

## **ESTUDO DE MANOBRAS ORBITAIS COM USO DE GRAVIDADE E CABOS**

### **RELATÓRIO FINAL DE PROJETO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA (PIBIC/CNPq/INPE)**

**Rodolfo Batista Negri (Universidade Federal de Itajubá - UNIFEI, Bolsista  
PIBIC/CNPq)**

**E-mail: [rodolfobnegri@yahoo.com.br](mailto:rodolfobnegri@yahoo.com.br)**

**Antônio Fernando Bertachini de Almeida Prado (SPG/INPE, Orientador)**

**E-mail: [antonio.prado@inpe.br](mailto:antonio.prado@inpe.br)**

**Julho de 2016**



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA

**INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS**

aa/bb/cc/dd-TDI

## ESTUDO DE MANOBRAS ORBITAIS COM USO DE GRAVIDADE E CABOS

Rodolfo Batista Negri

Relatório Final de Iniciação Científica PIBIC-CNPq orientada pelo Dr. Antônio Fernando Bertachini de Almeida Prado.

URL do documento original:

[<http://urlib.net/>](http://urlib.net/)

INPE

São José dos Campos

2016

## **PUBLICADO POR:**

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE

Gabinete do Diretor (GB)

Serviço de Informação e Documentação (SID)

Caixa Postal 515 - CEP 12.245-970

São José dos Campos - SP - Brasil

Tel.:(012) 3945-6923/6921

Fax: (012) 3945-6919

E-mail: [pubtc@sid.inpe.br](mailto:pubtc@sid.inpe.br)

## **COMISSÃO DO CONSELHO DE EDITORAÇÃO E PRESERVAÇÃO DA PRODUÇÃO INTELECTUAL DO INPE (DE/DIR-544):**

### **Presidente:**

Marciana Leite Ribeiro - Serviço de Informação e Documentação (SID)

### **Membros:**

Dr. Gerald Jean Francis Banon - Coordenação Observação da Terra (OBT)

Dr. Amauri Silva Montes - Coordenação Engenharia e Tecnologia Espaciais (ETE)

Dr. André de Castro Milone - Coordenação Ciências Espaciais e Atmosféricas  
(CEA)

Dr. Joaquim José Barroso de Castro - Centro de Tecnologias Espaciais (CTE)

Dr. Manoel Alonso Gan - Centro de Previsão de Tempo e Estudos Climáticos  
(CPT)

Dr<sup>a</sup> Maria do Carmo de Andrade Nono - Conselho de Pós-Graduação

Dr. Plínio Carlos Alvalá - Centro de Ciência do Sistema Terrestre (CST)

### **BIBLIOTECA DIGITAL:**

Dr. Gerald Jean Francis Banon - Coordenação de Observação da Terra (OBT)

Clayton Martins Pereira - Serviço de Informação e Documentação (SID)

### **REVISÃO E NORMALIZAÇÃO DOCUMENTÁRIA:**

Simone Angélica Del Duca Barbedo - Serviço de Informação e Documentação  
(SID)

Yolanda Ribeiro da Silva Souza - Serviço de Informação e Documentação (SID)

### **EDITORAÇÃO ELETRÔNICA:**

Marcelo de Castro Pazos - Serviço de Informação e Documentação (SID)

André Luis Dias Fernandes - Serviço de Informação e Documentação (SID)



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA

**INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS**

aa/bb/cc/dd-TDI

## ESTUDO DE MANOBRAS ORBITAIS COM USO DE GRAVIDADE E CABOS

Rodolfo Batista Negri

Relatório Final de Iniciação Científica PIBIC-CNPq orientada pelo Dr. Antônio Fernando Bertachini de Almeida Prado.

URL do documento original:

[<http://urlib.net/>](http://urlib.net/)

INPE

São José dos Campos

2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

---

Sobrenome, Nomes.

Cutter      Estudo de Manobras Orbitais com Uso de Gravidade e Cabos / Nome Completo do Autor1; Nome Completo do Autor2. – São José dos Campos : INPE, 2016.  
xiv + 66 p. ; (aa/bb/cc/dd-TDI)

() – , São José dos Campos, .  
: .

1. Palavra chave. 2. Palavra chave 3. Palavra chave. 4. Palavra chave. 5. Palavra chave I. Título.

CDU 000.000

---



Esta obra foi licenciada sob uma Licença [Creative Commons Atribuição-NãoComercial 3.0 Não Adaptada](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/).

