conclui-se que minimizar a energia corresponde a manter o estado e o controle próximos de zero. Se, por exemplo, é mais importante que o estado intermediário  $x_k$  seja pequeno, faz-se  $q$  grande de modo a ponderá-lo fortemente em  $J$ , o qual será minimizado. Se, por outro lado, deseja-se tornar o estado final pequeno, seleciona-se um grande valor para  $s$ . De modo equivalente, sendo o interesse em um valor pequeno da energia de controle, se faz  $r$  grande.

De modo geral, um índice de desempenho é uma escolha do especialista para atingir a resposta desejada de um dado sistema, de modo que, para atingir diferentes objetivos de controle, são selecionados índices de desempenho diversos. Assim, o problema de controle ótimo é caracterizado por compromissos e custo-benefício, com diferentes fatores de ponderação no índice  $J$  resultando em diferentes compensações entre a conformidade entre os objetivos de desempenho e a magnitude do controle ótimo necessário.

O controle  $u^*$  que faz com que um dado sistema  $\dot{x}(t)=f(x,u)$  siga por uma trajetória  $x^*$  de modo a minimizar um índice de desempenho  $J$  é chamado de controle ótimo. A trajetória de estado  $x^*$  é por sua vez, a trajetória ótima.

#### 3.4.4 Multiplicadores de Lagrange

Os multiplicadores de Lagrange são variáveis auxiliares que permitem lidar com problemas de otimização com restrições, facilitando a caracterização de soluções ótimas. Nesse sentido, os multiplicadores de Lagrange permitem transformar um problema de otimização com restrição em um problema irrestrito. Considere os problemas de otimização com restrições de igualdade da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } f(x) && (3.15) \\ &\text{sujeito a } h_i(x)=0, i =, \dots, m. \end{aligned}$$

onde  $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$  e  $h_i : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$  são funções continuamente diferenciáveis. Considere, por simplificação de notação, o uso da função de restrição  $h : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ , com

$$h = (h_1, \dots, h_m) \quad (3.16)$$

Por conseguinte, as restrições podem ser escritas na forma

$$h(x) = 0 \quad (3.17)$$

Basicamente, o teorema do multiplicador de Lagrange estabelece que para um dado mínimo local  $x^*$ , existem escalares  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ , chamados multiplicadores de Lagrange, tais que

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla h_i(x^*) = 0 \quad (3.18)$$

Observe que a quantidade de multiplicadores de Lagrange é igual a quantidade de restrições de igualdade do problema de otimização (3.15). De acordo com Bertsekas (1999), existe uma abordagem alternativa que consiste em utilizar a função Lagrangeana  $L_a : \mathbb{R}^{n+m} \mapsto \mathbb{R}$  definida por

$$L_a(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i(x) \quad (3.19)$$

Então, se  $x^*$  é um mínimo local, as condições do teorema do multiplicador de Lagrange podem ser reescritas em termos da função Lagrangeana, como:

$$\nabla_x L(x^*, \lambda^*) = 0 \quad (3.20)$$

$$\nabla_\lambda L(x^*, \lambda^*) = 0 \quad (3.21)$$



### 3.4.4.1 A solução do problema de otimização por meio dos multiplicadores de Lagrange

Deseja-se minimizar a seguinte função de custo:

$$J_i = \phi(N, x_N) + \sum_{k=i}^{N-1} L^k(x_k, u_k) \quad (3.22)$$

Observe, entretanto, que a minimização de  $J_i$  está sujeita a própria dinâmica do sistema não linear dado por

$$x_{k+1} = f^k(x_k, u_k) \quad (3.23)$$

Assim, este problema pode ser formulado como um problema de otimização com restrição da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{minimizar } J_i &= \phi(N, x_N) + \sum_{k=i}^{N-1} L^k(x_k, u_k) \\ \text{sujeito a } h(x) &= f^k(x_k, u_k) - x_{k+1} = 0 \end{aligned} \quad (3.24)$$

Desse modo, utilizando a abordagem da função Lagrangeana definida em (3.23), considere  $\lambda_k \in \mathbb{R}^n$  um vetor multiplicador de Lagrange associado à restrição  $h(x)$  dada em (3.25) e o problema de minimizar o índice de desempenho  $J_i$ . Portanto, se define o índice de desempenho aumentado  $J'$  como (SANTOS, 2018):

$$J' = \phi(N, x_N) + \sum_{k=i}^{N-1} [L^k(x_k, u_k) + \lambda_{k+1}^T (f^k(x_k, u_k) - x_{k+1})] \quad (3.25)$$

Por conseguinte, se define a função Hamiltoniana

$$H^k(x_k, u_k) = L^k(x_k, u_k) + \lambda_{k+1}^T f^k(x_k, u_k) \quad (3.26)$$

Desenvolvendo a Equação 3.26:

$$\begin{aligned}
J' &= \phi(N, x_N) + \sum_{k=i}^{N-1} [L^k(x_k, u_k) + \lambda_{k+1}^T f^k(x_k, u_k) - \lambda_{k+1}^T x_{k+1}] \\
J' &= \phi(N, x_N) + \sum_{k=i}^{N-1} [L^k(x_k, u_k) + \lambda_{k+1}^T f^k(x_k, u_k) - \lambda_{k+1}^T x_{k+1}] \\
&= \phi(N, x_N) \\
&\quad + \sum_{k=i}^{N-1} [L^k(x_k, u_k) + \lambda_{k+1}^T f^k(x_k, u_k)] - \sum_{k=i}^{N-1} [\lambda_{k+1}^T x_{k+1}] \quad (3.27) \\
&= \phi(N, x_N) + H^i(x_i, u_i) + \sum_{k=i+1}^{N-1} H^k(x_k, u_k) - (\lambda_{i+1}^T x_{i+1} + \dots + \lambda_{N+1}^T x_{N+1}) - \lambda_N x_N
\end{aligned}$$

Obtêm-se

$$J' = \phi(N, x_N) - \lambda_N x_N + H^i(x_i, u_i) + \sum_{k=i+1}^{N-1} [H^k(x_k, u_k) - \lambda_k^T x_k] \quad (3.28)$$

O diferencial do índice J' pode ser obtido:

$$\begin{aligned}
dJ' &= (\phi_{x_N} - \lambda_N)^T dx_N + (H_{x_i}^i)^T dx_i + (H_{u_i}^i)^T du_i \\
&\quad + \sum_{k=i+1}^{N-1} [(H_{x_k}^k - \lambda_k)^T dx_k + (H_{u_k}^k)^T du_k] \quad (3.29) \\
&\quad + \sum_{k=i+1}^{N-1} [(H_{\lambda_k}^k - x_k)^T d\lambda_k]
\end{aligned}$$

Em que,

$$H_{x_k}^k \triangleq \frac{\partial H^k}{\partial x_k} \quad (3.30)$$

As condições necessárias para um mínimo com restrição são dadas por:

$$x_{k+1} = \frac{\partial H^k}{\partial \lambda_{k+1}}, \quad k = i, \dots, N - 1 \quad (3.31)$$

$$\lambda_k = \frac{\partial H^k}{\partial x_k}, \quad k = i, \dots, N - 1 \quad (3.32)$$

$$\frac{\partial H^k}{\partial u_k} = 0, \quad k = i, \dots, N - 1 \quad (3.33)$$

As quais, derivam dos termos dentro dos somatórios e do coeficiente de:

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial x_k} - \lambda_N \right)^T dx_N = 0 \quad (3.34)$$

$$\left( \frac{\partial H^i}{\partial x_i} \right)^T dx_i = 0 \quad (3.35)$$

O multiplicador de Lagrange é também nomeado de co-estado do sistema.

### 3.5 Solução do problema de otimização contínua geral

Suponha uma planta descrita por uma equação dinâmica no tempo contínuo não linear geral dada por:

$$\dot{x}(t) = f(x, u, t) \quad (3.36)$$

com estado  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  e a entrada de controle  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ . Considere que este sistema está associado ao índice de desempenho:

$$J(t_0) = \phi(x(T), T) + \int_{t_0}^T L(x(t), u(t), t) dt \quad (3.37)$$

onde  $[t_0, T]$  é o intervalo de tempo de interesse. A função de ponderação final  $\phi(x(T), T)$  depende do estado final e do tempo final, e a função de ponderação  $L(x, u, t)$  depende do estado e da entrada em instantes intermediários em  $[t_0, T]$ . O índice de desempenho é selecionado de maneira que a planta apresente o

desempenho desejado. O problema de controle ótimo consiste em determinar o controle  $u^*(t)$  no intervalo  $[t_0, T]$  que leva a planta (3.37) ao longo da trajetória  $x^*(t)$  tal que a função de custo (3.38) é minimizada, e tal que a função (SANTOS, 2018):

$$\psi(x(T), T) = 0 \quad (3.39)$$

para uma dada função  $\psi \in \mathbb{R}^p$ . Esta função é chamada de função de estado final fixo. A Equação 3.38 juntamente com a Equação 3.36 são restrições adjuntas ao índice de desempenho dado em (3.37). Este problema de controle ótimo pode ser resolvido com o auxílio dos multiplicadores de Lagrange. Uma vez que (3.36) se mantém em cada instante  $t \in [t_0, T]$ , é necessário um multiplicador associado  $\lambda(t) \in \mathbb{R}^n$ , que é uma função do tempo. Como a Equação 3.38 se mantém somente em um instante, é necessário somente um multiplicador constante associado  $v \in \mathbb{R}^p$ . O índice de desempenho aumentado é, portanto,

$$J' = \phi(x(T), T) + v^T \psi(x(T), T) + \int_{t_0}^T [L(x(t), u(t), t) + \lambda^T(t)(f(x, u, t) - \dot{x})] dt \quad (3.40)$$

Definindo a função Hamiltoniana como

$$H(x, u, t) = L(x, u, t) + \lambda^T(t)(f(x, u, t)) \quad (3.41)$$

então (3.40) pode ser reescrita como

$$J' = \phi(x(T), T) + v^T \psi(x(T), T) + \int_{t_0}^T [H(x, u, t) - \lambda^T \dot{x}] dt \quad (3.42)$$

Utilizando a regra de Leibniz, se pode escrever o incremento em  $J'$  como uma função do incremento em  $x$ ,  $\lambda$ ,  $u$  e  $t$ :

$$\begin{aligned}
dJ' &= (\phi_x + \psi_x^T v)^T dx|_T + (\phi_t + \psi_t^T v)^T dt|_T + \psi^T|_T dv \\
&+ (H - \lambda^T \dot{x}) dt|_T + (H - \lambda^T \dot{x}) dt|_{t_0} \\
&+ \int_{t_0}^T [H_x^T \delta x + H_u^T \delta u - \lambda^T \delta \dot{x} + (H_\lambda - \dot{x})^T \delta \lambda] dt
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Para eliminar a variação  $\dot{x}$ , integra-se por partes para ver que:

$$-\int_{t_0}^T \lambda^T \delta \dot{x} dt = -\lambda^T \delta x|_T + \lambda^T \delta x|_{t_0} + \int_{t_0}^T \dot{\lambda}^T \delta x dt$$

A substituição de (3.29) em (3.26) resulta em termos em  $t=T$  dependentes tanto em  $dx(t)$  quanto em  $\delta x(T)$ . Pode-se expressar  $\delta x(T)$  em termos de  $x(t)$  e  $dT$  utilizando uma medida variacional. Após essas substituições, se tem:

$$\begin{aligned}
dJ' &= (\phi_x + \psi_x^T v - \lambda)^T dx|_T + (\phi_t + \psi_t^T v + H - \lambda^T \dot{x} + \dot{\lambda}^T x) dt|_T + \psi^T|_T dv \\
&+ (H - \lambda^T \dot{x}) dt|_T - (H - \lambda^T \dot{x} + \dot{\lambda}^T x) dt|_{t_0} + \lambda^T dx|_{t_0} \\
&+ \int_{t_0}^T [(H_x - \dot{\lambda})^T \delta x \\
&+ H_u^T \delta u + (H_\lambda - \dot{x})^T \delta \lambda] dt
\end{aligned} \tag{3.44}$$

De acordo com a teoria Lagrangeana, o mínimo com restrição de  $J$  é alcançado em um mínimo sem restrição de  $J'$ . Este é alcançado quando  $dJ'=0$  para todos os incrementos independentes em seus argumentos. O exemplo a seguir, apresenta a solução do problema de otimização para um caso em que o sistema não é um sistema dinâmico.

### 3.5.1 Exemplo: menor distância entre dois pontos

O comprimento de uma curva  $x(t)$  dependente de um parâmetro  $t$  entre  $t=a$  e  $t=b$  é dada por:

$$J = \int_a^b \sqrt{1 + \dot{x}^2(t)} dt \quad (3.45)$$

De modo a especificar que a curva une dois pontos (a,A) e (b,B) no plano, é necessário impor duas condições de contorno:

$$x(a) = A \quad (3.46)$$

$$x(b) = B \quad (3.47)$$

Deseja-se encontrar a curva  $x(t)$  que une (a,A) e (b,B) e minimiza (3.45). Reescrevendo isso na forma de um problema de controle ótimo, se define a entrada como,

$$\dot{x} = u \quad (3.48)$$

Assim, a Equação 3.48 designa a “planta”. Portanto, a equação (3.45) se torna,

$$J = \int_a^b \sqrt{1 + u^2} dt \quad (3.49)$$

O Hamiltoniano e as condições de contorno são:

$$H = \sqrt{1 + u^2} + \lambda u \quad (3.50)$$

$$\dot{x} = H_\lambda = u \quad (3.51)$$

$$-\dot{\lambda} = H_x = 0 \quad (3.52)$$

$$0 = H_u = \lambda + \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} \quad (3.53)$$

Para resolver estas condições para a curva ótima  $u$ , se observa que em (3.53)

$$u = -\frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}} \quad (3.54)$$

porém, de acordo com (3.52),  $\lambda$  é constante. Portanto,

$$u = \text{const} \quad (3.55)$$

é o controle ótimo. Agora, utiliza-se (3.51) para obter:

$$x(t) = c_1 t + c_2 \quad (3.56)$$

Para determinar os valores de  $c_1$  e  $c_2$  são utilizadas as condições de contorno (3.46) e (3.47). De tal modo,

$$x(t) = \frac{(A - B)t + (aB - bA)}{a - b} \quad (3.57)$$

A trajetória ótima (3.57) entre dois pontos é, deste modo, uma linha reta.

### 3.6 Regulador linear quadrático no tempo contínuo

Considere uma planta linear e variante no tempo dada por:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (3.58)$$

em quem  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  com índice de desempenho quadrático associado

$$J(t_0) = \frac{1}{2} x^T(T)S(T)x(T) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T (x^T(t)Q(t)x(t) + u^T R(t)u(t)) dt \quad (3.59)$$

com intervalo de interesse  $[t_0, T]$ . Aqui, neste problema se deseja determinar o controle ótimo  $u^*(t)$  em  $[t_0, T]$  que minimiza  $J$  para dois casos a serem considerados: estado final fixo e estado final livre. Primeiramente, tem-se o caso do controle em malha aberta; já o segundo caso, o controle em malha fechada.

O instante final  $T$  é fixo e conhecido e nenhuma função de estado final  $\psi$  é especificada. O estado inicial da planta  $x(t_0)$  é dado. As matrizes de ponderação  $S(T)$  e  $Q(T)$  são simétricas e semidefinidas positivas, e  $R(t)$  é simétrica e definida positiva, para todo  $t \in [t_0, T]$ .

### 3.6.1 As equações do estado e de co-estado

A função Hamiltoniana é dada por

$$H(t) = \frac{1}{2}(x^T(t)Q(t)x(t) + u^T R(t)u(t) + \lambda^T(t)A(t)x(t) + B(t)u(t)) \quad (3.60)$$

sendo que  $\lambda(t) \in \mathbb{R}^n$  é um multiplicador a ser determinado. As equações de estado e co-estado são:

$$\dot{x}(t) = \frac{\delta H}{\delta \lambda(t)} = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (3.61)$$

$$\dot{\lambda}(t) = \frac{\delta H}{\delta x(t)} = Q(t)x(t) + A^T(t)\lambda(t) \quad (3.62)$$

e a condição de estacionariedade é

$$0 = \frac{\delta H}{\delta u(t)} = -R^{-1}(t)B^T(t)\lambda(t) \quad (3.63)$$

Resolvendo (3.63) temos o controle ótimo em termos do co-estado:

$$u(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)\lambda(t) \quad (3.64)$$



Utilizando (3.64) nas equações de estado e co-estado, tem-se assim, o sistema Hamiltoniano homogêneo:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(t) & -B(t)R^{-1}(t)B^T(t) \\ -Q(t) & A^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

### 3.6.2 Custo para entrada nula e equação de Lyapunov

Uma análise interessante consiste em determinar o valor do índice de desempenho quando a entrada de controle da planta é zero. Suponha a matriz  $S(t)$  é definida como solução da equação diferencial de Lyapunov contínua:

$$-\dot{S}(t) = A^T(t)S(t) + S(t)A(t) + Q(t), \quad t \leq T \quad (3.66)$$

com condição final  $S(T)$  como dada em (3.59). Esta equação é integrada no tempo para trás a partir de  $t=T$ . Daí, o custo em um determinado intervalo  $[t, T]$  é dado por

$$J(t) = \frac{1}{2}x^T(t)S(t)x(t) + S(t)(t)x(t) \quad (3.67)$$

Note que,

$$\frac{1}{2} \int_{t_0}^T \frac{d}{dt} (x^T(t)S(t)x(t)) dt = \frac{1}{2} x^T(T)S(T)x(T) - \frac{1}{2} x^T(t_0)S(t_0)x(t_0) \quad (3.68)$$

Utilizando a expressão (3.68), o custo (3.59) pode ser alterado para:

$$\begin{aligned} J(t_0) = & \frac{1}{2} x^T(t_0)S(t_0)x(t_0) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T \{ (\dot{x}^T(t)S(t)x(t) + x^T(t)\dot{S}(t)x(t) + \\ & + x^T(t)S(t)\dot{x}(t) + x^T(t)Q(t)x(t)) \} dt \end{aligned} \quad (3.69)$$

Levando em conta a equação de estado (3.58), se tem:

$$J(t_0) = \frac{1}{2}x^T(t)(t_0)S(t)(t_0)x(t)(t_0) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T \{ \dot{x}^T(t)(A^T(t)S(t) + \dot{S}(t) + S(t)A(t) + Q(t))x(t) \} dt \quad (3.70)$$

A solução de (3.66) é dada por:

$$S(t) = e^{A^T(T-t)}S(T)e^{A(T-t)} + \int_t^T e^{A^T(T-t)}Qe^{A(T-t)}d\tau \quad (3.71)$$

Segunda a teoria de estabilidade de Lyapunov,  $S(t)$  converge para o valor de regime permanente com  $(T-t) \rightarrow \infty$  de

$$S_\infty = \int_0^\infty e^{A^T\tau}Qe^{A\tau}d\tau \quad (3.72)$$

se a planta é assintoticamente estável. Em que, para o evento do regime permanente,  $\dot{S} = 0$ , de modo que (3.66) se torna na equação de Lyapunov algébrica:

$$0 = A^T(t)S(t) + S(t)A(t) + Q(t) \quad (3.73)$$

### 3.6.2.1 Exemplo: propagação do custo de um sistema escalar não controlado

Seja dado o sistema escalar a seguir:

$$\dot{x}(t) = ax(t) \quad (3.74)$$

com o custo em  $[t, T]$  definido por

$$J(t) = \frac{1}{2}s(t)(T)x^2(t)(T) + \frac{1}{2} \int_t^T qx^2(t)(\tau)d\tau \quad (3.75)$$

A equação diferencial de Lyapunov é:

$$-\dot{s}(t) = 2as(t) + q \quad (3.76)$$

Cuja solução é dada por

$$s(t) = e^{2a(T-t)}s(T) + \int_t^T e^{2a(T-\tau)}q d\tau \quad (3.77)$$

ou

$$s(t) = \left(s(T) + \frac{q}{2a}\right)e^{2a(T-t)} - \frac{q}{2a} \quad (3.78)$$

Se  $a < 0$ , então quando  $(T-t) \rightarrow \infty$ ,  $s(t)$  converge para o valor de regime permanente de

$$s_\infty = \frac{q}{2a} > 0 \quad (3.79)$$

Este valor é a mesma solução da equação e Lyapunov algébrica dada por

$$0 = as + q \quad (3.80)$$

O custo de regime permanente em  $[0, \infty]$  sem a aplicação da entrada de controle à planta (3.66) é:

$$J_\infty = \frac{1}{2}s_\infty x^2(0) = -\frac{q}{2a}x^2 \quad (3.81)$$

Quando  $a < 0$ . Do contrário, o custo tende ao infinito.

### 3.6.3 Estado final fixo e controle em malha aberta

Considere agora, novamente, o problema de determinar o controle necessário em (3.58) para minimizar o custo em (3.58). As equações de estado e co-estado são dadas em (3.10) e (3.62). Supondo o estado inicial conhecido,  $x(t_0)$  e que o objetivo de controle é levar o estado exatamente a um valor de referência fixado de  $r(T)$  em um tempo final, então a condição final é

$$x(T) = r(T) \quad (3.82)$$

Uma vez que  $dx(T)=0$  e  $dt=0$ . E em  $x(T)$  é fixada em  $r(T)$ , é redundante incluir uma ponderação de estado final no índice de desempenho, então  $S(T)=0$ . Para permitir uma solução analítica, se tornará  $Q=0$  também. Portanto, a função de custo é:

$$J(t_0) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^T u^T r u dt \quad (3.83)$$

Portanto, o interesse é encontrar um controle que leva o estado  $x(t_0)$  para  $x(T)=r(T)$  usando a mínima energia de controle. As equações de estado e co-estado são

$$\dot{x}(T) = Ax(t) - BR^{-1}B^T\lambda(t) \quad (3.84)$$

$$\dot{\lambda}(t) = -A^T\lambda(t) \quad (3.85)$$

A solução da equação de co-estado é oferecida como:

$$\lambda(t) = e^{A^T(T-t)}\lambda(T) \quad (3.86)$$

onde  $\lambda(T)$  é ainda desconhecido. Utilizando esta expressão na equação de estado têm-se:

$$\dot{x} = Ax - BR^{-1}B^T e^{A^T(T-t)}\lambda(T) \quad (3.87)$$

cuja a solução é:

$$x(t) = e^{A(t_0-t)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}BR^{-1}B^T e^{A^T(T-\tau)}\lambda(T)d\tau \quad (3.88)$$

Para encontrar  $\lambda(T)$ , se avalia a equação (3.88) em  $t=T$  para obter,

$$x(T) = e^{A(T-t_0)}x(t_0) - G(t_0, T)\lambda(T) \quad (3.89)$$

em que o gramiano de controlabilidade contínuo ponderado é dado por:

$$G(t_0, T) = \int_{t_0}^T e^{A(T-\tau)}BR^{-1}B^T e^{A^T(T-\tau)}d\tau \quad (3.90)$$

De acordo com a condição final (3.82), portanto assim:

$$\lambda(T) = -G^{-1}(t_0, T)[r(T) - e^{A(T-t_0)}x(t_0)] \quad (3.91)$$

Finalmente, o controle ótimo pode ser escrito usando (3.64) (3.86) e (3.91), como:

$$u^*(t) = R^{-1}B^T e^{A^T(T-t)}G^{-1}(t_0, T)[r(T) - e^{A(T-t_0)}x(t_0)] \quad (3.91)$$

Esta é a energia mínima que leva o estado inicial  $x(t_0)$  para o valor de referência final desejado de  $x(T)=r(T)$ . Note que,

$$x(T) = e^{A(T-t_0)}x(t_0) \quad (3.92)$$

é o estado final na ausência de uma entrada e o controle ótimo é proporcional à diferença entre esta solução homogênea e o estado final desejado.

### 3.6.3.1 Exemplo: controle em malha aberta de um sistema escalar

Considere a planta escalar a seguir,

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t), \quad t \geq 0 \quad (3.93)$$

com função de custo,

$$J(0) = \frac{1}{2} \int_0^T ru^2(t) dt \quad (3.94)$$

A equação de Lyapunov é:

$$\dot{p}(t) = 2ap(t) + \frac{b^2}{r(t)}, \quad p(0) = 0 \quad (3.95)$$

O gramiano de controlabilidade no intervalo  $[0, t]$  é:

$$G(0, t) = p(t) = \frac{b^2}{r} \int_0^t e^{2a(t-\tau)} d\tau \quad (3.96)$$

Ou

$$G(0, t) = \frac{b^2}{2ar} (e^{2at} - 1) \quad (3.97)$$

Conforme a equação (3.91), o controle ótimo que leva  $x(0)$  para  $x(T)=r(T)$  é:

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{b}{r} e^{a(T-t)} \frac{2ar}{b^2(e^{2aT} - 1)} (r(T) - e^{aT} x(0)) \\ &= \frac{a}{b \sinh(aT)} e^{-aT} (r(T) - e^{aT} x(0)) \end{aligned} \quad (3.98)$$

### 3.6.4 Estado final livre e controle em malha fechada

É possível determinar uma lei de controle ótimo na forma de realimentação de estado pela mudança dos objetivos de controle para a planta (3.58). As equações de estado e de co-estado são dadas por:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) - BR^{-1}B^T\lambda \quad (3.99)$$

$$-\dot{\lambda}(t) = Qx(t) + A^T\lambda(t) \quad (3.100)$$

A entrada de controle é:

$$u(t) = -R^{-1}B^T\lambda(t) \quad (3.101)$$

Um dado estado inicial é  $x(t_0)$ , e o estado final  $x(T)$  é livre. Assim sendo,  $dx(T) \neq 0$  e  $dT = 0$ . O coeficiente de  $dx(T)$  deve ser zero:

$$\lambda(T) = \left. \frac{\partial \phi}{\partial x(t)} \right|_T = S(T)x(T) \quad (3.102)$$

Deste modo, supondo que  $x(t)$  e  $\lambda(t)$  satisfazem a relação linear (3.102) para todo  $t \in [t_0, T]$  para alguma função  $S(t)$  ainda desconhecida.

$$\lambda(t) = S(t)x(t) \quad (3.103)$$

Para determinar a função  $S(t)$ , se diferencia o co-estado para obtenção de,

$$\dot{\lambda}(t) = \dot{S}(t)x(t) + S(t)\dot{x}(t) = \dot{S}(t)x(t) + S(t)(Ax(t) - BR^{-1}B^T S(t)x(t)) \quad (3.104)$$

Considerando a equação de co-estado, se deve ter:

$$-\dot{S}(t)x(t) = (A^T S(t) + S(t)A - S(t)BR^{-1}B^T S(t) + Q)x(t) \quad (3.105)$$

para todo  $t$ . Uma vez que isto fixa para todas as trajetória de estado dado um  $x(t_0)$ , é necessário que

$$-\dot{S}(t)x(t) = A^T S(t) + S(t)A - S(t)BR^{-1}B^T S(t) + Q, \quad t \leq T \quad (3.106)$$

Esta é a equação de Riccati. Sua solução e as equações (3.101) e (3.104) permitem obter o controle ótimo como,

$$u(t) = -R^{-1}B^T S(t)x(t) \quad (3.107)$$

Definindo o ganho de Kalman como:

$$K(t) = R^{-1}B^T S(t) \quad (3.108)$$

têm-se que,

$$u(t) = -K(t)x(t) \quad (3.109)$$

Em termos do ganho de Kalman, a equação de Riccati pode ser reescrita como,

$$-\dot{S}(t) = A^T S(t) + S(t)A - K^T(t)R^{-1}K + Q \quad (3.110)$$

O controle em (3.109) é uma realimentação de estado variante no tempo. Se A, B, Q e R são variantes no tempo, então K também o é. A planta em malha fechada é:

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) \quad (3.111)$$

### 3.7 Teoria de controle robusto

Alguns conceitos são fundamentais antes da proposição do próximo capítulo a respeito de controle robusto.

#### 3.7.1 Decomposição em valores singulares – SVD

Dada uma matriz G, a sua decomposição em valores singulares (*Singular Value Decomposition* - SVD) pode ser escrita como



$$G=U\Sigma V^T \quad (3.112)$$

sendo  $U$  e  $V$  matrizes ortogonais e

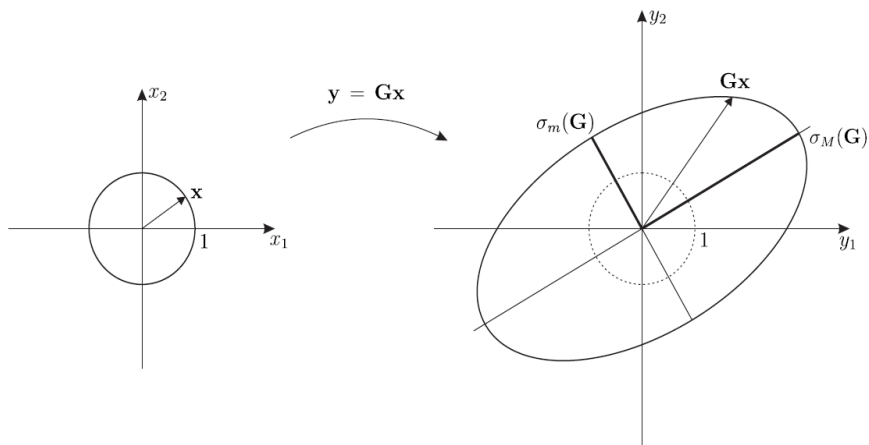
$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & & & \\ & \sigma_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma^r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.113)$$

com  $r$  igual ao posto da matriz  $G$ . Os valores singulares de  $G$  são as raízes quadradas dos autovalores não nulos de  $G^T G$ , isto é:

$$\sigma_i(G) = \sqrt{\lambda_i(G^T G)} \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (3.114)$$

em que  $\lambda_i(\cdot)$  denota o  $i$ -ésimo autovalor de  $(\cdot)$ . Considere que o maior dentro todos os valores singulares de  $G$  serão denotados por  $\sigma_M(G)$  e o menor deles será denotado por  $\sigma_m(G)$ . Portanto, a Figura 3.4 ilustra o produto de uma matriz por um vetor e a relação com os valores singulares.

Figura 3.4 – Operação de uma matriz sobre um vetor e seus valores singulares máximo e mínimo.



Fonte: Adaptada de Santos (2018).

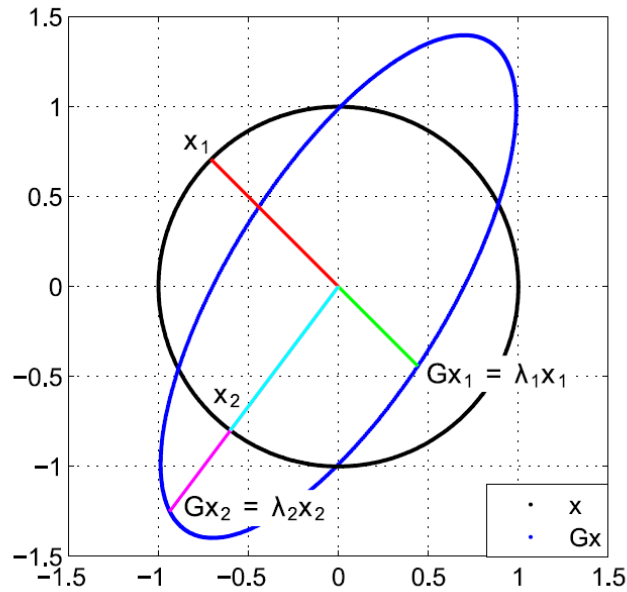
Como exemplo numérico, considere a matriz  $G$  dada por:

$$G = \begin{bmatrix} 0.3125 & 0.9375 \\ 1.2500 & 0.6250 \end{bmatrix} \quad (3.115)$$

cujos autovalores são  $\lambda_1 = -0.6250$  e  $\lambda_2 = 1.5625$ . Assim, Figura 3.5:

$$G = \begin{bmatrix} 0.3125 & 0.9375 \\ 1.2500 & 0.6250 \end{bmatrix}$$

Figura 3.5 – Operação da matriz dada em (3.115) sobre os vetores de raio unitário.



Fonte: Adaptada de Santos (2018).

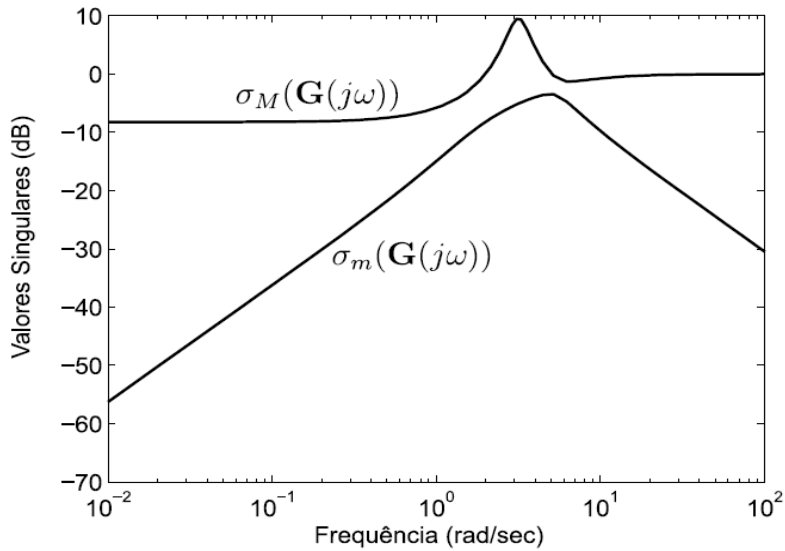
### 3.7.2 Diagrama SVD: gráfico de bode MIMO

O conceito de valores singulares é aplicável às matrizes de transferência de sistemas multivariáveis (MIMO). Os diagramas de Bode para sistemas MIMO consistem nos gráficos de  $\sigma_M(G(j\omega))$  e  $\sigma_m(G(j\omega))$  em função da frequência angular  $\omega$ . Dado o exemplo em que se tem a seguinte matriz de transferência:

$$G(s) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3s}{s^2 + s + 10} \\ \frac{s+1}{s+5} & \frac{2}{s+6} \end{bmatrix} \quad (3.116)$$

O gráfico dos valores singulares para este sistema é demonstrado na Figura 3.6.

Figura 3.6 – Diagrama de Bode do sistema dado em (3.116).



Fonte: Adaptada de Santos (2018).

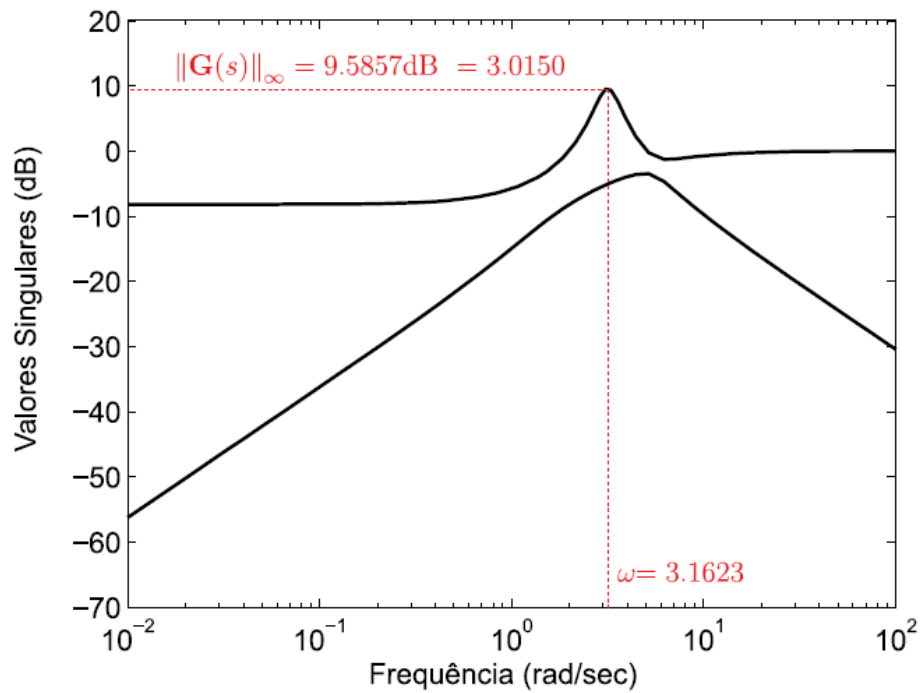
### 3.7.3 Definição da norma $H^\infty$ - sistemas MIMO

A norma  $H^\infty$  de uma matriz de transferência  $G(s)$  é definida como:

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_w \sigma_M(G(jw)) \quad (3.117)$$

De tal modo, para o sistema dado em (3.116), o diagrama de valores singulares permite determinar a norma  $H^\infty$  do sistema, como ilustra a Figura 3.7. Desse modo, considerando que a norma  $H^\infty$  é o valor de pico (pior caso) na resposta em frequência no diagrama de valores singulares de função de transferência, é possível concluir que a sua minimização implica em atenuar a relação entrada-saída, isso significa, o efeito da entrada de perturbação na saída controlada. Assim, o problema de controle  $H^\infty$  embasa-se em determinar o controlador que minimiza a relação de pior caso entrada-saída (perturbação-saída controlada).

Figura 3.7 – Diagrama de Bode do sistema dado em (3.116) destacando a norma  $H^\infty$ .

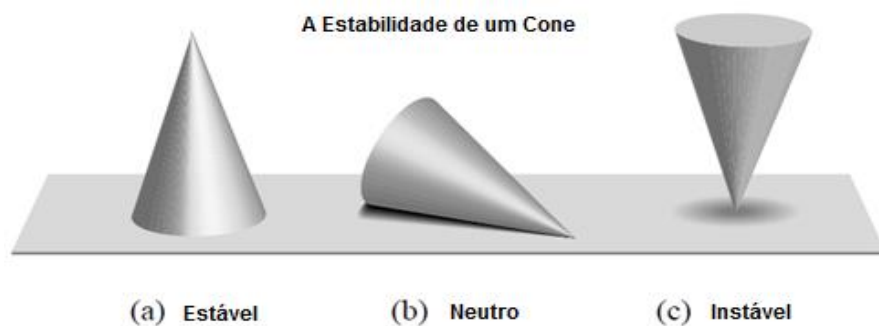


Fonte: Adaptada de Santos (2018).

### 3.8 O conceito de estabilidade

O conceito de estabilidade é crucial na síntese de sistemas de controle. Não é exatamente uma especificação, mas sim um requisito para projeto, Figura 3.8.

