



Estudo da eficiência dos métodos regula falsi e Fourier-Bessel na solução da equação de Kepler

*RELATÓRIO FINAL DO PROJETO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA
(PIBIC/CNPq/INPE)*

JOÃO FRANCISCO NUNES DE OLIVEIRA
(Escola de Engenharia de Lorena - USP, Bolsista PIBIC/CNPq)
E-mail: joao.fno@alunos.eel.usp.br

Dr. HÉLIO KOITI KUGA
(DEM/INPE, ORIENTADOR)
E-mail: helio.kuga@inpe.br

Dra. ROBERTA VELOSO GARCIA
(EEL/USP, ORIENTADORA)
E-mail: robertagarcia@usp.br

LORENA - SÃO PAULO - BRASIL
29 de Junho de 2016

Resumo

Este trabalho busca comparar métodos numéricos de soluções da equação de Kepler, cuja equação tem importância significativa na mecânica celeste. O estudo abordado neste projeto compreende os seguintes métodos numéricos: método de Newton-Raphson, método Regula-falsi, método de Halley e método de Fourier-Bessel. O estudo aborda também a eficiência do valor inicial aplicado aos métodos iterativos, dado que esses valores iniciais são avaliados de diferentes formas: E_0 na forma simples e E_0 na forma interpolada. Os resultados estatísticos apresentaram que o valor inicial mais eficiente em termos de ciclos é o E_0 na forma interpolada e o método mais eficiente em termos globais é o método de Halley.

Conteúdo

1	Introdução	2
2	A equação de Kepler	3
2.1	A equação de Kepler	3
2.2	Por velocidade areolar	4
2.3	Por mecânica clássica	6
3	Métodos de soluções para a equação de Kepler	9
3.1	Método de Newton-Raphson	9
3.1.1	E_0 na forma simples	9
3.1.2	E_0 na forma de interpolação	10
3.2	Método de Ragula-Falsi	11
3.3	Método de Halley	12
3.4	Método de Fourier-bessel	13
4	Resultados	15
4.1	Análise Preliminar dos Métodos de Solução da Equação de Kepler . . .	15
4.2	Análise comparativa entre os métodos de solução da equação de Kepler	19
4.3	Análise dos dados numérico	22
4.3.1	Cálculo do tamanho amostral	22
4.3.2	Teste de Normalidade	24
4.3.3	Comparação de amostras por Kruskal-Wallis	25
4.3.4	Comparação entre grupos	25
4.4	Análise de resultados para casos específicos de e e M	26
5	Comentários finais	29
A	Resultados das Faixas	30
B	Box-Plot	33
	Referências Bibliográficas	33

Capítulo 1

Introdução

Os satélites artificiais são empregados em diversas atividades dentre elas destacam: exploração espacial, mapeamento terrestre, realização de experiência em micro gravidade, campo magnético terrestre, telecomunicação etc.

Independente da missão a qual o satélite se destina, ter o conhecimento da posição do veículo espacial na sua orbita com precisão é fundamental para o bom desempenho de missão. A equação de Kepler faz a ponte entre a posição e o instante que o satélite se encontra.

Em termos matemáticos a equação de Kepler é uma aplicação da anomalia excêntrica (E) com a excentricidade (e) (a excentricidade é apenas introduzido como parâmetro para a anomalia média (M) ficando como $K : (E) \in \mathfrak{R} \rightarrow M \in \mathfrak{R}$. Essa aplicação nos da uma ideia como é de fato a equação aparece nas referencias, podendo ser resumida como no diagrama a seguir:

$$\begin{array}{ccc} \theta & \xrightarrow{f} & t \\ \downarrow \widetilde{E} & & \downarrow \widetilde{M} \\ E & \xrightarrow{K} & M \end{array} \quad (1.1)$$

onde θ é a anomalia verdadeira, t é o tempo, e \widetilde{E} é uma bjeção no intervalo de $\{\theta \in \mathfrak{R} / 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ que relaciona anomalia verdadeira e a anomalia excêntrica, \widetilde{M} é uma bjeção que relaciona o tempo com anomalia média $\{\forall t \in \mathfrak{R}^+\}$ e f é a uma função que será explicada a diante.

Este trabalho esta relacionado com métodos matemáticos para determinar métodos para f^{-1} ou K^{-1} , os quais destacam os métodos de Newton Raphson, Regula Falsi, Fourier-Bessel e Halley. O método de Newton Raphson já é bastante conhecido por meios da literatura quanto engenharia aeroespacial e analise numérica. sendo considerado neste trabalho como referencia nas comparações entre demais soluções.

Capítulo 2

A equação de Kepler

2.1 A equação de Kepler

A equação de Kepler é uma equação muito utilizada no meio da astronomia e engenharia aeroespacial. Para a equação de Kepler, considere as leis de Kepler enunciadas por [1]:

1. Cada planeta revolve em torno do Sol em uma órbita elíptica, com o Sol ocupando um dos focos da elipse.
2. A linha reta que une o Sol ao planeta varre áreas iguais em intervalos de tempo iguais.
3. O quadrado do período comparado ao cubo do semi eixo menor é constante, definido pela equação (2.1).

$$t - T = \frac{2\pi}{ab} \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} A_{SFP} \quad (2.1)$$

sendo que: a semi eixo menor, b semi eixo maior e $\mu = 4\pi^2 a^3 / T^2$. A figura (2.1) apresenta os principais elementos geométricos relacionados ao movimento orbital do satélite. Para determinar a área A_{SFP} tem-se que

$$A_{SFP} = A_{SVP} + A_{SFV} \quad (2.2)$$

A partir da equação (2.2) e após alguns manipulações algébricas tem-se:

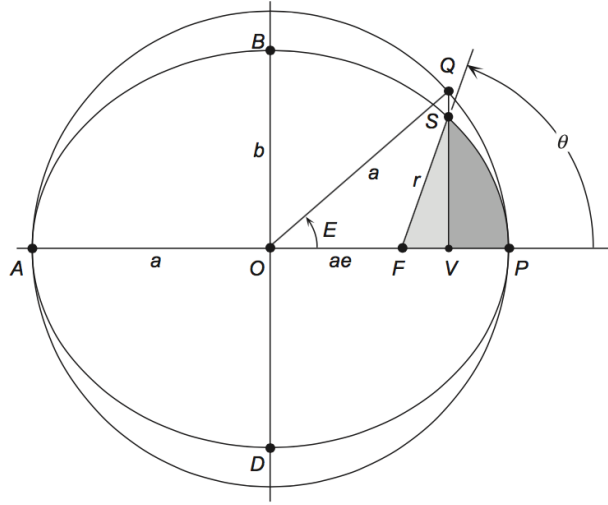


Figura 2.1: Elementos geométricos relacionados ao movimento orbital.

$$A_{SFV} = \frac{ab}{2}[-e \sin(E) + \cos(E) \sin(E)] \quad (2.3)$$

$$A_{SVP} = \frac{ab}{2}[E - \cos(E) \sin(E)] \quad (2.4)$$

Substituindo as equações (2.3) e (2.4) em (2.2), a equação (2.1) poderá ser representada por:

$$M = (t - T) \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} = [E - e \sin(E)] \quad (2.5)$$

determinada "equação de Kepler".

2.2 Por velocidade areolar

Uma forma mais elegante é relacionar a velocidade taxa na qual uma determinada area é varrida durante a trajetória do raio do vetor o momento angular ou seja pode ser dada pelo produto vetorial da posição que estava (P) com a posição onde ele foi (P'). Mostrado esquematicamente na figura [2.2].

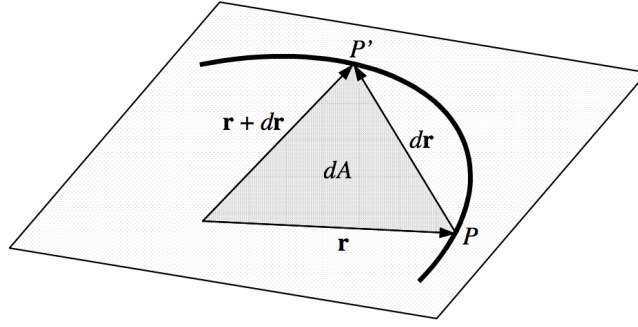


Figura 2.2: Velocidade areolar

Na figura (2.2) dA é a fração de área percorrida de P à P' , dr é a fração de arco percorrido.

Das propriedades de produto vetorial tem-se que, a metade do modulo do produto vetorial é igual a área do triângulo dos dois vetores. Que mostrada a seguir

$$A = \frac{1}{2} \left| \vec{r} \wedge (\vec{r} + d\vec{r}) \right| \quad (2.6)$$

Dividindo a equação (2.6) por δt e tomando o limite de $\delta t \rightarrow 0$ têm-se:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\vec{r} \wedge \vec{v}}{2} \quad (2.7)$$

Da equação (2.7) obtem-se uma solução entre taxa areolar¹. e o momento angular dado por:

$$2 \frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\vec{H}}{m} \quad (2.8)$$

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{cases} \quad (2.9)$$

derivando o sistema de coordenada em relação ao tempo respectivamente tem-se:

$$\begin{cases} \dot{x} = -r \sin(\theta) \dot{\theta} \\ \dot{y} = r \cos(\theta) \dot{\theta} \end{cases} \quad (2.10)$$

com isso tem-se a velocidade tangencial a do corpo. Fazendo produto vetorial do sistema de coordenadas, equações (2.9) e (2.10),tem-se:

$$h = mr\dot{\theta} \quad (2.11)$$

Da equação (2.11) combinada com a equação da elipse na forma polar, é a equação de Kepler escrita de outros modo como mostrado na equação (2.28). Esta equação sera util na seção (2.3) pois continuara prosseguindo para chegar na forma tradicional da equação.