This work is licensed under a [Creative Commons Attribution-NonCommercial 3.0 Unported License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/).





## RESUMO

Este trabalho visa estudar e analisar a mecânica de uma manobra gravitacionalmente assistida (swing-by, flyby, slingshot) com e sem o uso de cabos. No decorrer da pesquisa, viu-se que seria tecnicamente mais interessante realizar um estudo prático de um swing-by. Dado o contexto da Missão Áster, que pretende ser a primeira missão brasileira interplanetária, a qual planeja a visita de uma espaçonave ao sistema de asteróides triplo 2001SN263, foram extensivamente realizados estudos de um swing-by na Lua sem o uso de cabos. Logo, esse trabalho realiza um pequeno estudo de swing-by por meio de cabos, e concentra-se principalmente no estudo da manobra sem o uso de cabos, com aplicações à Missão Áster. Para tanto, foi realizado um estudo comparativo entre a aplicação de um método numérico e um método analítico, respectivamente o Problema Circular Restrito dos Três Corpos e Patched Conics, para manobras gravitacionalmente assistidas na Lua. O Problema Circular Restrito dos Três Corpos, consiste em solucionar numericamente as equações do movimento de uma espaçonave que interage gravitacionalmente com dois corpos, os quais descrevem trajetórias circulares em torno do centro de massa do sistema. O método das Patched Conics consiste em reduzir um problema de N corpos em N-1 problemas de dois corpos. A comparação entre os métodos se faz necessária visto que a esfera de influência da Lua é grande se comparada a distância Terra-Lua, o que coloca sob dúvida o método das Patched Conics, mais simples e menos custoso.

Keywords: *Swing-by*. Problema Circular Restrito dos Três Corpos. *Patched Conics*. Manobras com Uso de Cabos.





**ESCREVER O TÍTULO EM INGLÊS PARA PUBLICAÇÕES  
ESCRITAS EM PORTUGUÊS E EM PORTUGUÊS PARA  
PUBLICAÇÕES ESCRITAS EM INGLÊS**

**ABSTRACT**

This work aims to study and analyse the mechanics of a gravity assisted maneuver (swing-by, flyby, slingshot) with and without the use of tethers. With the progress of the work it was noticed that would be more interesting make a practical study of a swing-by. In the context of the Aster Mission, that intend to launch a spacecraft to the triple asteroid system 2001SN263, it was made studies in the Moon without the use of tethers. Therefore, this work make a little study of a swing-by using tethers and concentrates mainly in the study in the maneuver without the use of tethers with applications to the Aster Mission. To accomplish this task it was made a comparative study between an analytic and numeric methods, respectively the Circular Restricted Three Body Problem and Patched Conics.

Keywords: Swing-by. Circular Restricted Three Body Problem. Patched Conics. Tethered Gravity-Assisted Maneuvers.



## LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
1.1 Esquema ilustrando os quatro elementos orbitais que são representados por ângulos ( $i$ , $\Omega$ , $\omega$ e $\nu$ ). Retirado em Wikipedia (2016). . . . .	2
1.2 Esquema de uma possível missão para deixar o sistema Terra-Lua. A espaçonave sai de uma <i>parking orbit</i> em torno da Terra para uma órbita de transferência, de forma a realizar um <i>swing-by</i> na Lua. Assim, ganha-se velocidade e deixa-se o sistema em uma órbita aberta (escape). . . . .	4
1.3 Imagens realizadas pelas missões Voyagers em seus <i>flybys</i> pelos planetas do Sistema Solar Exterior. Retiradas em JPL (2016). . . . .	7
2.1 Método das <i>patched conics</i> aplicado a uma transferência Terra-Marte. Retirado em CU-Boulder (2016). . . . .	9
2.2 Mecanismo básico do <i>swing-by</i> . Retirado em Spaceref (2016). . . . .	11
2.3 <i>Swing-by</i> em três dimensões realizado sobre o corpo $M_2$ . . . . .	12
3.1 Representação do PCRTC em um sistema de referência sinódico. . . . .	15
3.2 Curvas de nível para $\frac{dE}{dt}$ no plano $z = 0$ e $x = 0$ próximo a Lua. Os extremos são valores maiores ou iguais a 50. . . . .	18
3.3 Representação tridimensional em cortes de $\frac{dE}{dt}$ . . . . .	18
3.4 Visualização geral do Sistema Terra-Lua para $\frac{dE}{dt}$ no plano $z = 0$ . . . . .	19
3.5 Trajetória no Referencial Sinódico Terra-Lua. . . . .	20
3.6 Trajetória no Referencial Inercial centrado no baricentro Terra-Lua. . . . .	20
3.7 Gráfico energia vs tempo. . . . .	21
3.8 Curvas de nível de $dE/dt$ e trajetória da espaçonave no sistema sinódico próximo a Lua. . . . .	22
4.1 Geometria de <i>Swing-by</i> com uso de cabos e suas variáveis. Retirado de Prado (2015). . . . .	23
5.1 Curvas de nível de $\Delta E$ para $v_p = 2.2$ ( $r_p = 0.00675$ e $\gamma = 0^\circ$ ). . . . .	26
5.2 Curvas de nível de $\Delta E$ para $v_p = 2.6$ ( $r_p = 0.00675$ e $\gamma = 0^\circ$ ). . . . .	26
5.3 Curvas de nível de $\Delta E$ para $v_p = 3.4$ ( $r_p = 0.00675$ e $\gamma = 0^\circ$ ). . . . .	27
5.4 Curvas de nível de $\Delta i$ para $v_p = 2.2$ ( $r_p = 0.00675$ e $\gamma = 0^\circ$ ). . . . .	27
5.5 Curvas de nível de $\Delta i$ para $v_p = 2.6$ ( $r_p = 0.00675$ e $\gamma = 0^\circ$ ). . . . .	28
5.6 Curvas de nível de $\Delta i$ para $v_p = 3.4$ ( $r_p = 0.00675$ e $\gamma = 0^\circ$ ). . . . .	28
5.7 Curvas de nível de $\Delta E$ para $r_p = 0.00476$ ( $v_p = 2.6$ e $\gamma = 0^\circ$ ). . . . .	29
5.8 Curvas de nível de $\Delta E$ para $r_p = 0.00675$ ( $v_p = 2.6$ e $\gamma = 0^\circ$ ). . . . .	29