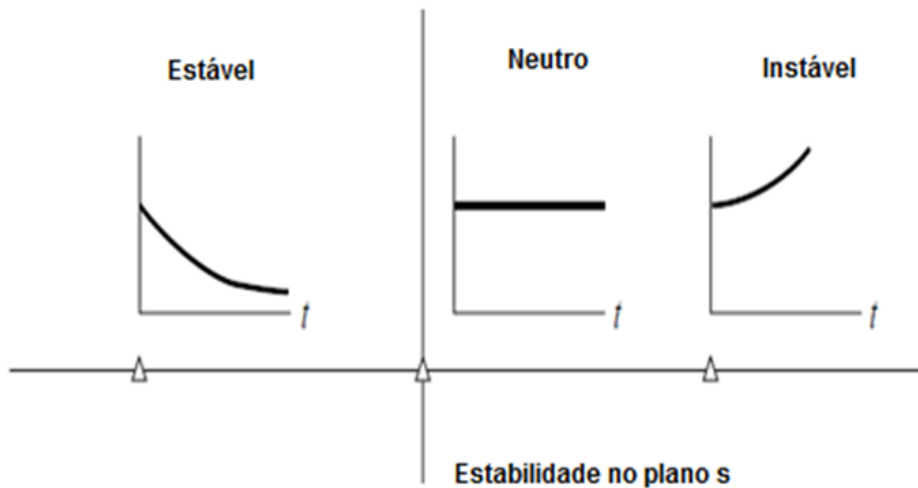
Figura 3.8 – O Conceito de estabilidade.



Fonte: Adaptada de Dorf (1995).

Um sistema é dito estável se a resposta temporal for limitada para qualquer sinal de entrada também limitado, Figura 3.9.

Figura 3.9 - Estável, neutro, instável.



Fonte: Adaptada de Dorf (1995).

Estabilidade Robusta é um critério na qual ao se projetar um controlador para uma determinada planta, essa seja estável para qualquer fator de incerteza. Onde mantenha o desempenho especificado, independente dos erros existentes entre o modelo do projeto e o modelo real e da larga variação dos parâmetros do sistema (DOYLE; STEIN, 1981).

### 3.9 O controle clássico

O Controle Clássico se desenvolveu em 1920-1960, sua representação é no domínio da frequência. Os tipos de análises são (DOYLE;STEIN, 1981):

- Diagrama de Bode: uma técnica simples para esboçar o comportamento aproximado da amplitude e da fase de um sistema, cuja informação se encontra contida na sua função de transferência.
- Critério de Nyquist: relaciona a resposta em frequência em malha aberta com o número dos pólos estáveis do sistema em malha fechada.

- Critério de Routh-Hurwitz: critério que busca as raízes do denominador da função de transferência do sistema e as coloca no semiplano esquerdo ou direito, determinando assim a estabilidade.
- Lugar das Raízes: permite determinar a posição dos pólos de um sistema realimentado a partir do conhecimento dos pólos e zeros do sistema à malha aberta e em função do ganho da malha.
- Controladores PID: de uso frequente devido a sua simplicidade. Quatro configurações possíveis de controladores existem a partir de uma estrutura PID: proporcional (P); proporcional-integral (PI); proporcional-derivativo (PD); proporcional-integral-derivativo (PID). Compensação *Lead-Lag*: compensação por avanço e atraso, se comporta como um controlador PID.

### 3.10 O controle moderno

A 2ª Guerra mundial estimulou a pesquisa em sistemas de controle. O setor aeroespacial impulsionou o desenvolvimento do chamado controle moderno (1960-1980). Vieram os sistemas multivariáveis, MIMO que podem ser expressos por matrizes de transferência, análogas as funções de transferência, com a diferença de que são acrescentados os acoplamentos entre as variáveis. Assim podem-se fazer diversos estudos: análise em frequência, interpretação geométrica (pólos e zeros), funções sensibilidade e sensibilidade complementar ou estudos matriciais de redução a formas canônicas, que facilitam a interpretação física de seus elementos e de suas relações.

Os tipos de análise (DOYLE; STEIN, 1981):

- Modelo por Espaço de Estados: Modelo matemático de um sistema físico descrito mediante um conjunto de entradas, saídas e variáveis de estado relacionadas por equações diferenciais de 1ª ordem que se combinam em uma equação diferencial matricial de 1ª ordem. A técnica de variáveis de estado é mais genérica que a técnica da função de transferência.

Entretanto a aplicação efetiva desta técnica requer geralmente um maior conhecimento do processo e uma análise matemática mais detalhada.

- **Controlabilidade:** A condição de controlabilidade de estados implica que é possível, mediante entradas admissíveis, dirigir os estados desde qualquer valor inicial a qualquer valor final dentro de um intervalo de tempo.
- **Observabilidade:** um sistema é dito ser observável se, para qualquer possível sequência de vetores de estado e de controle, o estado atual pode ser determinado em tempo finito usando apenas as saídas. Isto significa que a partir de saídas do sistema é possível determinar o comportamento de todo o sistema.

### **3.11 O controle ótimo**

As raízes da teoria do controle procedem de vários campos dentre os quais se destacam, segundo Bryson (1996), a teoria de controle clássico, teoria de processos aleatórios, teoria de cálculo de variações e a programação linear e não linear. A teoria de controle é considerada uma das diversas aplicações e extensão do cálculo de variações. A crescente aplicação da teoria de controle ótimo desde seu surgimento foi possível, especialmente, devida a chegada de computadores cada vez mais avançados (SANTOS, 2018).

Segundo Kirk (1998), o problema de controle ótimo pode ser definido como a formulação, em linguagem matemática, dos objetivos de projeto do sistema de controle ótimo; isso significa, minimizar ou maximizar o índice de desempenho predefinido, satisfazendo, ao mesmo tempo, as restrições impostas. De acordo com Athans e Falb (2007) a formulação do problema de controle ótimo requer alguns elementos essenciais:

- Um modelo matemático do processo a ser controlado;
- Uma declaração das restrições físicas;



- A especificação de um índice de desempenho que mensura a eficácia da ação de controle.

### 3.11.1 O SDRE

Desde meados dos anos 90, as estratégias SDRE emergiram como um método que fornece um meio sistemático e eficaz de projetar controladores não lineares, observadores e filtros. O SDRE se tornou muito popular dentro da comunidade de controle na última década, proporcionando um algoritmo muito efetivo para sintetizar controladores para sistemas não linearidades. Além disso, o método permite a flexibilidade de escolha das matrizes peso de ponderação, podendo ou não ser dependente do estado (ÇIMEN, 2008).

O SDRE lineariza a planta ao redor do ponto de operação instantâneo e produz um modelo de espaço de estados constante para esta condição, em que então a técnica de controle LQR pode ser aplicada para projetar a lei de controle. O processo é então repetido nas próximas amostragens projetando-se controladores para os respectivos modelos lineares a partir do modelo não linear original. Como mencionado, o SDRE ainda permite que as matrizes peso  $Q(x)$  e  $R(x)$  sejam dependentes dos estados, isto fornece uma flexibilidade na abordagem dos problemas que não é possível nos sistemas lineares, uma vez que podemos ajustar o melhor “custo” para o projeto do controlador dependendo da situação de operação (GONZALES, 2009).

### 3.11.2 O regulador quadrático não linear

No problema do regulador quadrático não linear, o objetivo é minimizar a função de custo que possui a seguinte forma:

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} [x^T Q(x)x + u^T R(x)u] dt \quad (3.118)$$

Em relação ao estado  $x$  e controle  $u$  sujeito a não linearidades

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + B(x)u \\ z &= C(x)x \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \tag{3.119}$$

Onde  $Q(x)$  e  $R(x)$  são as matrizes pesos escolhidas de acordo com os objetivos do desempenho do controlador, sendo que  $Q(x)$  deve ser definida semipositiva e  $R(x)$  definida positiva. Ressalta-se que esta formulação mantém todas as vantagens do LQR exceto que as matrizes  $A(x)$ ,  $B(x)$ ,  $Q(x)$  e  $R(x)$  podem ser função dos estados.

Desta forma, a função custo tem o compromisso de (BIGOT, 2015): 1) melhorar o desempenho do controlador, uma vez que a matriz peso  $Q$  permite regular o “tamanho” dos estados  $x$  e 2) otimizar a energia gasta pelo controlador, uma vez que a matriz peso  $R$  permite regular o “tamanho” dos sinais de controle  $u$ .

Para o desenvolvimento do SDRE deve-se representar o modelo do sistema, Equação 4.3 na forma SDC, como apresentado:

$$\dot{x} = A(x)x + B(x)u \tag{3.120}$$

O conceito deste método consiste em fatorar as equações diferenciais do sistema de maneira a fazer aparecer produtos entre vetores de estado e matrizes dependentes dos estados. Como mencionado, essa fatoração, é chamada de parametrização SDC. O objetivo desta fatoração é colocar o sistema numa forma pseudolinear (BIGOT, 2015).

De modo que  $a(x) = A(x)x$  e  $b(x) = B(x)x$  possuem um número infinito de maneiras de tornar o sistema não linear para a forma SDC. Associada à forma SDC aplicam-se as seguintes definições (SHAWKY et al, 2002):

- $\{H(x), A(x)\}$  é uma parametrização observável (detectável) do sistema não linear [na região  $\Omega$ ] se o par  $\{H(x), A(x)\}$  é ponto a ponto observável (detectável) no sentido linear para todo  $[x \in \Omega]$ .
- $\{A(x), B(x)\}$  é uma parametrização controlável (estabilizável) do sistema não linear [na região  $\Omega$ ] se o par  $\{A(x), B(x)\}$  é ponto a ponto controlável (estabilizável) no sentido linear para todo  $[x \in \Omega]$ .

A abordagem SDRE para obter uma solução subótima do problema é (SHAWKY et al., 2013):

- Trazer a dinâmica não linear para a forma de parametrização SDC (Eq.4.3).
- Resolver o SDRE para obter  $P(x)$  a

$$A^T(x)P(x) + P(x)A(x) - P(x)B(x)R^{-1}(x)B^T(x)P(x) + Q(x) = 0$$

Admitindo que  $P(x) = P^T(x) \geq 0 \forall x$ .

- Construir o ganho não linear do controlador:

$$u = R^{-1}(x)B^T(x)P(x)x$$

### 3.11.3 A parametrização SDC

Segundo Santos e Souza (2017) uma alternativa para a extensão do controle  $H^\infty$  ao contexto não linear é a utilização da metodologia SDC. Que consiste em usar uma parametrização direta para trazer o sistema não linear para uma estrutura pseudolinear com coeficientes dependentes do estado. Consequentemente, a equação de Riccati, dependente de estado, é resolvida para cada ponto da trajetória das variáveis de estado (cada frame). A equação de Riccati dependente de estado (SDRE) é então resolvida para cada instante  $t_i$  da trajetória do estado  $x(t_i)$ . A solução obtida ao longo da trajetória do estado é utilizada para determinar

a ação de controle por realimentação de estados a cada instante  $t_i$  (ERDEM e ALLEYNE, 2004)(ÇIMEN, 2008).

De acordo com Bigot (2015) ressalta-se que existe um número infinito de parametrizações quando a dinâmica do sistema é não linear. Romero e Souza (2019) advertem que as opções de parametrização SDC fornece diferentes modelos do satélite em função do estado o que influencia diretamente no desempenho do sistema de controlador SDRE. Problemas numéricos podem ocorrer oriundos do equacionamento para diferentes parametrizações resultando em matrizes mal condicionada. Pois, cada parametrização, apesar de representar a mesma dinâmica, demonstra um sistema linear diferente em cada ponto no tempo (PARRISH, 1995).

A seguir, um exemplo ilustrativo, mostra-se matematicamente como representar as diferentes parametrizações dos Coeficientes Dependentes dos Estados (SDC) adicionando variáveis de parametrização.

Seja o exemplo simples, uma função  $f: R^2 \rightarrow R$  definida como

$$f(x_1, x_2) = 3x_1x_2 \quad (3.121)$$

Existem diversas formas de fatorizar essa expressão, por exemplo:

$$f(x_1, x_2) = \underbrace{[3x_2 \quad 0]}_{A_1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \underbrace{[0 \quad 3x_1]}_{A_2} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \underbrace{[2x_2 \quad x_1]}_{A_3} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (3.122)$$

Generalizando o exemplo para o caso multivariável (mais de um estado), existem sempre no mínimo duas parametrizações  $(A_1, A_2) \in (R^{n_x} \times R^{n_x})^2$  que satisfazem  $\forall \alpha \in R^{[0,1]}$ .

$$A_1(x) = \alpha A_1(x) + (1 - \alpha)A_2(x) \quad (3.123)$$

Portanto,  $A(x, \alpha)$  concebe a família das infinitas parametrizações SDC possíveis. Essa não unicidade da SDC oferece um grau de liberdade adicional para o projeto do controlador. A escolha de  $\alpha$  é feita de acordo com o sistema a controlar, lembrando que o sistema deve ficar controlável, ou seja, a matriz de controlabilidade  $C_0 \in \mathbb{R}^{nx} \times \mathbb{R}^{nx}$ , Equação (3.123), deve ser de posto completo a qualquer instante.

$$C_0 = [B \quad AB \quad \dots \quad A^{n_x-1} \quad B] \quad (3.124)$$

### 3.12 O controle robusto

O projetar um sistema de controle baseia-se geralmente em um modelo do processo, em que é identificado ou equacionado pelas leis físicas que regulam o comportamento dinâmico do sistema. Por causa, das limitações de conhecer todo processo, os modelos usados não são uma representação fiel da dinâmica real. É devido a isso, que o projeto do controle for realizado unicamente com base no modelo, não poderá funcionar como se deseja no processo real.

Um controlador é dito robusto quando é capaz de controlar um processo em que o modelo não é perfeito ao real. O grau de robustez pode ser medido de diversas maneiras, porém será maior quanto maiores sejam os erros de conhecimento do processo do modelo projetado, ou seja, incertezas da planta. Portanto, as motivações para a aplicação do controle robusto são: a) a dinâmica da planta pode estar sujeita a perturbações; b) permite melhor uso na operação de sensores e atuadores (GU et al., 2005).

Ressalta-se que uma das dificuldades é mapear os objetivos realísticos de projeto em uma única função-custo a ser otimizada, geralmente expressa na forma de uma norma. Os tipos mais conhecidos de norma são (GU et al., 2005): i)  $H_2$ : mede o erro quadrático médio na saída para uma entrada tipo ruído branco. Usada na síntese de leis de controle para problemas lineares quadráticos. ii)  $H_\infty$ : quantifica o maior acréscimo de energia que pode ocorrer entre as entradas e saídas de um determinado sistema. Os objetivos de desempenho associados a estas duas normas são consideradas de grande importância, mas outros

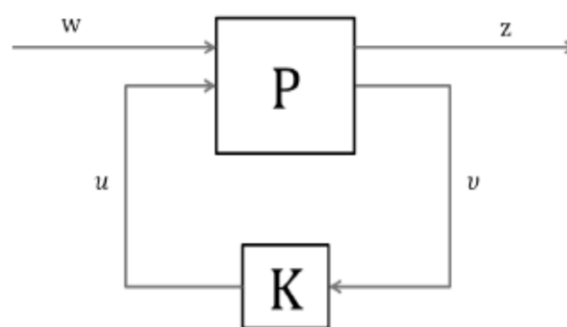
objetivos precisam também ser considerados na prática, como limitantes para resposta ao degrau, localização de pólos e perfil de resposta em frequência.

### 3.12.1 A técnica de controle H-infinito ( $H^\infty$ )

A técnica de controle  $H^\infty$  surgiu por volta dos anos 80. Segundo Fontenelle (2011), a técnica de controle  $H^\infty$  foi desenvolvida para sistemas incertos e o seu principal objetivo é prover uma solução que seja mais robusta em relação às obtidas com métodos LQG/Filtro de Kalman ou outras técnicas de controle clássico. A principal vantagem de usar o método  $H^\infty$  está na sua habilidade de incluir, em seu equacionamento, a solução de um problema de otimização.

Resumindo, de maneira geral, o problema do  $H^\infty$  se embasa em: com os requisitos do projeto, montar um sistema, com os devidos filtros (matrizes pesos), de forma a adequar o sistema para as condições de desempenho e robustez e, a seguir, criar um problema de minimização da matriz função de transferência, em malha fechada, usando a norma infinita (DE SOUZA, 2017). A seguir, resumidamente se apresenta a metodologia da construção do controle  $H^\infty$  (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2001).

Figura 3.10 – A planta generalizada P.



Fonte: Adaptado de De Souza (2017).

Na Figura 3.10, uma configuração do sistema é mostrada. A planta  $P$  é o modelo da planta generalizada e tem duas entradas e duas saídas. As entradas da planta

são classificadas como entrada de controle  $u$  e entrada exógena  $w$ . A entrada de controle  $u$  é a saída do controlador que se torna a entrada para os atuadores que excitam a planta. A entrada exógena,  $w$ , é de fato uma coleção de entradas (um vetor). Entradas típicas que são incorporadas a  $w$  são perturbações externas, ruído dos sensores, e sinais de rastreamento (*tracking*). As saídas da planta são também categorizadas em dois grupos. O primeiro grupo,  $y$ , são sinais que são medidos e realimentados. Estas se tornam as entradas para o controlador. O segundo grupo,  $z$ , são as saídas reguladas. Estas são todos os sinais que nós estamos interessados em controlar ou regular. Elas podem ser estados, sinais de erro ou sinais de controle.

Para um sistema em modelo de espaço de estados, na qual a entrada é dada por  $u = u(t)$ , a saída por  $y = y(t)$  e os estados representados por  $x = x(t)$ , tem-se:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}\tag{3.125}$$

Em que as matrizes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  representam um modelo padrão para os problemas de otimização multivariável. Ao se decompor este sistema, separando as componentes provenientes da entrada e da saída do sistema, obtém-se o conjunto de equações:

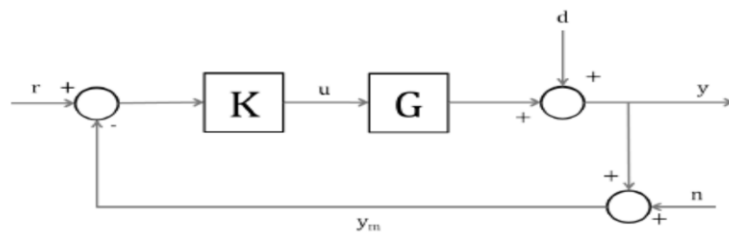
$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax(t) + B_1w + B_2u \\ z &= C_1x + D_{11}w + D_{12}u \\ y &= C_2x + D_{21}w + D_{22}u\end{aligned}\tag{3.126}$$

Pondo em ordem o conjunto de equações (Equação 3.126), uma planta generalizada em forma matricial, surge:

$$P = \begin{bmatrix} A & [B_1 & B_2] \\ \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \end{bmatrix}\tag{3.127}$$

A Equação (3.127) concebe a planta generalizada escrita de forma geral em espaço de estados. Para determinar  $P$  e  $K$ , para um caso específico (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2001). Segundo De Souza (2017), é preciso encontrar uma representação que consinta a identificação dos sinais  $w$ ,  $z$ ,  $v$  e  $u$ . Portanto, seja o diagrama de blocos da Figura 3.11.

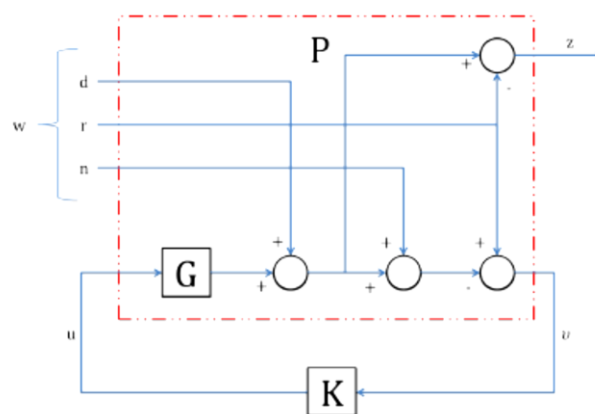
Figura 3.11 – Configuração de controle com um grau de liberdade.



Fonte: Adaptado de De Souza (2017).

Na Figura 3.11 demonstra o sistema de controle em que  $K$  representa o controlador,  $G$  a planta,  $r$  o sinal de referência,  $u$  o sinal de controle,  $\eta$  representa ruídos,  $d$  distúrbios,  $y$  o sinal de saída e  $y_m$  é o sinal de saída corrompido. Tal como realizado por De Souza (2017), resolve-se a álgebra de blocos, abrindo assim as malhas que entram e saem do controlador e da planta, encontrando uma nova estrutura do diagrama de blocos representado na Figura 3.12

Figura 3.12 – Nova estrutura da Figura 4.4



Fonte: Adaptado de De Souza (2017).



Na Figura 3.12 possui as mesmas informações, compreendidas na Figura 3.12, porém rearranjada de maneira a demonstrar a planta generalizada  $P$  (quadrado em vermelho). Ficando, mais fácil de ver as partes que a nova planta engloba. As variáveis  $d$ ,  $r$  e  $\eta$  representam os sinais de perturbação (ruído de processo), de referência e medida do ruído, respectivamente. A forma matricial da Figura 3.12 é dada a seguir:

$$w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \\ r \\ n \end{bmatrix} \quad (3.128)$$

A Equação (3.128) representa as entradas exógenas do sistema que podem ser descritas como (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2001):

$$\begin{aligned} z_1 &= W_{KS}u \\ z_2 &= W_TGu \\ z_3 &= W_Sw + W_SGu \\ v &= -w - Gu \end{aligned} \quad (3.129)$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} z &= y - r = Gu + d - r = Iw_1 - Iw_2 + 0w_3 + Gu \\ v &= r - y_m = r - Gu - d - n = -Iw_1 + Iw_2 - Iw_3 - Gu \end{aligned} \quad (3.130)$$

com  $I$  sendo uma matriz identidade. Por fim,  $P$  representa a matriz função de transferência de  $[wu]$  para  $[z v]$ , assumindo a expressão matricial:

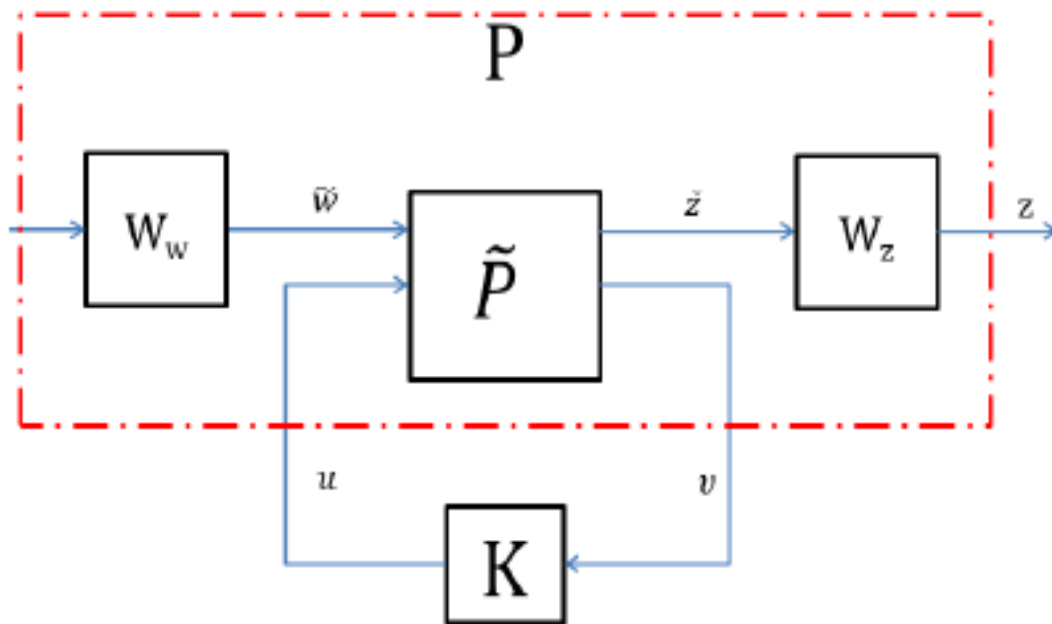
$$P = \begin{bmatrix} I & -I & 0 & G \\ -I & I & -I & -G \end{bmatrix} \quad (3.131)$$

Assim sendo, se obtém um exemplo de determinação algébrica da planta generalizada, representada pela matriz  $P$ , para um caso com a configuração de controle de realimentação com um grau de liberdade.

De acordo com De Souza (2017), outra forma para o projeto do controlador consiste em acrescentar funções peso a planta generalizada. Essas funções peso  $W_z$  e  $W_w$  estão relacionadas com a entrada e a saída da planta.

A função  $W_z$  está relacionada com as entradas  $\tilde{w}$  que informam os sinais físicos do sistema: perturbações, referências e ruídos. A função  $W_w$  está relacionada com a saída  $\tilde{z}$ , que geralmente se encarrega de minimizar o erro de controle  $y - r$  e da manipulação do sinal de controle  $u$ . Na qual sua representação em diagrama de blocos é exposto na Figura 3.13.

Figura 3.13 – Funções peso e sua estrutura na planta.



Fonte: Adaptado de De Souza (2017).

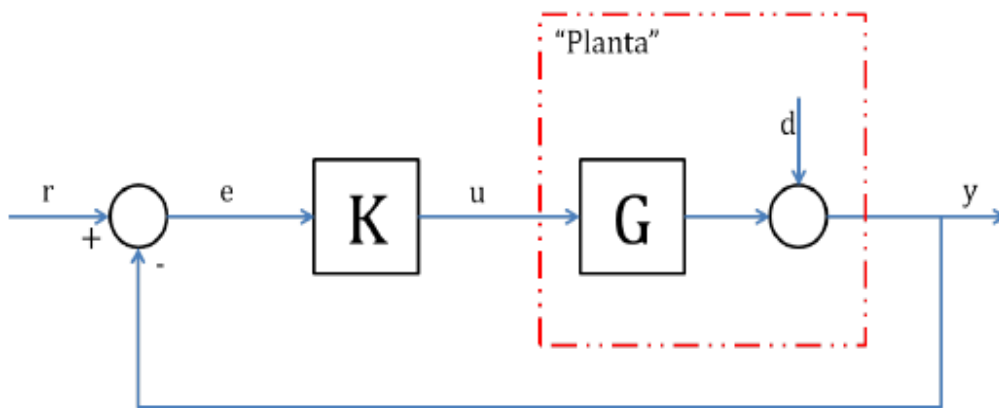
Da Figura 3.13 tem-se que  $w = W_w \tilde{w}$  e  $z = W_z \tilde{z}$ . Na maioria dos casos se considera, sem perda de generalidade, que  $W_w(s)$  e  $W_z(s)$  são estáveis e de mínima fase.

O problema do  $H^\infty$  tem como objetivo de relacionar  $\bar{\sigma}(S)$  (máximo valor singular da função sensibilidade) para o desempenho,  $\bar{\sigma}(T)$  (máximo valor singular da função sensibilidade complementar) para robustez e diminuir a sensibilidade a ruído e  $\bar{\sigma}(KS)$  para reduzir entradas muito grandes, organiza-se o sistema da seguinte forma (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2001):

$$\min_K \|K\|_\infty, \quad N = \begin{bmatrix} W_{KS}KS \\ W_T T \\ W_S S \end{bmatrix} \quad (3.132)$$

na qual,  $K$  é um controlador estabilizador. As funções peso  $W_{KS}$ ,  $W_T$  e  $W_S$  tem como objetivo ponderar o desempenho, robustez e a energia consumida pelo sistema, atuando sobre as funções sensibilidade  $S$ , sensibilidade complementar  $T$  e da relação  $KS$ .

Figura 3.14 – Esquema de um sistema multivariável.



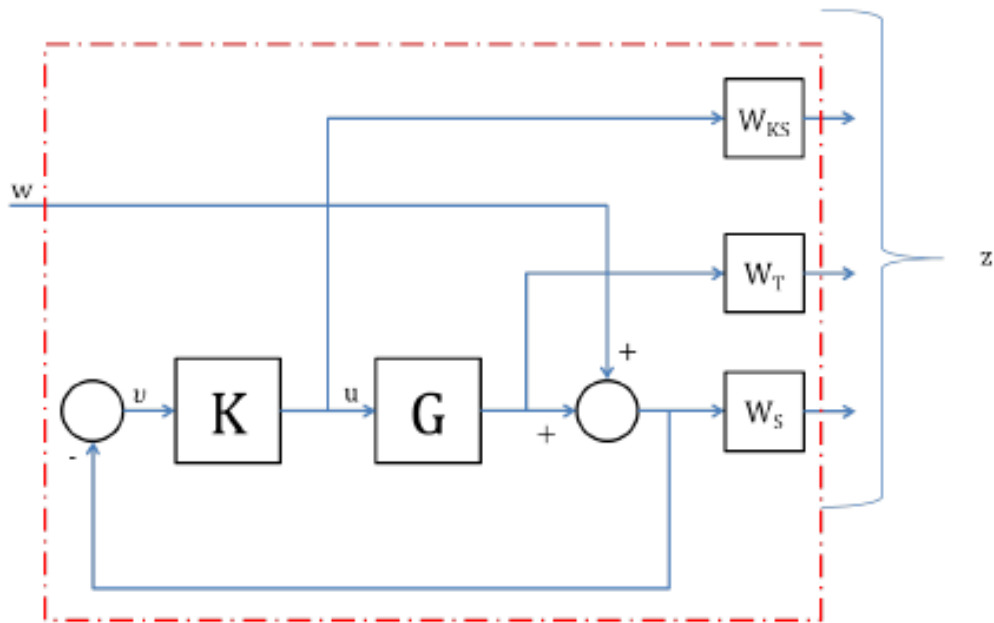
Fonte: Adaptado de De Souza (2017).

Considere o sistema multivariável descrito na Figura 3.14. No sentido de quantificar as margens multivariáveis de estabilidade e desempenho utilizam-se os valores singulares da função transferência do sistema em malha fechada de  $r$  para cada uma das três saídas  $e$ ,  $y$  e  $u$ .

$$\begin{aligned}
 S(s) &= (I + G(s)K(s))^{-1} \\
 T(s) &= G(s)K(s)(I + G(s)K(s))^{-1} = I - S(s) \\
 R(s) &= K(s)(I + G(s)K(s))^{-1} = K(s)S(s)
 \end{aligned}
 \tag{3.133}$$

As matrizes  $S(s)$  e  $T(s)$  acima são conhecidas por função sensibilidade e função sensibilidade complementar no domínio da frequência  $s=j\omega$ , respectivamente. A Figura (3.15) apresenta em diagrama de blocos a configuração referente à equação (3,131).

Figura 3.15 – Esquema correspondente à Equação 4.15.



Fonte: Adaptado de De Souza (2017).

Da Figura 3.15, as seguintes relações são tiradas:

$$\begin{aligned}
 z1 &= W_{KS}u \\
 z2 &= W_TGu \\
 z3 &= W_{Sv} + W_SGu \\
 v &= -w - Gu
 \end{aligned}
 \tag{3.134}$$

Reestruturando a equação (3.134), se obtém  $P$ , que é a função de transferência de  $[w \ u]^T$  à  $[z \ v]^T$ , então:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & W_u \\ 0 & W^T \\ W_p I & W_p G \\ -I & -G \end{bmatrix} \quad (3.135)$$

A Equação 4.18 é o modelo de planta generalizada para este caso.

### 3.12.2 Otimização do método de controle $H^\infty$

O problema do controlador ótimo  $H^\infty$  se embasa em estabilizar o controlador  $K$  e minimizar a expressão:

$$\|F_l(P, K)\|_\infty = \max_{\omega} \bar{\sigma}(F_l(P, K)(i\omega)) \quad (3.136)$$

A norma  $H^\infty$  possui distintas interpretações em termos de desempenho. Uma delas consiste em minimizar o pico do máximo do valor singular de  $F_l(P, K)(i\omega)$ . Uma interpretação no domínio do tempo pode ser posta como sendo o pior do caso norma-2. Ponderando que um sistema pode ser escrito na forma:

$$\begin{bmatrix} z \\ u \end{bmatrix} = P(s) \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \quad (3.137)$$

$$u = K(s)v \quad (3.138)$$

sendo que a matriz  $P$  pode ser dada por:

$$P(s) := \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \quad (3.139)$$

$$F_l(P, K)w = P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21} \quad (3.140)$$

E que  $F_l(P, K)w$  concebe a função de transferência em malha fechada de  $w$  até  $z$ .

$$\|F_l(P, K)\|_\infty = \max_{w(t) \neq 0} \frac{\|z(t)\|_2}{\|w(t)\|_2} \quad (3.141)$$

Em que,  $\|z(t)\|_2 = \sqrt{\int_0^\infty \sum_i |z_i(t)|^2 dt}$  que é a norma-2 do sinal do vetor  $z(t)$ . Sendo  $\gamma_{min}$  o valor mínimo de  $\|F_l(P, K)\|_\infty$ . Portanto, o problema de controle dará  $\gamma > \gamma_{min}$ . A fim de estabilizar os controladores  $K$  de forma que:

$$\|F_l(P, K)\|_\infty < \gamma \quad (3.142)$$

Este, por sua vez, é resolvido usando o algoritmo, desenvolvido por Doyle e outros em 1989 (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2001), o qual por uma redução iterativa do valor de,  $\gamma$  obtém-se uma solução ótima. Entretanto, antes da aplicação do algoritmo, deve-se verificar se as condições abaixo são válidas para o sistema considerado.

A planta generalizada, exibida na equação (3.127) possui condições que devem ser satisfeitas (DE SOUZA, 2017):

- a)  $(A, B_2, C_2)$  devem ser estabilizáveis e detectáveis;
- b)  $D_{12}$  e  $D_{21}$  devem possuir posto ("rank") completo;
- c)  $\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix}$  deve possuir posto completo para todo  $\omega$  ;

d)  $\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix}$  deve possuir posto completo para todo  $\omega$

e)  $D_{11} = 0$  e  $D_{22} = 0$ .

Em conformidade com De Souza (2017), a condição (a) garante a existência de um controlador  $K$ , a condição (b) é suficiente para garantir que o controlador seja próprio e realizável. As condições (c) e (d) garantem que o controlador ótimo não tente cancelar pólos e zeros no eixo imaginário, o que resultaria em uma instabilidade em malha fechada.

Em resumo, o controlador  $K_{inf}$  projetado deve ser capaz de estabilizar a planta e minimizar a função de desempenho dada por:

$$\|F_l(K_{H inf}, P)\|_{\infty} = \left\| \begin{bmatrix} W_s S \\ W_{KS} K S \end{bmatrix} \right\|_{\infty} \quad (3.143)$$

### 3.12.3 Construção das funções peso

A seleção das funções peso, ou também conhecidos como parâmetros de ajuste requerem várias iterações, de modo a obter os pesos que determinam um bom controlador. Método tentativa e erro, em que De Souza (2017) demonstra algumas sugestões para a construção, oriundas pelos autores D.Wu et al. (2005) e Skogestad e Postlethwaite (2001). Logo, são apresentadas as funções:

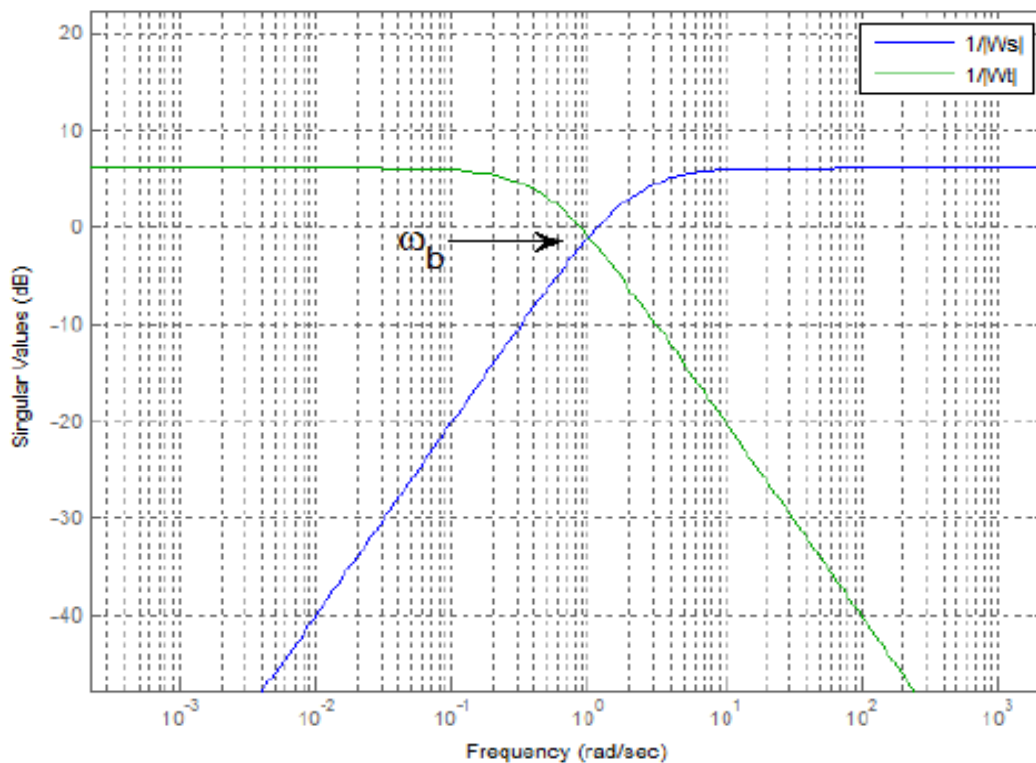
$$W_s = \frac{\frac{s}{M} + w_b}{s + A w_b} \quad (3.144)$$

Na equação (3.144), segundo Zhou e Doyle (1998), a função  $W_s$  se relaciona com a função sensibilidade ( $S(j\omega)$ ) para caracterizar o desempenho do controlador, em que  $A$  está relacionado com o erro de estado estacionário (*steady state offset*),  $w_b$  é a banda passante desejada para a função sensibilidade e  $M$  está relacionado com o máximo sobre sinal de  $S$ .

$$W_T = \frac{s + \frac{w_{bc}}{M}}{As + w_{bc}} \quad (3.145)$$

Já a equação (3.145) a função  $W_T$  está relacionada com a função sensibilidade complementar ( $T(jw)$ ) em que caracteriza a robustez do controlador, e  $w_{bc}$  é a banda passante desejada para a função sensibilidade complementar (ZHOU; DOYLE, 1998),  $W_T$  é simétrico a  $W_S$  em torno da linha  $w = w_b$ , como mostra a Figura 3.16.

Figura 3.16 – Comparando  $W_S$  e  $W_T$ .



Fonte: Adaptado de De Souza (2017).