¹ O vetor área é um vetor cuja o versor representa o vetor normal a superfície e seu modulo igual a área varrida pelo vetor r .

2.3 Por mecânica clássica

Outra forma de deduzir a equação de Kepler utilizando um formalismo matemático mais robusto é considerando a ideia de campo de forças central. Para isso será considerado o problema de dois corpos, onde a força de atração gravitacional definida por newton é dado por:

$$F_{12} = G \frac{m_1 m_2}{(x_1 - x_2)^2} \quad (2.12)$$

a equação (2.12) mostra que a força é proporcional ao produto das massas e o inverso do quadrado da distancia entre elas, na qual m_1 e m_2 representa as massas do objetos e x_1 e x_2 a posição deles em relação a um sistema de coordenadas genéricas.

Contudo pela 3 principio de Newton que diz que toda força tem uma reação, ou se ja $F_{12} = F_{21}$.

Seja a segunda lei de Newton anunciada por $m\ddot{x} = f(x)$, definindo um conjunto de equações diferenciais de segunda ordem em \mathbb{R}^3 .

Seja o referencial fixo em um dos corpos de massa. O campo de força dado por:

$$f(x) = -\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3} \quad (2.13)$$

onde $\|x\|$ significa a norma de \vec{x} . Para efeitos de calculo considera um sistema normalizado ou seja $Gm_1m_2 = 1$. Seja o espaço vetorial em \mathbb{R}^3 integrável e as seguintes definições:

Seja o espaço

Definição 1 Um campo de forças $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ é dito central se $f(x)$ é sempre colinear com a reta que passa 0 e $x \in \mathbb{R}^n$.

Definição 2 Seja f um campo de forças conservativo com potencial U , isso implica $f = -\nabla U$.

Com essas definições leva a certas evidencias tratados como

1. f é uma força central.
2. Existe uma função $h : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ tal que $f(x) = h(\|x\|)x$.
3. Existe uma função $g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ tal que $U(x) = g(\|x\|)$

O potencial U em coordenadas cartesianas que é dado por:

$$U(x) = g(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}) \quad (2.14)$$

logo a derivada da equação (2.14).

$$\frac{\partial U(x)}{\partial x_i} = g'(\|x\|) \frac{1}{2} 2x_i (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\|x\|} g'(\|x\|) x_i \quad (2.15)$$

onde i é definido como $i = \{1, 2, 3\}$ O gradiente de U é:

$$-f(\vec{x}) = \vec{\nabla}U(\vec{x}) = \frac{1}{\|\vec{x}\|}g'(\|\vec{x}\|)(\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \vec{x}_3) \quad (2.16)$$

com isso:

$$h(\|x\|) = -\frac{g'(\|x\|)}{\|x\|} \quad (2.17)$$

Com isso mostra-se que o potencial $U(x)$ só depende de $\|\vec{x}\|$ logo $U(x)$ é constante em esferas em torno do corpo de atuação.

Definição 3 Se $x(t)$ descrever o movimento de uma partícula sob a ação de um campo central em \mathbb{R}^3 , então $x(t) \wedge \dot{x}(t)$ é constante.

$$\frac{d}{dt}(x \wedge \dot{x}) = \dot{x} \wedge \dot{x} + x \wedge \ddot{x} = 0 + x \wedge \frac{1}{m}f(x) = x \wedge \frac{h(\|x\|)}{m}x = 0 \quad (2.18)$$

Definição 4 O movimento de uma partícula sob a ação de um campo de forças central em \mathbb{R}^3 fica restrito a um plano.

Da condição de vetores ortogonais em um plano tem-se:

$$\langle x, v_0 \rangle = \langle x, x \wedge \dot{x} \rangle = 0 \quad (2.19)$$

das definições 2 e 3:

$$\begin{cases} x' = \dot{x} \\ x' = \frac{f(x)}{m} \end{cases} \quad (2.20)$$

Definição 5 O momento angular em coordenadas polares é dado como $h(r, \theta) = mr^2\dot{\theta}$

A demonstração foi efetuada anteriormente seção (2.2). Agora já estabeleceu uma dependência temporal em relação a sua posição. Porém falta determinar o aspecto geométrico da orbita para completar a quantidade e variáveis para a sução do sistema diferencial associado. Para definir a energia total sera definido.

$$u(\theta) = \frac{1}{r(\theta)} \quad (2.21)$$

Apenas uma mudança de variável da energia potencial. Tem-se que a energia cinética é dada como;

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}\|\dot{x}\|^2 = \frac{m}{2}(r^2 + (r\dot{\theta})^2) \quad (2.22)$$

fazendo a devida mudança de variável tem-se

$$r' = \frac{d}{dt} \frac{1}{u(\theta(t))} = -\frac{1}{(u(\theta))^2} \frac{du}{d\theta} \theta' = -r^2 \theta' \frac{du}{d\theta} = -\frac{h}{m} \frac{du}{d\theta} \quad (2.23)$$

Portanto a energia cinética é dada como:

$$T = \frac{m}{2} \left[\frac{h^2}{m^2} \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + \frac{h^2}{m} u^2 \right] = \frac{h^2}{2m} \left[\left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 \right] \quad (2.24)$$

Lembrando que a energia potencial (E_p) é:

$$E_p(r, \theta) = U(r, \theta) = -\frac{1}{r(\theta)} = -u(\theta) \quad (2.25)$$

logo fazendo as devidas manipulações para chegar no resultado tem que

$$u'' + u' - c = 0 \quad (2.26)$$

tendo como solução desta equação diferencial como

$$u = c(1 + e \cos(\theta - \theta_0)) \quad (2.27)$$

com isso ja pode estabelecer a geometria da orbita e resolver o sistema diferencial. O sistema é definido como:

$$\begin{cases} \theta = \int_0^t \frac{h}{r^2} dt \\ r = \frac{h^2}{m[1+e \cos(\theta-\theta_0)]} \end{cases} \quad (2.28)$$

para chegar na equação de Kepler, será foi feita a resolução do sistema de equações diferenciais (2.28). Para deixa-la na forma convencional será que adotado uma solução da integral para $0 < e < 1$ fica: substituindo a função do sistema na integral no sistema (2.28) tem-se uma integral da forma (2.29) consideração de que $a=1$ $b=e$ nas equações a seguir como mostrado em [5]:

$$\int \frac{dx}{(a + b \cos x)^2} = \frac{1}{(a^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}} \left[2 \left(\tan^{-1} \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \right)^{-1} x \tan \frac{a}{x} - \frac{a \sqrt{a^2 - b^2} \sin x}{a + a \cos x} \right] \quad (2.29)$$

substituindo a e b por 1 e e ficará como:

$$\frac{\mu^2}{h^3} t = \frac{1}{(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}} \left[2 \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{\theta}{2} \right) - \frac{e \sqrt{1 - e^2} \sin \theta}{1 + e \cos \theta} \right] \quad (2.30)$$

faz se as devidas substituições para chegar em:

$$M_e = \frac{\mu^2}{h^3} t (1 - e^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{2\pi}{T} t \quad (2.31)$$

$$e \sin E = \frac{e \sqrt{1 - e^2} \sin \theta}{1 + e \cos \theta} \quad (2.32)$$

$$E = 2 \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{\theta}{2} \right) \quad (2.33)$$

portanto com a composição das equações (2.31) - (2.33) tem a famosa equação de Kepler

$$M_e = E - e \sin E \quad (2.34)$$

Capítulo 3

Métodos de soluções para a equação de Kepler

3.1 Método de Newton-Raphson

A ideia de Newton era aproximar a raiz de uma função utilizando retas secantes entre um intervalo $[\alpha, \beta]$. Se a raiz de uma função é x quando $f(x) = 0$ essa raiz é um ponto do espaço contido na aplicação de classe C^k onde $k \in \mathbb{N}$ para todo $k > 1$ sendo $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ tal que $x \in \mathbb{R}^n$ e $n \in \mathbb{N}$.