Para uma transição mais acentuada entre baixa frequência e alta frequência, as funções  $W_S$  e  $W_T$  podem ser modificadas como se segue:



$$W_S = \left( \frac{\frac{s}{\sqrt[k]{M}} + w_b}{s + Aw_b} \right)^k \quad (3.146)$$

$$W_T = \left( \frac{s + \frac{w_{bc}}{\sqrt[k]{M}}}{\sqrt[k]{As} + w_{bc}} \right)^k \quad (3.147)$$

em que  $k \geq 1$ . Este parâmetro  $k$  atua na inclinação da curva (*roll-off*). A função  $W_{KS}$  atua no controlador restringindo a intensidade dos sinais de entrada, ou seja, regula o esforço do controlador, e é normalmente admitido como sendo uma constante.

As funções peso devem ser estáveis e de mínima fase (D.WU et al., 2005). Conforme Skogestad e Postlethwaite (2001), as funções  $W_S$  e  $W_T$  possuem influência sobre a posição dos zeros e pólos. Com isso, surgem os problemas de acordos (*trade-off*) na escolha dos parâmetros destas funções, ficando a critério dos requisitos do projeto em estudo (DE SOUZA, 2017).

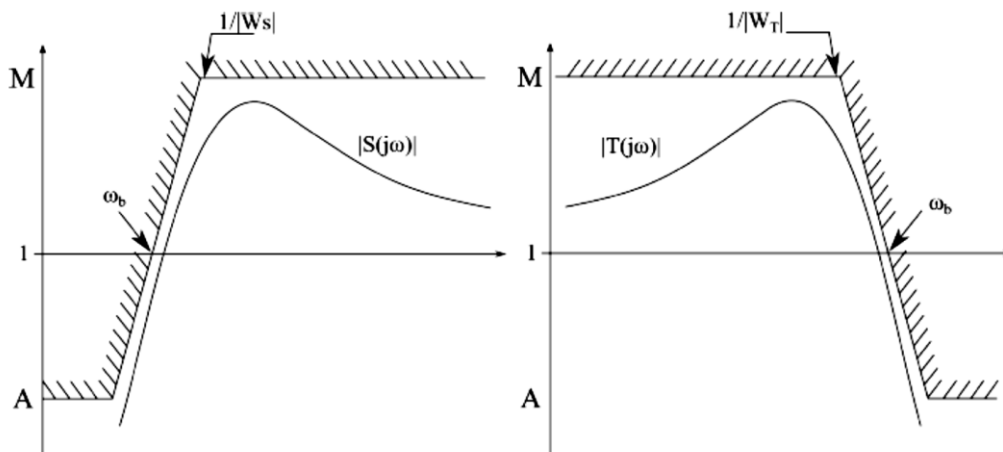
Para garantir um bom desempenho o valor singular máximo da função sensibilidade ( $\bar{\sigma}(S(jw))$ ) e da função sensibilidade complementar ( $\bar{\sigma}(T(jw))$ ) devem ser menores que o inverso do modulo das funções pesos  $W_S$  e  $W_T$ , como mostram as equações abaixo:

$$\bar{\sigma}(S(jw)) < \frac{1}{|W_S(jw)|} \quad (3.148)$$

$$\bar{\sigma}(T(jw)) < \frac{1}{|W_T(jw)|} \quad (3.149)$$

A representação gráfica das equações (3.148) e (3.149) é demonstrado a seguir, Figura 3.17. Evidenciando a regra para o desempenho ótimo do controlador a ser calculado pela técnica  $H^\infty$ .

Figura 3.17 – Relação de desempenho.



Fonte: Adaptado de De Souza (2017).

### 3.12.4 Incertezas de modelagem

De Souza (2017) expôs em seu trabalho que o significado de incerteza é algo indeterminado, indefinido, não realizável, desconhecido e/ou não definido claramente. Isso quer dizer, incerteza é a incapacidade de se conhecer o valor absoluto de um parâmetro e/ou as características. E para modelar um sistema, se busca a forma mais simples de delineá-lo, negligenciando muitas das vezes certas características que poderá haver forte influência quando submetida ao sistema real.

A modelagem pode ser representada por um conjunto de equações relacionando variáveis e parâmetros. Segundo Gu et al. (2005), as incertezas de modelagem podem ter diversas origens. São elas:

- Parâmetros são sempre aproximações dos valores reais.
- Parâmetros do modelo variam devido as não linearidades ou a mudanças no ponto de operação.
- Erros de medição de variáveis.
- Desconhecimento da estrutura do processo em alta frequência.
- Na prática, por simplicidade, usam-se modelos de baixa ordem.

E as incertezas referidas acima podem ser classificadas em dois grupos:

- Incertezas paramétricas ou estruturadas: quando a estrutura do modelo utilizado para representar o processo é perfeitamente conhecida e invariante e apenas seus parâmetros estarão sujeitos a variações. Um exemplo deste tipo pode ser uma planta que tem um comportamento dinâmico de sistema de primeira ordem linear com ganho estático variável.
- Incertezas não estruturadas: quando a estrutura, a ordem e outras características do modelo utilizado para representar o processo podem variar, de forma tal que não é possível representá-lo por um único modelo com parâmetros variáveis. Um exemplo deste tipo pode ser uma planta que tem um comportamento dinâmico que pode ser representado por um sistema de ordem variável onde unicamente limitam-se os valores de amplitude da sua resposta em frequência.

Para poder colocar formalmente estas representações é necessário que sejam definidos os conceitos de modelo nominal e família de modelos. Ao descrever o comportamento de um processo através de um modelo linear normalmente devem ser usados vários modelos.

## 4 METODOLOGIA

### 4.1 O controle H-infinito usando a técnica SDRE não linear

Nesta seção, são introduzidos os métodos propostos para o problema do controle  $H^\infty$  via o SDRE não linear. Abordagens de soluções para sistemas *input-affine* (sistemas não lineares que são lineares na entrada) são propostas em Cloutier et al. (1996). Considere o sistema genérico não linear com realimentação de saída:

$$\dot{x} = f(x) + B_1(x)w + B_2(x)u \quad (4.1)$$

$$z = c_1(x) + D_{12}(x)u \quad (4.2)$$

$$y = c_2(x) + D_{21}(x)w \quad (4.3)$$

Em que  $x \in \mathfrak{R}$ ,  $u \in \mathfrak{R}^{m_2}$ ,  $w \in \mathfrak{R}^{m_2}$  e todas as funções são funções suaves, ou seja, funções que possuem derivadas de todas as ordens.  $D_{12}(x)$ ,  $D_{21}(x)$  possuem posto completo,  $D_{12}^T(x)D_{12}(x) = \mathfrak{R}_u$ ,  $D_{21}(x)D_{21}^T(x) = \mathfrak{R}_w$  e  $f(0) = 0$ ,  $c_2(0) = 0$ , e  $B_2(x) \neq 0$  para todo  $x$ ,  $z$  é a saída controlada e  $y$  é a saída medida. O sinal de entrada exógena  $w$  pode incluir comandos de rastreamento e/ou perturbações.

Os métodos de controle multiobjectivos podem ser considerados uma generalização do método de controle conhecido como  $H_2 / H^\infty$  misto, onde duas funções objetivas são otimizadas. Por exemplo, o método  $H^\infty$  permite limitar certo nível de rejeição de ruídos ou a perturbação sobre o sistema devido as variações dos parâmetros e as incertezas do sistema, e assim melhorando a robustez do controlador e a otimização do método  $H_2$  permite melhorar o desempenho, como por exemplo, tempo de resposta e minimizar o consumo de energia do controlador. Portanto, o compromisso de minimização (*trade-off*) pode ser estabelecido por: manter a norma  $H_\infty < \gamma$  e a norma  $H_2 < \gamma$  (PINHEIRO; SOUZA, 2013). O método  $H_\infty$  usando a técnica SDRE não linear

tem condições semelhantes, ou seja, é desejável limitar o ganho  $L_2$  obtido no projeto  $H_\infty$ /SDRE, tal que  $L_2 < \gamma \geq 0$  assim o sistema de equações (3.125) à (3.127) irão satisfazer essa condição se:

$$\int_0^T \|z(t)\|^2 dt \leq \gamma^2 \int_0^T \|w(t)\|^2 dt \quad (4.4)$$

Para todo  $T > 0$  e para todo  $w \in L_2(0, T)$ . Dessa forma, se um controlador puder ser encontrado tal que o sistema em malha fechada seja internamente estável a desigualdade da Equação 4.4 será satisfeita, e os sinais exógenos serão atenuados localmente por  $\gamma$ . A desigualdade pode ser satisfeita através da solução do problema não linear de máximo e mínimo dado por:

$$\max_{w \in L_{2+}} \min_{u \in L_{2+}} \frac{1}{2} \int_0^\infty \|z(t)\|^2 - \gamma^2 \|w(t)\|^2 dt \quad (4.5)$$

Sujeito às restrições, equações (4.1) à (4.3).

## 4.2 A união das técnicas SDRE e $H_\infty$

Para o uso da abordagem da técnica não linear do SDRE na obtenção de uma solução com o  $H_\infty$  tem-se a seguir os seguintes passos (CLOUTIER et al. 1996):

a) A parametrização da dinâmica não linear na forma SDC:

$$\dot{x} = A(x)x + B_1(x)w + B_2(x)u \quad (4.6)$$

$$z = C_1(x)x + D_{12}(x)u \quad (4.7)$$

$$y = C_2(x)x + D_{21}(x)w \quad (4.8)$$

Assumindo que  $(A, B_1)(A, B_2)$  e  $(C_1, A)(C_2, A)$  são estabilizáveis e detectáveis no sentido linear, respectivamente, para  $x \in \Omega$ , onde  $\Omega$  é a região de interesse que pode ser todo o espaço.

- b) Com  $\gamma$  suficientemente grande para que as soluções  $P(\hat{x}) \geq 0$ ,  $Q(\hat{x}) \geq 0$  existam para o máximo valor singular  $\lambda_{\max}[P(\hat{x})Q(\hat{x})] \leq \gamma^2$ , resolvem-se as equações de Riccati Dependentes do Estado dadas abaixo em termos de suas matrizes hamiltonianas que são dependentes do estado:

$$\begin{bmatrix} A - B_2 R_u^{-1} D_{12}^T C_1 & \gamma^2 B_1 R_1^T - B_2 R_u^{-1} B_2^T \\ -\hat{C}_1^T \hat{C}_1 & -(A - B_2 R_u^{-1} D_{12}^T C_1)^T \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

$$\begin{bmatrix} (A - B_1 D_{21}^T R_w^{-1} C_2)^T & \gamma^2 C_1^T C_1 - C_2^T R_w^{-1} C_2 \\ -\hat{B}_1 \hat{B}_1^T & -(A - B_1 D_{21}^T R_w^{-1} C_2) \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

$$\hat{B}_1 = B_1 (I - D_{21}^T R_w^{-1} D_{21}) \quad \hat{C}_1 = (I - D_{12} R_u^{-1} D_{12}^T) C_1 \quad (4.11)$$

- c) Constrói-se então o controlador SDRE não linear via  $H^\infty$  na forma:

$$\dot{\hat{x}} = A_0(\hat{x})\hat{x} + B_0(\hat{x})y \quad (4.12)$$

$$u = F(\hat{x})\hat{x} \quad (4.13)$$

$$A_0 = A + B_2 F + \gamma^{-2} B_1 B_1^T P + ZL(C_2 + \gamma^{-2} D_{21} B_1^T P)$$

$$B_0 = -ZL \quad Z = (I - \gamma^{-2} QP)^{-1}$$

$$F = -R_u^{-1} (B_2^T P + D_{12}^T C_1) \quad L = -(QC_2^T + B_1 D_{21}^T) R_w^{-1}$$

Para o caso em que todos os estados estão disponíveis, as equações (4.9) e (4.10) desaparecem juntamente com a equação de observador equação

(4.11) e o controlador SDRE não linear é dado pela equação (4.12) onde  $\hat{x} = x$ . Neste caso, os passos que se deve seguir são (SHAWKY et al., 2002):

- i) Parametrização em SDC das equações (4.1)-(4.8).
- ii) Resolver a equação do  $H^\infty$  SDRE dada por.

$$A^T P + PA - P \left[ B_2 B_2^T - \frac{1}{\gamma^2} G G^T \right] P + C_1^T C_1 = 0 \quad (4.14)$$

Todas as matrizes aqui são funções do estado  $x$ . O  $\gamma$  é assumido suficientemente grande de modo a que as propriedades de estabilidade se mantenham para obter  $P(x) > 0 \forall x$ .

- iii) Por fim, constrói-se a realimentação não linear do  $H^\infty$  via:

$$u(x) = -B_2^T(x) P(x) x \quad (4.15)$$

A estabilidade local do sistema de malha fechada resultante da utilização da técnica do regulador não linear SDRE é determinada pelo seguinte teorema de Cloutier et al. (1996).

**Teorema:** Considere a equação (3.125) e assume  $z \in \mathfrak{R}^s, C_1(0) = 0$ . Também assume que todos os mapeamentos nas equações (4.1) à (4.3) são  $C^\infty$  que é detectável e  $\{C_1(0), A(0)\}$  é  $\{C_1(0), B(0)\}$  estabilizável. Desta forma, o procedimento de realimentação do estado SDRE dada por (4.13) produz uma solução local para o problema do controle não linear  $H^\infty$  para (4.1).

### 4.3 Projeto do controlador SDRE

Para resolver o problema de controle subótimo das equações (3.118) e (3.119) parte-se primeiramente da parametrização SDC. Transformando a dinâmica não linear do modelo em matrizes de coeficientes dependentes do estado. Em consequente, vem a resolução da equação de Riccati, em que as condições necessárias para otimalidade podem ser obtidas usando o cálculo variacional. A equação de Riccati dependente de estado (SDRE) é resolvida para cada instante  $t_i$  da trajetória do estado  $x(t_i)$ . O hamiltoniano para o problema de controle ótimo é dado por:

$$H(x, u, \lambda) = \frac{1}{2}(x^T Q(x)x + u^T R(x)u) + \lambda^T (A(x)x + B(x)u) \quad (4.16)$$

Sendo  $\lambda \in \mathfrak{R}^T$  é o multiplicador de Lagrange. As condições necessárias para o controle ótimo são  $\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda}, \frac{\partial H}{\partial u} = 0$  e  $\dot{\lambda} = \frac{\partial H}{\partial x}$ . Do hamiltoniano obtêm-se:

$$\dot{\lambda} = -Q(x)x - \frac{1}{2}x^T \frac{\partial Q(x)}{\partial x} x - \frac{1}{2}u^T \frac{\partial R(x)}{\partial x} u - \left[ \frac{\partial(A(x)x)}{\partial x} \right]^T \lambda - \left[ \frac{\partial(B(x)u)}{\partial x} \right]^T \lambda \quad (4.17)$$

$$\dot{x} = A(x)x + B(x)u \quad (4.18)$$

$$0 = R(x)u + B(x)\lambda \quad (4.20)$$

Denotando  $A_i$  a  $i$ -linha de  $A(x)$  e  $B_i$  a  $i$ -linha de  $B(x)$ . Como é exposto, a seguir, de forma matricial em termos de derivada parcial:

$$\frac{\partial(A(x)x)}{\partial x} = A(x) + \frac{\partial(A(x))}{\partial x} x = A(x) + \begin{bmatrix} \frac{\partial A_1}{\partial x_1} x & \cdots & \frac{\partial A_1}{\partial x_n} x \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial A_n}{\partial x_1} x & \cdots & \frac{\partial A_n}{\partial x_n} x \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

$$\frac{\partial(B(x)u)}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial B_1}{\partial x_1} x & \cdots & \frac{\partial B_1}{\partial x_n} x \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial B_n}{\partial x_1} x & \cdots & \frac{\partial B_n}{\partial x_n} x \end{bmatrix} \quad (4.22)$$



O co-estado é admitido como  $\lambda = P(x)x$ , que tem dependência do estado. Usando esta forma do co-estado, da Equação 4.96 obtêm-se o controle realimentado:

$$u = -R^{-1}(x)B^T(x)P(x)x \quad (4.23)$$

Substituindo este controle na Equação 4.18 tem-se:

$$\dot{x} = A(x)x - B(x)R^{-1}B^T(x)P(x)x \quad (4.24)$$

Para encontrar o valor da função  $P(x)$ , se diferencia  $\lambda = P(x)x$  no tempo ao longo da trajetória.

$$\dot{\lambda} = \dot{P}(x)x + P(x)\dot{x} = \dot{P}(x)x + P(x)A(x)x - P(x)B(x)R^{-1}B^T(x)P(x)x \quad (4.25)$$

Em que a notação  $\dot{P}(x) = \sum_{i=1}^n P_{xi}(x)\dot{x}_i(t)$ . Substituindo a Equação 4.25 na primeira condição necessária do controle ótimo, Equação 4.17, referente à  $\dot{\lambda}$ , se alcança:

$$\begin{aligned} \dot{P}(x)x + P(x)A(x)x - P(x)B(x)R^{-1}B^T(x)P(x)x = -Q(x)x - \frac{1}{2}x^T \frac{\partial Q(x)}{\partial x} x - \\ \frac{1}{2}u^T \frac{\partial R(x)}{\partial x} u - \left[ A(x) + \frac{\partial(A(x)x)}{\partial x} x \right]^T P(x)x - \left[ \frac{\partial(B(x)u)}{\partial x} \right]^T P(x)x \end{aligned} \quad (4.26)$$

Organizando os termos de forma mais clara, temos:

$$\begin{aligned} \dot{P}(x)x + \frac{1}{2}x^T \frac{\partial Q(x)}{\partial x} x + \frac{1}{2}u^T \frac{\partial R(x)}{\partial x} u + x^T \left[ \frac{\partial(A(x)x)}{\partial x} x \right]^T P(x)x + \left[ \frac{\partial(B(x)u)}{\partial x} \right]^T P(x)x + \\ [P(x)A(x) + A^T(x)P(x) - P(x)B(x)R^{-1}B^T(x)P(x) + Q(x)] = 0 \end{aligned} \quad (4.27)$$

Então, admitindo que  $P(x)$  é a solução da equação de Riccati dependente do estado (SDRE), dada por:

$$P(x)A(x) + A^T(x)P(x) - P(x)B(x)R^{-1}(x)B^T(x)P(x) + Q(x) = 0 \quad (4.28)$$

Portanto, a condição necessária de otimalidade precisa que precisa ser satisfeita,

$$\begin{aligned} \dot{P}(x)x \frac{1}{2} x^T \frac{\partial Q(x)}{\partial x} x + \frac{1}{2} u^T \frac{\partial R(x)}{\partial x} u + \\ x^T \left[ \frac{\partial(A(x))}{\partial x} x \right]^T P(x)x + \left[ \frac{\partial(B(x)u)}{\partial x} \right]^T P(x)x = 0 \end{aligned} \quad (4.29)$$

No tempo infinito, no caso padrão do RLQ, esta é uma condição de otimalidade que satisfaz a solução do controle subótimo localmente.

#### 4.3.1 Controle não linear realimentado

$$u = -S(x)x, \quad (4.30)$$

$$S(x) = R^{-1}(x)B^T(x)P(x) \quad (4.31)$$

Existem, porém, alguns casos especiais. Tal como sistemas com pouca dependência do estado ou com poucas variáveis de estado, equação (4.28). Que pode ser resolvida de forma analítica. Por outro lado, uma solução numérica pode ser obtida com uma taxa de amostragem suficientemente grande. Isto significa que podemos resolver a equação de Riccati substituindo os valores  $x_0$  no sistema, resolver  $PA+A^TP-PBR^{-1}B^TP+Q=0$  encontrando  $P$ ,  $u$  e um novo  $x$ , substituir novamente e assim por diante até atingir o último passo no intervalo requerido. Isto é admissível desde que o incremento de tempo seja de maneira satisfatória pequeno. Uma aproximação, com estabilidade local, do sistema de

malha fechada é resultado do uso da técnica das equações de Riccati dependentes do estado, não-lineares.

**Lema 4.3.1.** - *Para uma parametrização dos coeficientes dependentes do estado  $A(x)x$ ,  $A(0)$  é a linearização de  $f(x)$  sobre o zero equilíbrio.*

É assumido que existe solução da SDRE para todo  $x$  na vizinhança da origem considerada. Então, naturalmente, o par  $(A(x),B(x))$  e uma parametrização estabilizável. Uma consequência lógica é que a solução existe em  $x=0$  e que  $P_0 = P(0)$  é solução do sistema de equações algébricas de Riccati (4.28).

**Teorema 4.3.1.** *Assume-se que a parametrização dos coeficientes dependentes do estado seja escolhida de forma que a coluna  $A(x)$  em torno da vizinhança sobre a origem e que os pares  $(A(x),B(x))$  e  $(C(x),A(x))$  sejam, no sentido linear para todo  $x$  pertencente à vizinhança sobre a origem, ponto a ponto, estabilizáveis e detectáveis, respectivamente. Então o regulador não-linear SDRE produz uma solução em malha fechada que é localmente e assintoticamente estável.*

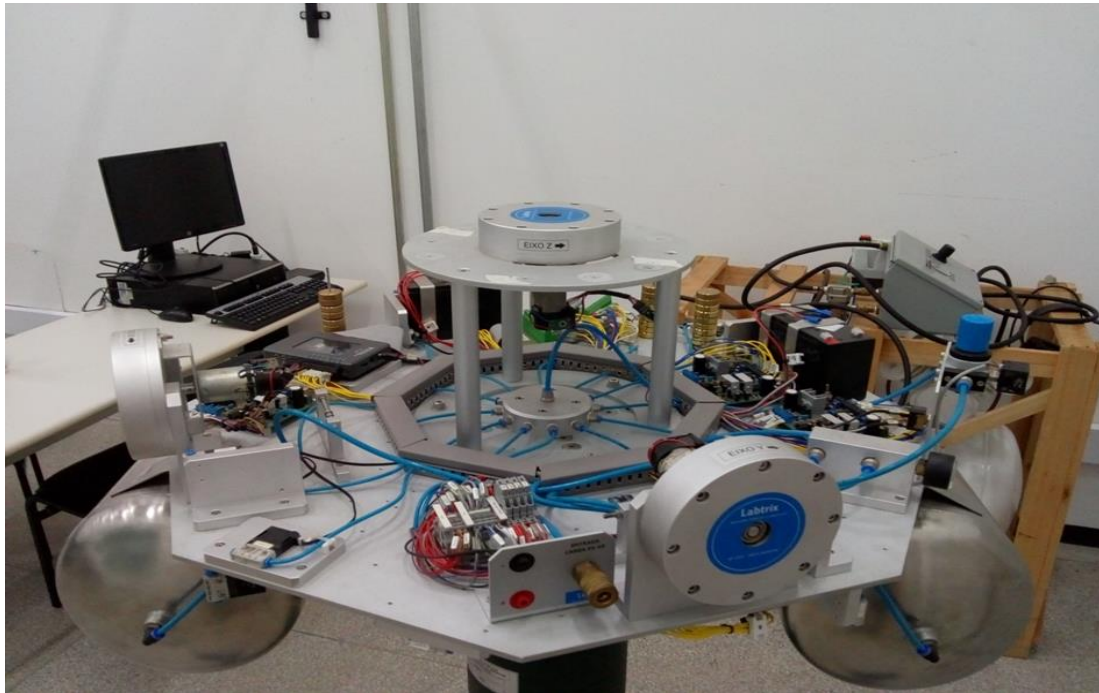
Um fator importante do método SDRE é que ele não cancela os benefícios que podem provir das não-linearidades do sistema dinâmico. A razão para isto pode ser que ele não exige inversão dinâmica e nem linearizações na realimentação do sistema não-linear.

## 5 MODELAGEM MATEMÁTICA

### 5.1 A plataforma de simulação de um SCA

Nesta seção inicialmente faz-se o modelamento do simulador 3D do SCA que está sendo construído pela UFABC (Universidade Federal do ABC) (ver Figura 5.1) Em seguida aplica-se o método SDRE para se projetar um controlador baseado nos atuadores de jato de gás e de rodas de reação. Observa-se que as equações que descrevem a dinâmica da plataforma do simulador são altamente não lineares.

Figura 5.1 – Simulador 3D de um SCA em construção na UFABC.



As equações de movimento do simulador são derivadas a partir da variação do momento angular total da plataforma (HUGHES, 1986). Por sua vez, a partir da matriz dos ângulos de Euler, que fornece a orientação do sistema referência  $F_i$  (inercial) em relação ao sistema  $F_b$  fixo no corpo (plataforma) é possível obter que a atitude da plataforma a qual gira em torno dos três, embora este giro esteja restrito às limitações da mesa. Assim, aplicando o teorema de Euler a variação do momento angular total da plataforma é dada por :

$$\dot{H} = M_T \quad (5.1)$$

Em que,  $H$  é o momento angular ao redor do centro de massa,  $M_T$  é a soma dos torques oriundos de perturbações externas. Definindo, portanto,  $H$ :

$$H = I_w + I_w(\Omega_1 + w_1)\hat{b}_1 + I_w(\Omega_2 + w_2)\hat{b}_2 + I_w(\Omega_3 + w_3)\hat{b}_3 \quad (5.2)$$

Sendo  $\hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{b}_3$  os versores do sistema de referências  $F_b$ . Já o tensor de inércia do simulador é  $I = F_b^T \text{diag}(I_{11}, I_{22}, I_{33})F_b$  e o momento de inércia ao redor do eixo  $b_i$  é  $I_{ii}$ . A velocidade angular de  $F_b$  em relação a  $F_i$  é  $w$ , a velocidade angular das rodas de reação  $\Omega$  e seu momento de inércia é  $I_w$ . Como  $I = F_b^T \text{diag}(I_w, I_w, I_w)F_b$  representa o tensor de inércia que reúne as 3 rodas de reação, escrevendo a equação 5.1 como:

$$H = Iw + I_w(\Omega + w) \quad (5.3)$$

Redefinindo os termos da Equação 5.3:

$$H = (I + I_w)w + I_w\Omega \quad (5.3)$$

Utilizando a regra a seguir, a fim de diferenciar um vetor  $A$  qualquer expresso em sistema em rotação, temos:

$$\frac{d}{dt} [F_b^T A] = F_b^T (A + w \times A) \quad (5.4)$$

Em que o produto vetorial  $w \times A$  pode ser substituído pelo produto  $w^x A$ , sendo  $w^x$  a matriz *skew-simétrica*:

$$w^x = \begin{pmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Usando a regra da Equação 5.4 para diferenciar a Equação 5.3, se pode substituir  $\dot{H}$  na Equação 5.1 modificar os termos para obter a dinâmica do simulador.

$$\dot{w} = (I + I_w)^{-1}[-w^x(I + I_w)w - w^x I_w \Omega - I_w \dot{\Omega} + M_T] \quad (5.4)$$

## 5.2 Ângulos de euler

A atitude de um satélite varia de acordo com sua velocidade angular. Tendo a matriz de base alcançada por meio da rotação do referencial  $F_b$  em relação ao  $F_i$  na sequência 3-2-1 (ordem devido às limitações da mesa), sendo assim possível ter o vetor velocidade angular em função dos ângulos de Euler (HUGHES,1986):

$$w = \begin{pmatrix} -\sin \theta_2 & 0 & 1 \\ -\cos \theta_2 \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 \\ \cos \theta_2 \sin \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

Invertendo a matriz da Equação 5.5, temos a equação que descreve de que maneira a atitude do satélite varia com a velocidade angular:

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sin \theta_3 / \cos \theta_2 & \cos \theta_3 / \cos \theta_2 \\ 0 & \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 \\ 1 & \sin \theta_3 \sin \theta_2 / \cos \theta_2 & \cos \theta_3 \sin \theta_2 / \cos \theta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

Com as Equações 5.4 e 5.6 temos a modelagem completa do simulador. Tendo ainda encontrar a lei de controle para o sistema.

### 5.3 Rodas de reação

Anteriormente foi visto que para obter a lei de controle utilizando o método SDRE, tendo as rodas de reação como únicos atuadores, as Equações 5.4 e 5.6 combinadas que compõe a dinâmica do simulador devem ser escritas através da equação matricial abaixo (ÇIMEN, 2008):

$$\dot{x} = A(x)x + B(x)u \quad (5.7)$$

A lei de controle  $u$  pode ser expressa da seguinte forma:

$$u = -S(x)x \quad (5.8)$$

Onde  $S(x)$  representa a matriz de ganho, que será calculada numericamente a cada passo da integração. Para colocar as Equações 5.4 e 5.6 na forma da Equação 5.7, primeiro se deve determinar o vetor de estados  $x$  e o vetor de controle  $u$ , para então encontrar as matrizes  $A$  e  $B$ .

$$x = (\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3 \ w_1 \ w_2 \ w_3)^T$$

$$u = (\dot{\Omega}_1 \ \dot{\Omega}_2 \ \dot{\Omega}_3)^T$$

A matriz  $A$  pode ser subdividida em duas partes: 1)  $A_\theta$  contém o vetor  $\theta$  e já está bem definida pela Equação (5.6). 2)  $A_w$ , contém o vetor  $w$  e pode ser obtida através do desenvolvimento da Equação 5.4. Desenvolvendo a propriedade distributiva na Equação 5.4 e considerando a soma de torques externos como nula por não intervir no cálculo da lei de controle.

$$\dot{w} = -(I + I_w)^{-1}w^x(I + I_w)w - (I + I_w)^{-1}w^x I_w \Omega - (I + I_w)^{-1}I_w \dot{\Omega}$$

A equação acima pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\dot{w} = \alpha w + \beta + \gamma \dot{\Omega}$$

Em que:

$$\alpha = -(I + I_w)^{-1} w^x (I + I_w)$$

$$\beta = -(I + I_w)^{-1} w^x I_w \Omega$$

$$\gamma = -(I + I_w)^{-1} I_w$$

Calculando  $\alpha$ , se tem:

$$\alpha = \begin{pmatrix} \frac{1}{(I_{11}+I_w)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(I_{22}+I_w)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(I_{33}+I_w)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (I_{11} + I_w) & 0 & 0 \\ 0 & (I_{22} + I_w) & 0 \\ 0 & 0 & (I_{33} + I_w) \end{pmatrix}$$

Efetuada a multiplicação e simplificando:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \frac{I_{22}}{(I_{11}+I_w)} w_3 & -\frac{I_{33}}{(I_{11}+I_w)} w_2 \\ -\frac{I_{11}}{(I_{22}+I_w)} w_3 & 0 & \frac{I_{33}}{(I_{22}+I_w)} w_1 \\ -\frac{I_{11}}{(I_{33}+I_w)} w_2 & -\frac{I_{22}}{(I_{33}+I_w)} w_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

Calculando  $\beta$ , se tem:

$$\alpha = \begin{pmatrix} \frac{1}{(I_{11}+I_w)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(I_{22}+I_w)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(I_{33}+I_w)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_w & 0 & 0 \\ 0 & I_w & 0 \\ 0 & 0 & I_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix}$$



Efetuando a multiplicação:

$$\beta = \begin{pmatrix} \frac{I_w}{(I_{11} + I_w)} (\Omega_2 w_3 - \Omega_3 w_2) \\ \frac{I_w}{(I_{22} + I_w)} (\Omega_3 w_1 - \Omega_1 w_3) \\ \frac{I_w}{(I_{33} + I_w)} (\Omega_1 w_2 - \Omega_2 w_1) \end{pmatrix}$$

Colocando o vetor  $w$  em evidência:

$$\beta = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{I_w}{(I_{11} + I_w)} \Omega_3 & \frac{I_w}{(I_{11} + I_w)} \Omega_2 \\ \frac{I_w}{(I_{22} + I_w)} \Omega_3 & 0 & \frac{I_w}{(I_{22} + I_w)} \Omega_1 \\ -\frac{I_w}{(I_{33} + I_w)} \Omega_2 & \frac{I_w}{(I_{33} + I_w)} \Omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

Calculando  $\lambda$ , temos:

$$\gamma = \begin{pmatrix} \frac{1}{(I_{11} + I_w)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(I_{22} + I_w)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(I_{33} + I_w)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_w & 0 & 0 \\ 0 & I_w & 0 \\ 0 & 0 & I_w \end{pmatrix}$$

Executando a multiplicação:

$$\gamma = \begin{pmatrix} \frac{-I_w}{(I_{11} + I_w)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-I_w}{(I_{22} + I_w)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-I_w}{(I_{33} + I_w)} \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

#### 5.4 Obtenção das matrizes A e B

Agora, as matrizes das Equações 5.9 e 5.10 podem ser somadas, porque multiplicam o vetor velocidade angular, formando então a matriz  $A_w$ .

$$A_w = \begin{pmatrix} 0 & \frac{I_{22}w_3 - I_w\Omega_3}{(I_{11}+I_w)} & \frac{-I_{33}w_2 + I_w\Omega_2}{(I_{11}+I_w)} \\ \frac{-I_{11}w_3 + I_w\Omega_3}{(I_{22}+I_w)} & 0 & \frac{I_{33}w_1 - I_w\Omega_1}{(I_{22}+I_w)} \\ \frac{I_{11}w_2 - I_w\Omega_2}{(I_{33}+I_w)} & \frac{-I_{22}w_1 + I_w\Omega_1}{(I_{33}+I_w)} & 0 \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

Da Equação 5.6, se tem a matriz  $A_\theta$ :

$$A_\theta = \begin{pmatrix} 0 & \sin \theta_3 / \cos \theta_2 & \cos \theta_3 / \cos \theta_2 \\ 0 & \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 \\ 1 & \sin \theta_3 \sin \theta_2 / \cos \theta_2 & \cos \theta_3 \sin \theta_2 / \cos \theta_2 \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

Combinando as matrizes  $A_w$  e  $A_\theta$ , se obtém a matriz A:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \sin \theta_3 / \cos \theta_2 & \cos \theta_3 / \cos \theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \sin \theta_3 \sin \theta_2 / \cos \theta_2 & \cos \theta_3 \sin \theta_2 / \cos \theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{I_{22}w_3 - I_w\Omega_3}{(I_{11}+I_w)} & \frac{-I_{33}w_2 + I_w\Omega_2}{(I_{11}+I_w)} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-I_{11}w_3 + I_w\Omega_3}{(I_{22}+I_w)} & 0 & \frac{I_{33}w_1 - I_w\Omega_1}{(I_{22}+I_w)} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{I_{11}w_2 - I_w\Omega_2}{(I_{33}+I_w)} & \frac{-I_{22}w_1 + I_w\Omega_1}{(I_{33}+I_w)} & 0 \end{pmatrix} \quad (5.15)$$

A matriz da Equação 5.8 corresponde a matriz B, pois é a única matriz que multiplica os vetores de controle.

$$\gamma = \begin{pmatrix} \frac{-I_w}{(I_{11}+I_w)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-I_w}{(I_{22}+I_w)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-I_w}{(I_{33}+I_w)} \end{pmatrix} \quad (5.16)$$

## 5.5 Propulsores

Algumas considerações devem ser feitas para a introdução dos propulsores ao modelo. Diferente das rodas de reação que geram torques internos sobre o satélite, os propulsores geram torques externos e seguem a expressão:

$$M_{pi} = -T_i \cdot d_i$$

Em que,  $M_{pi}$  corresponde ao torque gerado em torno do eixo  $i$ , por um propulsor que gera uma tração  $T_i$  a uma distância  $d_i$  do eixo de rotação. Destarte, considerando outras perturbações externas no satélite como nulas, tem-se que:

$$M_T = M_{pi} = -T_i \cdot d_i \quad (5.17)$$

Sendo  $M_T$  o torque total externo sobre o satélite. Considerando que durante o funcionamento dos propulsores, as rodas de reação não funcionam, tem-se que:

$$\dot{\Omega} = \Omega = 0 \quad (5.18)$$

Na qual,  $\dot{\Omega}$  e  $\Omega$  representam respectivamente a aceleração e velocidade angular das rodas de reação. Substituindo as Equações 5.7 na 5.9 que é a dinâmica do satélite, temos:

$$\dot{w} = (I + I_w)^{-1} [-w^x (I + I_w) w - T_i \cdot d_i] \quad (5.19)$$

A Equação 5.19 deve ser posta na forma matricial 5.7 em que,  $x = (\theta_1 \theta_2 \theta_3 w_1 w_2 w_3)^T$  e  $u = (T_1 T_2 T_3)^T$ . Portanto, como visto no capítulo 4.4, a matriz A é uma combinação das matrizes  $A_w$  e  $A_\theta$ . Para obter a matriz  $A_w$ , desenvolve-se a multiplicação do primeiro termo da Equação 5.19.

$$A_w = \begin{pmatrix} 0 & \frac{I_{22}w_3}{(I_{11}+I_w)} & \frac{-I_{33}w_2}{(I_{11}+I_w)} \\ \frac{-I_{11}w_3}{(I_{22}+I_w)} & 0 & \frac{I_{33}w_1}{(I_{22}+I_w)} \\ \frac{I_{11}w_2}{(I_{33}+I_w)} & \frac{-I_{22}w_1}{(I_{33}+I_w)} & 0 \end{pmatrix} \quad (5.20)$$

Combinando  $A_w$  com  $A_\theta$  temos:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sin \theta_3 / \cos \theta_2 & \cos \theta_3 / \cos \theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & \sin \theta_3 \sin \theta_2 / \cos \theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta_3 \sin \theta_2 / \cos \theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{I_{22}w_3}{(I_{11}+I_w)} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-I_{33}w_2}{(I_{11}+I_w)} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-I_{11}w_3}{(I_{22}+I_w)} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{I_{33}w_1}{(I_{22}+I_w)} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{I_{11}w_2}{(I_{33}+I_w)} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-I_{22}w_1}{(I_{33}+I_w)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.21)$$

Para obter matriz B, basta multiplicar o segundo termo na Equação 5.15 , que é o único que multiplica a lei de controle:

$$B = \begin{pmatrix} \frac{-d_1}{(I_{11}+I_w)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-d_2}{(I_{22}+I_w)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-I_{33}}{(I_{33}+I_w)} \end{pmatrix} \quad (5.22)$$

## 6 SIMULAÇÕES

### 6.1 Controlador SDRE baseado no SDC

Nesta seção, inicialmente faz-se uma comparação entre o desempenho de um controlador projetado pelo método LQR e um controlador projetado pelo método SDRE para as Equações 5.15 e 5.16. A fim de tornar os termos não lineares da matriz  $A(x)$  relevantes na simulação os controladores LQR e SDRE devem levar o sistema da posição angular e velocidades angulares iguais a zero até a atitude final dos eixos x, y, e z de  $(20^\circ, 50^\circ, -30^\circ)$  e velocidades angulares final zero.

Figura 6.1 – Resultado da simulação para posição angular dos eixos x (azul), y (vermelho) e z (verde) iguais a zero até a atitude final de  $(20^\circ, 50^\circ, -30^\circ)$  por meio do uso dos controladores LQR (em cima) e SDRE (abaixo).

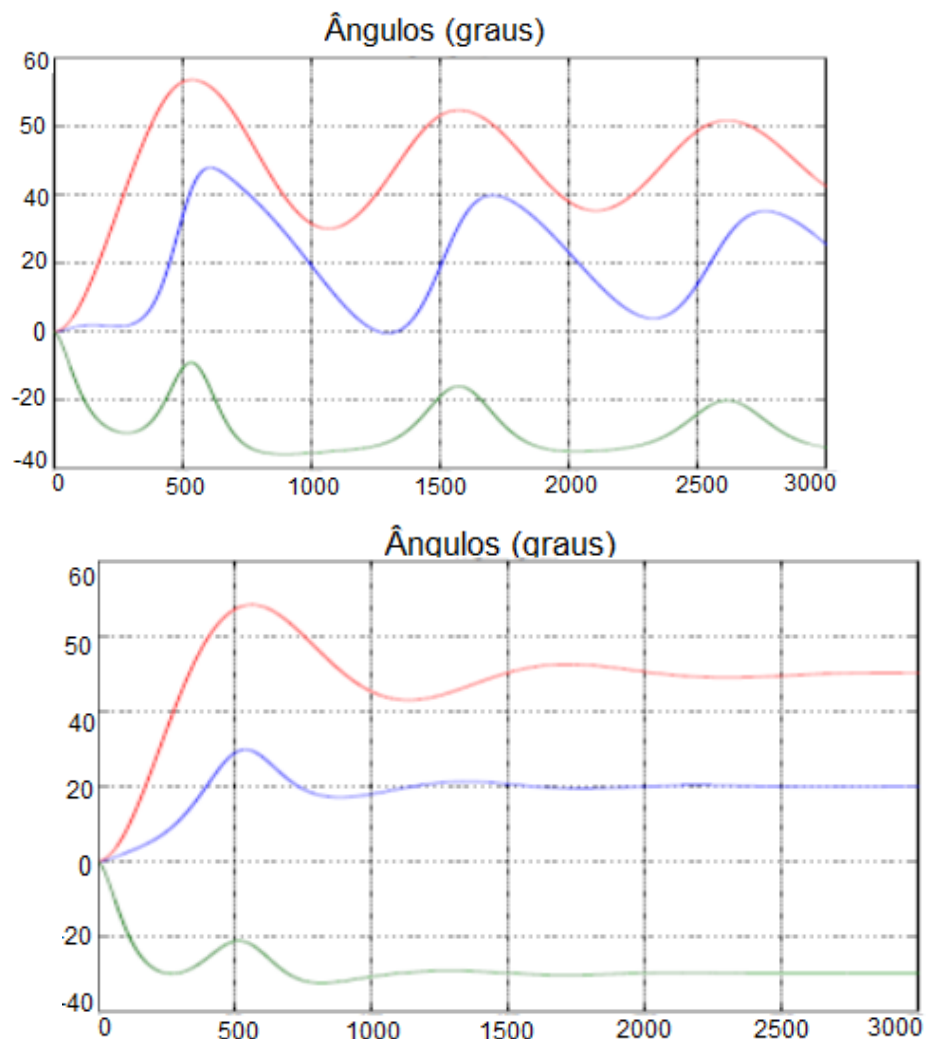


Figura 6.2 – Resultado da simulação para velocidades angulares dos eixos x (azul), y (vermelho) e z (verde) inicialmente iguais a zero até a sua estabilização velocidade angular final zero por meio do uso dos controladores LQR (em cima) e SDRE (embaixo).

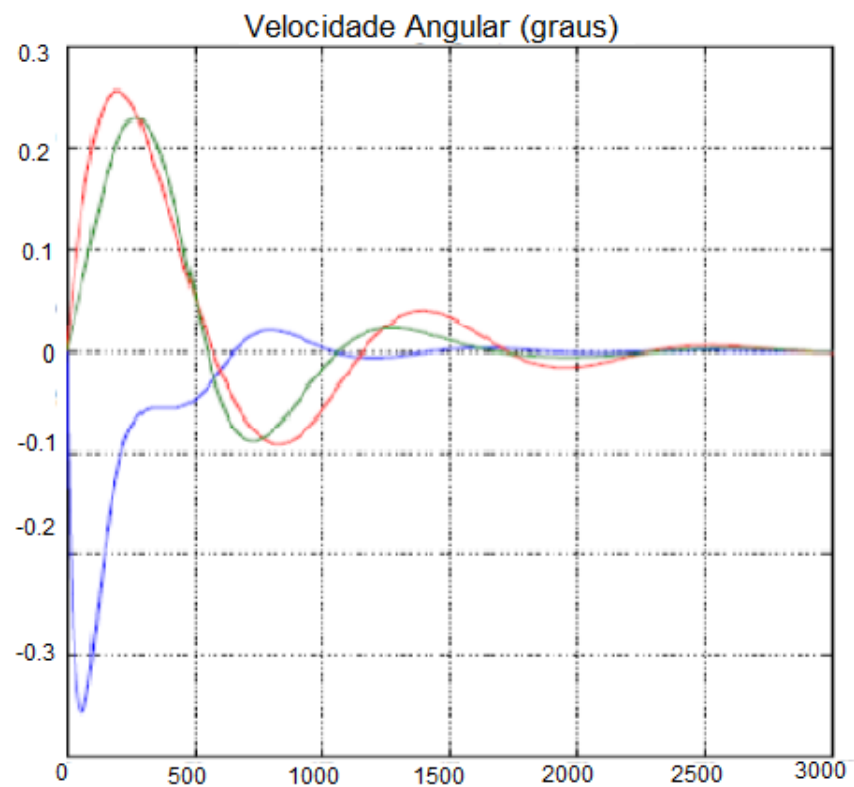
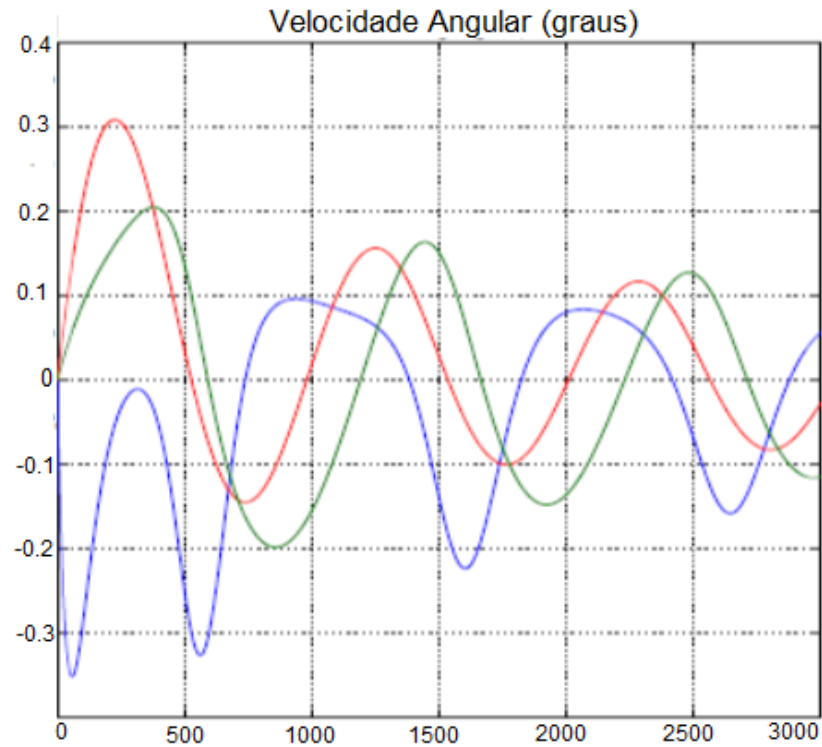
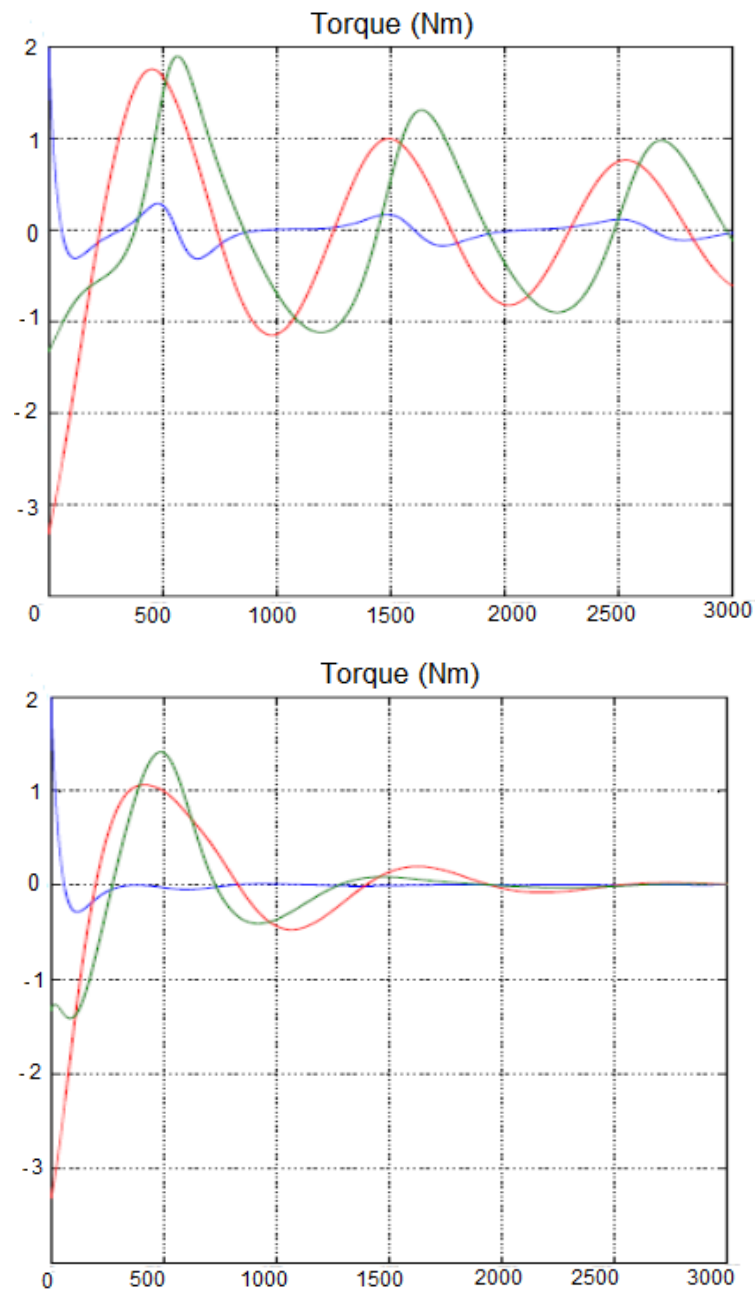


Figura 6.3 – Resultado da simulação para a ação do atuador (Torque) dos eixos x (azul), y (vermelho) e z (verde) até a sua estabilização por meio do uso dos controladores LQR (em cima) e SDRE (abaixo).



Em seguida utiliza-se a técnica SDRE para projetar o SCA do simulador em 3D da UFABC. Este controlador visa inicialmente reduzir a velocidade angular da plataforma por meio dos jatos de gás e em seguida levar a atitude dos eixos x, y e z da plataforma até  $(100^{\circ}, 50^{\circ}, 70^{\circ})$  por meio das rodas de reação. Ressalta-se que esta operação caracteriza a passagem do modo de operação do satélite

de redução de velocidade angular para o modo de apontamento. O modelo do satélite utilizado nas simulações utiliza as matrizes A, B e C das Equação 5.15 e 5.21, para o controle realizado pela rodas de reação e dos jatos de gás respectivamente. Observa-se que a matriz A em ambos os casos é não linear uma vez que é função das velocidades angulares e dos ângulos de atitude da plataforma do simulador.

Figura 6.4 – Resultado da simulação do SDRE no SCA do simulador em 3D da UFABC para o modo de operação do satélite de redução de velocidade angular para o modo de apontamento. Eixos x (azul), y (vermelho) e z (verde) da plataforma até ( $100^{\circ}$ ,  $50^{\circ}$ ,  $70^{\circ}$ ) (em cima), velocidades angulares (abaixo).

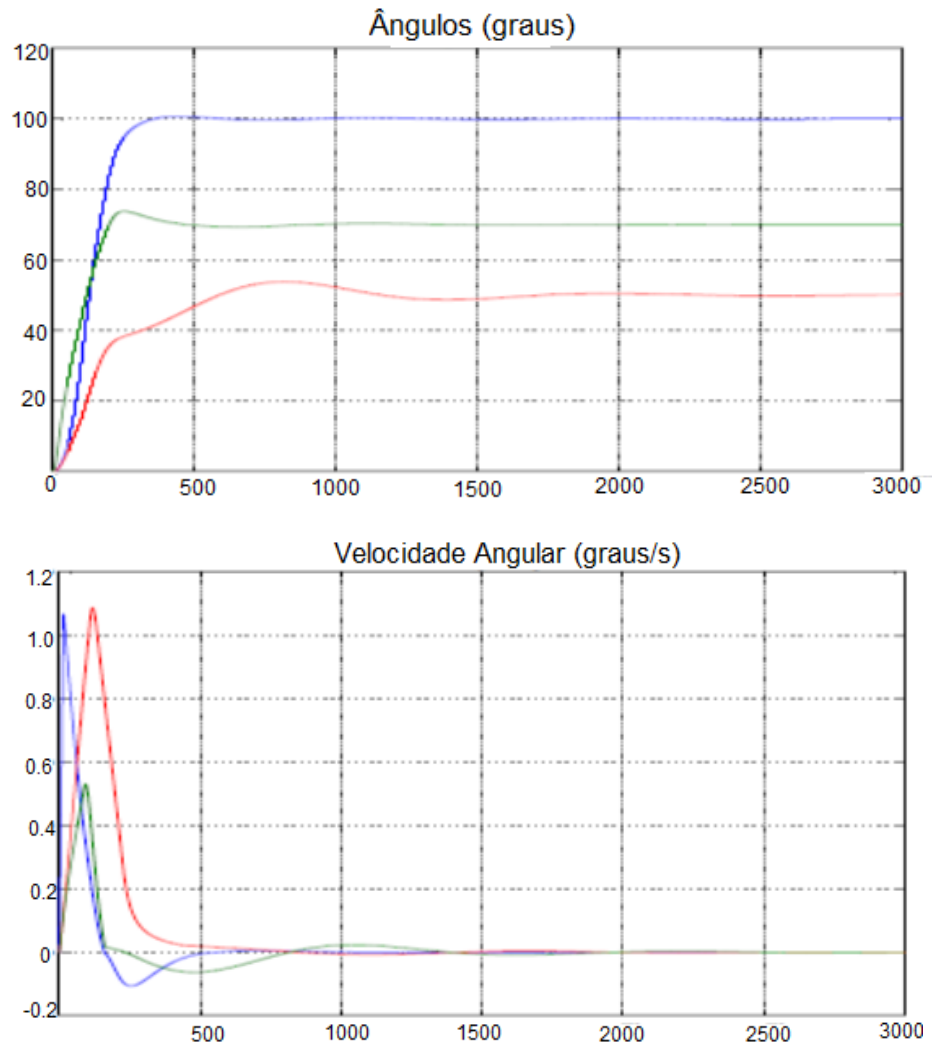




Figura 6.5 – Resultado da simulação do SDRE referente as rodas de reação no SCA do simulador em 3D da UFABC. Eixos x (azul), y (vermelho) e z (verde).

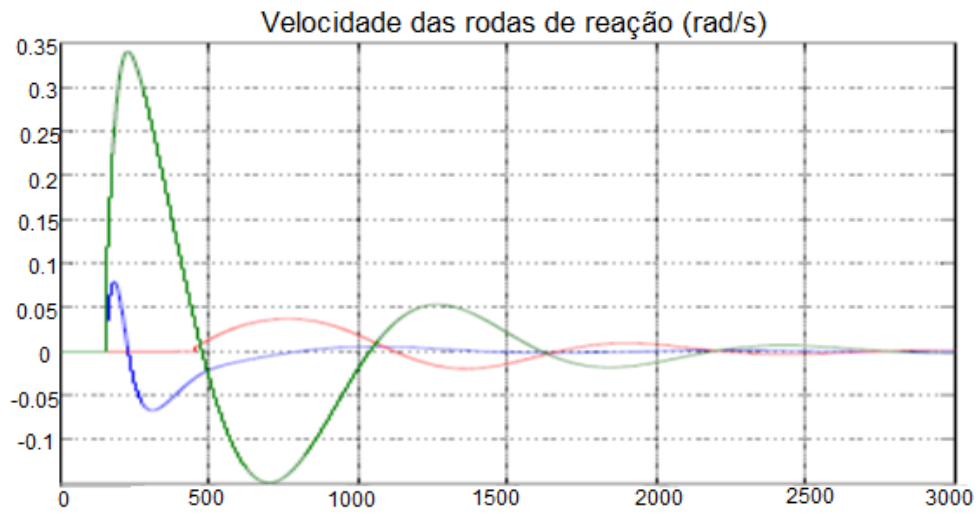


Figura 6.6 – Resultado da simulação SDRE para a ação do atuador (Torque) dos eixos x (azul), y (vermelho) e z (verde) até a sua estabilização do simulador em 3D da UFABC.

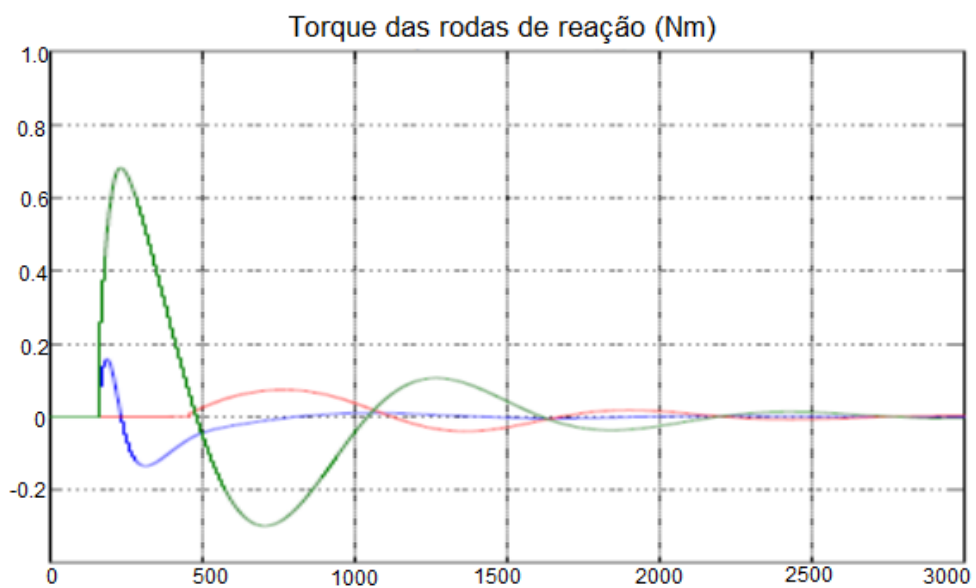


Figura 6.7 – Resultado da simulação SDRE para a ação dos Torques dos jatos de gás para a estabilização do simulador em 3D da UFABC. Eixos x (azul), y (vermelho) e z (verde).

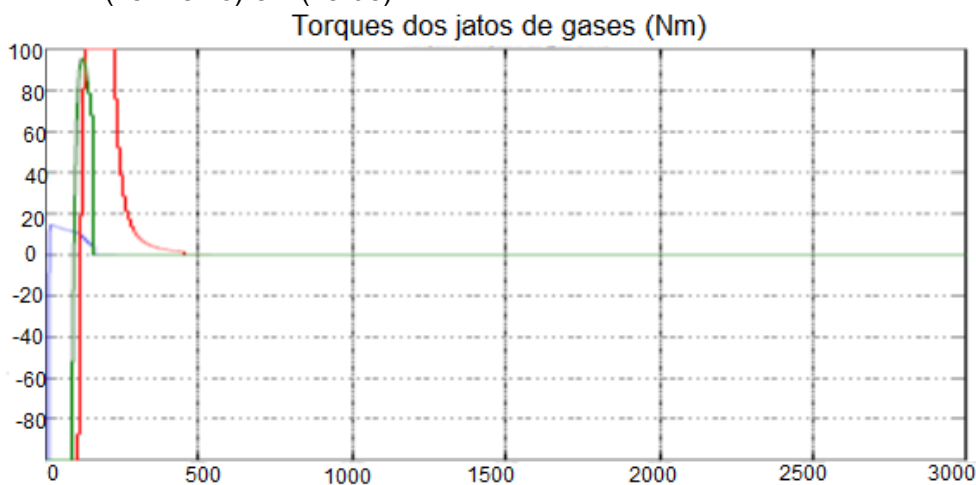
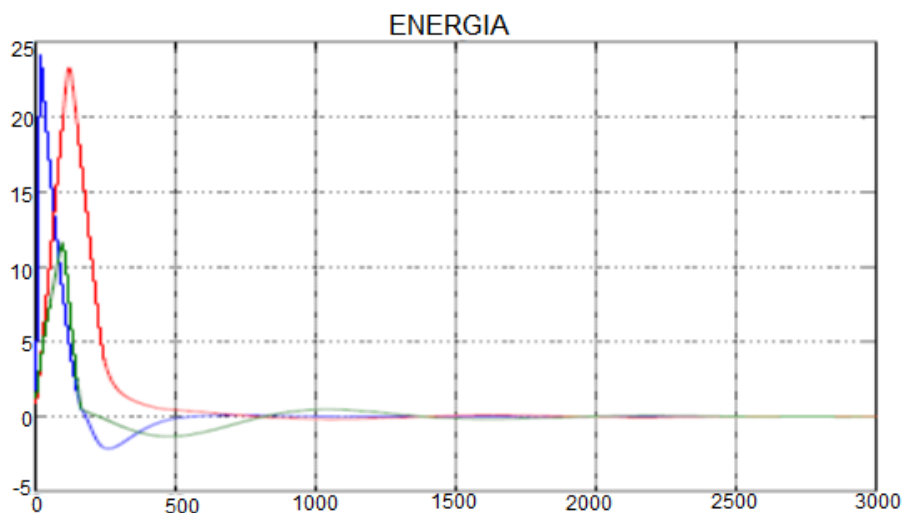


Figura 6.8 – Resultado da simulação do SDRE no SCA do simulador em 3D da UFABC referente à energia da passagem jatos de gás e rodas de reação, eixos x (azul), y (vermelho) e z (verde).



Nesta seção projetou-se o controle SDRE na plataforma 3D do Simulador do Sistema de Controle de Satélites da UFABC, em se utilizam jato de gás e roda de reação como atuadores. É importante frisar que o ponto de partida deste estudo foi o algoritmo de controle desenvolvido por (GONZALEZ, 2009) mas que só usava rodas de reação como atuador. Observou-se que a técnica de controle não linear SDRE teve desempenho superior ao controlador projetado pela

técnica LQR. Utilizou-se como *trade-off* do algoritmo de controle SDRE o tempo de estabilização e o consumo de energia dos atuadores de jato de gás e roda de reação.

## 6.2 Controlador SDRE h-infinito subótimo baseado no SDC

Nesta seção, inicialmente, é feita uma investigação das possíveis parametrizações SDC do modelo do satélite, em seguida é realizado o projeto do controlador através da união das técnicas H-Infinito e SDRE, considerando o modelo não linear do satélite em 3D. Ressalta-se que essa investigação objetiva verifica qual a influência das diferentes parametrizações no desempenho e robustez do controlador SDRE +  $H^\infty$  projetado.

As equações 6.1 não lineares que descrevem a dinâmica do satélite, onde  $(J_1, J_2, J_3)$ ,  $(w_1, w_2, w_3)$  e  $(T_1, T_2, T_3)$  são os momentos de inércia, as velocidades angulares e os torques nos eixos x, y e z, respectivamente, são dadas por (JUNKINS et al., 1993).

$$\begin{aligned}\dot{w}_1 &= \frac{J_2 - J_3}{J_1} w_2 w_3 + \frac{T_1}{J_1} \\ \dot{w}_2 &= \frac{J_3 - J_1}{J_2} w_1 w_3 + \frac{T_2}{J_2} \\ \dot{w}_3 &= \frac{J_1 - J_2}{J_3} w_1 w_2 + \frac{T_3}{J_3}\end{aligned}\tag{6.1}$$

Essas equações podem ser parametrizadas em quatro diferentes formas SDC. A primeira parametrização que será referido como parametrização A (PA) é:

$$\dot{w} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{J_2 - J_3}{J_1} w_3 & 0 \\ \frac{J_3 - J_1}{J_2} w_3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{J_1 - J_2}{J_3} w_1 & 0 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} \frac{1}{J_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{J_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{J_3} \end{bmatrix} T\tag{6.2}$$

A parametrização B (PB) é semelhante exceto que alteramos a fatoração da primeira equação e tem a seguinte forma SDC:

$$\dot{w} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{J_2-J_3}{J_1} w_2 \\ \frac{J_3-J_1}{J_2} w_3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{J_1-J_2}{J_3} w_1 & 0 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} \frac{1}{J_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{J_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{J_3} \end{bmatrix} T \quad (6.3)$$

Adicionando elementos a parametrização B, obtemos a parametrização C (PC) sem elementos vazios dada por:

$$\dot{w} = \begin{bmatrix} w_2 & -w_1 & \frac{J_2-J_3}{J_1} w_2 \\ \frac{J_3-J_1}{J_2} w_3 & w_3 & -w_2 \\ -w_3 & \frac{J_1-J_2}{J_3} w_1 & w_1 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} \frac{1}{J_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{J_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{J_3} \end{bmatrix} T \quad (6.4)$$

A última parametrização terá os estados fatorados de forma mais uniforme. Obtendo-se a parametrização D (PD) dada por:

$$\dot{w} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{J_2-J_3}{2J_1} w_3 & \frac{J_2-J_3}{2J_1} w_2 \\ \frac{J_3-J_1}{2J_2} w_3 & 0 & \frac{J_3-J_1}{2J_2} w_1 \\ \frac{J_1-J_2}{2J_3} w_2 & \frac{J_1-J_2}{J_3} w_1 & 0 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} \frac{1}{J_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{J_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{J_3} \end{bmatrix} T \quad (6.5)$$

Conceitualmente, podemos ver que todas as quatro parametrizações provavelmente se comportarão de maneira diferente. Em qualquer ponto no tempo, a matriz A tem uma forma definida com valores dependentes do estado, no caso a velocidade angular. Cada parametrização, anteriormente

demonstrada, apesar de representar a mesma dinâmica, parece um sistema linear diferente a cada momento. Por exemplo, a parametrização A, certamente, afeta a solução da Equação Algébrica de Riccati (ARE). Uma vez que neste caso, a velocidade angular  $w_3$  é acoplada apenas a outro estado, ao passo que a parametrização C o acoplamento existe entre todas as três velocidades angulares. Por conseguinte, cada parametrização irá resultar em leis de controle diferentes o que pode influenciar no seu respectivo desempenho.

### 6.3 Cinemática de atitude do satélite

Euler provou que a posição angular mais geral de um vetor  $\{\hat{b}\}$  em relação a outro vetor  $\{\hat{a}\}$  pode ser parametrizada por uma simples rotação através de um ângulo  $\phi$  sobre o auto vetor próprio  $\hat{l}$  que corresponde a uma matriz de rotação C (JUNKINS *et al.*, 1993). Por sua vez, a matriz C pode ser parametrizada como uma função do ângulo  $\phi$  e dos componentes vetores unitários  $\hat{l}$  de  $\{\hat{b}\}$  como:

$$C(l_1, l_2, l_3) = \begin{bmatrix} l_1^2(1 - c\phi) + c\phi & l_1l_2(1 - c\phi) + l_3\phi & l_1l_3(1 - c\phi) - l_2\phi \\ l_2l_1(1 - c\phi) - l_3\phi & l_2^2(1 - c\phi) + c\phi & l_2l_3(1 - c\phi) + l_1\phi \\ l_3l_1(1 - c\phi) + l_2\phi & l_3l_2(1 - c\phi) - l_1\phi & l_3^2(1 - c\phi) + c\phi \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

Como  $\hat{l}$  é um vetor de unidade, sabemos  $l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 1$ , então C tem apenas três graus de liberdade. Observe que a evolução no tempo C cal também pode ser descrita pela evolução no tempo de  $(l_1^2, l_2^2, l_3^2, \phi)$  usando a Equação 6.7 para gerar a matriz C instantânea. Observe que a evolução no tempo C também pode ser descrita pela evolução no tempo usando a Equação para gerar a matriz C instantânea. Existem duas parametrizações importantes de C que estão profundamente relacionadas aos principais parâmetros de rotação  $(l_1^2, l_2^2, l_3^2, \phi)$ , são os parâmetros de Euler ou quaternions  $(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$ :

$$\begin{aligned}\beta_0 &= \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \\ \beta_i &= l_i \sin\left(\frac{\phi}{2}\right), \quad i = 1,2,3 \\ \sum_{i=0}^3 \beta_i^2 &= 1\end{aligned}\tag{6.8}$$

E os parâmetros de Euler-Rodrigues ou Vetores de Gibbs ( $q_1, q_2, q_3$ ):

$$q_i = \frac{\beta_i}{\beta_0} = l_i \tan\left(\frac{\phi}{2}\right)\tag{6.9}$$

Ao fazer uso das Equações 6.8 e 6.9 na Equação 6.7, descobrimos que essas parametrizações produzem, respectivamente:

$$\begin{aligned}C(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3) &= \\ \begin{bmatrix} \beta_0^2 + \beta_1^2 - \beta_2^2 - \beta_3^2 & 2(\beta_1\beta_2 + \beta_0\beta_3) & 2(\beta_1\beta_3 - \beta_0\beta_2) \\ 2(\beta_1\beta_2 - \beta_0\beta_3) & \beta_0^2 - \beta_1^2 - \beta_2^2 - \beta_3^2 & 2(\beta_2\beta_3 + \beta_0\beta_1) \\ 2(\beta_1\beta_3 + \beta_0\beta_2) & 2(\beta_2\beta_3 - \beta_0\beta_1) & \beta_0^2 - \beta_1^2 - \beta_2^2 + \beta_3^2 \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{6.10}$$

e

$$\begin{aligned}C(q_1, q_2, q_3) &= \\ \frac{1}{1+q_1^2+q_2^2+q_3^2} \begin{bmatrix} 1 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 + q_3) & 2(q_1q_3 - q_2) \\ 2(q_1q_2 - q_3) & 1 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 + q_1) \\ 2(q_1q_3 + q_2) & 2(q_2q_3 - q_1) & 1 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{6.11}$$

As nove equações cinemáticas acima, podem ser ajustadas por meio da seguinte equação diferencial da cinemática  $\dot{C} = -\tilde{\omega}C$ . Substituindo diretamente as funções de cosseno de diretores nessa equação para o caso particular da

rotação ( 3-1-3) obtendo-se as matrizes  $M_3$  ,  $M_1$  e  $M_3$  relativas aos ângulos de Euler  $(\phi, \theta, \psi)$ , onde  $C$  e dada por:

$$C(\phi, \theta, \psi) = [M_3(\psi)][M_3(\theta)][M_3(\phi)] \quad (6.12)$$

Assim, a equação diferencial da cinemática fica:

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sin\theta} \begin{bmatrix} \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ \cos\psi\sin\theta & -\sin\psi\sin\theta & 0 \\ -\sin\psi\cos\theta & -\cos\psi\cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \quad (6.13)$$

Substituindo os parâmetros de Euler  $(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$  e os vetores de Gibbs  $(q_1, q_2, q_3)$  das Equações 6.11 e 6.12 em  $\dot{C} = -\tilde{w}C$ , obtemos as equações cinemáticas correspondentes dadas por:

$$\begin{pmatrix} \dot{\beta}_0 \\ \dot{\beta}_1 \\ \dot{\beta}_2 \\ \dot{\beta}_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -w_1 & -w_2 & -w_3 \\ w_1 & 0 & w_3 & -w_2 \\ w_2 & -w_3 & 0 & w_1 \\ w_3 & w_2 & -w_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 & -\beta_1 & -\beta_2 & -\beta_3 \\ \beta_1 & \beta_0 & -\beta_3 & \beta_2 \\ \beta_2 & \beta_3 & \beta_0 & -\beta_1 \\ \beta_3 & -\beta_2 & \beta_1 & \beta_0 \end{bmatrix} \equiv \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \quad (6.14)$$

E

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + q_1^2 & q_1q_2 - q_3 & q_1q_3 + q_2 \\ q_1q_2 + q_3 & 1 + q_2^2 & q_2q_3 - q_1 \\ q_1q_3 - q_2 & q_2q_3 + q_1 & 1 + q_3^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \quad (6.15)$$

Essas parametrizações clássicas desempenham um papel importante em muitas descrições geométricas e cinemáticas do movimento, especialmente na dinâmica de satélites e aeronaves (JUNKINS *et al.*, 1993). A ausência de funções trigonométricas nas Equações 6.14 e 6.15 tornam essas equações diferenciais

mais atrativas do que a Equação 6.13, para diversas aplicações. Observe também que a Equação 6.14 é linear e não singular, em contraste com a Equação 6.15.

#### 6.4 As possíveis parametrizações SCA da matriz $A(x)$

As diferentes parametrizações dos Coeficientes Dependentes dos Estados (SDC) permite infinitas parametrizações, como visto no Capítulo 4.4. Essa liberdade de escolha da matriz  $A(x)$  pode influenciar o desempenho do controlador SDRE +  $H^\infty$ , uma vez que vai afetar a Controlabilidade e Observabilidade do sistema. Além disso, certamente, cada parametrização irá resultar em leis de controle distintas. Portanto, para investigar a possível relação entre as parametrizações e o desempenho do controlador SDRE +  $H^\infty$ , as quatro parametrizações, apresentadas no item 6.2 são associadas a parametrização da equação 6.15, formando a matriz  $A(x)$  do sistema da equação 6.16. serão analisadas através da Controlabilidade e Observabilidade das matrizes  $A(x)$ ,  $B$  e  $C$  e posteriormente, investiga-se o desempenho do quatro controladores SDRE+ $H^\infty$  projetados com as quatro parametrizações.

Usando o sistema, Equações 6.2 a 6.5 com 6.15, escrito na forma de espaço de estados Equação 6.16:

$$\begin{cases} \dot{x} = A(x)x + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (6.16)$$

Em que  $x = (w_1 \ w_2 \ w_3)^T$  e  $u = (T_1 \ T_2 \ T_3)^T$ .

##### I. Parametrização A

Sendo a então, a primeira parametrização A (PA), Equação 6.2. Colocando o sistema na forma da Equação 6.17:



$$\begin{bmatrix} \dot{w}_1 \\ \dot{w}_2 \\ \dot{w}_3 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & (1+q_1^2)/2 & (q_1q_2 - q_3)/2 & (q_1q_3 + q_2)/2 \\ 0 & 0 & 0 & (q_1q_2 + q_3)/2 & (1+q_2^2)/2 & (q_2q_3 - q_1)/2 \\ 0 & 0 & 0 & (q_1q_3 - q_2)/2 & (q_2q_3 + q_1)/2 & (1+q_3^2)/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (J_2 - J_3/J_1)w_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (J_2 - J_3/J_1)w_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (J_1 - J_2/J_3)w_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{J_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{J_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{J_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

## II. Parametrização B

A segunda parametrização B (PB), Equação 6.3. Colocando o sistema na forma da Equação 6.16.

$$\begin{bmatrix} \dot{w}_1 \\ \dot{w}_2 \\ \dot{w}_3 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & (1+q_1^2)/2 & (q_1q_2 - q_3)/2 & (q_1q_3 + q_2)/2 \\ 0 & 0 & 0 & (q_1q_2 + q_3)/2 & (1+q_2^2)/2 & (q_2q_3 - q_1)/2 \\ 0 & 0 & 0 & (q_1q_3 - q_2)/2 & (q_2q_3 + q_1)/2 & (1+q_3^2)/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (J_2 - J_3/J_1)w_2 \\ 0 & 0 & 0 & (J_3 - J_1/J_2)w_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (J_1 - J_2/J_3)w_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{J_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{J_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{J_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

## III. Parametrização C

A terceira parametrização C (PC), Equação 6.4. Colocando o sistema na forma da Equação 6.16,

$$\begin{bmatrix} \dot{w}_1 \\ \dot{w}_2 \\ \dot{w}_3 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & (1+q_1^2)/2 & (q_1q_2 - q_3)/2 & (q_1q_3 + q_2)/2 \\ 0 & 0 & 0 & (q_1q_2 + q_3)/2 & (1+q_2^2)/2 & (q_2q_3 - q_1)/2 \\ 0 & 0 & 0 & (q_1q_3 - q_2)/2 & (q_2q_3 + q_1)/2 & (1+q_3^2)/2 \\ 0 & 0 & 0 & w_2 & -w_1 & (J_2 - J_3/J_1)w_2 \\ 0 & 0 & 0 & (J_2 - J_3/J_1)w_3 & w_3 & -w_2 \\ 0 & 0 & 0 & -w_3 & (J_1 - J_2/J_3)w_1 & w_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{J_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{J_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{J_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} \quad (6.19)$$

#### IV. Parametrização D

A quarta parametrização D (PD), Equação 6.5. Colocando o sistema na forma da Equação 6.16,

$$\begin{bmatrix} \dot{w}_1 \\ \dot{w}_2 \\ \dot{w}_3 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & (1+q_1^2)/2 & (q_1q_2 - q_3)/2 & (q_1q_3 + q_2)/2 \\ 0 & 0 & 0 & (q_1q_2 + q_3)/2 & (1+q_2^2)/2 & (q_2q_3 - q_1)/2 \\ 0 & 0 & 0 & (q_1q_3 - q_2)/2 & (q_2q_3 + q_1)/2 & (1+q_3^2)/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (J_2 - J_3/2J_1)w_3 & (J_2 - J_3/2J_1)w_2 \\ 0 & 0 & 0 & (J_3 - J_1/2J_2)w_3 & 0 & (J_3 - J_1/2J_2)w_1 \\ 0 & 0 & 0 & (J_1 - J_2/2J_3)w_2 & (J_1 - J_2/2J_3)w_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{J_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{J_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{J_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} \quad (6.20)$$

Cabe ressaltar que antes de se projetar o controlador SDRE +  $H^\infty$ , essas parametrizações precisam ser testadas nos critérios Observabilidade e Controlabilidade.