Visto a generalização anteriormente, é possível simplificar o problema como será descrito a seguir. Vamos supor que se deseja encontrar uma raiz ξ da função f , e considere uma aproximação inicial x_1 rudimentar de ξ . A melhor aproximação linear de $y = f(x)$ próximo de $x = x_1$ é dada pela reta tangente ao gráfico de f em x_1 . Portanto, é razoável esperar que o corte dessa reta com o eixo x forneça uma melhor aproximação de ξ . Denotemos esse corte por x_2 , figura (3.1). Agora, é possível tratar de x_2 da mesma forma que tratamos x_1 . Se $f(x_2) = 0$, então $\xi = x_2$. Se $f(x_2) \neq 0$, então constrói-se a reta tangente de f em x_2 e tomemos x_3 como sendo o corte dessa reta com o eixo das abscissas. Tal processo de repete até que x_i convirja para ξ . Em geral, se ξ for a i -ésima aproximação, então a aproximação x_{i+1} será dada por (3.1),[9]:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad (3.1)$$

com erro $\epsilon = \xi - x_n$. A equação (3.1) aplicada a equação de Kepler pode ser representada por:

$$E_{i+1} = E_i - \frac{E_i - e \sin(E_i) - M}{1 - e \cos(E_i)} \quad (3.2)$$

3.1.1 E_0 na forma simples

Um valor inicial para E_0 sugerido em algumas referencias como, por exemplo, em Battin (1999) e Bate (1971), pode ser obtida considerando

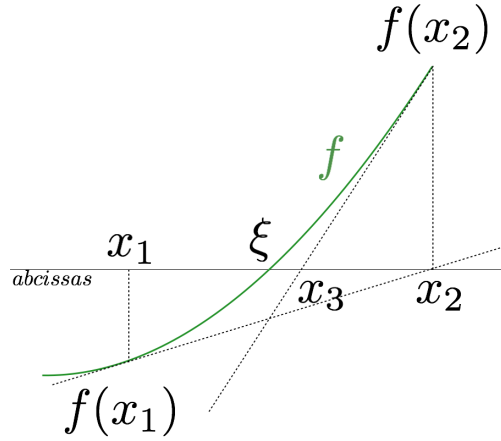


Figura 3.1: Metodo de Newton-Raphson graficamente

$$-1 \leq \sin E \leq 1 \quad (3.3)$$

Desenvolvendo as inequações, tem-se

$$-e \leq e \sin E \leq e \quad (3.4)$$

$$+e \geq M - e \sin E \geq M - e \quad (3.5)$$

ou seja

$$E \approx M \pm e \quad (3.6)$$

sendo $E \approx M+e$ quando $2\pi k \leq E < \pi+2\pi k$, e $E \approx M-e$ quando $2\pi+2\pi k > E \geq \pi+2\pi k$ para $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

Desta forma, um valor inicial para E_0 será dado por [2]:

$$E = M \pm e \quad (3.7)$$

Para evitar termos longos no decorrer do texto será definido " E_0 na forma simples" por " E_{0s} ".

3.1.2 E_0 na forma de interpolação

Outra forma de se obter o valor de E_0 é utilizar a interpolação entre pontos. Considere a figura 3.2. Da condição de linearidade de 3 pontos, tem-se que:

$$\begin{vmatrix} x_3 & 0 & 1 \\ x_1 & f_1 & 1 \\ x_2 & f_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (3.8)$$

Resolvendo o determinante da equação (3.8) obtem-se a equação

$$x_3 = \frac{x_2 f_1 - x_1 f_2}{f_1 - f_2} \quad (3.9)$$

sendo a equação (3.9) semelhante a equação da regra false (3.12). Adaptando-a para os termos da Equação de Kepler, equação. (2.5), tem-se [2]:

$$E_0 = M + \frac{e \sin(M)}{1 - \sin(M + e) + \sin(M)} \quad (3.10)$$

O valor de E_0 dado pelo equação (3.10) será denominado E_{0i} .

3.2 Método de Ragula-Falsi

O Método regula falsi é uma técnica simples e iterativa, o qual consiste em considerar duas aproximações iniciais x_1 e x_2 tais que $f(x_1)$ e $f(x_2)$ tenham sinais opostos, ou seja

$$f(x_1) \cdot f(x_2) < 0 \quad (3.11)$$

a partir de então outra aproximação x_3 pode ser determinada considerando a equação da reta secante à função $f(x)$ no intervalo $[x_1, x_2]$. A aproximação x_3 é obtida a partir de [9]:

$$x_3 = \frac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} \quad (3.12)$$

se

$$\left| \frac{x_3 - x_1}{x_3} \right| < \epsilon \quad \text{ou} \quad \left| \frac{x_3 - x_2}{x_3} \right| < \epsilon \quad (3.13)$$

para um dado ϵ pré-fixado, então x_3 é a raiz procurada. Caso contrário, calcula-se $f(x_3)$ fazendo a escolha por um valor x entre x_1 e x_2 cujo $f(x)$ tenha sinal oposto ao de $f(x_3)$. A partir de x_3 e este ponto, calcula-se x_4 e assim sucessivamente. O processo deve ser repetido até que se obtenha uma raiz com a precisão desejada. A figura (3.2) apresenta a interpretação geométrica do Método regula falsi.

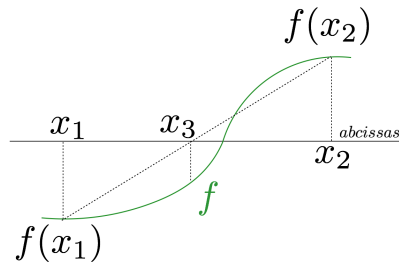


Figura 3.2: Método regula falsi graficamente

A equação (3.12) adaptado à equação de Kepler poderá ser reescrita como:

$$E_3 = \frac{E_1(E_2 - e \sin(E_2)) - E_2(E_1 - e \sin(E_1))}{E_2 - E_1 + e(\sin(E_1) - \sin(E_2))} \quad (3.14)$$

3.3 Método de Halley

O método de Halley (H) fornece um número infinito de generalizações de ordem superior para o método de Newton com o propósito de encontrar uma raiz de uma determinada equação não linear. O método requer cálculos analíticos e numerosas derivadas da ordem superior da função que se baseia na raiz.

Ou seja analisando uma função $f(x)$ definida como $f : \Omega \in \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ sendo o espaço Ω derivável e definindo como x_0 o ponto inicial para a expansão e o passo como ε . A expansão propriamente dita em Taylor [4].

$$f(x_0 + \varepsilon) = f(x_0) + f'(x_0)\varepsilon + \frac{f''(x_0)}{2!}\varepsilon^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}\varepsilon^3 + \dots \quad (3.15)$$

Escrevendo a equação (3.15) em forma de sistema linear tem-se:¹

$$\begin{cases} f'(x_0)\varepsilon + \frac{f''(x_0)}{2}\varepsilon^2 = -f(x_0) - \frac{f'''(x_0)}{6}\varepsilon^3 + O^4 \\ f(x_0)\varepsilon + f'(x_0)\varepsilon^3 = -\frac{f''(x_0)}{2}\varepsilon^3 + O^4 \end{cases} \quad (3.16)$$

a ideia é resolver o sistema em ε para deixar o processo iterativo da forma

$$x_{n+1} = x_n + \varepsilon_n \quad (3.17)$$

para resolver o sistema será utilizado o método de Cramer ² mostrado a seguir:

$$\varepsilon = \frac{\begin{vmatrix} -f(x_0) & f''(x_0)/2 \\ 0 & f'(x_0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f'(x_0) & f''(x_0)/2 \\ f(x_0) & f'(x_0) \end{vmatrix}} \quad (3.18)$$

com isso ε é dado por:

$$\varepsilon = -\frac{2f(x_0)f'(x_0)}{2[f'(x_0)]^2 - f(x_0)f''(x_0)} \quad (3.19)$$

portanto generalizando para as demais iterações:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)f'(x_n)}{2[f'(x_n)]^2 - f(x_n)f''(x_n)} \quad (3.20)$$

por fim aplicando para a equação de Kepler tem-se:

$$E_{n+1} = E_n - \frac{2[E_n - e \sin(E_n) - M_e][1 - e \cos(E_n)]}{2[1 - e \cos(E_n)]^2 - [E_n - e \sin(E_n) - M_e]e \cos(E_n)} \quad (3.21)$$

¹ O^n significa termos de n-ésimo ordem.

²Método envolvendo determinantes para resolução de sistemas lineares.

3.4 Método de Fourier-bessel

Para solucionar a equação de Kepler utilizando a série de Fourier é necessário representar E como uma série. Os coeficientes desta série são funções de Bessel, e, por isso o nome do método discutido neste projeto.

Dada a equação (2.5) tem-se que [2]:

$$\frac{dE}{dM} = \frac{1}{1 - e \cos(E)} \quad (3.22)$$

série de Fourier de uma função $f(x)$ dada por:

$$f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(mx) + b_n \sin(mx)] \quad (3.23)$$

Definindo $f(x) = dE/dm$, os coeficientes da série podem ser dados por:

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dE}{dM} dM = 1 \quad (3.24)$$

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(kM)}{1 - e \cos(E)} dM = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kM) dE \quad (3.25)$$

onde $\cos(kM) = \text{Re} [e^{i(kM)}]$ sendo $i^2 = -1$. Agora a função pode ser escrita dessa forma $g = e^{ik[E - e \sin(E)]}$ considerando as devidas substituições de variáveis tem-se que [2]:

$$v = -ke \quad (3.26)$$

$$x = e^{iE} \quad (3.27)$$

$$g = e^{ikE} \cdot e^{[\frac{v}{2}(x - \frac{1}{x})]} \quad (3.28)$$

escrevendo a função g em série de Laurent, tem-se:

$$g = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{\left(\frac{v}{2}\right)^{l+j}}{l!j!} x^{l-j} \quad (3.29)$$

onde a função g se assemelha com a função de Bessel ou seja:

$$g = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(v) \cdot x^n \quad (3.30)$$

Genericamente a integral dada pela equação (3.25) será dada por:

$$A_k = \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(-ke) \int_{-\pi}^{\pi} \text{Re} [e^{iE(n+k)}] dE \quad (3.31)$$

se $n + k = 0$, o resultado de A_k é dado por:

$$A_k = 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(ke) \quad (3.32)$$

Desta forma, pode representar a equação (??) pela série:

$$\frac{dE}{dM} = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_k(ke) \cos(kM) \quad (3.33)$$

portanto:

$$E = M + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left[J_k(ke) \frac{\sin(kM)}{k} \right] \quad (3.34)$$

Capítulo 4

Resultados

Neste capítulo são apresentados os resultados obtidos a partir dos métodos de solução da equação de Kepler que foram abordados neste trabalho. O *software* Matlab foi utilizado para implementação do código associado aos métodos de solução, podendo ser resumido a partir do fluxograma apresentado na figura (4.1). Para que as conclusões a respeito do método mais eficiente (dentro das especificações do projeto) tivessem um embasamento mais robusto, as discussões foram realizadas em 4 etapas. Inicialmente foram verificadas a quantidade de operações (ou Floating-point Operations Per Second - FLOPS) exigidas em cada método além da escolha do valor inicial de E . A seguir são analisados o conjunto de soluções obtidos em cada método para um intervalo de e e M . Um estudo estatístico dos resultados é efetuado numa terceira etapa e, por fim, são escolhidas faixas de excentricidades mais usuais para definir o método mais adequado em situações reais.