##### 6.4.1 Investigação do desempenho do controlador SDRE + $H^\infty$

Como no nosso caso, todos os estados estão disponíveis, o projeto do controlador SDRE +  $H^\infty$  segue os seguintes passos (SHAWKY *et al.*, 2002):

- i) Obter a parametrização SDC de  $A(x)$  e forma do sistema da equação 6.16.
- ii) Resolver a equação do  $H^\infty$  SDRE dada por.

$$A^T P + PA - P \left[ B_2 B_2^T - \frac{1}{\gamma^2} G G^T \right] P + C_1^T C_1 = 0$$

O algoritmo desenvolvido para resolver a equação acima, só a matriz  $A(x)$  e' função do estado  $x$ , o valor de  $\gamma$  é assumido inicialmente grande e vai diminuindo em função da banda passante estabelecida com o desempenho e robustez do controlador.

- iii) Por fim, constrói-se a realimentação não linear do  $H^\infty$  via:

$$u(x) = -B_2^T(x)P(x)x$$

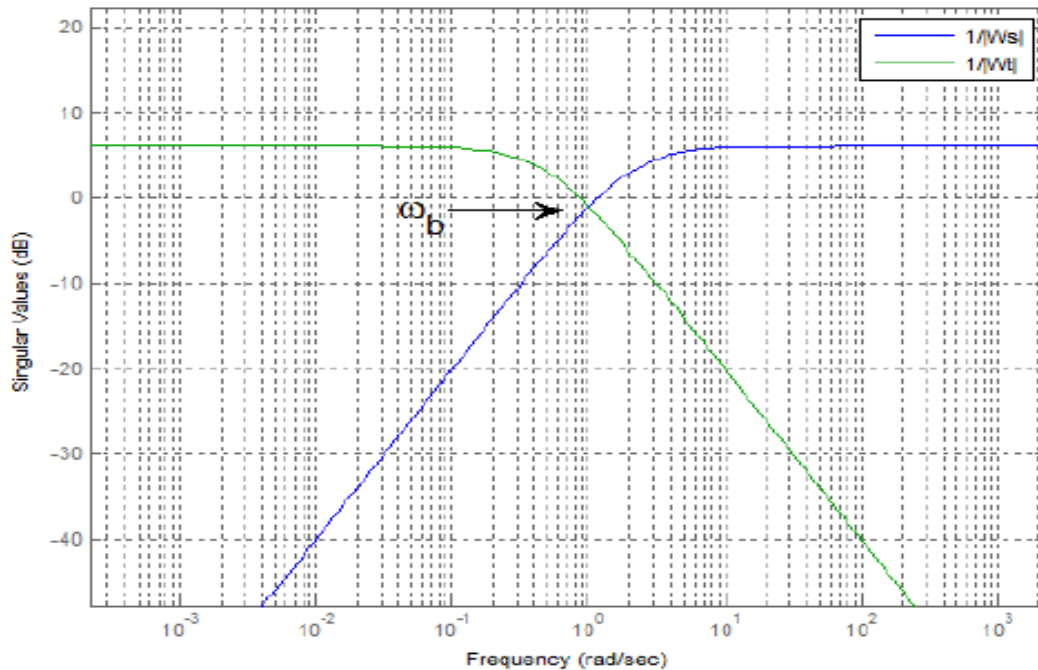
No algoritmo desenvolvido para investigar a influência das parametrizações anteriores no desempenho e robustez do controlador SDRE +  $H^\infty$  utiliza-se da técnica conhecida como *loop-shaping* (modelagem da função de transferência) a qual contra balança dois objetivos conflitantes, ou seja, queremos maximizar o ganho de malha aberta para obter o melhor desempenho possível, mas, para melhorar a robustez, precisamos diminuir o ganho abaixo de zero dB, onde supostamente a precisão do modelo é baixa. Sabe-se que ganho alto nesta região pode causar instabilidades.

Como resultado, acredita-se que o desempenho do controlador SDRE+ $H^\infty$  seja função das parametrizações do modelo. Para um bom desempenho é necessário que em baixas frequências o ganho do controlador seja o maior possível e que em seguida o *roll-off* (inclinação da curva) seja suficiente para que em baixas frequências o ganho diminua, caracterizando a robustez do controlador.

A frequência onde  $L = (\text{Planta em malha aberta}) \times (\text{Ganho SDRE+H}^\infty)$  cruza a linha zero dB é chamada de frequência de cruzamento e marca a transição entre os requisitos de desempenho e robustez. Outro parâmetro que será utilizado para investigar o desempenho e robustez do controlador SDRE +  $H^\infty$  é a banda passante, qual corresponde ao cruzamento das curvas da Figura 6.9 a seguir.

Onde para garantir um bom desempenho o valor singular máximo da função sensibilidade ( $\bar{\sigma}S(j\omega)$ ) e da função sensibilidade complementar ( $\bar{\sigma}T(j\omega)$ ) devem ser menores que o inverso do modulo das funções pesos  $W_s$  e  $W_T$ , como mostrado.

Figura 6.9 – Desempenho e robustez do controlador SDRE +  $H^\infty$ .



A frequência da banda passante  $w_b$  pode ser associada ao critério de desempenho do *rise-time* (tempo de subida) no domínio do tempo por meio da expressão:

$$G_d = w_b/s \quad (6.21)$$

Os parâmetros utilizados para análise das matrizes de parametrização SDC do satélite em 3D, são apresentados a seguir nas Tabelas 6.1 e 6.2. Os dados usado nas simulações são do satélite de sensoriamento remoto Amazonia-1 (INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS, 2017) que está sendo construído pelo INPE.

Tabela 6.1. Parâmetros das simulações.

<b>Parâmetros</b>	<b>Símbolo</b>	<b>Valor/Unidade</b>
Banda Passante	$w_b$	1.6 rad
Momento de Inércia 1	$J_1$	310 Kgm <sup>2</sup>
Momento de Inércia 2	$J_2$	360 Kgm <sup>2</sup>
Momento de Inércia 3	$J_3$	530 Kgm <sup>2</sup>

Fonte: AMAZONIA-1 (2020).

As simulações tiveram as seguintes condições iniciais:

Tabela 6.2. Condições iniciais.

	<b>q</b>	<b>w (rad/s)</b>
<b>1</b>	0	-0.5
<b>2</b>	0	1.0
<b>3</b>	10	0.5

Para todas as simulações a matriz  $C = \text{diag}(1,1,1,1,1,1)$ .

### 6.4.1.1 Resultados das simulações com a parametrização A

Figura 6.10 – Polos e zeros da Planta  $G(s)$  - Parametrização A.

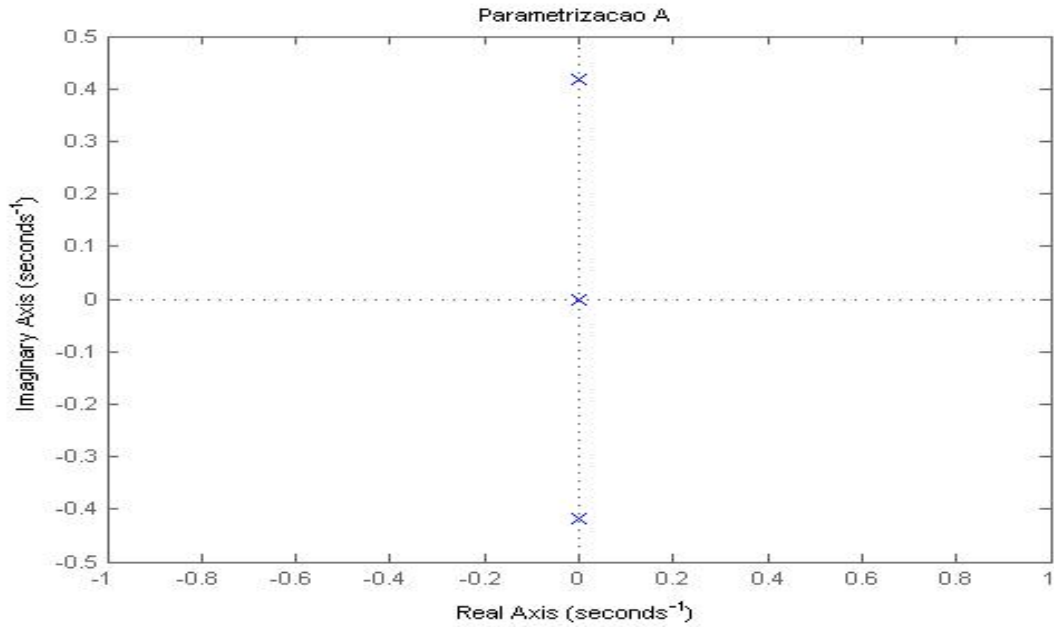


Figura 6.11– Planta  $G(s)$  em malha aberta - Parametrização A.

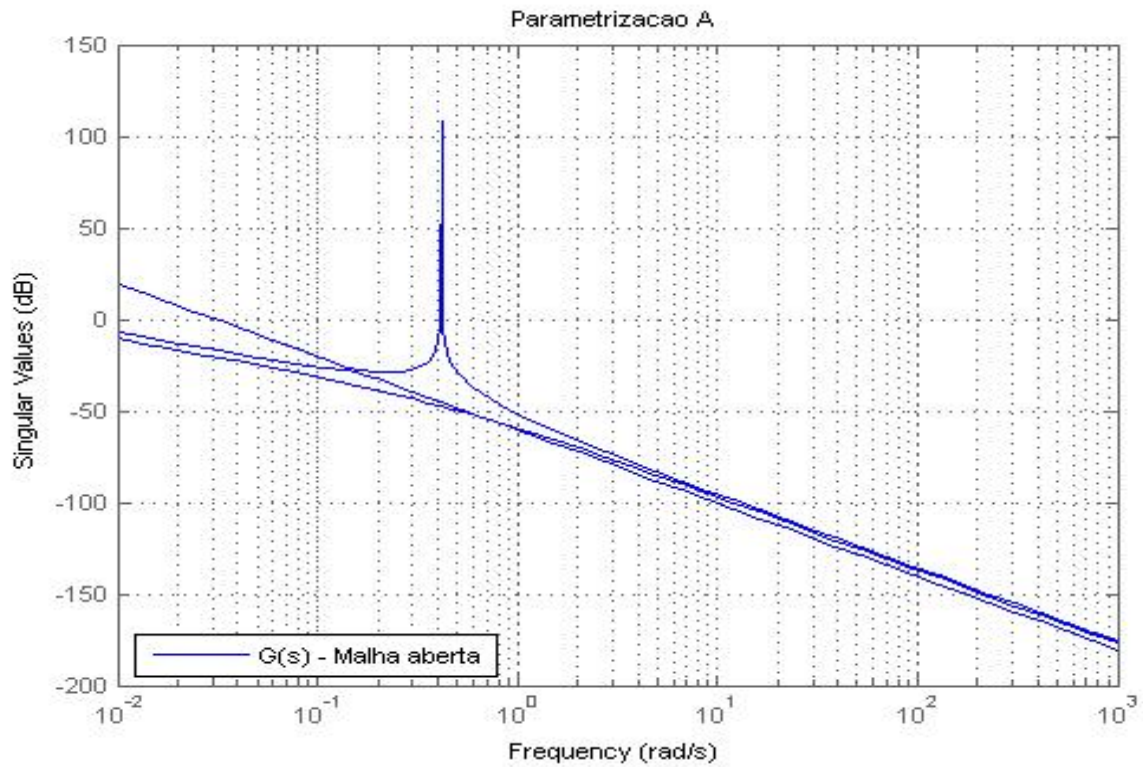


Figura 6.12 – Planta x Ganho;  $L = G(s)K(s)$  - Parametrização A.

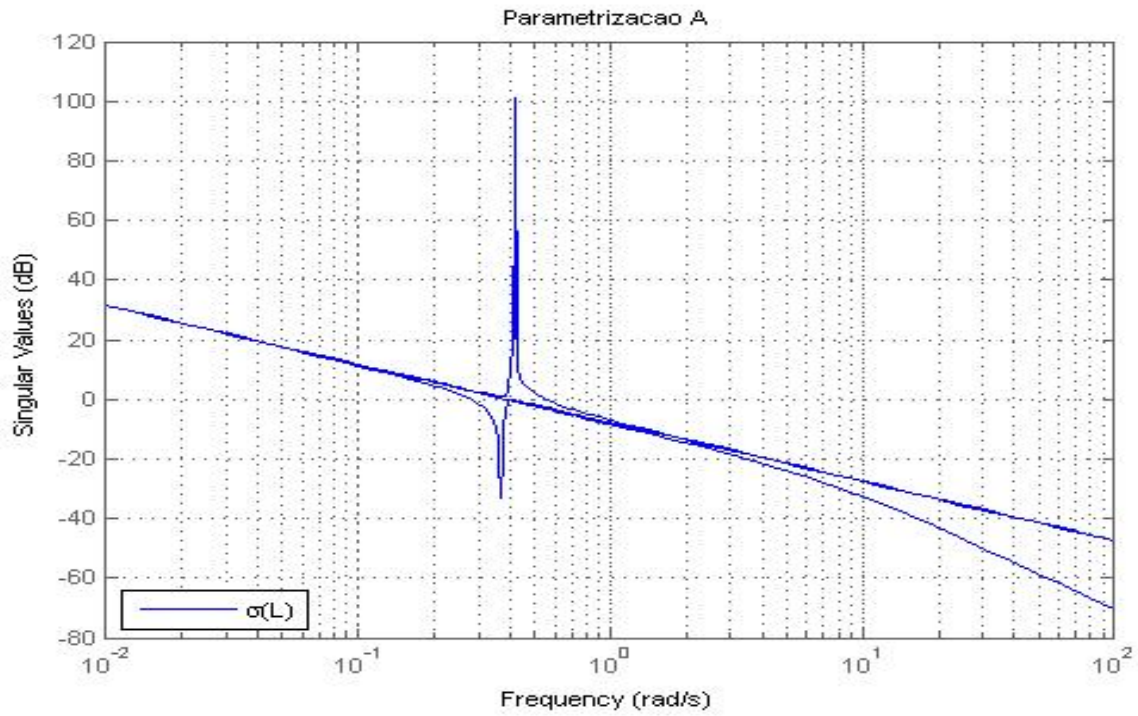


Figura 6.13 – Sensibilidade S e Sensibilidade Complementar T - Parametrização A.

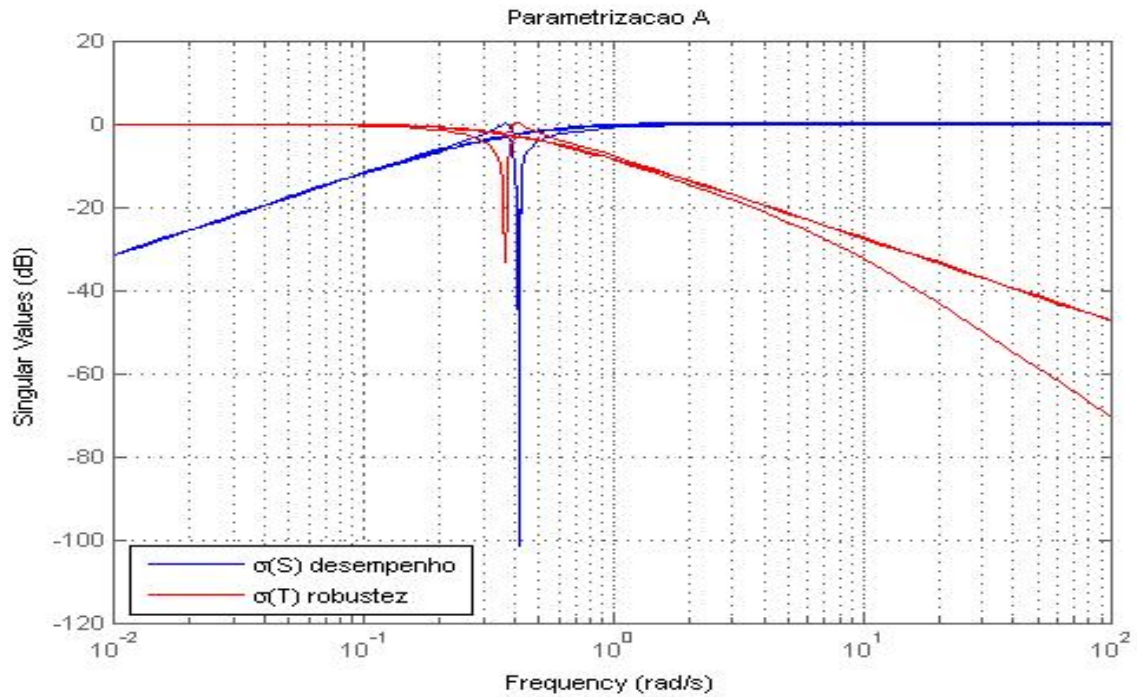


Figura 6.14 – Banda passante objetivo inserido em +/- Gama - Parametrização A.

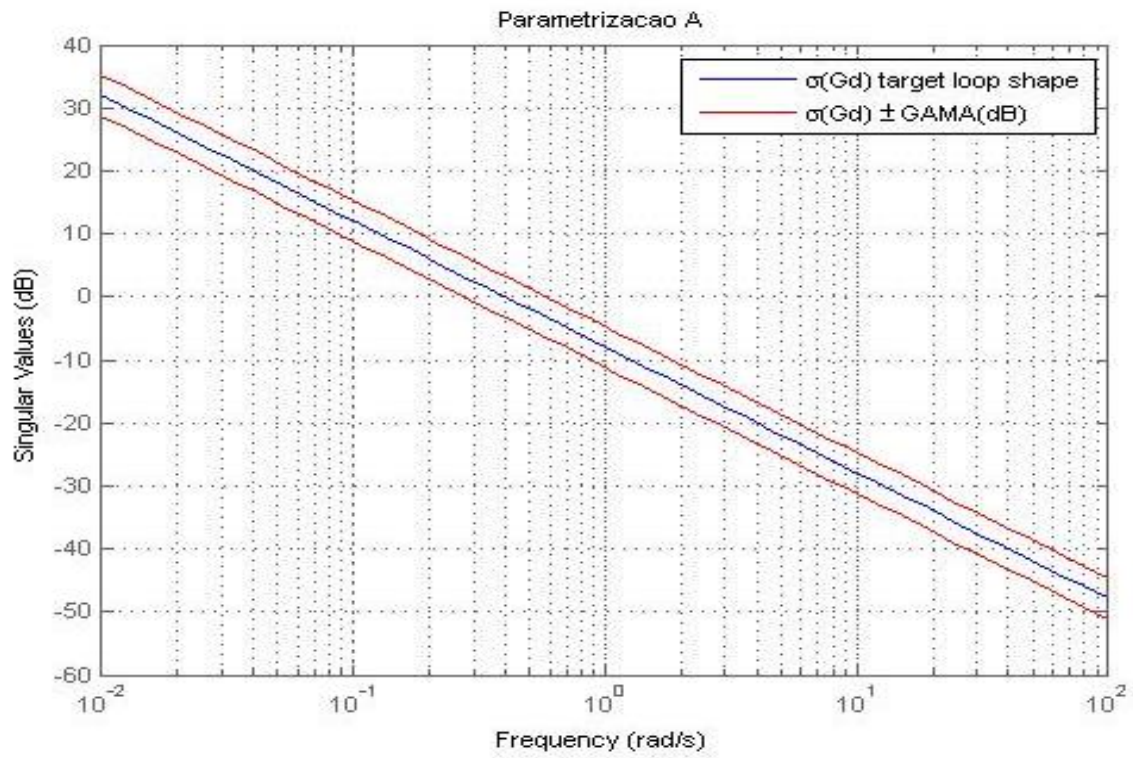


Figura 6.15 – Quatérnio 1 - Parametrização A.

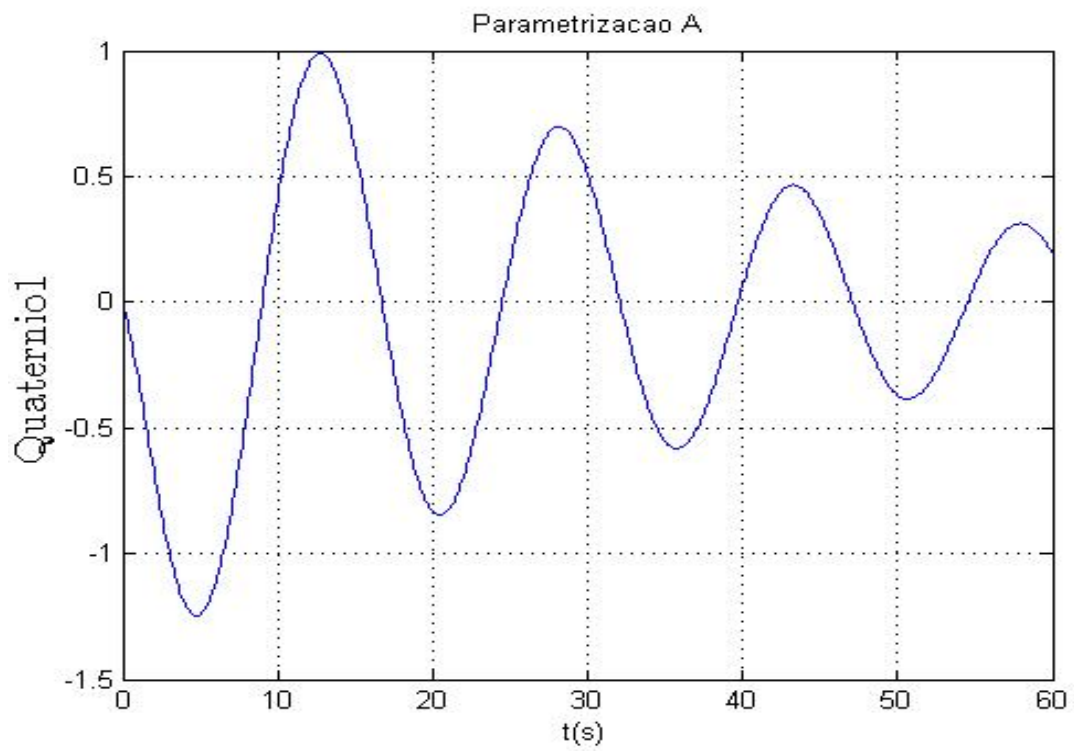




Figura 6.16 – Quatérnio 2 - Parametrização A.

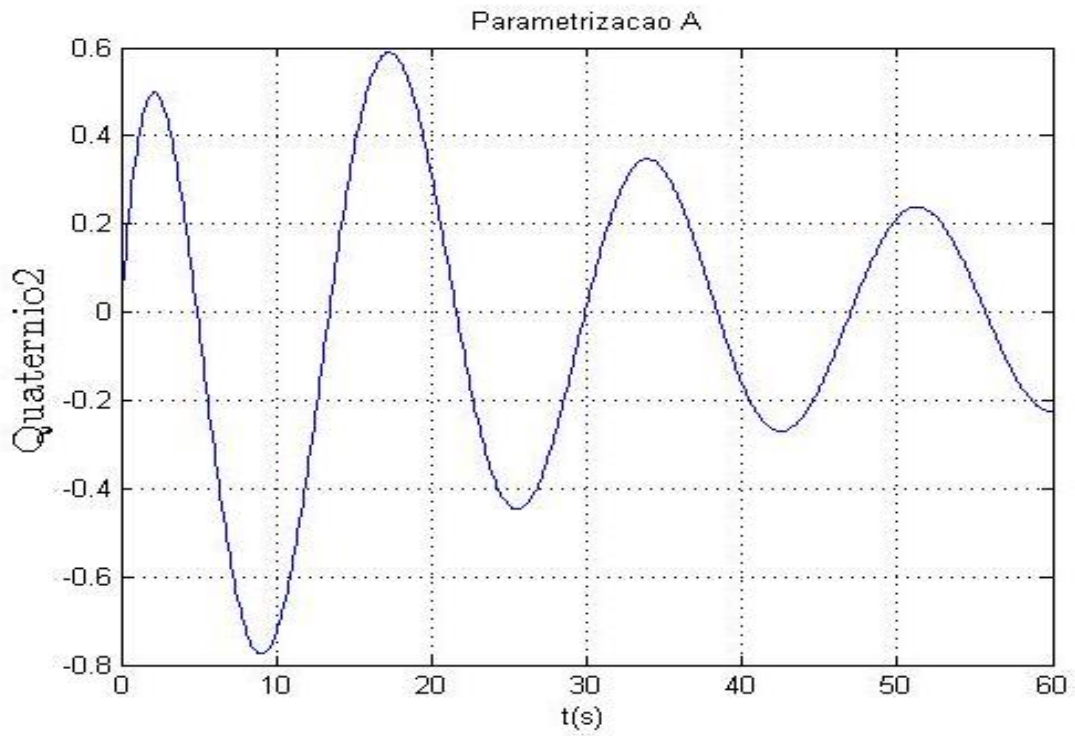


Figura 6.17 – Quatérnio 3 - Parametrização A.

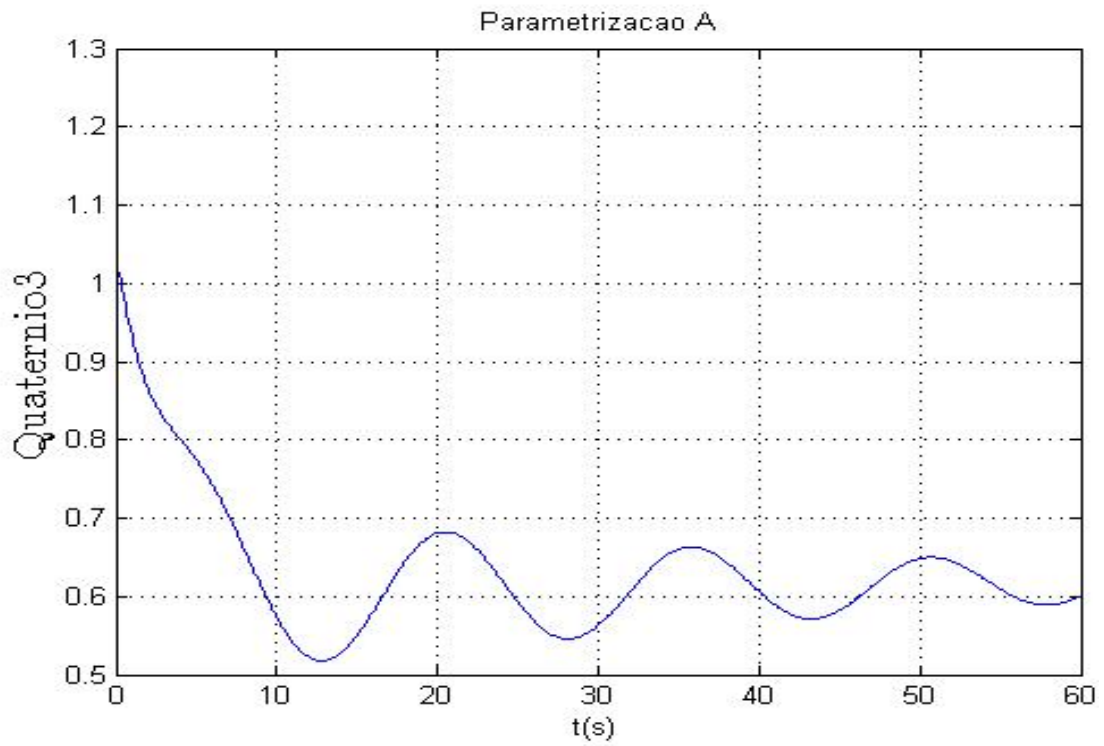


Figura 6.18 – Velocidade Angular  $\omega_1$  - Parametrização A.

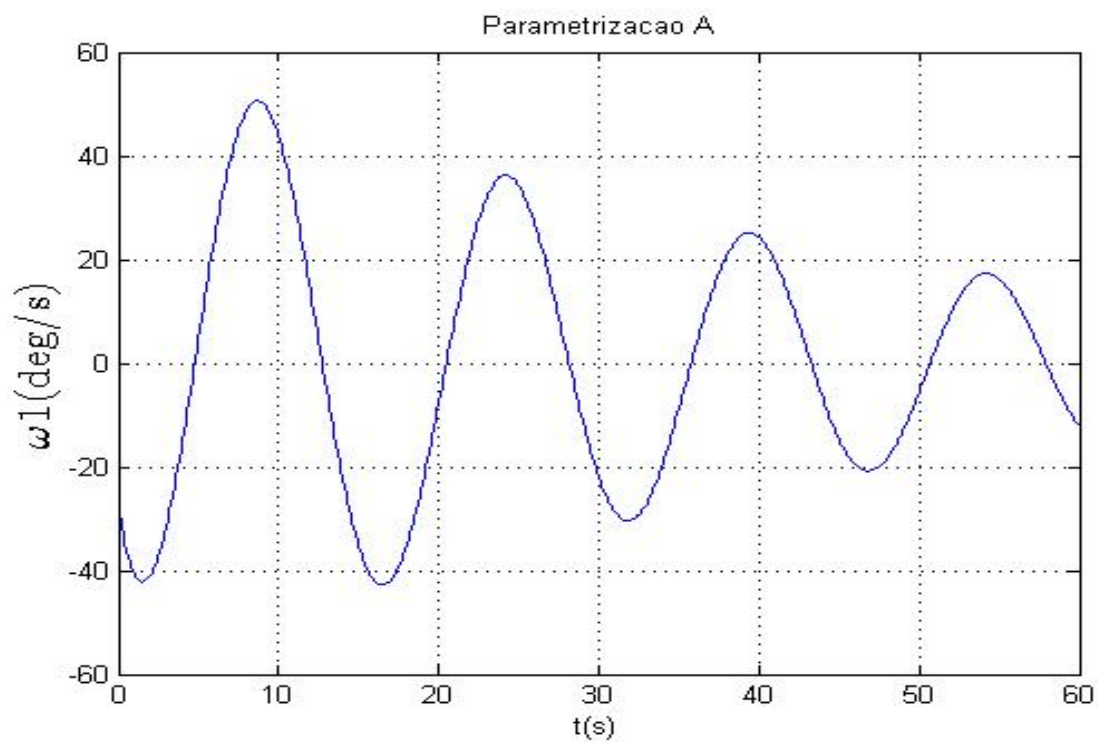


Figura 6.19 – Velocidade Angular  $\omega_2$  - Parametrização A.

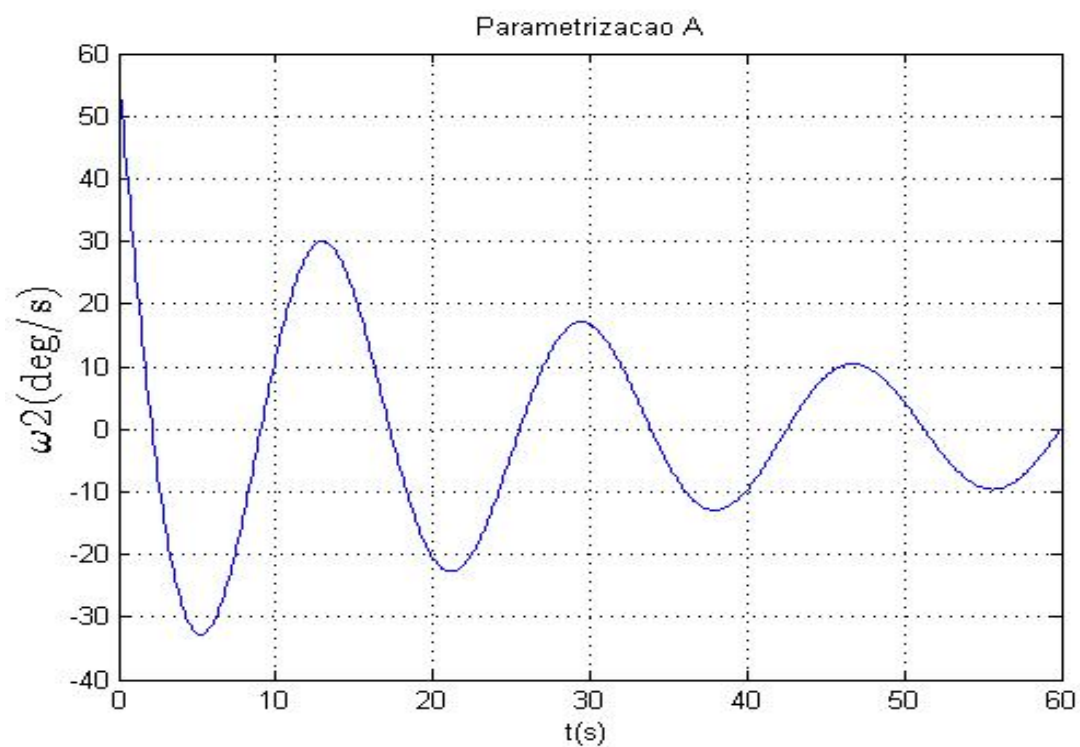


Figura 6.20 – Velocidade Angular  $\omega_3$  - Parametrização A.

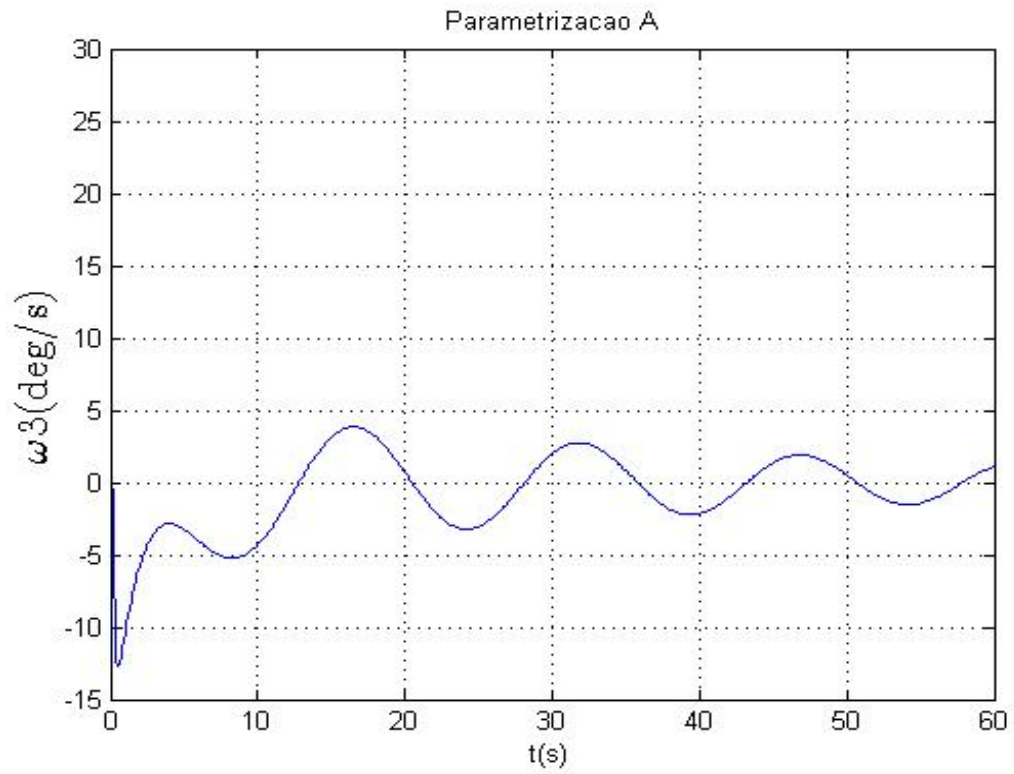
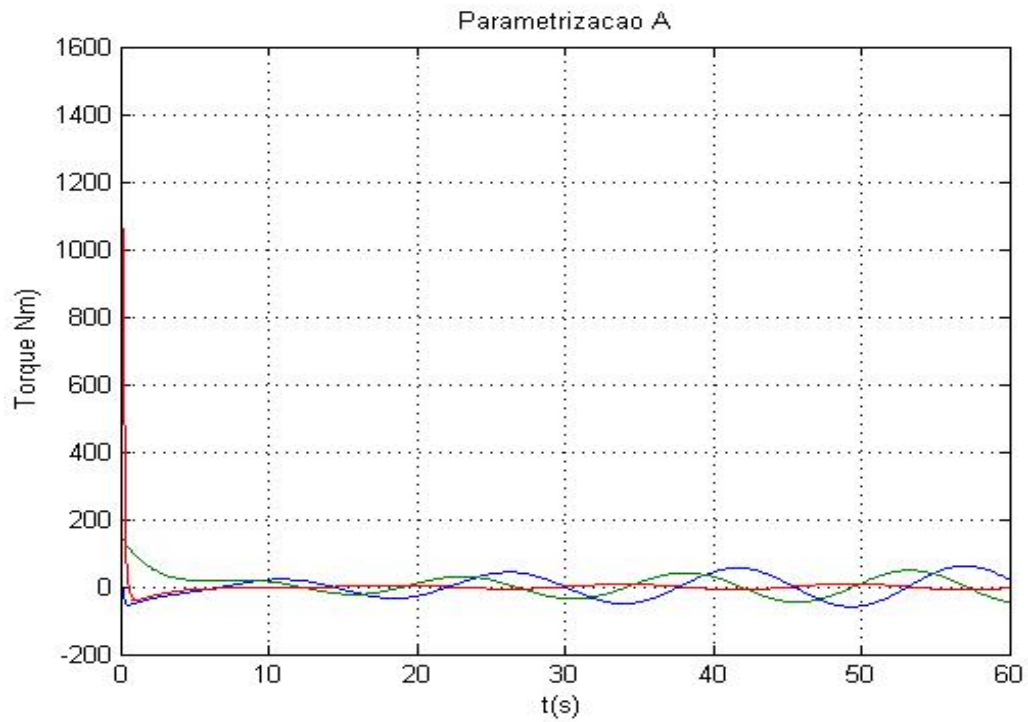


Figura 6.21 – Torques nos três eixos - Parametrização A.



Observamos que a parametrização A fez com que a planta não linear do satélite apresentasse quatro pólos em zero e dois pólos sobre eixo imaginário. Concluiu-se que estes últimos foram responsáveis pelo pico apresentado nos gráficos de malha aberta e de  $L$  (Planta x Ganho). Além disso, a banda passante baixa de 0.4 rad também teve grande influência no baixo desempenho do controlador uma vez que todos os estados não foram controlados para o intervalo de tempo considerado. Por fim, o gráfico do torque mostrou que o controlador ficou atuando na tentativa de controlar os estados.

#### 6.4.1.2 Resultados das simulações da parametrização B

Figura 6.22 – Pólos e zeros da Planta  $G(s)$  - Parametrização B.

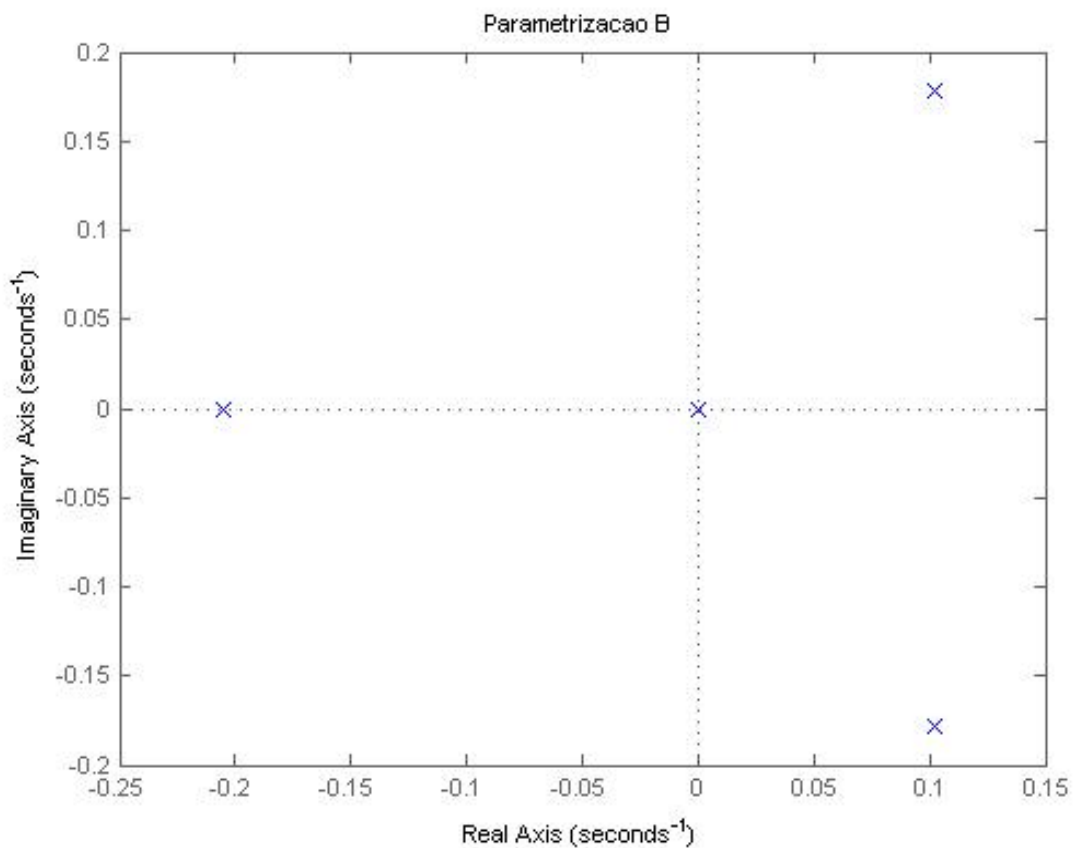


Figura 6.23 – Planta  $G(s)$  em malha aberta - Parametrização B.

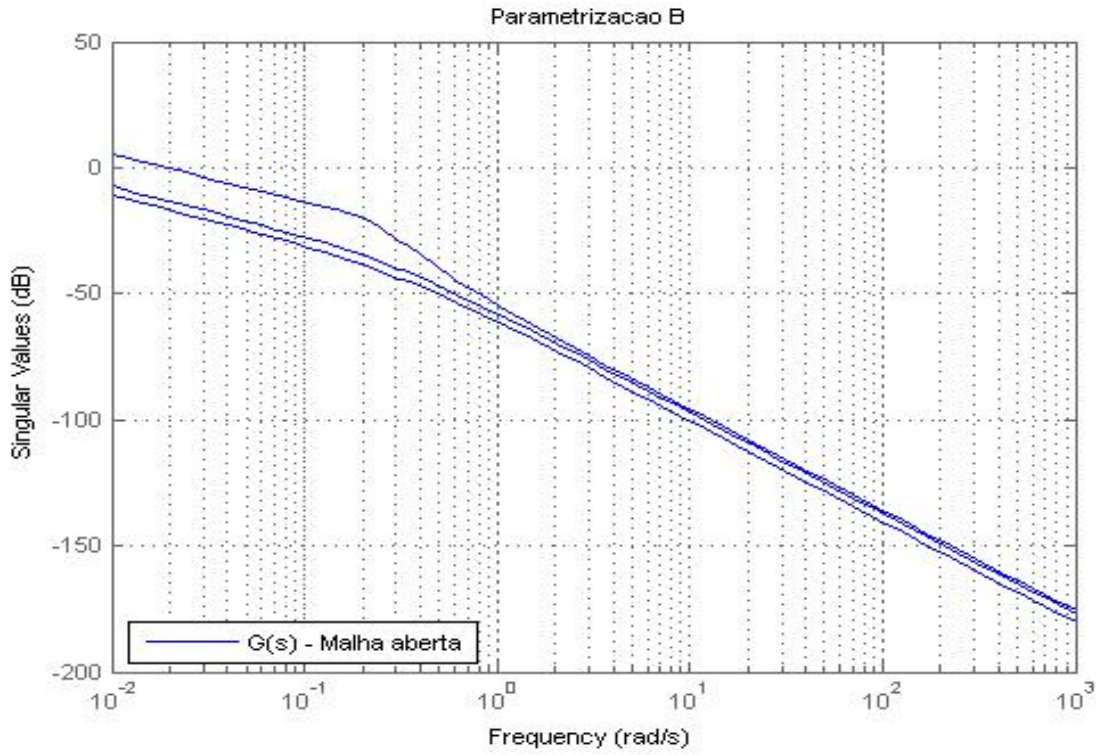


Figura 6.24 – Planta x Ganho;  $L = G(s)K(s)$  - Parametrização B.

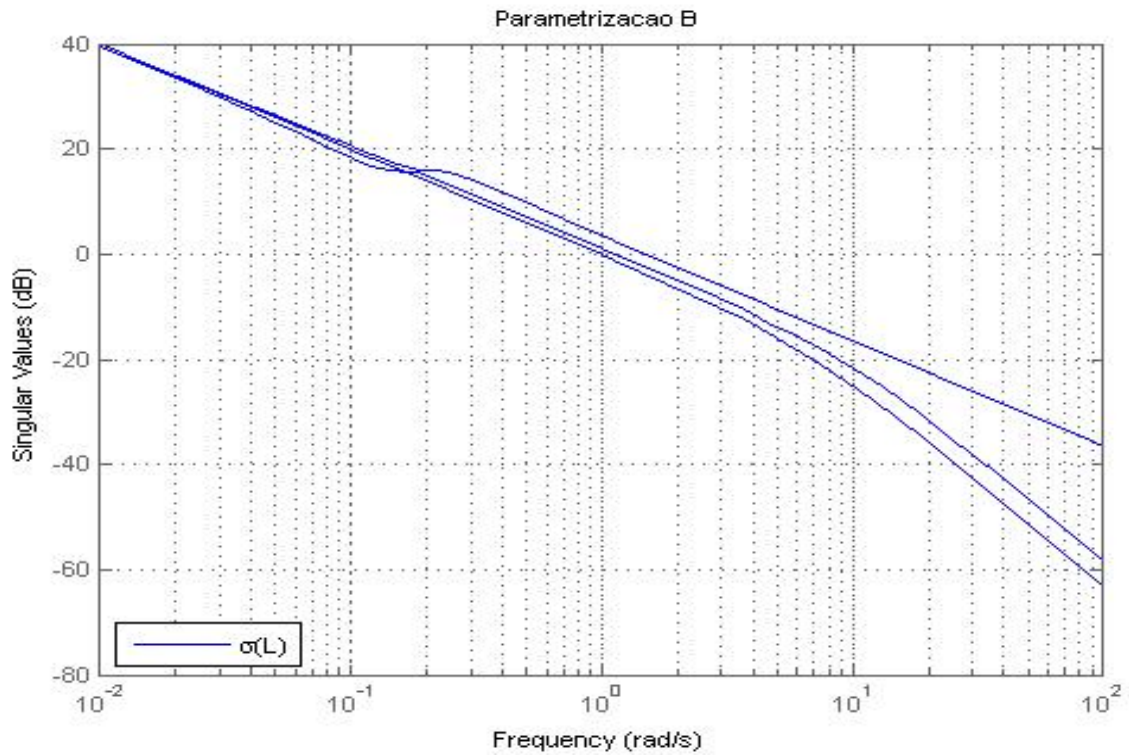


Figura 6.25 – Sensibilidade S e Sensibilidade Complementar T - Parametrização B.

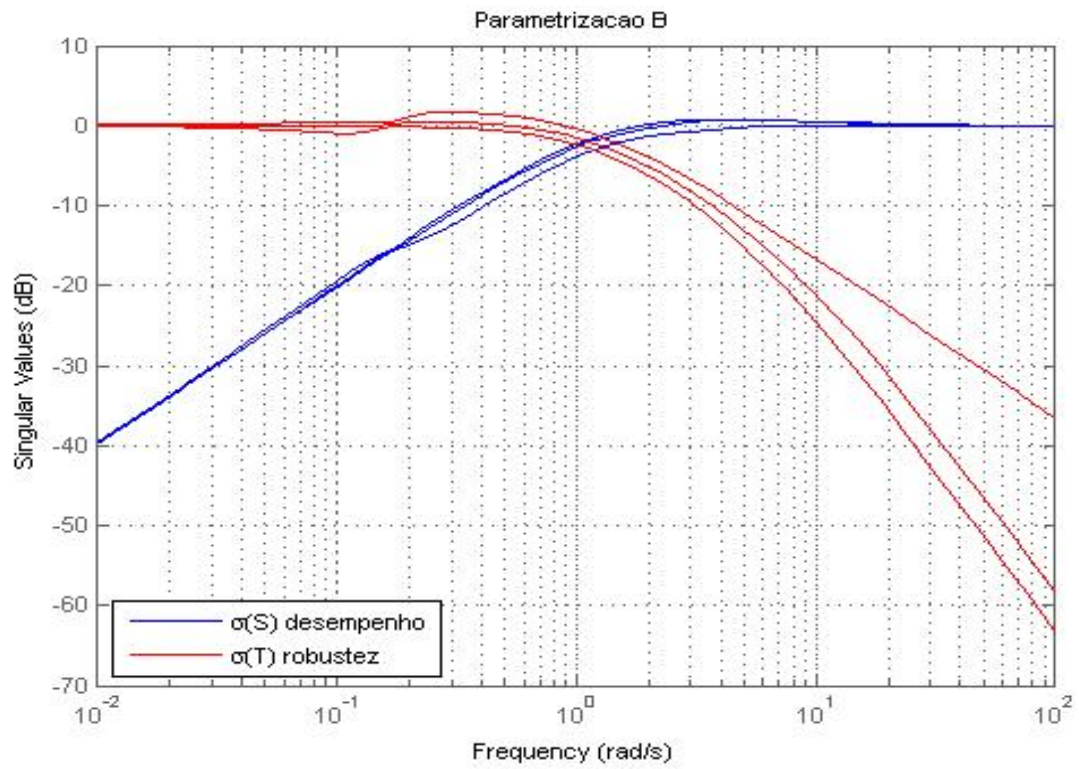


Figura 6.26 – Banda Passante objetivo inserido em +/- Gama - Parametrização B.

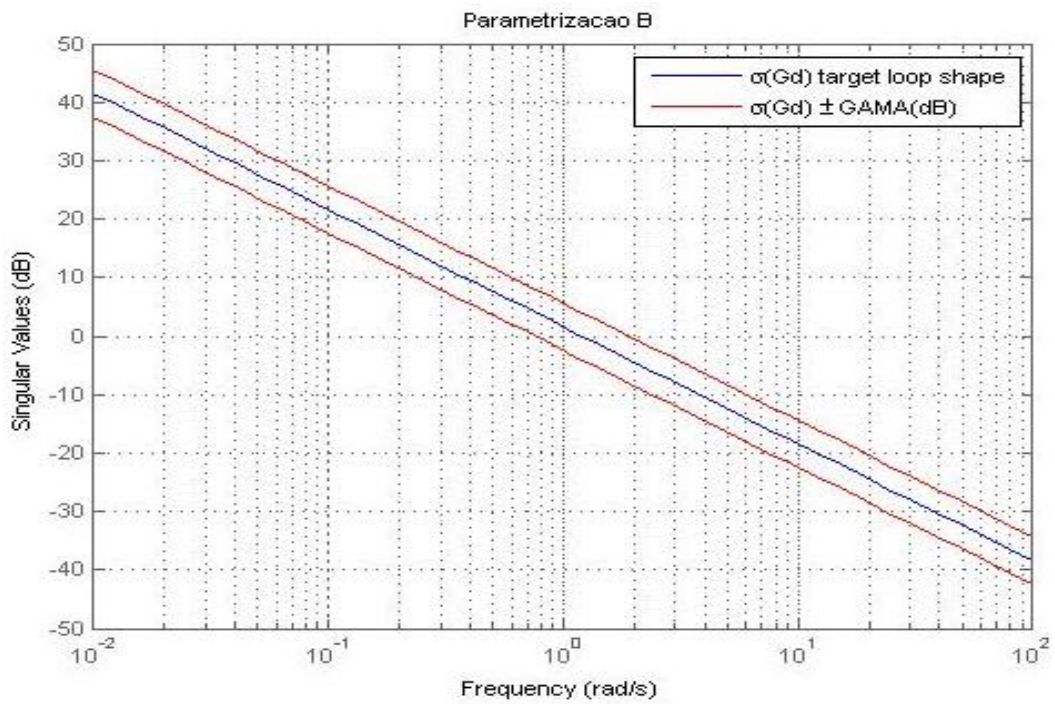


Figura 6.27 – Quatérnio 1 - Parametrização B.

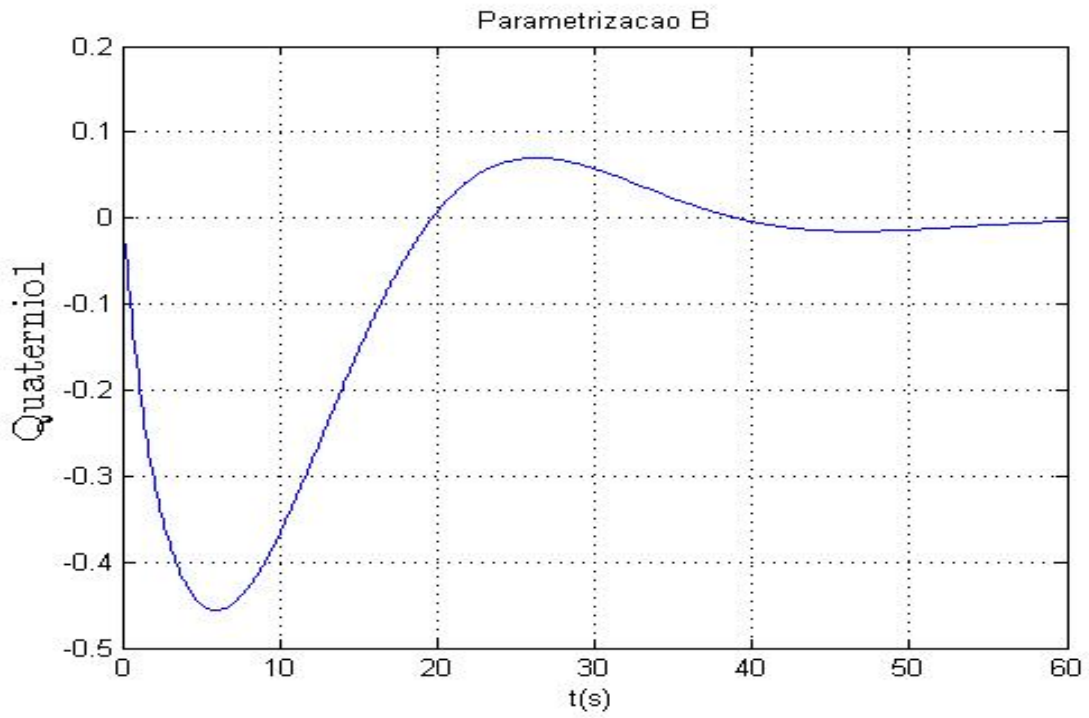


Figura 6.28 – Quatérnio 2 - Parametrização B.

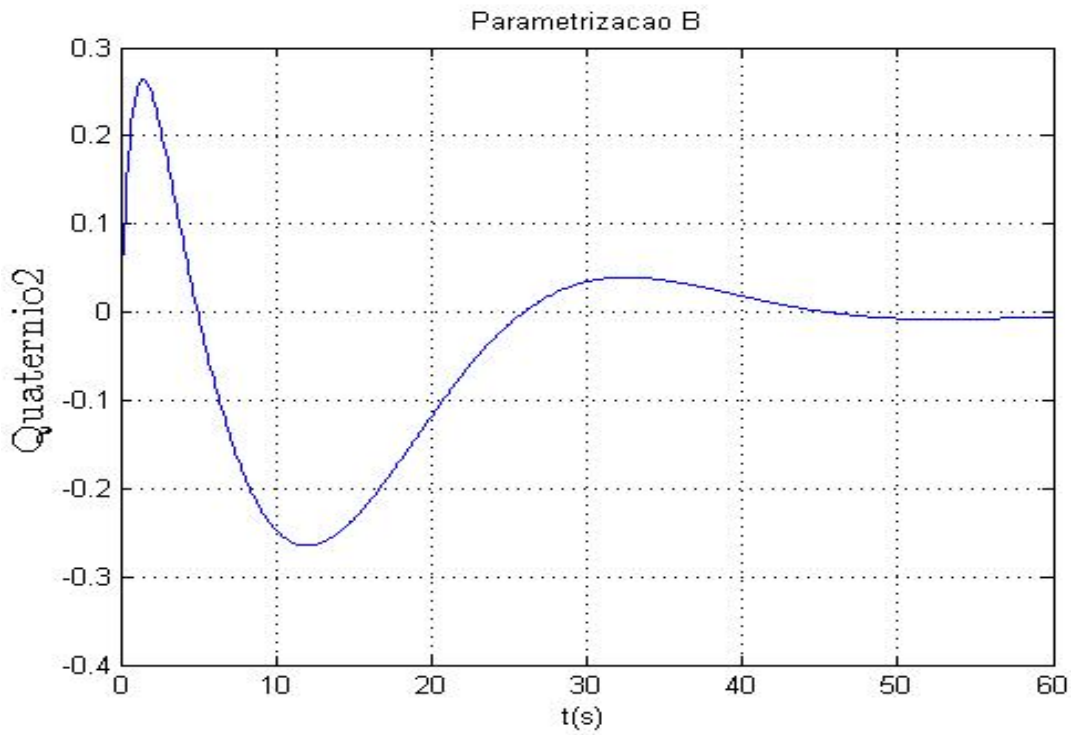


Figura 6.29 – Quatérnio 3 - Parametrização B.

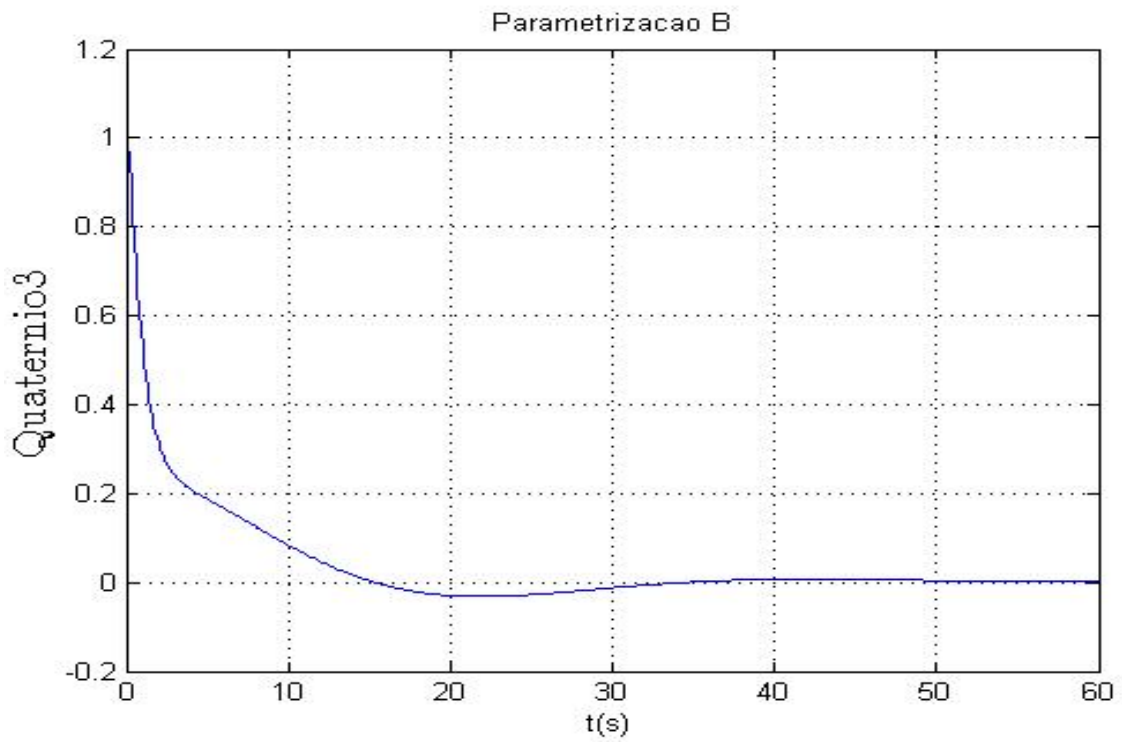


Figura 6.30 – Velocidade Angular  $\omega_1$  - Parametrização B.

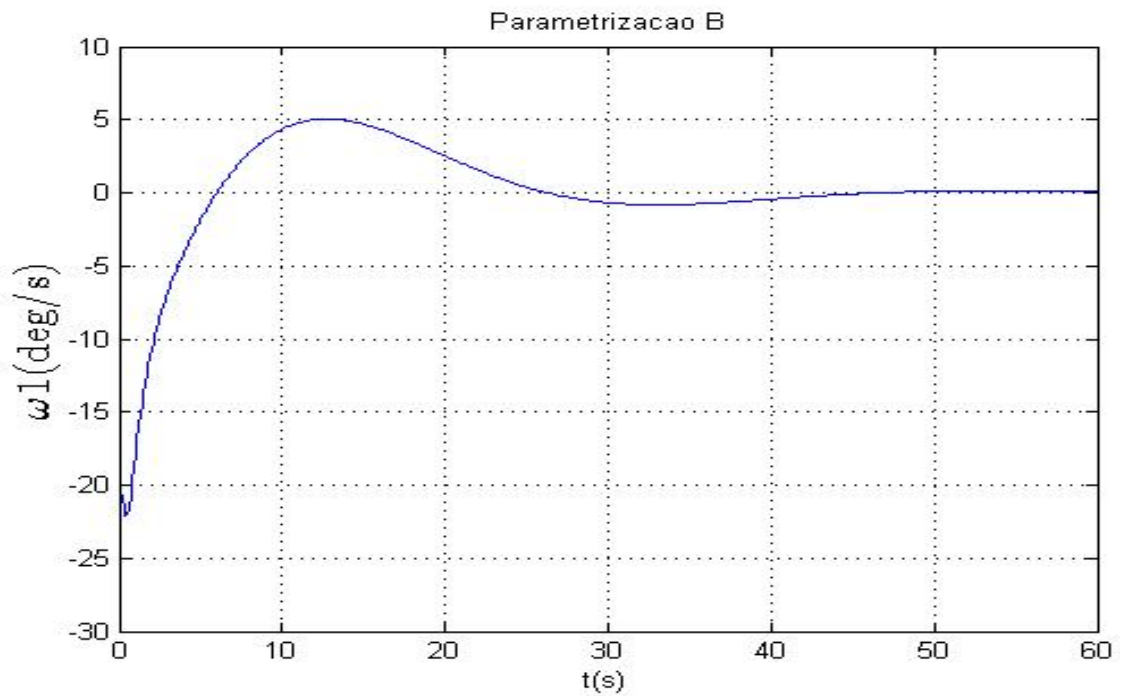


Figura 6.31 – Velocidade Angular  $\omega_2$  - Parametrização B.



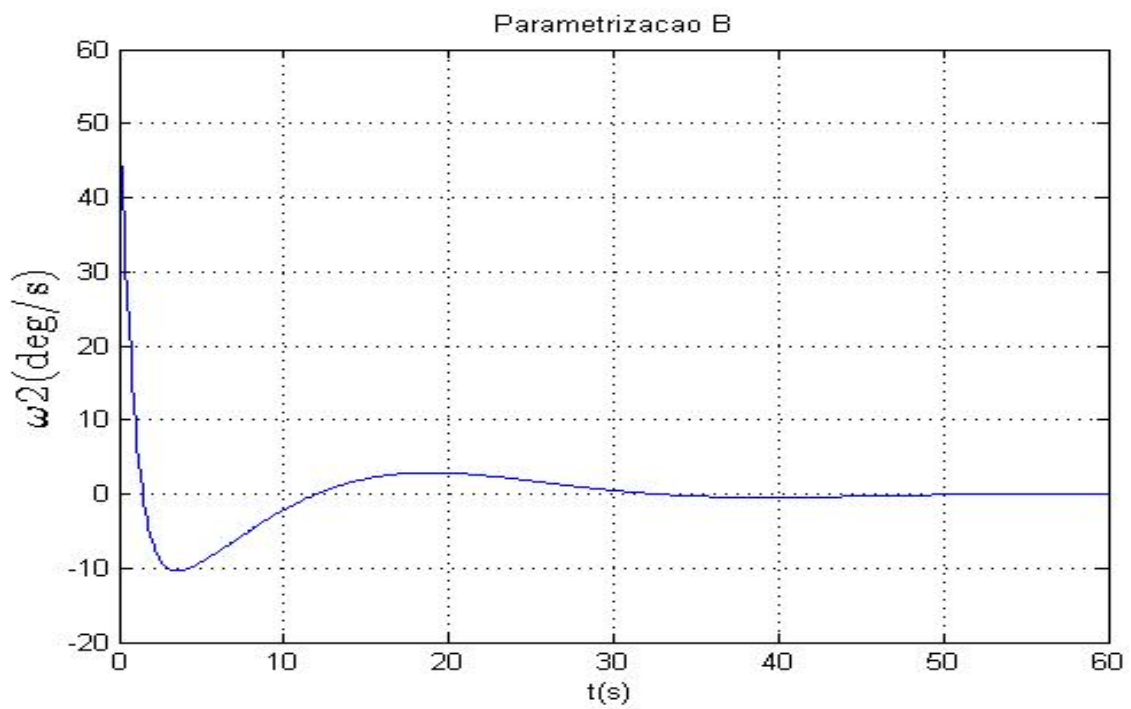


Figura 6.32 – Velocidade Angular  $\omega_3$  - Parametrização B.

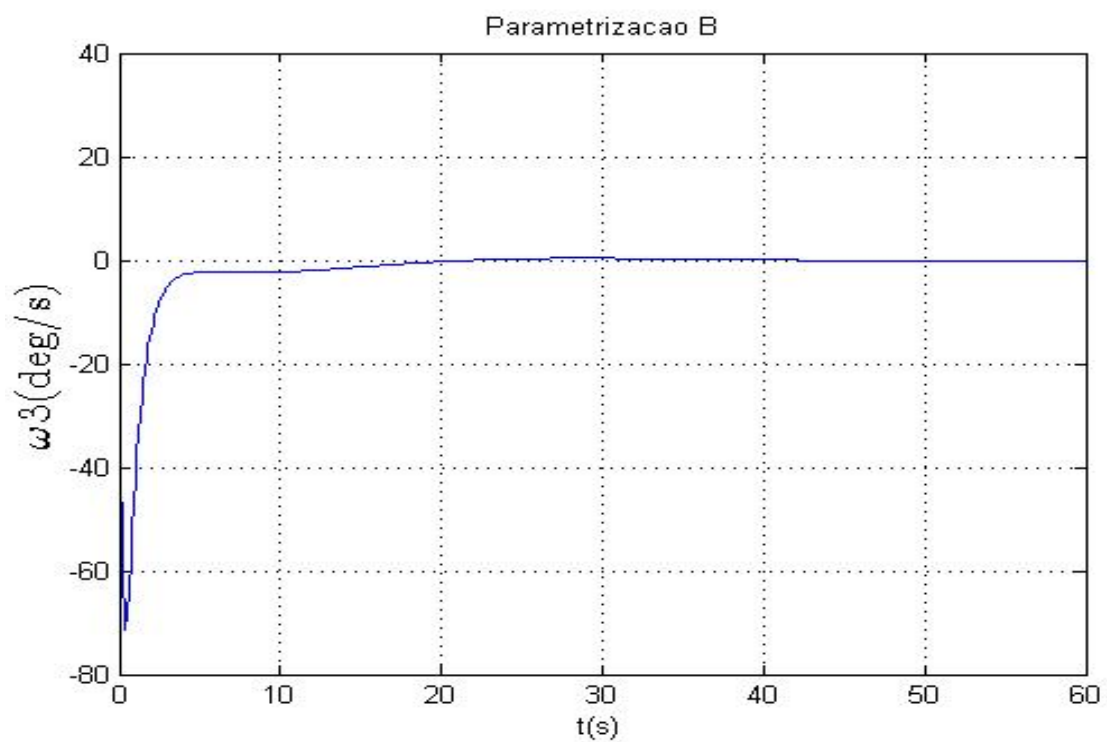
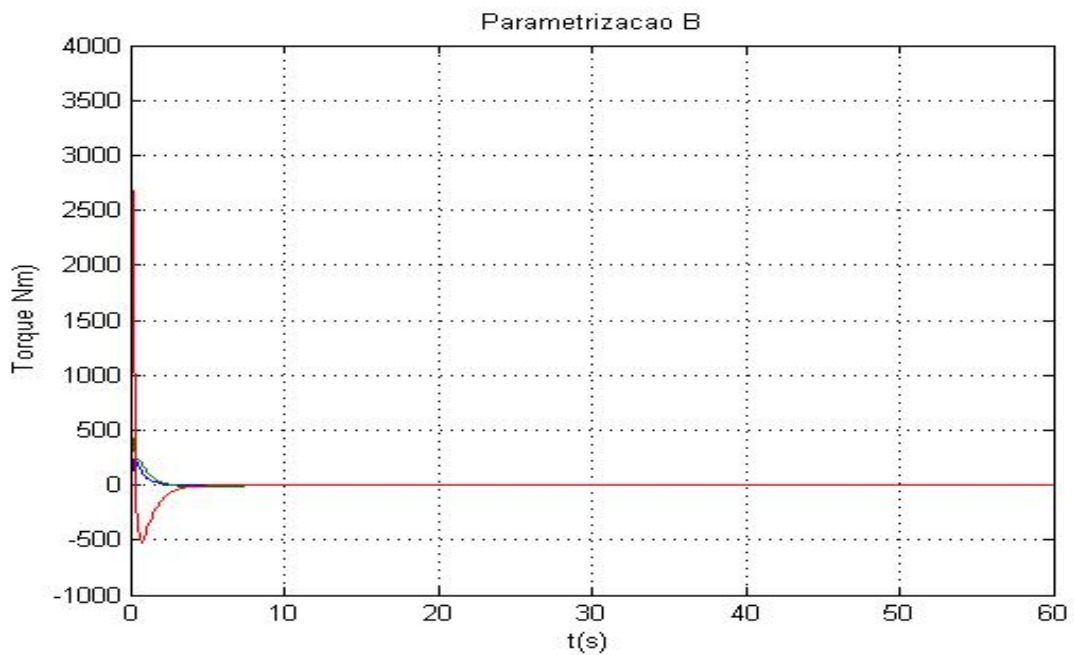


Figura 6.33 – Torques nos três eixos - Parametrização B.



Observamos que a parametrização B fez com que a planta não linear do satélite expusesse três pólos em zero, um polo sobre o eixo real e dois pólos com parte real e imaginário. Acredita-se que disposição dos pólos tornou a planta estável e que por sua vez favoreceu o bom desempenho do controlador. Essa configuração favorável se refletiu nos gráficos de malha aberta e de  $L$  (Planta x Ganho). A banda passante de 1.2 certamente foi decisiva para o bom desempenho do controlador uma vez que todos os estados foram controlados para o intervalo de tempo considerado. O preço pago pelo bom desempenho do controlador, foi a necessidade de aplicação de um torque muito grande num intervalo de tempo curto, fato que está associado ao valor da banda passante.

### 6.4.1.3 Resultados das simulações com a parametrização C

Figura 6.34 – Pólos e zeros da Planta  $G(s)$  - Parametrização C.

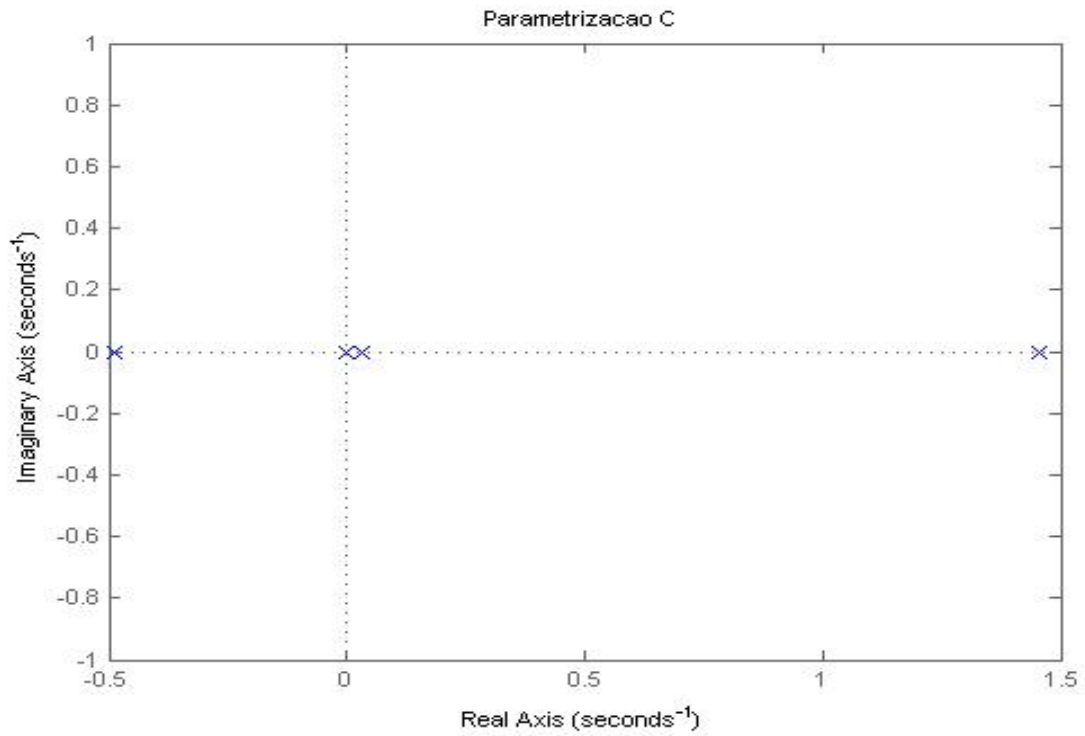


Figura 6.35 – Planta  $G(s)$  em malha aberta - Parametrização C.

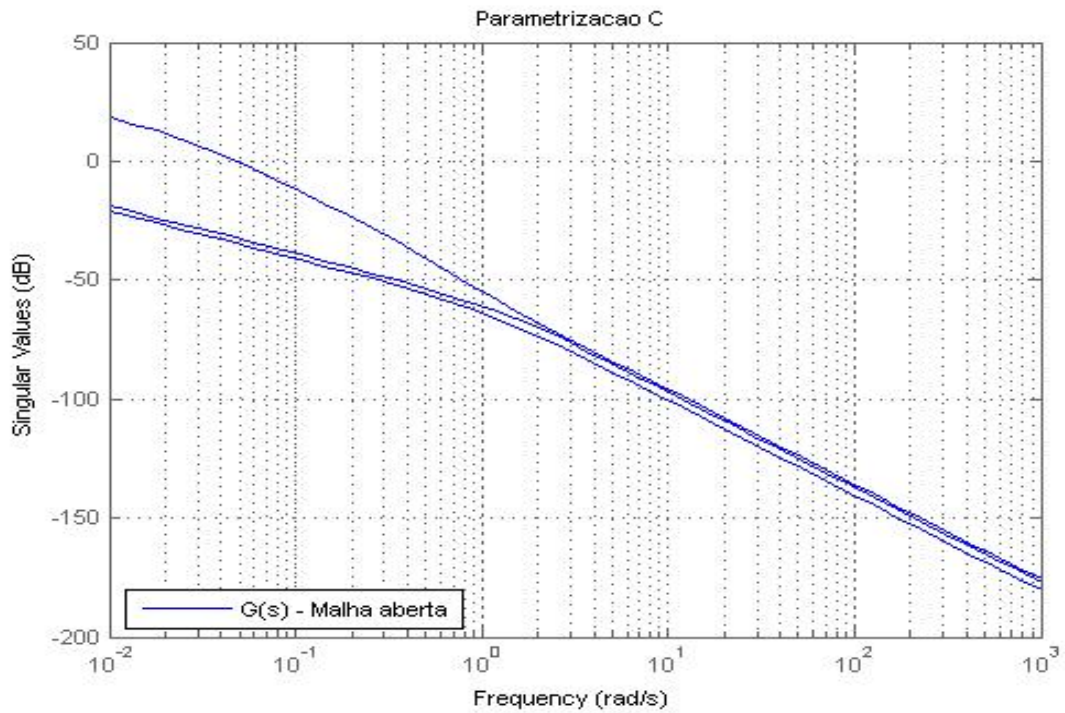


Figura 6.36 – Planta x Ganho;  $L = G(s)K(s)$  - Parametrização C.