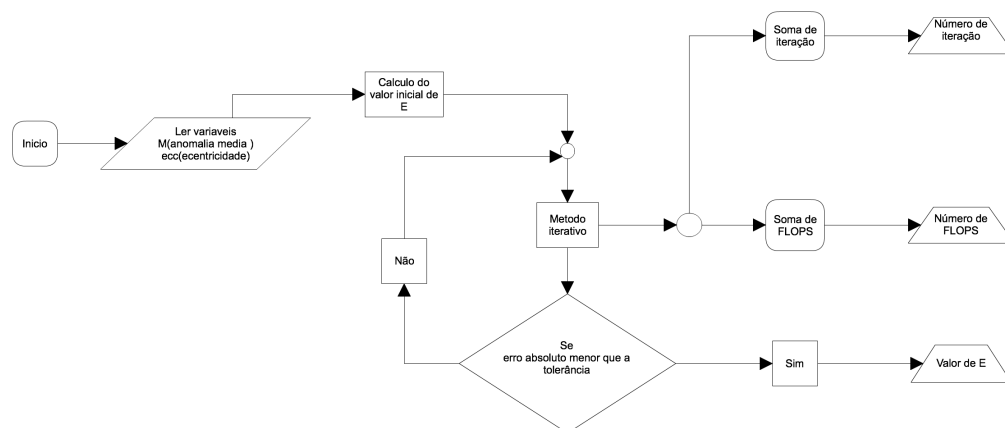


Figura 4.1: Fluxograma para solução da equação de Kepler

4.1 Análise Preliminar dos Métodos de Solução da Equação de Kepler

Vários são os métodos numéricos que tornam possível se chegar a solução de uma equação transcendental. No entanto, cada método exigirá uma quantidade de operações

que poderá interferir diretamente no tempo de convergência e na precisão da solução. Neste trabalho serão abordados os seguintes métodos: método de Newton-Raphson (NR), método da Regula-falsi (RF), método de Halley (H) e a expansão em série Fourier-Bessel (FB). A tabela (4.1) mostra a quantidade de operações (somadas e subtrações, multiplicações e divisões, funções trigonométricas e polinômios especiais) necessárias em cada método por ciclo.

Tabela 4.1: Contagem de operações

Método	nº(+ e -)	nº(x e /)	nºFunções trig.	nºPol. Especiais
Newton Raphson	4	3	2	0
Regula Falsi	6	6	4	0
Halley	9	11	6	0
Fourier-Bessel	1	5	1	1

Observa-se que o método de Halley apresenta o maior número de operações por ciclo. No entanto, a convergência deste método (como será visto mais adiante) ocorre rapidamente, ou seja, este número de operações não se repete muitas vezes, pois são necessárias poucas iterações para obtenção da solução. A solução a partir da expansão da série Fourier-Bessel deve ser analisada de forma especial, pois sendo um somatório, o número de operações dependerá da ordem de truncamento deste somatório. O número de operações apresentados na tabela são referentes a primeira ordem de truncamento.

Outra forma de apresentar a tabela (4.1) é a partir de uma abordagem vetorial. Seja cada método definido como um vetor da forma $\vec{M} = (a_1 \cdot e_1 + a_2 \cdot e_2 + a_3 \cdot e_3 + a_4 \cdot e_4) \quad \forall a_i \in \mathbb{R}$, onde e_i representa uma base unitária em \mathbb{R}^4 com $i = 1, 2, 3, 4$ associada a base das adições e subtrações, multiplicações e divisões, funções trigonométricas e polinômios especiais, respectivamente. Agora é possível mostrar como o vetor se difere da base através do módulo e do argumento do plano entre a base e o vetor. Fazendo uma analogia com o espaço euclidiano de dimensão 3 define-se um espaço com base canônica e_i com $i = \{1, 2, 3\}$, um plano α definido pelos vetores \vec{M} e e_i (no caso do exemplo $i = 1$). O ângulo θ entre os vetores \vec{M} e e_i no plano α é dado por:

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{\vec{M} \cdot e_i}{\|\vec{M}\|} \right) \quad (4.1)$$

A figura (4.2) apresenta geometricamente o que foi descrito na dimensão 3.

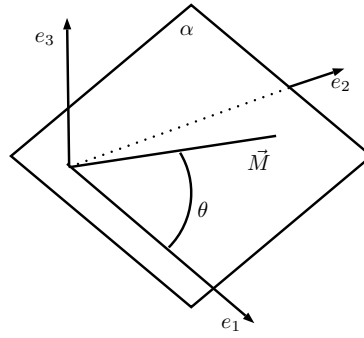


Figura 4.2: Representação do espaço vetorial em \mathbb{R}^3

A tabela (4.2) é uma representação da tabela (4.1) considerando o espaço vetorial de dimensão 4.

Tabela 4.2: Contagem de operações (em uma abordagem vetorial)

Método	Módulo	Ângulo (+ e -)	Ângulo (\cdot e $/$)	Ângulo Funções trig.	Ângulo Pol. Especiais
NR	5.385E+00	42.031	56.145	68.199	90.000
RF	9.381E+00	50.238	50.238	64.761	90.000
H	1.543E+01	54.311	44.519	67.113	90.000
FB	5.292E+00	79.107	19.107	79.107	79.107

As unidades dos módulos são unidades arbitrárias e os ângulos são apresentados em graus. A tabela (4.2) nos fornece a noção do tamanho do cálculo necessário por método e os ângulos nos fornece a idéia do quanto esta se afastando de determinada operação. Por exemplo, os menores ângulos (≈ 0) mostram que o método possui mais operações caracterizada pela base que esta associada, entretanto se o ângulo estiver próximo de 90° implicará que o vetor que determina um método estará mais afastados de tal base contendo menos cálculos da operação definida pela base.

Outro aspecto importante a ser considerado antes da implementação dos algoritmos é definir a forma de obtenção do valor inicial da anomalia excêntrica E_0 . Para esta análise foram consideradas duas formas de cálculo de E_0 e ambas foram avaliada com relação ao método NR (assumido como referência). As equações que definem a forma de cálculo para E_0 estão mostradas na seção (3.1) e são denotadas por E_{0s} e E_{0i} . A figura (4.3) mostra o gráfico box plot comparativo entre as duas formas de E_0 quanto ao número de iterações necessárias quando o método NR é considerado para solução da equação de Kepler. Para esta análise foram considerados $e \in [0, 1)$ e $M \in [0, \pi]$, com erro amostral estipulado de 1.5% e nível de confiança de 99%, gerando 7372 amostras. Considerando uma área definida por e e M , tal número de amostragem resultará em um quadrado de aproximadamente 86 amostras para e e 86 amostras para M . O estudo destas amostras será detalhado na seção (4.3.1).

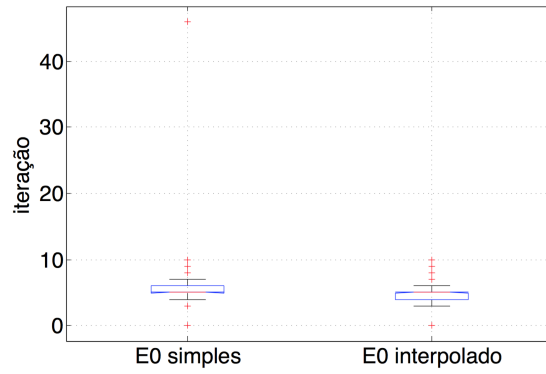


Figura 4.3: Gráfico box plot para valores de E_0

A figura (4.3) mostra que os resultados das amostras para ambos E_0 possuem o mesmo comportamento. No entanto, E_{0s} apresenta out layers mais distantes do que o E_{0i} . Contudo E_{0i} parece ser mais denso (no sentido de aglomerado) do que E_{0s} . Isso implica que o E_{0i} é mais seguro de ser usado, pois os valores não trazem muita dispersão.

Utilizando o teste de Kruskal-Wallis (detalhado nas seções seguintes), tem-se a média de rank e desvio para cada E_0 na tabela (4.3).

Tabela 4.3: Média de Rank e Desvio padrão para E_{0s} e E_{0i}

Valor inicial	Rank	desvio-padrão
E_{0s}	9.5055E+03	4.6208E+01
E_{0i}	5.2875E+03	4.6208E+01

Para o teste de hipótese, considere a seguinte configuração:

H_0 : as amostras serem iguais

H_1 : as amostras serem diferentes

Os resultados obtidos pelas amostras são $\chi^2 = 4166.18$ e $p_{valor} < 0.00001\%$ ¹. O p_{valor} nos mostra que existe 0 de probabilidade de que as amostras sejam iguais com 99% de confiança para tal afirmativa. Isso infere que o valor inicial mais eficiente é de E_{0i} . Devido ao teste de hipótese e pelas médias de rank serem baixas podemos dizer que toda a amostragem está próxima à 5 iterações. Sendo assim, o valor de E_{0i} será a condição inicial considerada no trabalho para a análise dos demais métodos que necessitem de condição inicial.