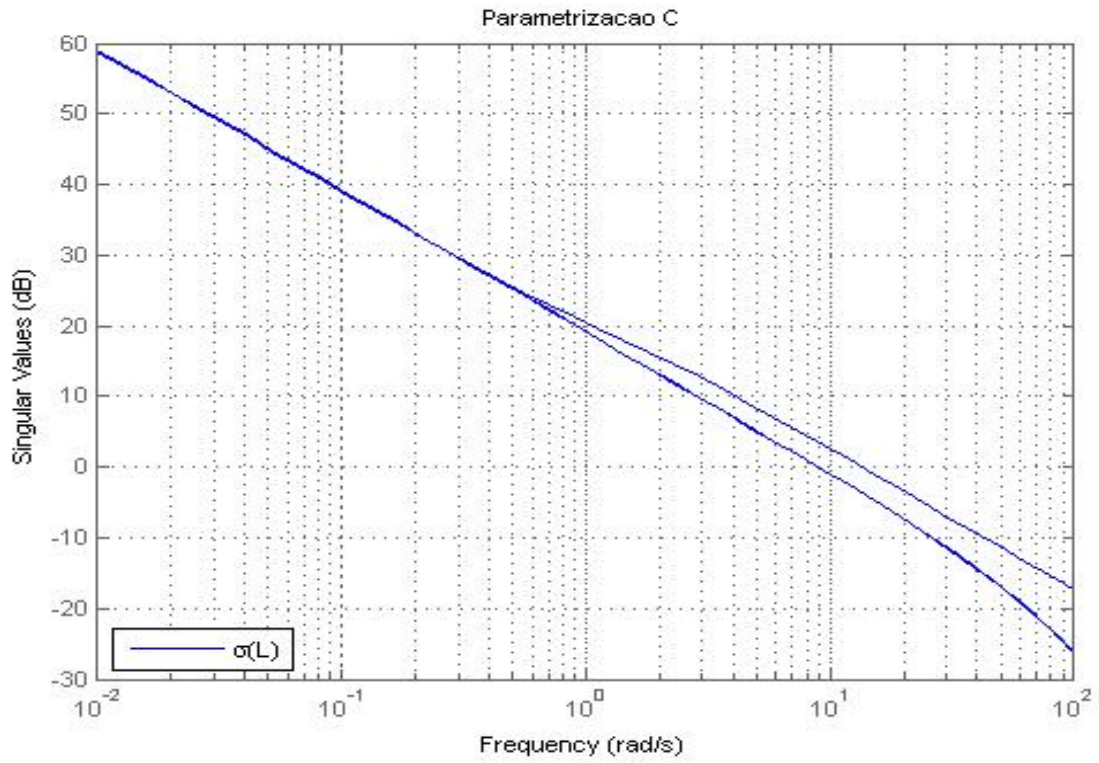


Figura 6.37 – Sensibilidade S e Sensibilidade Complementar T - Parametrização C.

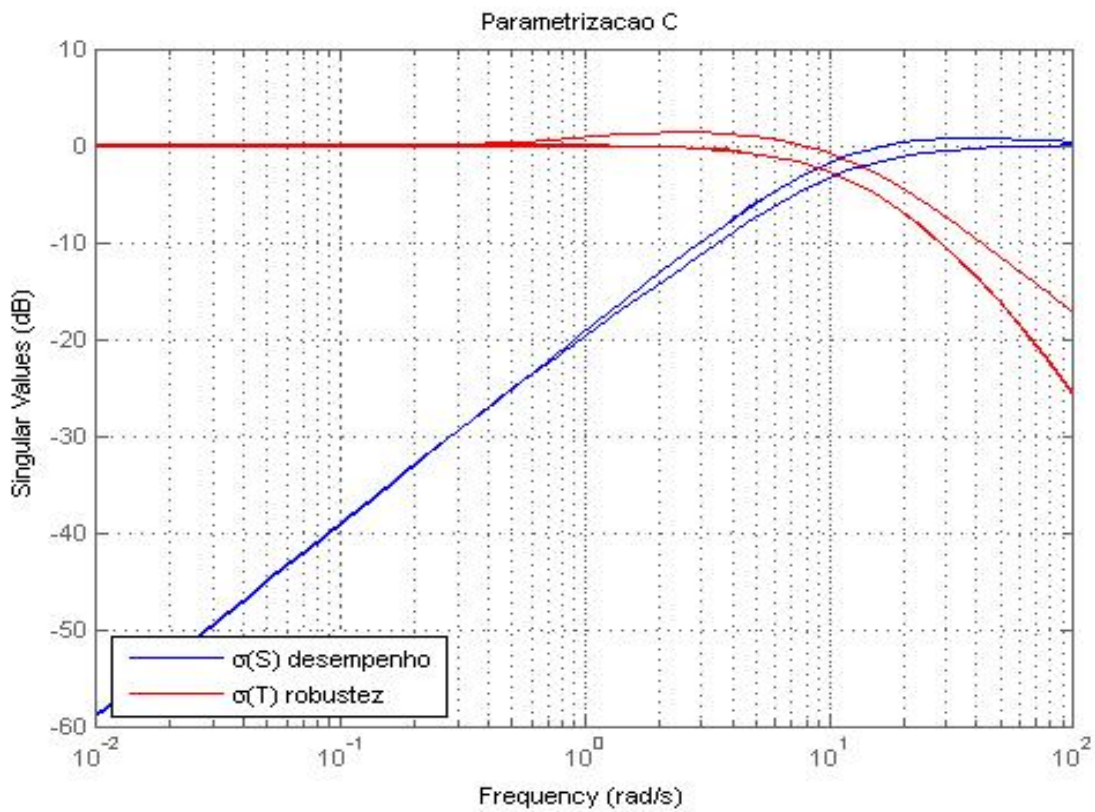


Figura 6.38 – Banda Passante objetivo inserido em +/- Gama - Parametrização C.

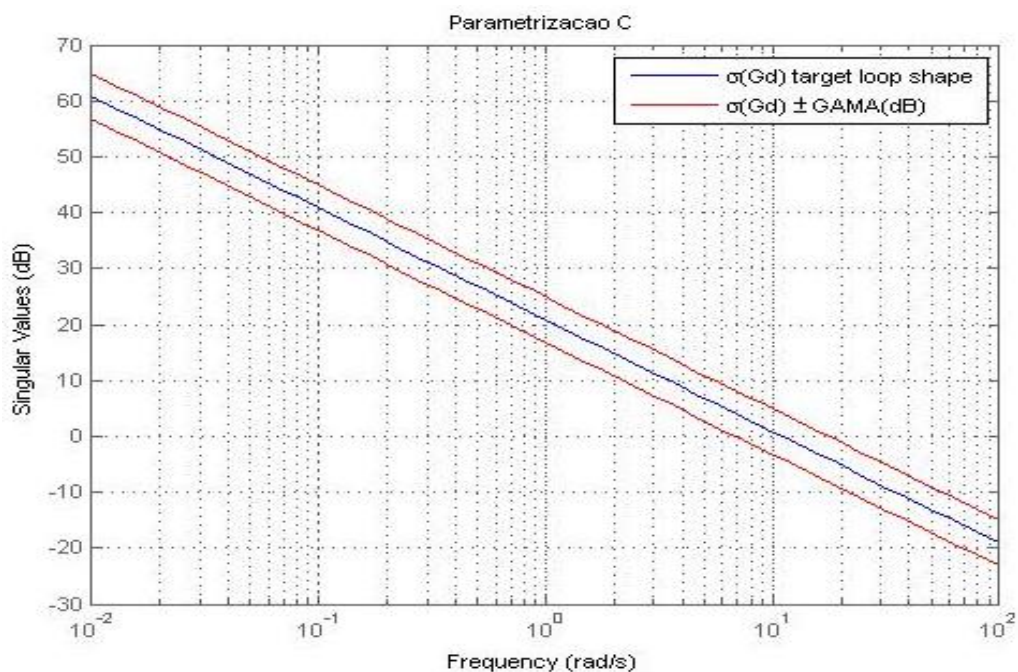


Figura 6.39 – Quatérnio 1- Parametrização C.

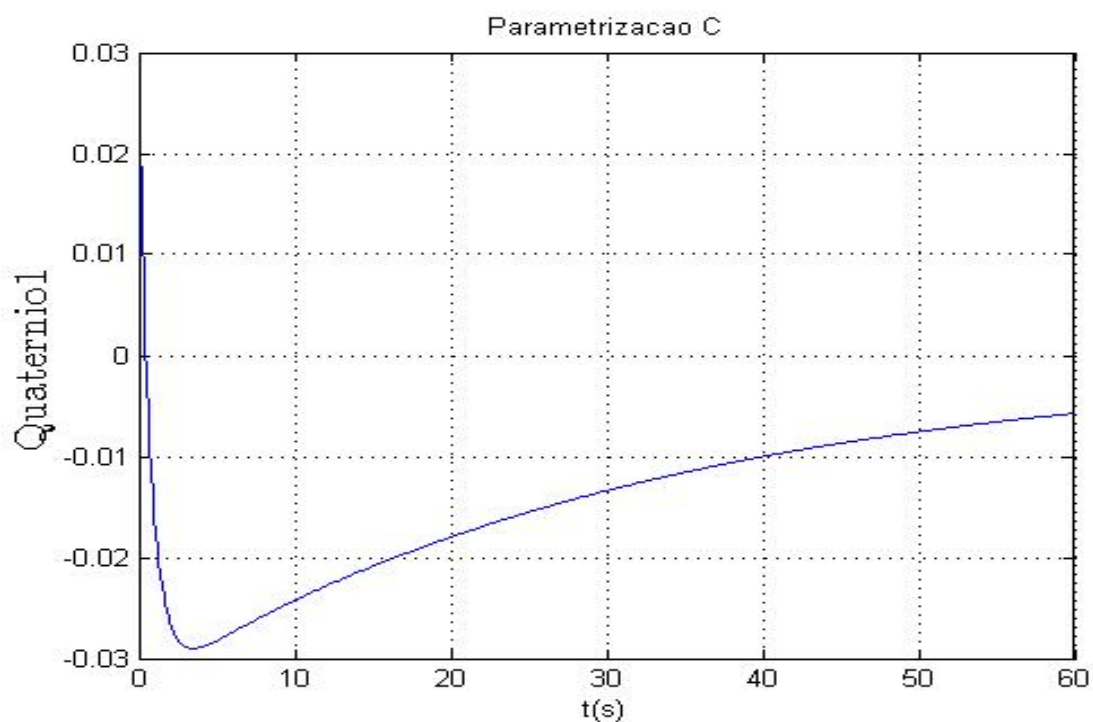


Figura 6.40 – Quatérnio 2 - Parametrização C.

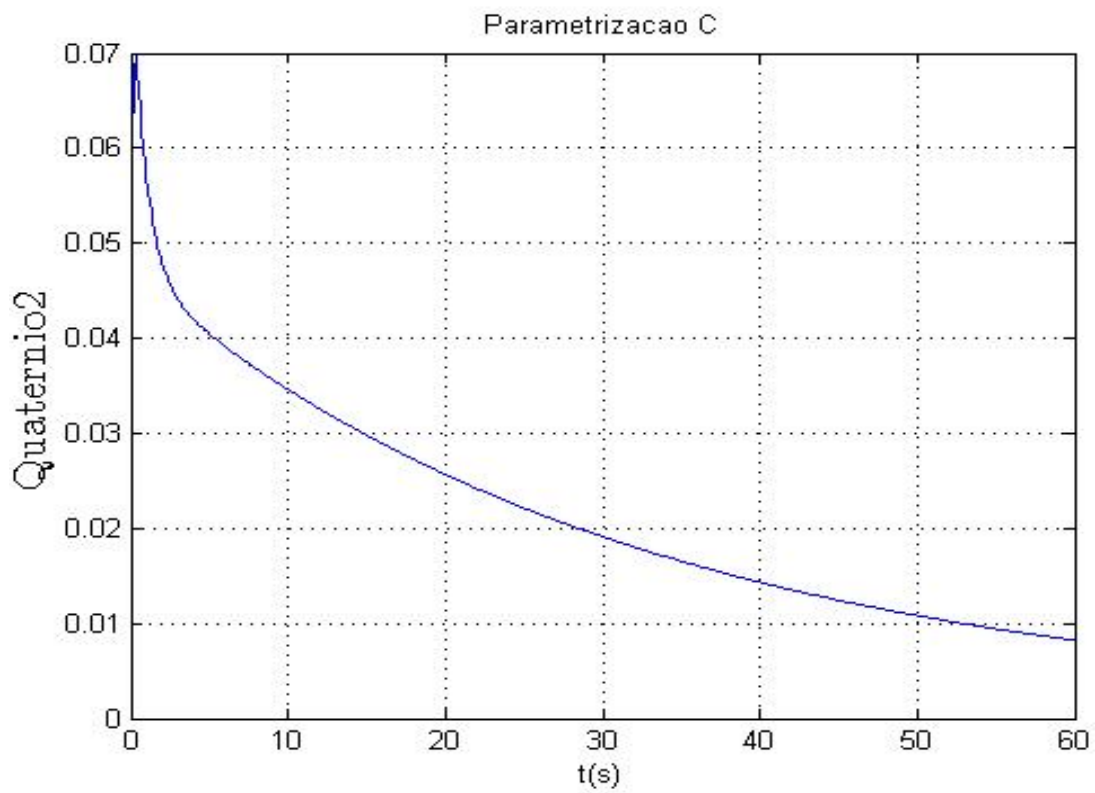


Figura 6.41 – Quatérnio 3 - Parametrização C.

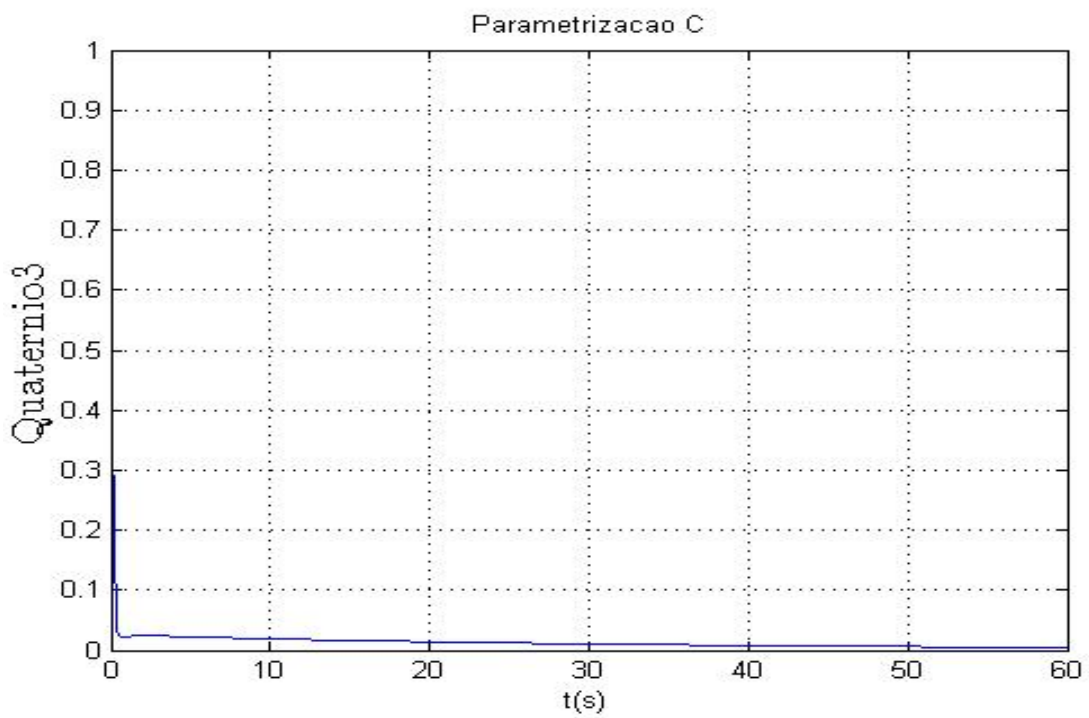


Figura 6.42 – Velocidade Angular  $W_1$  - Parametrização C.

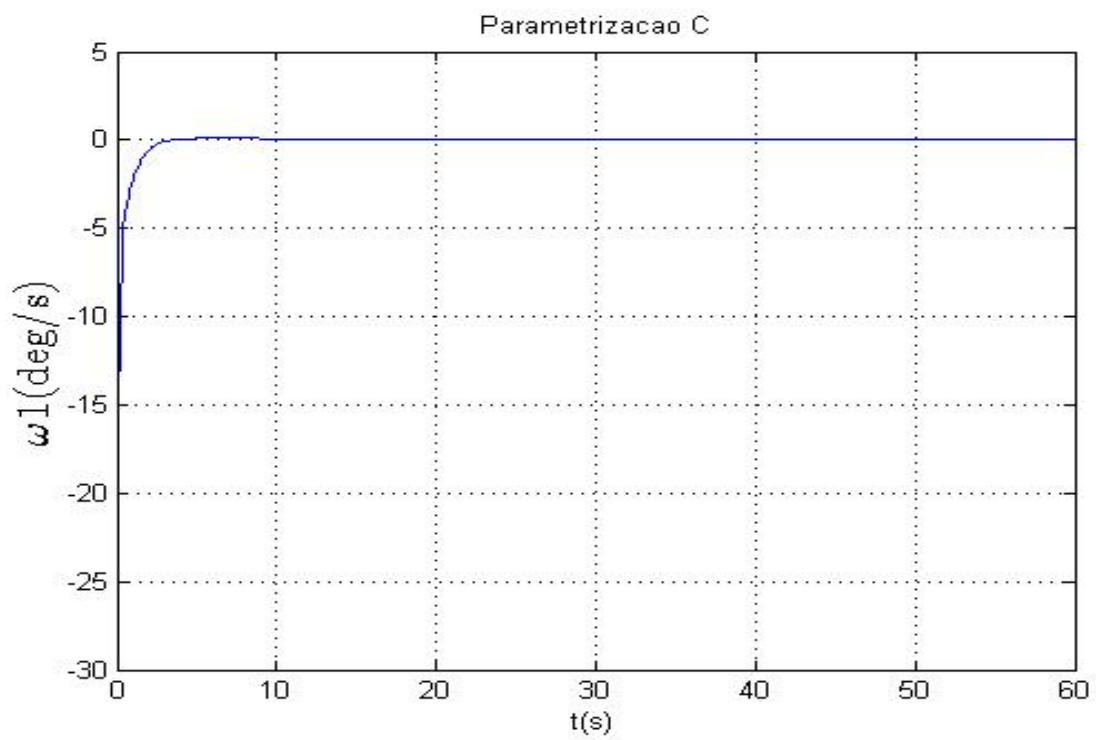


Figura 6.43 – Velocidade Angular  $\omega_2$  - Parametrização C.

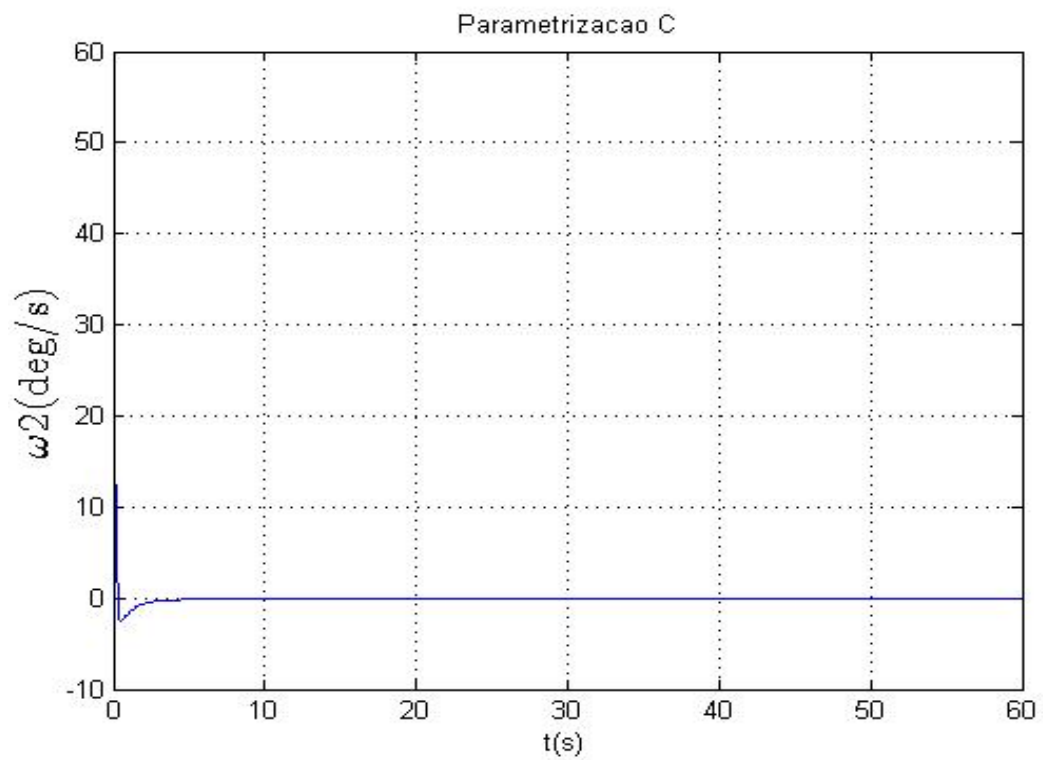


Figura 6.44 – Velocidade Angular  $\omega_3$  - Parametrização C.

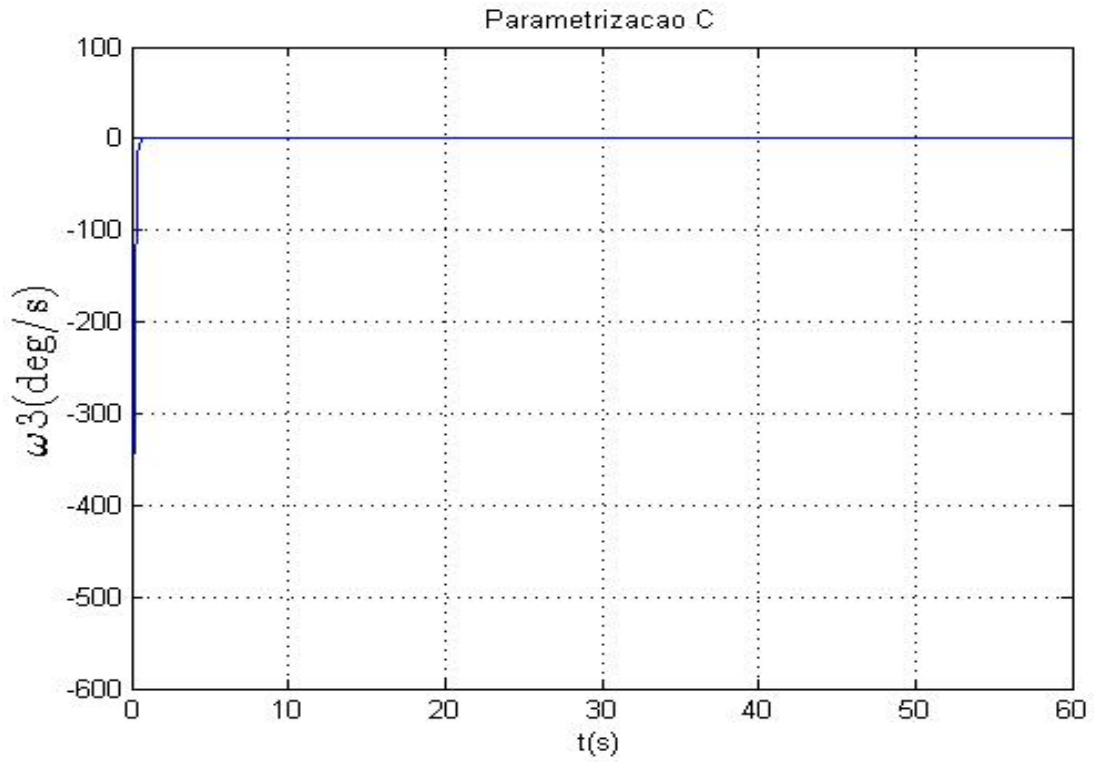
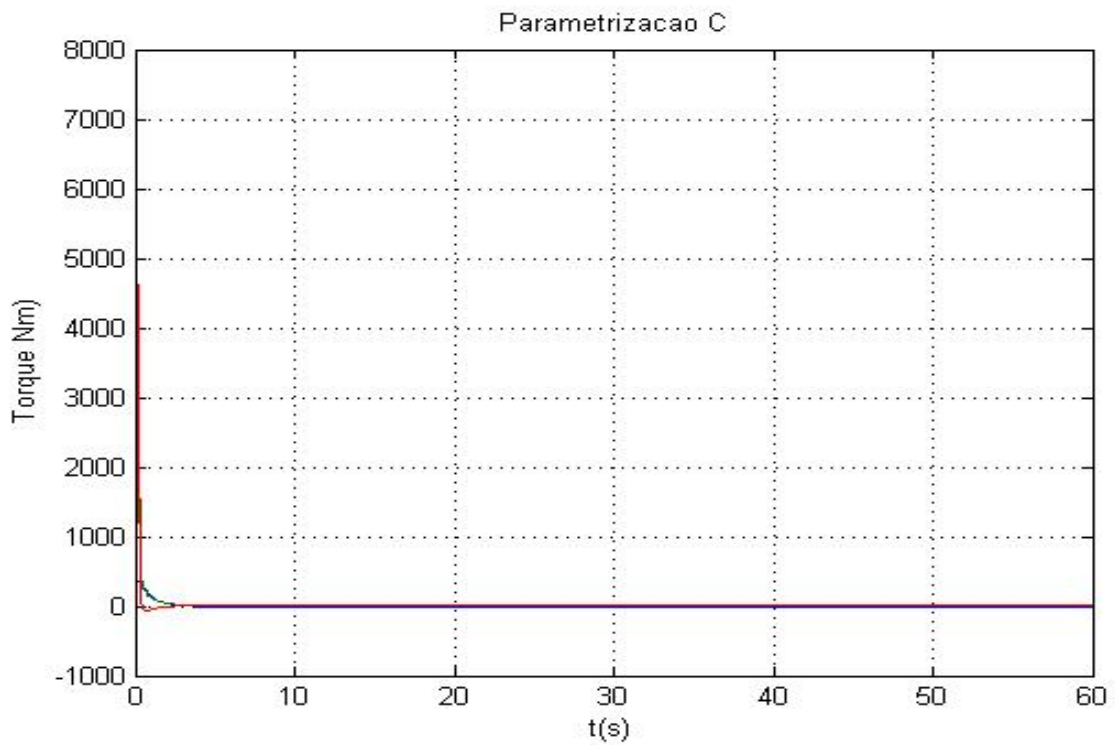


Figura 6.45 – Torques nos três eixos - Parametrização C.





Observamos que a parametrização C fez com que a planta não linear do satélite apresentasse três pólos em zero, um polo sobre o eixo real negativo e dois pólos com parte real positiva. Já é possível observar que o polo sobre o eixo real negativo vai ser um grande problema para o bom desempenho do controlador, pois a esse polo torna a planta instável. A presença deste polo instável fez com que o controlador só fosse obtido com uma banda passante altíssima de 1.2 rad, o que refletiu bastante do gráfico de  $L$  (Planta x Ganho). Curiosamente, com exceção dos estados  $q_1$  e  $q_2$  os outros estados foram controlados. Mas neste caso o preço pago foi ainda maior do que na parametrização B. Pois, o bom desempenho do controlador foi às custas de um torque muitíssimo grande num intervalo de tempo curto.

#### 6.4.1.4 Resultados das simulações com a parametrização D

Figura 6.46 – Torques nos três eixos - Parametrização D

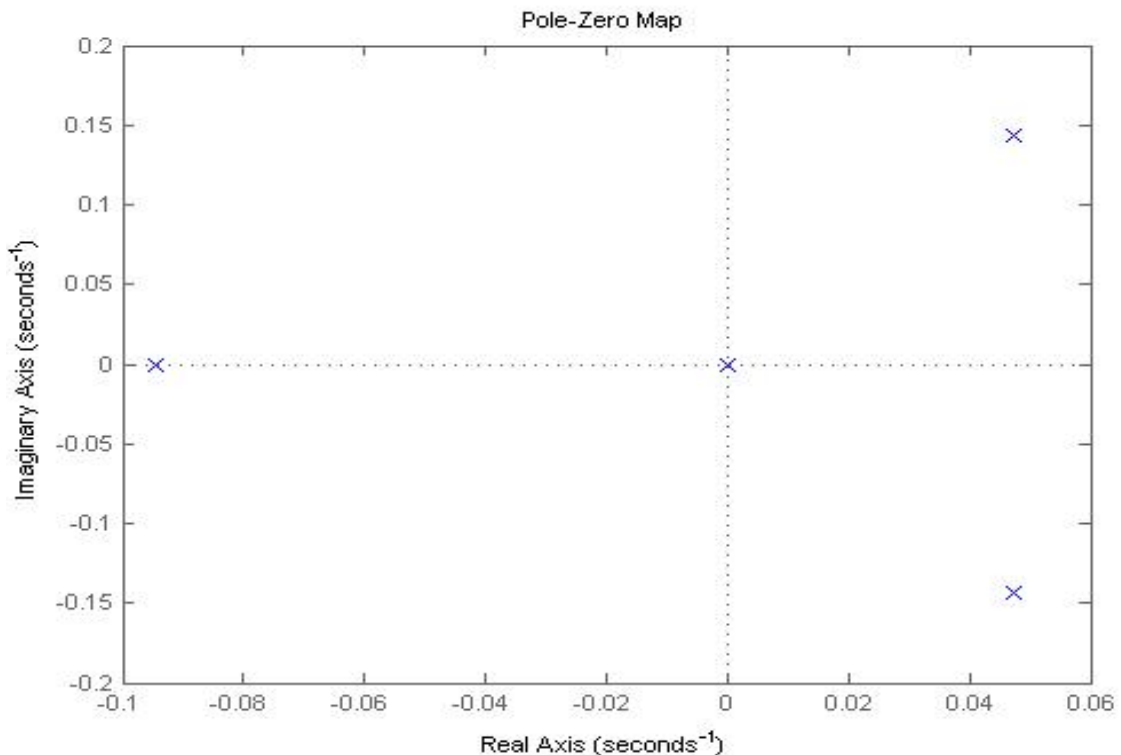


Figura 6.47– Planta  $G(s)$  em malha aberta - Parametrização D.

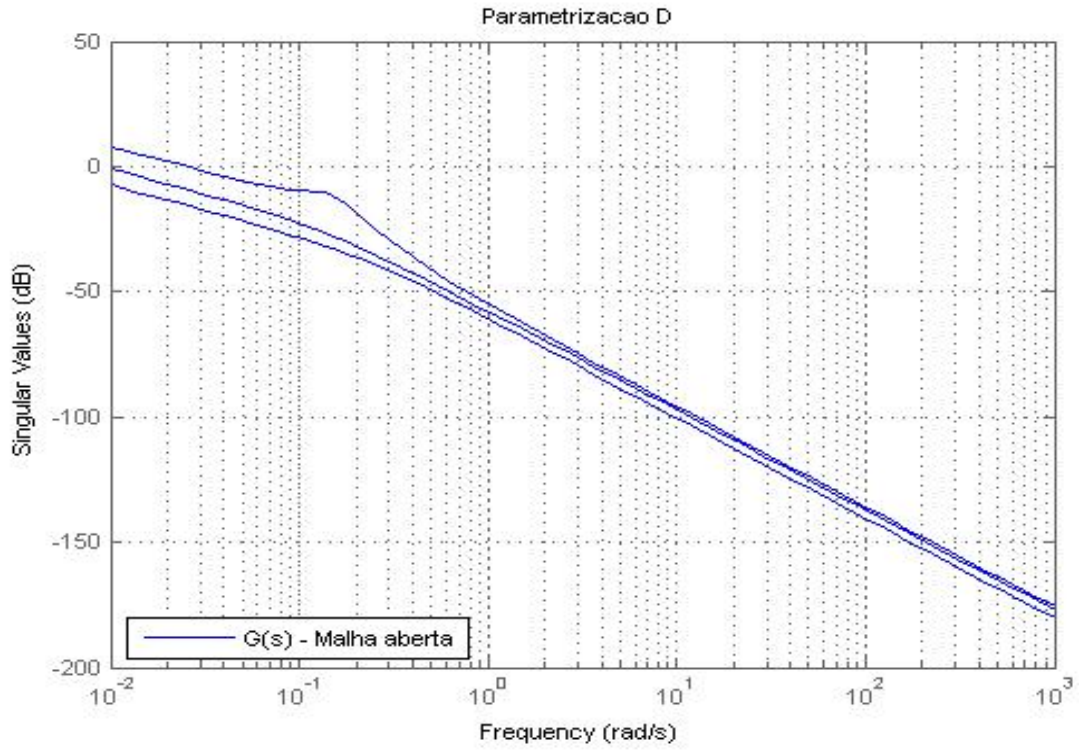


Figura 6.48 – Planta x Ganho;  $L = G(s)K(s)$  - Parametrização D.

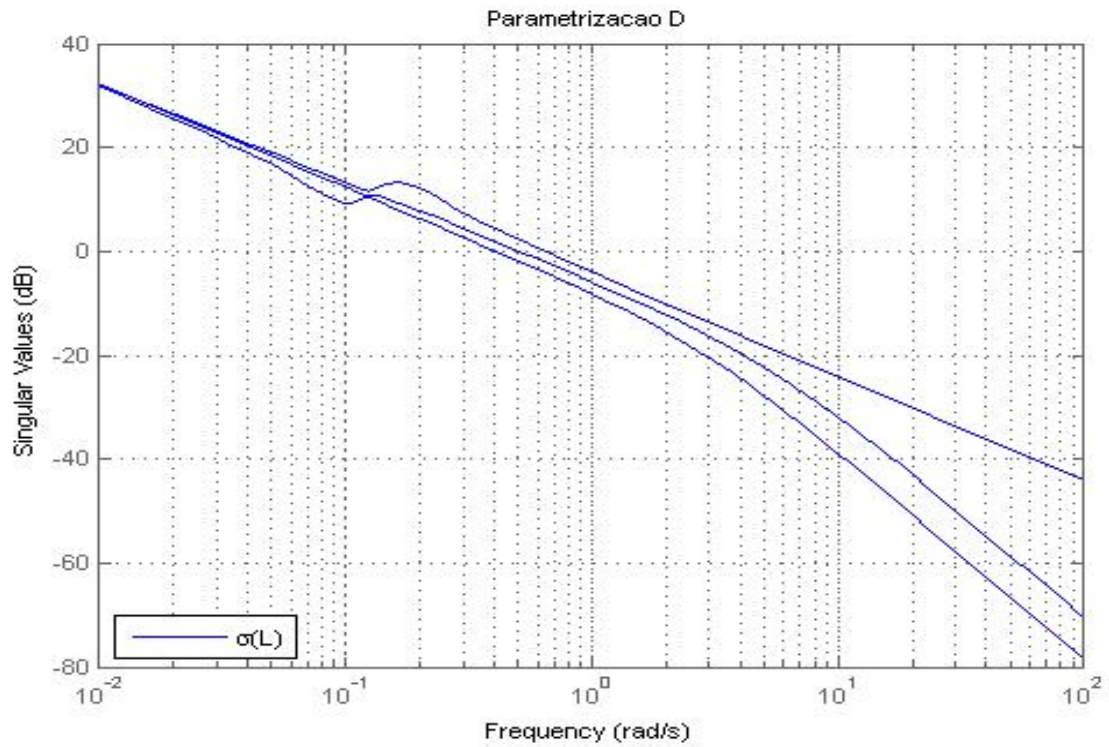


Figura 6.49 – Sensibilidade S e Sensibilidade Complementar T - Parametrização D.

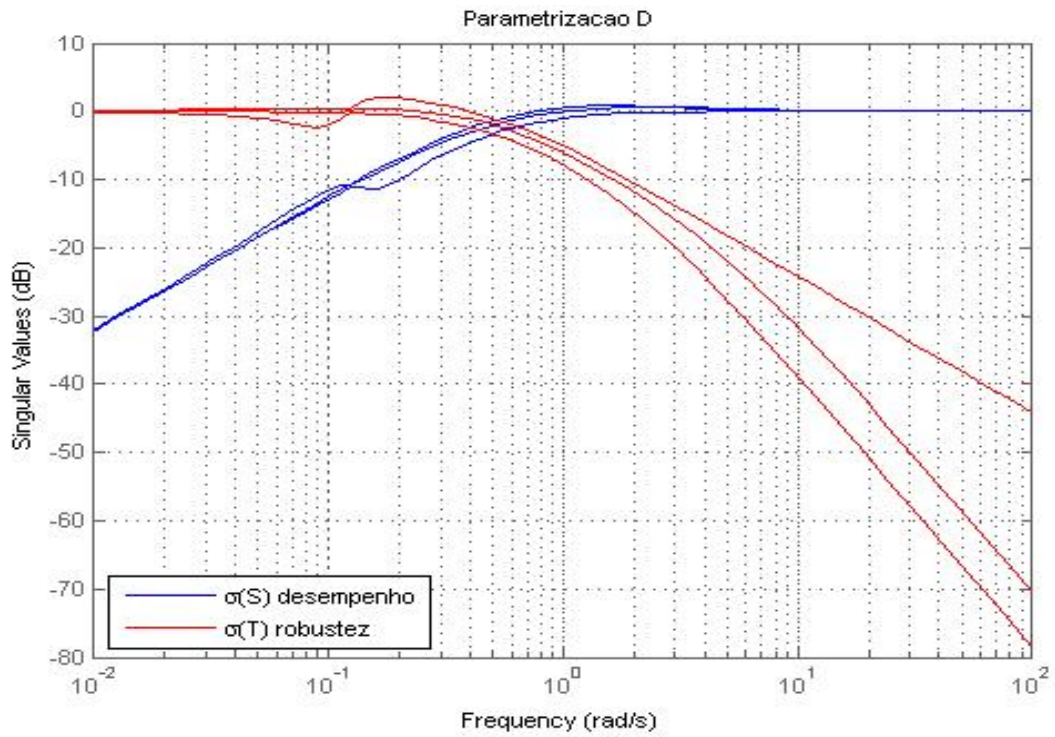


Figura 6.50 – Banda Passante objetivo inserido em +/- Gama - Parametrização D.