¹Este valor (0.00001%) será representado no decorrer do trabalho por 0+

4.2 Análise comparativa entre os métodos de solução da equação de Kepler

Nesta seção são apresentados os resultados referentes as implementações dos métodos de solução da equação de Kepler tratados neste trabalho. Para que o estudo contemplasse diversos tipos de excentricidade foi considerado $e \in [0, 1)$, onde somente as órbitas elípticas foram levadas em conta, e $M \in [0, \pi]$, de forma a considerar somente a parte não periódica da anomalia média. A figura (4.4) apresenta uma idéia da malha de pontos associada a solução obtida em cada método.

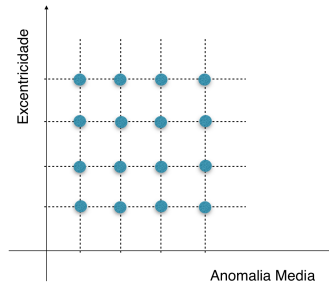


Figura 4.4: Amostragens

O plano $M \times e$ apresenta uma amostragem sistemática dos pontos associados a solução da equação de Kepler. Para cada ponto da malha (M, e) calcula-se o valor de E , utilizando os métodos citados anteriormente, e associado a este cálculo existirá uma quantidade de iterações necessárias (caso dos métodos iterativos: NR, RF, H) ou de termos no somatório (caso da expansão em série FB). O número de iterações ou termos exigidas pelos diferentes métodos em cada ponto $(M \times e)$ é apresentado na forma de curvas de nível, figuras (4.5a), (4.6a), (4.7a) e (4.8a).

A figura (4.5a) apresenta os resultados obtidos pelo método de NR, onde pode-se observar que na região de $e \rightarrow 1$ e $M \rightarrow 0$ existe um acúmulo maior de iteração e, em geral, nas regiões com $e \rightarrow 0$ são necessárias poucas iterações para qualquer M . A figura (4.5b) mostra a frequência com que cada iteração ocorre. O método NR atinge um máximo de 5 iterações para o conjunto de pontos considerados.

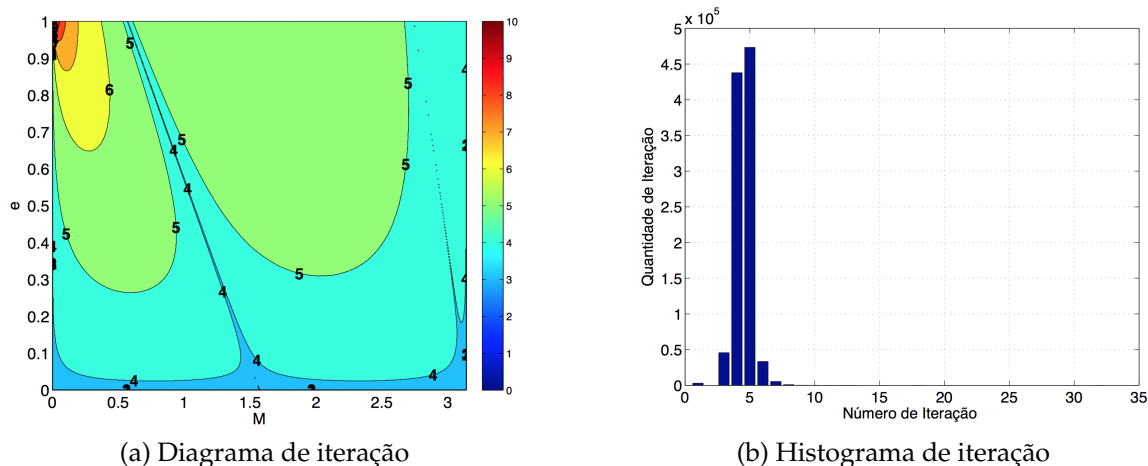


Figura 4.5: Método Newton-Raphson

Os resultados obtidos pelo método Regula-Falsi são mostrados na figura (4.6). O método RF apresenta o pior comportamento, segundo o número de iterações, quando comparado com os métodos iterativos. As figuras (4.6a) e (4.6b) mostram o grande número de iterações exigidas pelo método para que se alcance a solução dentro da precisão desejada.

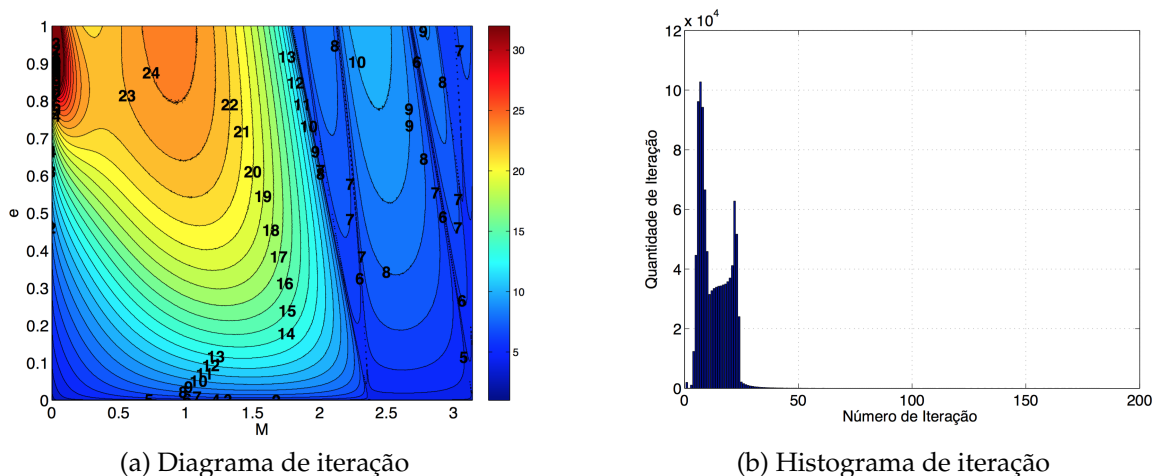
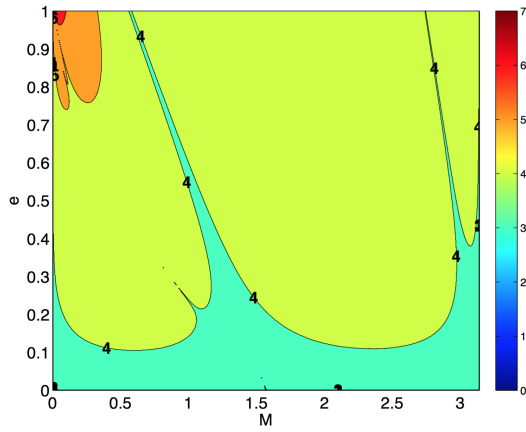
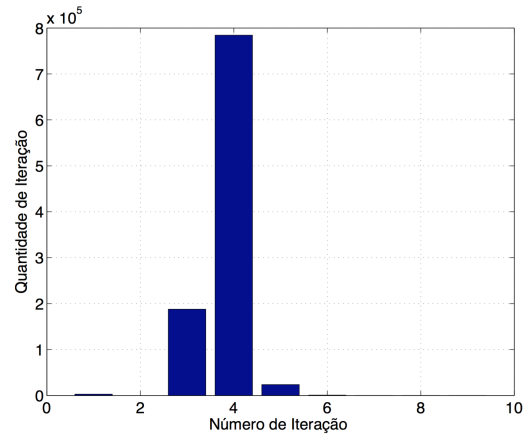


Figura 4.6: Método Regula-falsi

O método de Halley é apresentado na figura (4.7). A figura (4.7a) mostra um comportamento similar ao obtido pelo método NR, figura (4.6a). No entanto, mesmo que sendo uma diferença irrisória, percebe-se que o método de Halley necessita de menos iterações para o cálculo da solução (máximo de 4 iteração).



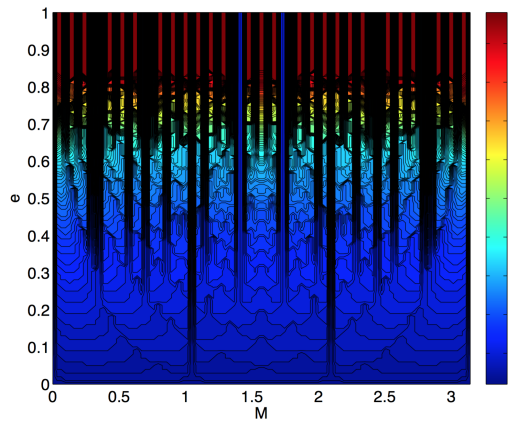
(a) Diagrama de iteração



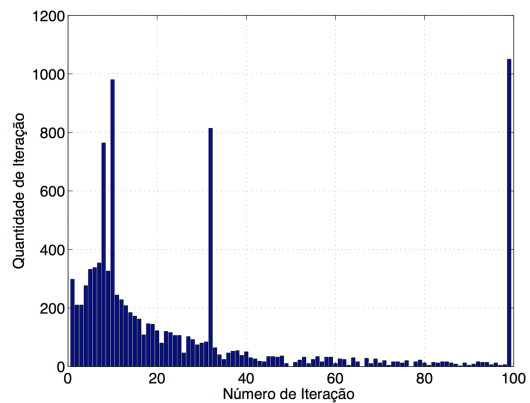
(b) Histograma de iteração

Figura 4.7: Método de Halley

A equação de Kepler também pode ser representada através da expansão da série Fourier-Bessel. Este tipo de método não é iterativo como os demais métodos citados, mas sim depende diretamente da quantidade de termos que será acrescido ao somatório. É importante ressaltar que, embora o método FB não seja iterativo, ele será tratado como tal no que diz respeito a quantidade de termos que será necessário para que a solução esteja dentro da precisão desejada. A implementação foi realizada de tal forma que a iteratividade esteja associada a quantidade de termos necessários no somatório. A figura (4.8a) mostra as curvas de nível associadas a quantidade de termos da série necessárias para o cálculo de E em cada ponto (M, e) . Nota-se que a quantidade de termos sofre muita variação, existindo pontos onde o número de termos do somatório superam 40 termos, figura (4.8b).



(a) Diagrama de k termos da série



(b) Histograma de k termos da série

Figura 4.8: Método Fourier-Bessel

Neste momento pode-se atribuir uma comparação em alguns determinados pontos deste espaço (e, M) , entre precisão simples e dupla. que mostra na tabela a seguir para a precisão simples a tabela (4.4) e para a dupla este referente na tabela (4.5), mantendo

a referência (método NR) em precisão dupla.

Tabela 4.4: Tabela de comparação em precisão simples

Pontos		Newton-Raphson		Regula-False		Halley		Fourier-Bessel	
M	e	E	it	it	erro	it	erro	k	erro
0.001	0.990	8.85E-02	11	120	4.17E-05	5	4.86E-05	1000	1.05E-02
0.100	0.900	6.31E-01	7	15	1.57E-04	4	1.56E-04	157	1.18E-04
1.300	0.600	1.87E+00	5	11	2.84E-03	3	2.84E-03	29	2.84E-03
2.500	0.200	2.60E+00	5	4	2.65E-03	3	2.65E-03	10	2.65E-03

O ponto (0.001,0.990) da tabela (4.4) mostra em valores os altos números de iterações apresentados nas figuras (4.5a)- (4.8a)

Tabela 4.5: Tabela de comparação em precisão dupla

Pontos		Newton-Raphson		Regula-False		Halley		Fourier-Bessel	
M	e	E	it	it	erro	it	erro	k	erro
0.001	0.990	8.85E-02	11	320	7.086E-13	5	3.053E-16	1000	1.06E-02
0.100	0.900	6.31E-01	7	30	2.698E-14	5	9.992E-16	597	5.84E-12
1.300	0.600	1.87E+00	5	21	9.992E-15	4	0.000E+00	82	2.00E-14
2.500	0.200	2.60E+00	5	7	0.000E+00	4	0.000E+00	20	1.02E-14

A tabela (4.5) apresenta o erro absoluto entre o método NR os demais métodos em precisão dupla, onde os erros entre os método estão em ordem 10^{-14} .

4.3 Análise dos dados numérico

Para que os resultados obtidos pelos algoritmos (método de Newton-Raphson, método Regula-falsi, método de Halley e série Fourier-Bessel), forneça informações mais seguras a respeito de qual método é mais eficiente, uma análise estatística é realizada nesta seção.

4.3.1 Cálculo do tamanho amostral

Inicialmente determina-se o valor das amostras, considerando uma amostragem sistemática. Amostragem sistemática consiste em determinar um elemento a partir de uma variável aleatória e de um fator k . A equação(4.2) mostra como formar a sequência das amostras, onde A_0 representa a variável aleatória inicial, A_n os valores da sequência e n o tamanho da amostra ([8]).

$$A_n = A_0 + nk \quad \forall n \in Z \quad (4.2)$$

Adaptando-se a equação(4.2) aos parâmetros do problema, e e M , tem-se que:

$$e_n = e_0 + nk_1 \quad (4.3)$$

$$M_n = M_0 + nk_2 \quad (4.4)$$

Isto remete a figura(4.4) na qual apresenta estes parâmetros graficamente. Como neste trabalho são estudados os intervalos $0 \leq e < 1$ e $0 \leq M \leq \pi$, então tem-se um tamanho infinito da população. Neste caso define-se os parâmetros e e M em termos do número máximo de amostras:

$$e_n = e_0 + n \frac{1}{\max(n)} \quad \forall n \in N \quad | \quad n \leq \max(n) \quad (4.5)$$

$$M_n = M_0 + n \frac{\pi}{\max(n)} \quad \forall n \in N \quad | \quad n \leq \max(n) \quad (4.6)$$

Para calcular o tamanho de amostragem de iteração (it_{amost}) temos a seguinte definição ([8]):

$$it_{amost} = \left(\frac{Z_{\alpha/2}\sigma}{\bar{E}} \right)^2 \quad (4.7)$$

onde $Z_{\alpha/2}$ é o valor crítico associado à distribuição normal e cujo valor está relacionado ao nível de confiança NC ($NC = 1 - \alpha$), σ é o desvio padrão da amostra e \bar{E} é erro amostral.

O tamanho da amostragem de iteração (it_{amost}) pode ser representado por:

$$it_{amost} = \max^2(n) \quad (4.8)$$

Suponha que as amostras sejam normais, de forma que os cálculo sejam válidos, e que o erro amostral, $E = erro_{amost} \cdot \sigma$, seja proporcional² ao desvio padrão. Portanto pode-se atribuir alguns parâmetros:

NC de 99% $\Rightarrow Z_{\alpha/2} = 2.575$

$erro_{amost}$ de 2.58 % do desvio padrão

O valor das amostras e o tamanho máximo das amostra são dados, respectivamente, por:

$$it_{amost} = \left(\frac{Z_{\alpha/2}\sigma}{E} \right)^2 = \left(\frac{Z_{\alpha/2}}{erro_{amost}} \right)^2 = (2.575/0.0258)^2 = 9961 \quad (4.9)$$

$$\max(n) = \sqrt{it_{amost}} = \sqrt{9961} = 100 \quad (4.10)$$

Para estas amostras os métodos de solução abordados neste trabalho são comparados utilizando um gráfico box-plot apresentado na figura (4.9).

²Faz-se isso pois não conhece o desvio padrão das amostras e nem o erro amostral.

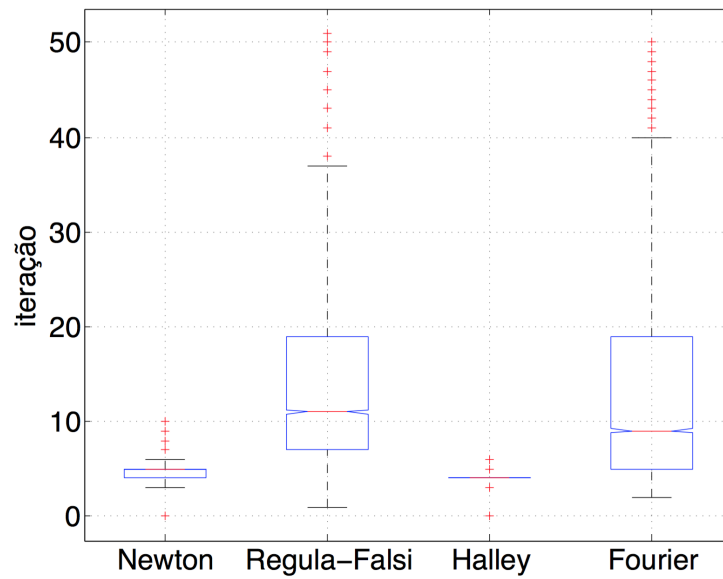


Figura 4.9: Amostras

Observa-se que o método de NR e H são mais adequados pois os desvios padrão e quartis são menores do que os métodos RF e FB. Outro aspecto a ser observado é o grande número de outliers apresentado nos métodos de RF e FB.

4.3.2 Teste de Normalidade

O teste de normalidade tem como objetivo avaliar o quanto as amostras são bem modeladas por uma distribuição normal. Para isso, o teste utilizado será o D'Agostino ([8]).

Para o teste de Hipótese, considere a seguinte configuração:

H_0 : 0 a amostra segue uma distribuição normal

H_1 : 1 a amostra não segue uma distribuição normal

O resultado obtido pelas amostras são tabelados a partir de χ^2 (quanto o valor da amostra difere do esperado) e P_{valor} , mostrados na tabela (A.1).

Tabela 4.6: Resultados do teste de normalidade

Amostras	χ^2	P_{valor}
Newton-Rahpson	4.791e+03	<0.0001
Regula-Falsi	4.154e+02	<0.0001
Halley	6.897e+03	0+
Fourier-Bessel	2.299e+03	0+

Com base nos resultados apresentados na tabela (A.1) podemos concluir, com um nível de significância de 99%, que cada uma das amostras não seguem uma distri-

buição normal. Portanto utilizaremos o teste não paramétrico de Kruskal-Wallis para comparação das amostras.

4.3.3 Comparação de amostras por Kruskal-Wallis

O teste de Kruskal-Wallis é um teste para amostras não paramétricas ([8]). Neste trabalho, será utilizado para comparação entre as medianas das amostras NR, RF, H, FB. As hipóteses são:

$$H_0 : M_i = M_j \quad \forall i \neq j$$

$H_1 : M_i \neq M_j$ para pelo menos um par (i, j) com $i \neq j$, com $i=1,2,3,4$ e $j=1,2,3,4$, onde M_i = mediana do grupo i .

Os resultados do teste são apresentados na tabela (4.7) a seguir.