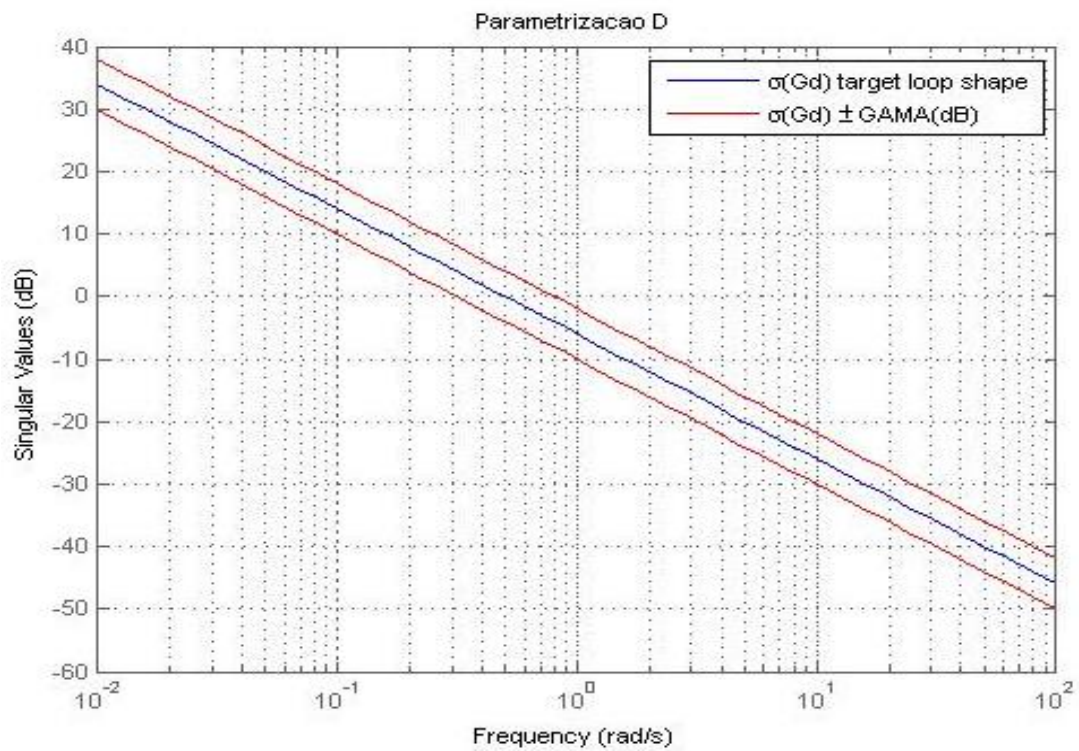


Figura 6.51 – Quatérnio 1 - Parametrização D.

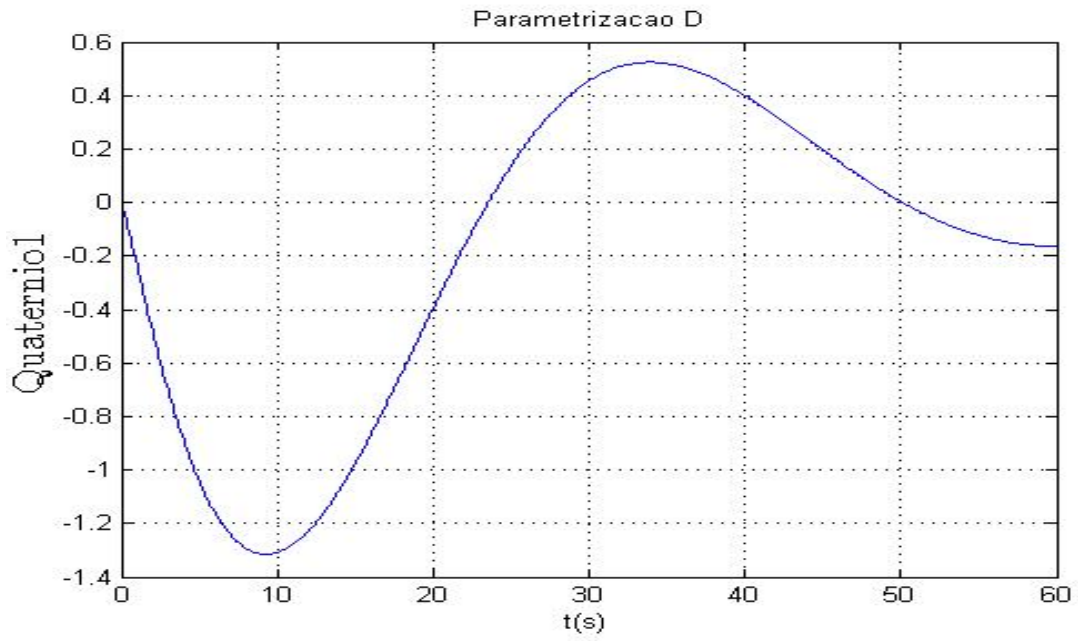


Figura 6.52 – Quatérnio 2 - Parametrização D.

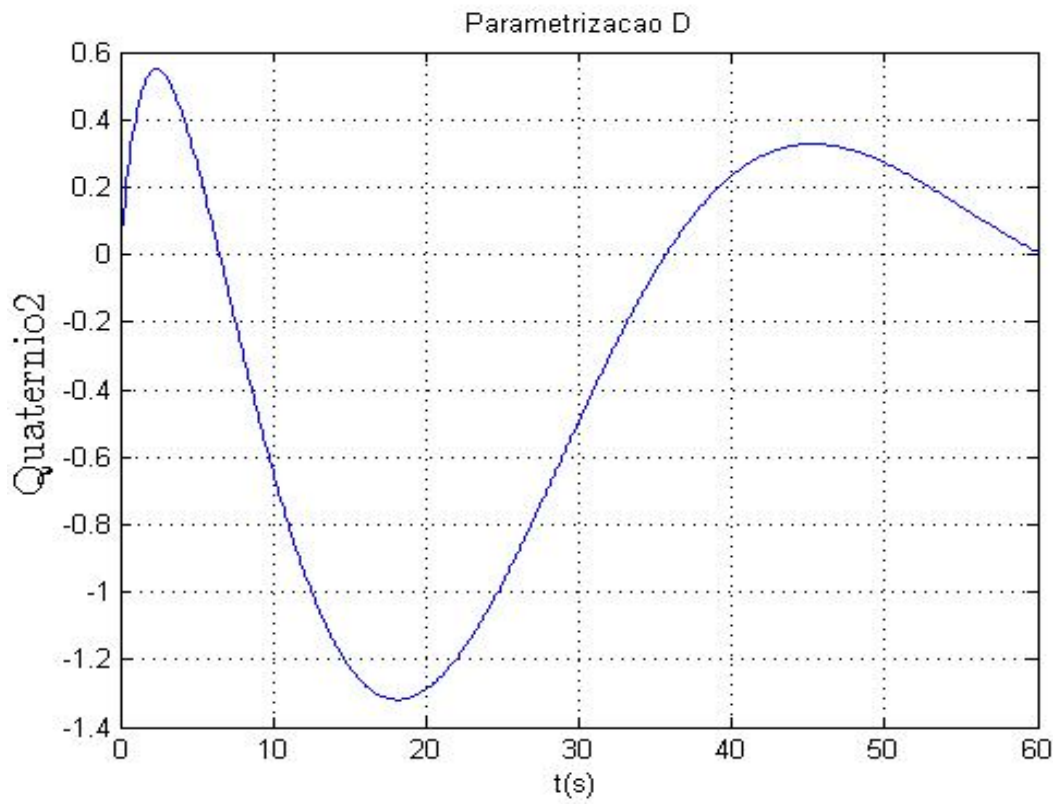


Figura 6.53 – Quatérnio 3 - Parametrização D.

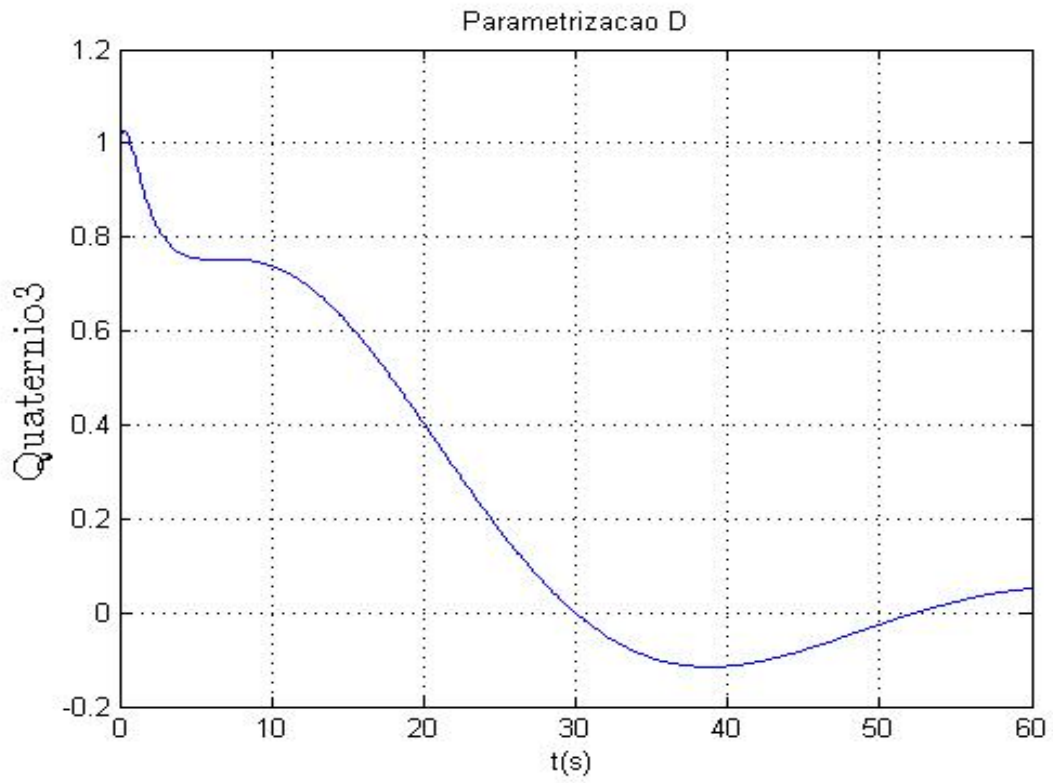


Figura 6.54 – Velocidade Angular  $\omega_1$ - Parametrização D.

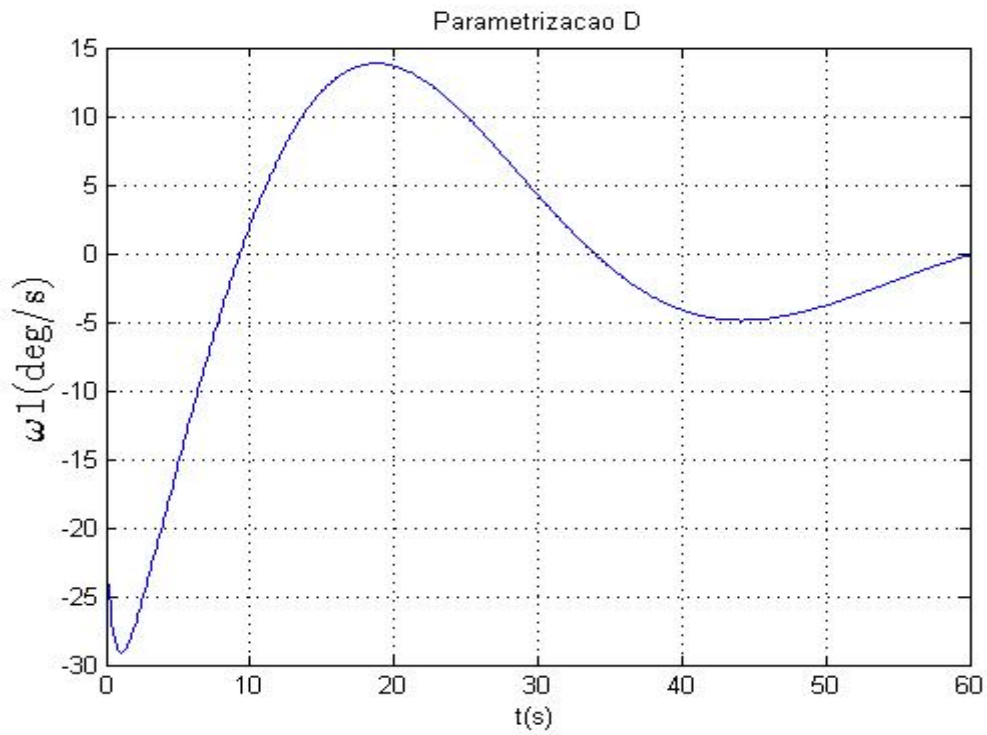


Figura 6.55 – Velocidade Angular  $\omega_2$ - - Parametrização D.

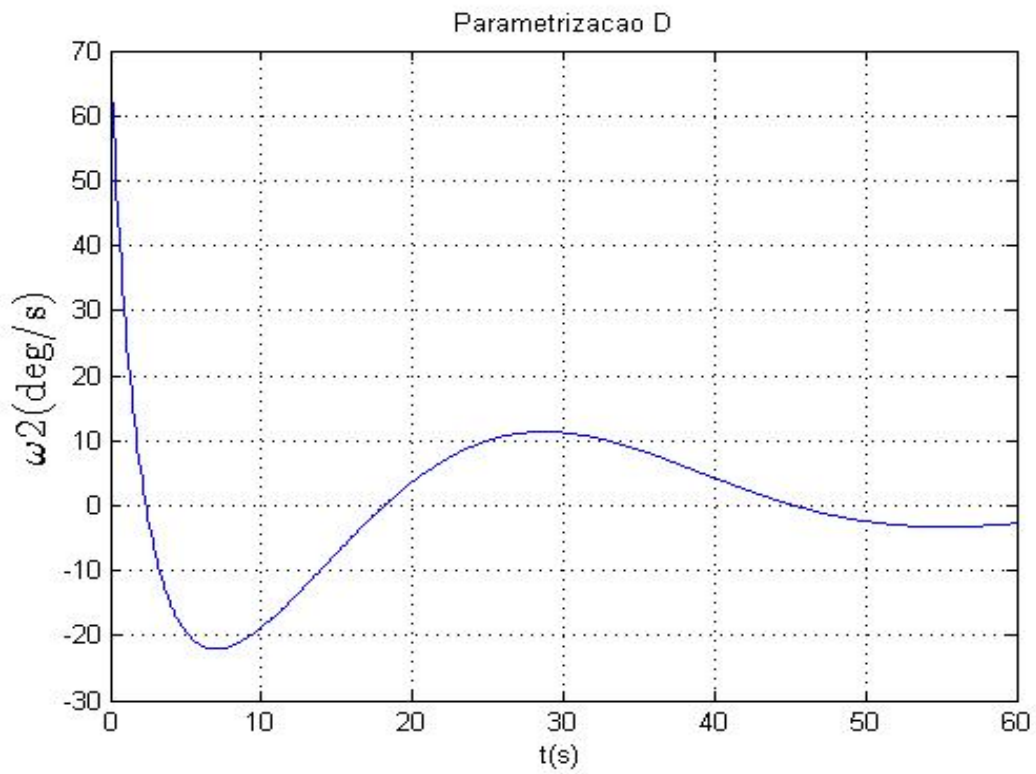


Figura 6.56 – Velocidade Angular  $\omega_3$ - - Parametrização D.

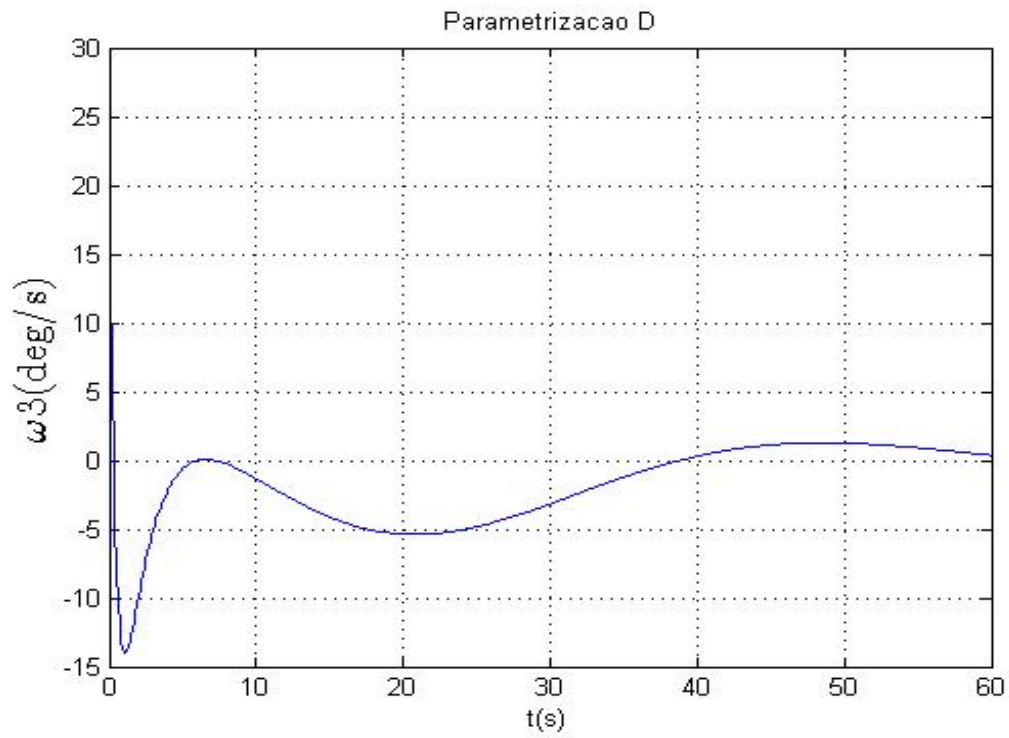
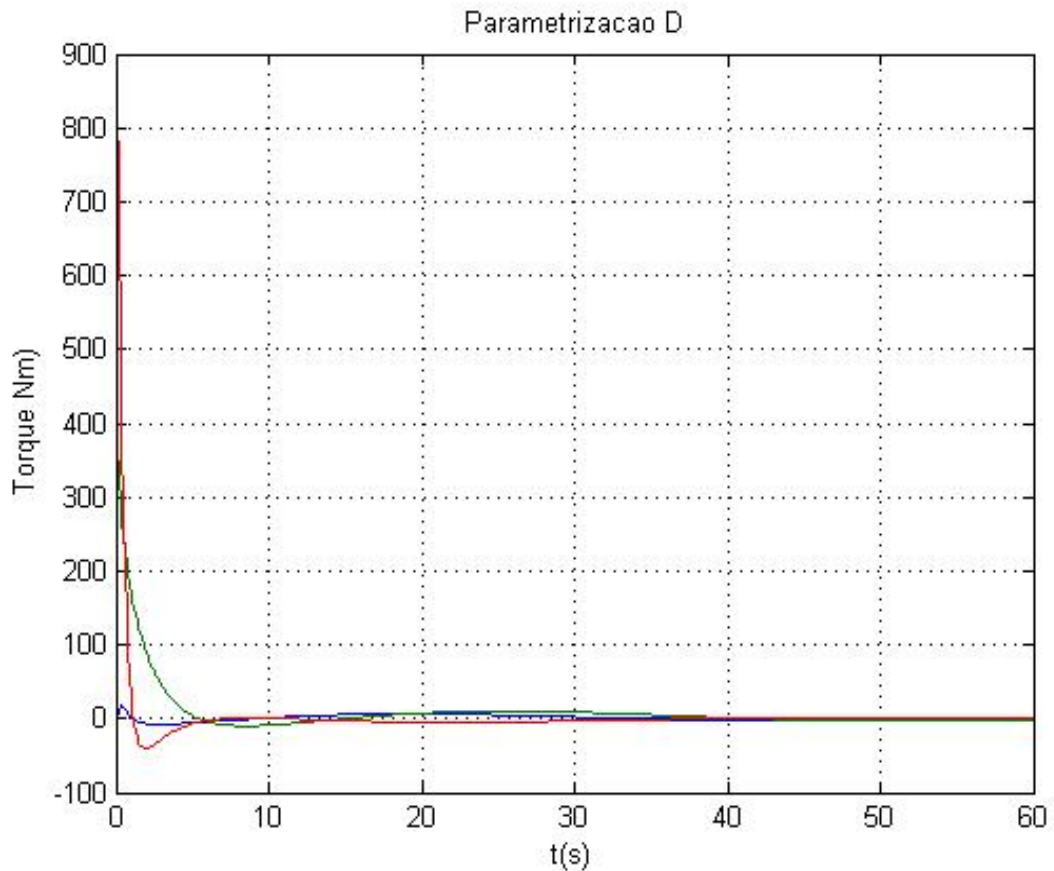


Figura 6.57 – Torques nos três eixos - Parametrização D.



A parametrização D fez com que a planta não linear do satélite apresentasse quatro pólos em zero, um polo sobre o eixo real positivo e dois pólos com parte real negativa e parte imaginaria positiva. Certamente, esses dois últimos pólos serão os pólos que vão dificultar o desempenho do controlador, pois, eles tornam a planta instável. Embora, os pólos instáveis não tenham exigido uma banda passante grande no projeto do controlador, ou seja, 0.5 fato que também não se refletiu no gráfico de  $L$  (Planta x Ganho). Mas, essa banda passante baixa, foi a responsável pelo mal desempenho do controlador, pois, esse não conseguiu controlar nenhum dos estados. Embora, o valor do torque aplicado tenha sido alto.

## **6.5 Resumo do desempenho do controlador para diferentes parametrizações.**

A partir dos resultados das simulações para as parametrizações *A*, *B*, *C* e *D* é possível dizer que a parametrização SDC utilizada afeta diretamente a dinâmica da planta não linear, pois como foi demonstrado a parametrização pode tornar a planta não linear estável ou instável. O que reflete diretamente no projeto e no desempenho do controlador SDRE +  $H^\infty$ . Observou-se também, que as parametrizações acoplam ou desacoplam a dinâmica da planta não linear, uma vez que em certos casos o controle ocorre para certos estados e para outros não. Por fim, cabe ressaltar então, que ao se pretender projetar um controlador por meio dessa nova técnica SDRE +  $H^\infty$  é muito importante, realizar uma análise da influência da parametrização SDC na dinâmica da planta em questão.



## 7 CONCLUSÕES

Este trabalho apresentou o estudo da união das técnicas de controle SDRE e  $H^\infty$ , visando sua aplicação prática. Contribuindo, a priori, no desenvolvimento e implementação computacional de um algoritmo de controle de bom desempenho e robusto.

Primeiramente, investigou-se o projeto do controlador SDRE na plataforma em 3D do Simulador do Sistema de Controle de Satélites da UFABC. Em eu utiliza jatos de gás e rodas de reação como atuadores, permitindo, o controle de grandes manobras de atitude e em seguida realização de um apontamento fino. O primeiro objetivo aqui, foi a familiarização do método SDRE e em seguida o aprimoramento do algoritmo de controle desenvolvido por (GONZALEZ, 2009) que usava somente rodas de reação como atuador.

Prosseguiu-se a investigação do desempenho e a robustez do controlador com a união das técnicas SDRE+ $H^\infty$ , agora utilizando como modelo o satélite Amazonia-1. Estudando o comportamento do modelo frente as diferentes parametrizações SDC das equações de movimento não lineares do satélite. Observou-se que seu desempenho e robustez é influenciado pelo tipo de parametrização que define a dinâmica não linear do satélite. Esta investigação é outro aspecto relevante desse estudo, pois mostra que um estudo preliminar da dinâmica não linear, permite alcançar melhores resultados na fase de projeto do controlador. Portanto, podemos dizer que o trabalho aqui desenvolvido, forneceu uma alternativa bastante encorajadora para atacar problema do controle de atitude de satélites com dinâmica não linear com maior flexibilidade em termo de performance e robustez. Portanto, a maior contribuição desta tese está no estudo aprofundado da união das técnicas SDRE e  $H^\infty$ .

Por fim, considera-se, que essa tese apresenta mais um passo na direção do estudo e aplicação de um novo algoritmo de controle, visando à melhora do desempenho e o aumento da robustez do Sistema de Controle de Atitude (SCA) de Satélites através da união das técnicas de controle SDRE e  $H^\infty$ .

## 7.1 Sugestões de trabalhos futuros

A metodologia aqui utilizada para projetar o controlador SDRE+  $H^\infty$  assume que todos os estados estão disponíveis para a realimentação, fato que nem sempre ocorre, principalmente nos algoritmos de controle de satélites. Portanto, uma sugestão natural para a extensão desse trabalho é a introdução de um estimador de estado na malha de controle, por exemplo, um filtro de Kalman.

Outra sugestão de aprimoramento do projeto do controlador SDRE+ $H^\infty$  é incluir as incertezas, que como sabemos sempre existe num sistema de controle. Seja esta oriunda de variação de parâmetros do sistema e/ou da dinâmica não modelada, ou seja, incertezas paramétricas e não paramétricas.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AKHLOUMADI, M.R.; IVANOV, D. Satellite relative motion SDRE-based control for capturing a noncooperative tumbling object. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON RECENT ADVANCES IN SPACE TECHNOLOGIES, 9., 2019, Istanbul, Turkey. **Proceedings...** 2019.

ARENA, V. M. R. **Aplicação do método SDRE no projeto do sistema de controle de um satélite com dinâmica não linear**. São José dos Campos: INPE, 2011. (Relatório de Projeto de Iniciação Científica - CNPq/INPE).

ASHOK, P.; KRETINSKY, J.; LARSEN, K.G.; COËNT, A.L.; TAANKVIST, J.H.; WEININGER, M. SOS: Safe, Optimal and Small strategies for hybrid Markov decision process. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON QUANTITATIVE EVALUATION OF SYSTEMS, 2019. **Proceedings...** 2019.

ATHANS, M.; FALB, O.L. **Optimal control: an introduction to the theory and its applications**. New York: Dover, 2007.

BEIKZADEH, H.; TAGHIRAD, H. D. Robust SDRE filter design for nonlinear uncertain systems with an  $H^\infty$  performance criterion. **ISA Transactions**, v. 51, n. 1, p.146-152, 2012.

BERTSEKAS, D.P. **Nonlinear programming**. 2.ed. [S.l.]: Athena Scientific, 1999.

BIBEL, J.E.; MALYEVA, D.S. **Guidelines for the selection of weighting functions for H-infinity control**. Dahlgren, Virginia: Naval Surface Warfare Center, 1992.

BIGOT, P G. **Abordagem de pareto para a otimização multiobjetivo do desempenho de um controlador SDRE aplicado a um sistema não linear**. 2015. 134p. Dissertação (Mestrado em Engenharia e Tecnologias Espaciais) – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2015.

BODINEAU, G.; BEUGNON, C.; BOULADE, S.; BÉRARD-CHIAPPA, C. ( $\mu$ -MU)-ITERATION technique applied to the control of satellites with large flexible appendages. In: INTERNATIONAL ESA CONFERENCE ON GUIDANCE, NAVIGATION AND CONTROL SYSTEMS, 6., 2005, Loutraki, Greece. **Proceedings...** Paris: ESA, 2006.

BOTTEGA, V. **Controle e otimização estrutural de manipuladores robóticos com elementos flexíveis usando atuadores e sensores piezelétricos**. Tese (Doutorado em Engenharia) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2005.

BRYSON, A.E. Optimal control-1950 to 1985. **IEEE Control Systems**, v.16, n.3, p. 26-33, Jun. 1996.

CASTRO, J. C. V. **Estudo experimental da dinâmica e do sistema de controle de um satélite rígido-flexível**. 2009. 121 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia e Tecnologia Espaciais) – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2009. Disponível em: <<http://urlib.net/8JMKD3MGP8W/353S76S>>. Acesso em: 5 dez.2019.

CHEN, C.-T. **Linear system theory and design**. 3.ed. Oxford: Oxford University Press, 1999.

CHEN, W.H.; Robust control of uncertain flexible spacecraft using disturbance observer based control strategies. In: INTERNATIONAL ESA CONFERENCE ON GUIDANCE, NAVIGATION AND CONTROL SYSTEMS, 6., 2005, Loutraki, Greece. **Proceedings...** Paris: ESA, 2006.

ÇİMEN, T. State-Dependent Riccati Equation (SDRE) control: a survey. In: WORLD CONGRESS THE INTERNATIONAL FEDERATION OF AUTOMATIC CONTROL, 17., 2008 Seoul, Korea. **Proceedings...** 2008.

CLOUTIER, J.R.; D'SOUZA C.N.; MRACEK C.P. Nonlinear regulation and nonlinear H-infinity control via the State-Dependent Riccati Equation technique: part 1, theory, part 2, examples. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON NONLINEAR PROBLEMS IN AVIATION AND AEROSPACE, 1., 1996. **Proceedings...** 1996. p.117-141.

CLOUTIER, J.R.; STANSBERRY, D.T. The capabilities and art of state-dependent Riccati equation-based design. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 2002, Anchorage, AK. **Proceedings...** 2002.

DA-WEI, G.; PETKOV, P. H.; KONSTANTINOV, M.M. **Robust control design: with matlab**. London, UK:Springer, 2005.

DE QUEIROZ, M.S.; KAPILA, V.; YAN, Q. Adaptive nonlinear control of multiple spacecraft formation flying, **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, v. 23, n. 3, p. 385–390,2000.

DE SOUZA, A. G. **Estudo do uso de métodos de controle robusto em sistemas espaciais rígidos – flexíveis**. 2017.. 231p.Tese (Doutorado em Engenharia e Tecnologias Espaciais: Mecânica Espacial e Controle) – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2017.

DOYLE, J.; GLOVER, K. A state space approach to  $H^\infty$  optimal control. In: NIJMEIJER, H.; SCHUMACHER, J.M. (Ed). **Three decades of mathematical systems theory: a collection of surveys at the occasion of the 50<sup>th</sup> birthday of Jan C. Willens**. [S.l.]: Springer-Verlag, 1989. p.179-218.

DOYLE, J.C.; GLOVER, K.; KHARGONEKAR, P.P.; FRANCIS, B.A. State-space solutions to standard  $H_2$  and  $H_\infty$  control problems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v.34, n.8, p.831-847, 1989.

ERDEM, E.B.; ALLEYNE, A.G. Globally stabilizing second-order nonlinear systems by SDRE control. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 1999, San Diego, CA. **Proceedings...** IEEE, 1999.

ERDEM, E.B.; ALLEYNE, A.G. Design of a class of nonlinear controllers via state dependent Riccati equations. **IEEE Transactions on Control Systems Technology**, v. 12, n. 1, p. 133-137, 2004.

EUROPEAN SPACE AGENCY - ESA - **About space debris**. 21 February 2018. Disponível em: < [http://www.esa.int/Our\\_Activities/Operations/Space\\_Debris/About\\_space\\_debris/\(print\)](http://www.esa.int/Our_Activities/Operations/Space_Debris/About_space_debris/(print)) >. Acesso em: 18 ago. 2019.

FONTENELLE, B. M. **Técnica de controle robusto  $H_\infty$  aplicada a um sistema de posicionamento dinâmico**. 2011. 96p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Oceânica) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2011.

GARWIN, R. L. Solar sailing: a practical method of propulsion within the solar system. **Jet Propulsion**, v.28, n.123, p. 188-190, 1958.

GONZALES, R. G. **Utilização dos métodos SDRE e filtro de Kalman para o controle de atitude de simuladores de satélites**. 2009. 120p. Dissertação (Mestrado em Engenharia e Tecnologia Espaciais) – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2009.

GU, DA-WEI; PETKOV, P.; KONSTANTINOV, M.M. **Robust control design with MATLAB**. 2ed. [S.l.]: Springer, 2005.

GYÖRGY, K.; DÁVID L.; KELEMEN, A. Theoretical study of the nonlinear control algorithms with continuous and discrete-time state dependent Riccati equation. **Procedia Technology**, v. 22, p. 582-591, 2016.

HUGHES P.C. Dynamics of flexible space vehicles with active attitude control. **Celestial Mechanics**, v.9, p.21-39, 1974.

INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS. **AMAZONIA-1: missão Amazonia**. 2017. Disponível em: < <http://www3.inpe.br/amazonia-1/> >. Acesso em: 10 fev. 2020.

JUNKINS, J. L.;KIM, Y. **Introduction to dynamics and control of flexible structures**. Washington: AIAA Education Series, 1993.

KIR, D.E. **Optimal control theory: an introduction**. New York: Dover, 1998.

KE, Z.; ZHENQI, H.; MEIBO, L. Study on maintaining formations during satellite formation flying based on SDRE and LQR. **Open Physics**, v.15, n.1, p. 394-399, June 2017.

KORAYEM, M.H.; NEKOO, S.R. Finite-time state-dependent Riccati equation for time-varying nonaffine systems: rigid and flexible joint manipulator control. **ISA Transactions**, v.. 54, p. 125-144, 2015.

LEWIS, F.L.; VRABIE, D.L.; SYRMOS, V.L. **Optimal control**. [S.I.]: John Wiley & Sons, 2012.

LIN, L.-G.; VANDEWALLE, J.; LIANG, Y.-W. Analytical representation of the state-dependent coefficients in the SDRE/SDDRE scheme for multivariable systems. **Automatica**, v.59, Sept. 2015.

MENON, P.; OHLMEYER, E. Computer-aided synthesis of nonlinear autopilots for missiles. **Nonlinear Studies**, v..11. n.2, p. 173-198, 2004.

MRACEK, C.P.; CLOUTIER, J. R. Control designs for the nonlinear benchmark problem via the state-dependent Riccati equation method. **International Journal of Robust and Nonlinear Control**, v. 8, p. 401-433, 1998.

MURPHY, D.; WIE, B. Robust thrust control authority for a scalable sailcraft. In: AAS/AISS SPACEFLIGHT MECHANICS, 2004, Maui, HI. **Proceedings...** 2004.

NAVABI, M.; AKHLOUMADI, M.R; Nonlinear optimal control of relative rotational and translational motion of spacecraft rendezvous. **Journal of Aerospace Engineering**, v.30, n.5, Aug. 2017.

NEKOO, S.R. Model reference adaptive state-dependent Riccati equation control of nonlinear uncertain systems: regulation and tracking of free-floating space manipulators. **Aerospace Science and Technology**, v. 84, p. 348-360, 2019.

NGUYEN, T.; BORDEI, A.; NGUYEN, T.; IONIȚĂ, A. Using PID controller and SDRE methods for tracking control of Spacecrafts in Closed-Rendezvous Process. **INCAS BULLETIN**, v.11, p.139-150, Mar. 2019.

PALUMBO, N.F.; JACKSON, T. Development of a fully integrated missile guidance and control system: a state-dependent Riccati differential equation approach. In: CONFERENCE ON CONTROL APPLICATIONS, 1999 Los Alamitos. **Proceedings...** IEEE, 1999.

PARRISH, D.K. **Applications of nonlinear control using the state-dependent Riccati equation**. Dissertation (Master in Engineering) - Air Force Institute of Technology, Dayton, 1995.

PARRISH, D.K.; RIDGELY, D.B. Control of an artificial human pancreas using the SDRE method. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 1997, Albuquerque, NM. **Proceedings...** 1997.

PINHEIRO, E. R.; SOUZA, L. C. G. Design of the microsatellite attitude control system using the mixed H<sub>2</sub>/H<sub>∞</sub> method via LMI optimization. **Mathematical Problems in Engineering**, v. 2013, p. 1-8, 2013.

PUKDEBOON, C. Second-order sliding mode controllers for spacecraft relative Translation. **Applied Mathematical Sciences**, v. 6, n. 100, p. 4965–4979, 2012.

QIN, Y.; WEIB, C.; TANG, X.; ZHANG, N.; DONG, M.; HU, C. A novel nonlinear road profile classification approach for controllable suspension system: simulation and experimental validation. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 125, p. 79-98, June 2019.

ROMERO, A.; SOUZA, L.; CHAGAS, R. Application of the SDRE Technique in the satellite attitude and orbit control system with nonlinear dynamics. IN: INTERNATIONAL CONFERENCE ON SPACE OPERATIONS, 15., 2018. **Proceedings...** 2018.

ROMERO, A.; SOUZA, L. Application of a new optimal factorization of the SDRE method in the satellite attitude and orbit control system design with nonlinear dynamics. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON ADVANCES IN SATELLITE AND SPACE COMMUNICATIONS SPACOMM, 11., 2019, Valencia, Spain. **Proceedings...** 2019.

SANTOS, R.J.M. **Controle Hinf baseado na equação de Riccati dependente de estado para sistemas dinâmicos multivariáveis não lineares.** Dissertação (Mestrado em Engenharia de Eletricidade) - Universidade Federal do Maranhão, São Luíz, 2018.

SHIHABUDHEEN, K. V.; THANKACHAN, J.; VASISTA C. SDRE control of flexible beam manipulator. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON SOFT COMPUTING TECHNIQUES AND IMPLEMENTATIONS (ICSCTI), 2015, Faridabad. **Proceedings...** 2015. p. 148-154. DOI: 10.1109/ICSCTI.2015.7489584.

SHAWKY, A.; ORDYS, A.W.; GRIMBLE, M.J. End-point control of a flexible-link manipulator using H<sub>∞</sub> nonlinear control via a state-dependent Riccati equation. In: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON CONTROL APPLICATIONS, 2002, Glasgow, United Kingdom. **Proceedings...** IEEE, 2002. p.501-506.

SHAWKY, A.; ZYDEK, D.; ELHALWAGY, Y. Z.; ORDYS, A. Modeling and nonlinear control of a flexible-link manipulator. **Applied Mathematical Modelling**, v.37, n.23, p.9591-9602, 2013.

SKOGESTAD, S.; POSTLETHWAITE, I. **Multivariable feedback control: analysis and design**. Chichester, UK: John Wiley and Sons, 2001.

SOUZA, L. C. G. d. **Dynamics and robust control for uncertain flexible space systems**. Tese (Doutorado) — Cranfield University, Cranfield, 1992.

SOUZA, L.C.G.; GONZALES, R. G. Satellite simulator control system design using SDRE method. **Journal of Mechanics Engineering and Automation**, v. 6, p.123-32, 2011.

STANSBERRY, D.T.; CLOUTIER, J.R. Position and attitude control of a spacecraft using the state dependent Riccati equation technique. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 2000. **Proceedings...** 2000.

STAPIEN, S.; SUPERCZYŃSKA, P.; DOBROWOLSKI, D.; DOBROWOLSKI, J. SDRE-based high performance feedback control for nonlinear mechatronic systems. **COMPEL - The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering**, v.38, n.4, p.1164-1176, 2019.

SZNAIER, M.; CLOUTIER, J.; HULL, R.; JACQUES, D.; MRACEK, C. Receding horizon control Lyapunov function approach to suboptimal regulation of nonlinear systems. **Journal of Guidance, Control and Dynamics**, v. 23 n. 3, p. 399-405, 2000.

WINTER, O.C.;MELO, C. F. **A era espacial: a conquista do espaço: do Sputnik à Missão Centenário**. São Paulo: Livraria da Física, 2007. ISBN 978-85-88325-89-0.

WU, N. S.; WU, Z.; RADICE, G.; WANG, R. Adaptive control for spacecraft relative translation with parametric uncertainty. **Aerospace Science and Technology**, v. 31, n. 1, p. 53–58, 2013.

YOON, H.; AGRAWAL, B.N. Novel expressions of equations of relative motion and control in Keplerian orbits, **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, v. 32, n. 2, p. 664–669, 2009.

ZAMES, G. Feedback and optimal sensitivity: model reference transformations, multiplicative seminorms and approximate inverses. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v.26, n.2, p. 301-320, Apr. 1981. ISSN 0018-9286.

ZHOU, K.; DOYLE, J. C. **Essentials of robust control**. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 1998.