Tabela 4.7: Resultados do teste de Kruskal-Wallis

	SQ	GL	MQ	χ^2	P_{valor}
EG	2.7912e+012	3.0000e+000	930.3941e+009	21.7397e+003	0+
NG	2.3443e+012	39.9960e+003	58.6143e+006		
Total	5.1355e+012	39.9990e+003			

onde SQ é a soma de quadrados, GL é o grau de liberdade, EG resultados entre grupos, NG resultados no grupo. Pode-se concluir com $P_{valor} = +0\%$ da probabilidade de serem iguais e $\chi^2 \approx 10^4$ que os grupos são diferentes entre si.

Mais detalhes sobre o teste são apresentados em [8]

4.3.4 Comparação entre grupos

Para a comparação entre grupos foi utilizada a função (*multcompare(.)*) do Matlab, que calcula a diferença entre as amostras. Os resultados das diferenças entre pares de amostras são apresentados na tabela (4.8), sendo as amostras definidas por:

- 1 Newton-Raphson
- 2 Regula-Falsi
- 3 Halley
- 4 Fourier-Bessel

A tabela (4.8) apresenta os seguintes resultados: $\min(\Delta)$ a mínima diferença entre amostras, $\bar{\Delta}$ a média da diferença entre amostras e $\max(\Delta)$ a máxima diferença entre amostras. Os resultados mostram como as soluções da equação de Kepler difere por diferentes métodos. Por exemplo, a comparação entre a amostra 1 (Newton-Rahpson) e amostra 2(Regula-falsi) apresenta uma média de $-14.9561e + 003$ de diferença entre

Tabela 4.8: Comparação entre amostras

$amostra_1$	$amostra_2$	$\min(\Delta)$	$\bar{\Delta}$	$\max(\Delta)$	P_{valor}
1	2	-15.3677e+003	-14.9561e+003	-14.5444e+003	3.7683e-009
1	3	5.3960e+003	5.8076e+003	6.2193e+003	3.7683e-009
1	4	-11.5937e+003	-11.1820e+003	-10.7703e+003	3.7683e-009
2	3	20.3520e+003	20.7637e+003	21.1754e+003	3.7683e-009
2	4	3.3624e+003	3.7741e+003	4.1857e+003	3.7683e-009
3	4	-17.4013e+003	-16.9896e+003	-16.5780e+003	3.7683e-009

Tabela 4.9: Média de Rank e desvio-padrão para os métodos

Método	Rank	desvio padrão
Newton	14.9179e+003	113.3098
Regula-Falsi	29.8740e+003	113.3098
Halley	9.1103e+003	113.3098
Fourier-Bessel	26.0999e+003	113.3098

si, com a probabilidade de que isto não seja verdadeiro de $P = 3.7683e - 009$. O rank para os métodos são apresentados na tabela (4.9):

Os resultados do rank associados a cada método fornece uma avaliação sobre qual método é mais eficiente quanto ao número de iterações. Neste caso o método que apresentar um "peso" no rank menor implicará em um menor número de iterações e, portanto, uma maior eficiência. O método de Halley se apresentou mais eficiente, com um rank inferior aos demais métodos.

4.4 Análise de resultados para casos específicos de e e M

Esta seção faz um estudo mais detalhado do comportamento dos métodos de solução para a equação de Kepler em faixas específicas de órbitas. São consideradas as seguintes faixas de excentricidade e anomalia média:

Tabela 4.10: Faixas de separação

	e	M
Faixa 1	$[0, 0.01]$	$[0, \pi]$
Faixa 2	$(0.01, 0.9)$	$[0, \pi]$
Faixa 3	$[0.9, 1)$	$[0, \pi]$

Observe que a faixa 1 corresponde aos satélites que operam em órbita quase circular, a faixa 2 compreende as órbitas de transferência e a faixa 3 são as órbitas próximas à

parabólica as quais são numericamente mais difíceis de serem analisadas.

Todo o estudo anterior foi realizado novamente para as faixas, onde os resultados apresentaram os mesmos comportamentos já obtidos anteriormente como, por exemplo, as amostras não seguem uma distribuição normal. As tabelas associadas ao estudo para estas faixas que mostram os resultados do teste de Kruskal-Wallis, comparação aos pares das amostras e rank são apresentadas no apêndice (A) deste relatório.

As figuras (4.10)-(4.12) apresentam o gráfico box-plot comparativo entre os métodos de solução considerados neste trabalho quanto a quantidade de iterações necessárias para o cálculo de E , assim como o gráfico que mostra o rank associado aos métodos. Observa-se que, nas figuras (4.11b) e (4.12b), o método de Halley é mais eficiente que os demais métodos pois o rank apresenta valores menores quando comparado com os demais. Por outro lado, para órbitas circulares, a série FB se mostra superior ao demais métodos, como pode ser visto na figura (4.10b).

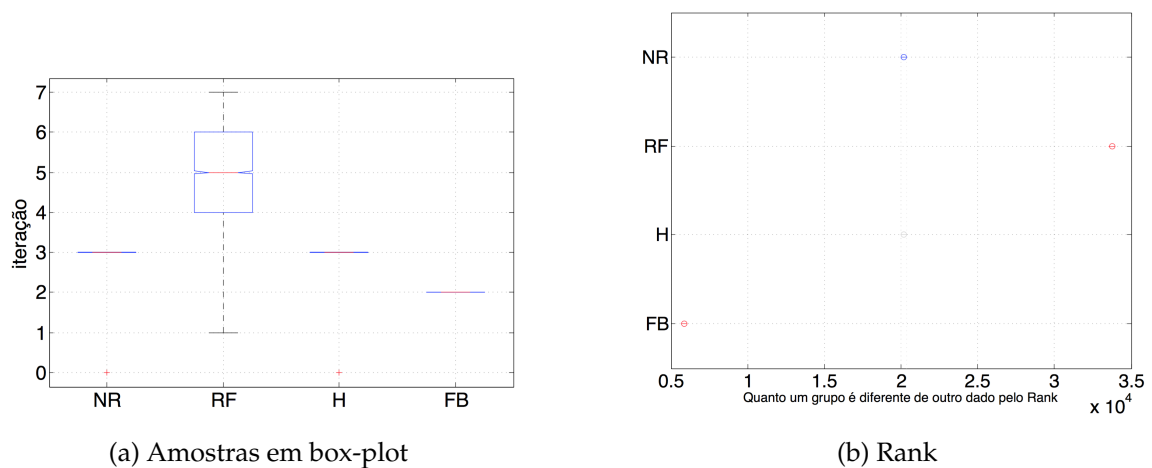


Figura 4.10: Faixa 1

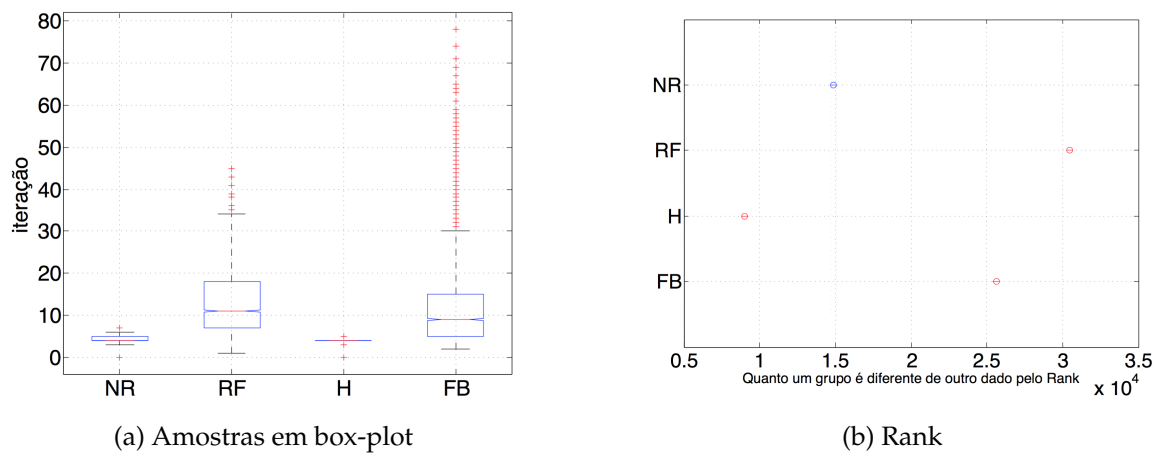
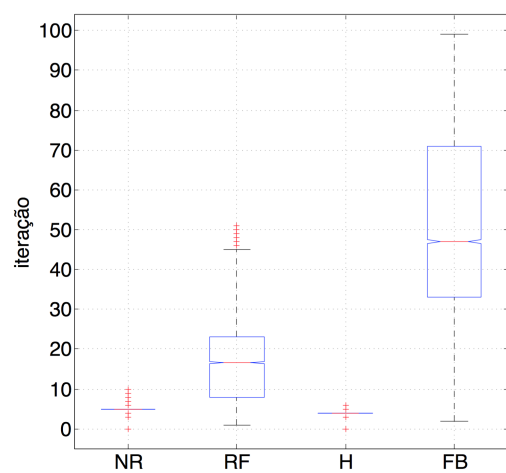
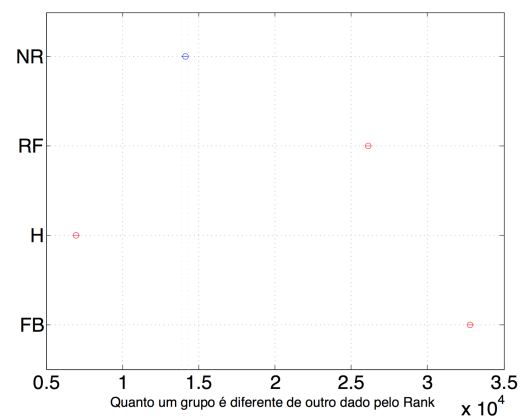


Figura 4.11: Faixa 2



(a) Amostras em box-plot



(b) Rank

Figura 4.12: Faixa 3

Capítulo 5

Comentários finais

O objetivo deste trabalho foi estudar alguns dos métodos de solução da equação de Kepler. Para isto foram considerados três métodos iterativos (método de Newton-Raphson, método Regula-falsi, método de Halley) e uma abordagem via expansão em série da equação de Kepler (série de Fourier- Bessel). Os critérios para avaliar a eficiência dos métodos são vários, como por exemplo, número de iterações necessárias para se atingir a precisão estipulada na solução, tempo de convergência do método, precisão na solução quando comparada com um valor de referência, etc. Neste trabalho a eficiência dos métodos foram avaliados, em geral, quanto ao número de iterações e quanto a precisão da solução quando comparada com a solução via método de Newton-Raphson. Observou-se que, em todas as análises realizadas no trabalho, o método de Halley se mostrou mais adequado que os demais. Este resultado já era esperado, visto que ele possui uma estrutura similar ao método de Newton (amplamente utilizado) porém com convergência cúbica, diferentemente da convergência quadrática do método de Newton.

Apêndice A

Resultados das Faixas

Teste de normalidade para as faixas como mostrado na tabela (A.1).

Tabela A.1: Resultados do teste de normalidade para faixas

Amostras	Faixa 1		Faixa 2		Faixa 3	
	χ^2	P_{valor}	χ^2	P_{valor}	χ^2	P_{valor}
Newton-Rahpson	5.674e+03,	0+	5.916e+03	0+	5.916e+03	0+
Regula-Falsi	1.335e+02	0+	3.121e+02	0+	3.123e+02	0+
Halley	1.040e+04	0+	8.752e+03	0+	8.754e+03	0+
Fourier-Bessel	9.665e+02	0+	2.701e+03	0+	2.701e+03	0+

Tabela A.2: Resultados do teste de Kruskal-Wallis para a faixa 1

	SQ	GL	MQ	χ^2	P_{valor}
EG	3.7241e+012	3.0000e+000	1.2964e+012	33.9932e+003	0+
NG	687.1003e+009	39.9960e+003	17.1792e+006		
Total	4.5762e+012	39.9990e+003			

Tabela A.3: Comparação aos pares para a faixa 1

$amostra_1$	$amostra_2$	$\min(\Delta)$	$\bar{\Delta}$	$\max(\Delta)$	P_{valor}
1	2	13.9404e+003	-13.5518e+003	-13.1631e+003	3.7683e-009
1	3	-388.6071e+000	0.0000e+000	388.6071e+000	1.0000e+000
1	4	13.9435e+003	14.3321e+003	14.7207e+003	3.7683e-009
2	3	13.1631e+003	13.5518e+003	13.9404e+003	3.7683e-009
2	4	27.4952e+003	27.8838e+003	28.2724e+003	3.7683e-009
3	4	13.9435e+003	14.3321e+003	14.7207e+003	3.7683e-009

Tabela A.4: Rank para faixa 1

Método	média de Rank	desvio padrão do Rank
NR	20.1956e+003	106.9612e+000
RF	33.7473e+003	106.9612e+000
H	20.1956e+003	106.9612e+000
FB	5.8635e+003	106.9612e+000

Tabela A.5: Resultados do teste de Kruskal-Wallis para a faixa 2

	SQ	GL	MQ	χ^2	P_{valor}
EG	3.3624e+012	3.0000e+000	1.1208e+012	26.3920e+003	0+
NG	1.7335e+012	39.9960e+003	43.3428e+006		
Total	5.0959e+012	39.9990e+003			

Tabela A.6: Comparação aos pares para a faixa 2

$amostra_1$	$amostra_2$	$\min(\Delta)$	$\bar{\Delta}$	$\max(\Delta)$	P_{valor}
1	2	-16.6653e+003	-16.2552e+003	-15.8451e+003	3.7683e-009
1	3	5.6759e+003	6.0859e+003	6.4960e+003	3.7683e-009
1	4	-13.4219e+003	-13.0118e+003	-12.6018e+003	3.7683e-009
2	3	21.9311e+003	22.3411e+003	22.7512e+003	3.7683e-009
2	4	2.8333e+003	3.2434e+003	3.6534e+003	3.7683e-009
3	4	-19.5079e+003	-19.0978e+003	-18.6877e+003	3.7683e-009

Tabela A.7: Rank para faixa 2

Método	média de Rank	desvio padrão do Rank
Newton	14.2052e+003	112.8721e+000
Regula-Falsi	30.4604e+003	112.8721e+000
Halley	8.1193e+003	112.8721e+000
Fourier	27.2171e+003	112.8721e+000

Tabela A.8: Resultados do teste de Kruskal-Wallis para a faixa 3

	SQ	GL	MQ	χ^2	P_{valor}
EG	3.3627e+012	3.0000e+000	1.1209e+012	26.3947e+003	0+
NG	1.7332e+012	39.9960e+003	43.3343e+006		
Total	5.0959e+012	39.9990e+003			

Tabela A.9: Comparação aos pares para a faixa 3

$amostra_1$	$amostra_2$	$\min(\Delta)$	$\bar{\Delta}$	$\max(\Delta)$	P_{valor}
1	2	-12.4384e+003	-12.0246e+003	-11.6108e+003	3.7683e-009
1	3	6.7138e+003	7.1276e+003	7.5415e+003	3.7683e-009
1	4	-19.0933e+003	-18.6795e+003	-18.2657e+003	3.7683e-009
2	3	18.7384e+003	19.1523e+003	19.5661e+003	3.7683e-009
2	4	-7.0687e+003	-6.6549e+003	-6.2411e+003	3.7683e-009
3	4	-26.2210e+003	-25.8071e+003	-25.3933e+003	3.7683e-009

Tabela A.10: Rank para faixa 3

Método	média de Rank	desvio padrão do Rank
Newton	14.1064e+003	113.9006e+000
Regula-Falsi	26.1310e+003	113.9006e+000
Halley	6.9787e+003	113.9006e+000
Fourier	32.7859e+003	113.9006e+000

Apêndice B

Box-Plot

O gráfico de Box-plot é um tipo de resumo de seus dados coletados. E esse resumo é dado com cinco valores principais o primeiro deles é a mediana, onde aparece com uma barra vermelha. posteriormente no box, ou seja num retângulo azul denominam os Quartis. Posteriormente os whisker que correspondente ao limiar do seu grupo de análise para uma outlier, cujo esse intervalo corresponde ao seus dados reais. Um exemplo mostrado em seguida.

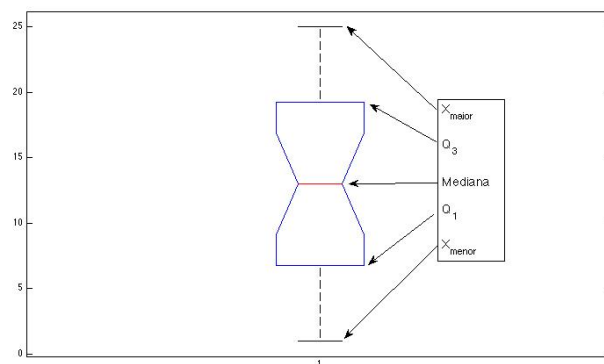


Figura B.1: Exemplo de box-plot

Agora definindo cada numero de que representa o gráfico. A mediana é uma forma de mostrar um tendência do valor central, no caso de uma amostragem ser discreta. Os Quartis são representação a localização onde esta as frações de 1 quarto e 3 quartos do seus espaço. E seu valor extremo é definido momo um escore Z que corresponde a diferença entre o valor e a média aritmética em razão com o desvio padrão, ou seja $Z = \frac{X - media}{s}$ onde o valor menor ou maior que 3 e menor que -3 pode ser considerado um valor extremo. Assim considera afirmar o que é um outlier.

Bibliografia

- [1] BATE, R. R; MUELLER, D. D.;Whilte, J.E.. Fundamentals of Astrodynamics. New York: Dover, 1971.
- [2] BATTIN, R. H.. An introduction to the mathematics and methods of astrodynamics. Massachusetts: Aiaa, 1999.
- [3] CURTIS, H. D.. Orbital Mechanics for Engineering Students. 3. ed. Daytona Beach: Eslvier, 2010.
- [4] EZQUERRO, J. A.; GUTIÉRREZ, J. M.. EL MÉTODO DE HALLEY: POSIBLEMENTE, EL MÉTODO MÁS REDESCUBIERTO DEL MUNDO. 2011. 16 f. Tese (Doutorado) - Curso de Ciência da Computação, Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja, Logroño, 2011.
- [5] GUIDORIZZI, H.. Um Curso de Cálculo: Vol I. 5. ed. São Paulo: Ltc, 2002.
- [6] GUIDORIZZI, H.. Um Curso de Cálculo: Vol II. 5. ed. São Paulo: Ltc, 2002.
- [7] KUGA, H. K.; CARRARA, V.; RAO, K. R.. Introdução à mecânica orbital. 2. ed. São José dos Campos: Inpe, 2012.
- [8] LEVINE, D.; STEPHAN, D.; KREHBIEL, T.. Estatística: Teoria e Aplicações. 5. ed. Rio de Janeiro: Ltc, 2008.
- [9] BURDEN, R. L.;FAIRES, J. D.. Análise Numérica. São Paulo: Cengage, 2008.