5.9	Curvas de nível de $\Delta E$ para $r_p = 0.009$ ( $v_p = 2.6$ e $\gamma = 0^\circ$ ).	30
5.10	Curvas de nível de $\Delta i$ para $r_p = 0.00476$ ( $v_p = 2.6$ e $\gamma = 0^\circ$ ).	30
5.11	Curvas de nível de $\Delta i$ para $r_p = 0.00675$ ( $v_p = 2.6$ e $\gamma = 0^\circ$ ).	31
5.12	Curvas de nível de $\Delta i$ para $r_p = 0.009$ ( $v_p = 2.6$ e $\gamma = 0^\circ$ ).	31
5.13	Curvas de nível de $\Delta E$ para $\gamma = 0^\circ$ ( $v_p = 2.6$ e $r_p = 0.00675$ ).	32
5.14	Curvas de nível de $\Delta E$ para $\gamma = 30^\circ$ ( $v_p = 2.6$ e $r_p = 0.00675$ ).	32
5.15	Curvas de nível de $\Delta E$ para $\gamma = 60^\circ$ ( $v_p = 2.6$ e $r_p = 0.00675$ ).	33
5.16	Curvas de nível de $\Delta i$ para $\gamma = 0^\circ$ ( $v_p = 2.6$ e $r_p = 0.00675$ ).	33
5.17	Curvas de nível de $\Delta i$ para $\gamma = 30^\circ$ ( $v_p = 2.6$ e $r_p = 0.00675$ ).	34
5.18	Curvas de nível de $\Delta i$ para $\gamma = 60^\circ$ ( $v_p = 2.6$ e $r_p = 0.00675$ ).	34
5.19	Curvas de nível de $\Delta E$ (linhas pretas) e classificação de órbitas (regiões coloridas) para $v_p = 2.2$ ( $\gamma = 0^\circ$ e $r_p = 0.00675$ ).	36
5.20	Curvas de nível de $\Delta E$ (linhas pretas) e classificação de órbitas (regiões coloridas) para $v_p = 2.6$ ( $\gamma = 0^\circ$ e $r_p = 0.00675$ ).	37
5.21	Curvas de nível de $\Delta E$ (linhas pretas) e classificação de órbitas (regiões coloridas) para $v_p = 3.4$ ( $\gamma = 0^\circ$ e $r_p = 0.00675$ ).	37
5.22	Curvas de nível de $\Delta i$ e curvas de nível de $i_i$ para $v_p = 2.2$ ( $\gamma = 0^\circ$ e $r_p = 0.00675$ ).	38
5.23	Curvas de nível de $\Delta i$ e curvas de nível de $i_i$ para $v_p = 2.6$ ( $\gamma = 0^\circ$ e $r_p = 0.00675$ ).	38
5.24	Curvas de nível de $\Delta i$ e curvas de nível de $i_i$ para $v_p = 3.4$ ( $\gamma = 0^\circ$ e $r_p = 0.00675$ ).	39
5.25	Curvas de nível de $\Delta E$ (linhas pretas) e classificação de órbitas (regiões coloridas) para $r_p = 0.00476$ ( $\gamma = 0^\circ$ e $v_p = 2.6$ ).	40
5.26	Curvas de nível de $\Delta E$ (linhas pretas) e classificação de órbitas (regiões coloridas) para $r_p = 0.00675$ ( $\gamma = 0^\circ$ e $v_p = 2.6$ ).	40
5.27	Curvas de nível de $\Delta E$ (linhas pretas) e classificação de órbitas (regiões coloridas) para $r_p = 0.009$ ( $\gamma = 0^\circ$ e $v_p = 2.6$ ).	41
5.28	Curvas de nível de $\Delta i$ e curvas de nível de $i_i$ para $r_p = 0.00476$ ( $\gamma = 0^\circ$ e $v_p = 2.6$ ).	41
5.29	Curvas de nível de $\Delta i$ e curvas de nível de $i_i$ para $r_p = 0.00675$ ( $\gamma = 0^\circ$ e $v_p = 2.6$ ).	42
5.30	Curvas de nível de $\Delta i$ e curvas de nível de $i_i$ para $r_p = 0.009$ ( $\gamma = 0^\circ$ e $v_p = 2.6$ ).	42
5.31	Curvas de nível de $\Delta E$ (linhas pretas) e classificação de órbitas (regiões coloridas) para $\gamma = 0^\circ$ ( $v_p = 2.6$ e $r_p = 0.00675$ ).	43
5.32	Curvas de nível de $\Delta E$ (linhas pretas) e classificação de órbitas (regiões coloridas) para $\gamma = 30^\circ$ ( $v_p = 2.6$ e $r_p = 0.00675$ ).	43

5.33	Curvas de nível de $\Delta E$ (linhas pretas) e classificação de órbitas (regiões coloridas) para $\gamma = 60^\circ$ ( $v_p = 2.6$ e $r_p = 0.00675$ ). . . . .	44
5.34	Curvas de nível de $\Delta i$ e curvas de nível de $i_i$ para $\gamma = 0^\circ$ ( $v_p = 2.6$ e $r_p = 0.00675$ ). . . . .	44
5.35	Curvas de nível de $\Delta i$ e curvas de nível de $i_i$ para $\gamma = 30^\circ$ ( $v_p = 2.6$ e $r_p = 0.00675$ ). . . . .	45
5.36	Curvas de nível de $\Delta i$ e curvas de nível de $i_i$ para $\gamma = 60^\circ$ ( $v_p = 2.6$ e $r_p = 0.00675$ ). . . . .	45
5.37	Curvas de nível da diferença obtida entre o método da <i>Patched Conics</i> e do PCRTC com $r_p = 0.00675$ , $v_p = 2.2$ e $\gamma = 0^\circ$ . . . . .	47
5.38	Curvas de nível da diferença obtida entre o método da <i>Patched Conics</i> e do PCRTC com $r_p = 0.00675$ , $v_p = 2.6$ e $\gamma = 0^\circ$ . . . . .	47
5.39	Curvas de nível da diferença obtida entre o método da <i>Patched Conics</i> e do PCRTC com $r_p = 0.00675$ , $v_p = 3.4$ e $\gamma = 0^\circ$ . . . . .	48
5.40	Curvas de nível da diferença obtida entre o método da <i>Patched Conics</i> e do PCRTC com $r_p = 0.00476$ , $v_p = 2.6$ e $\gamma = 0^\circ$ . . . . .	49
5.41	Curvas de nível da diferença obtida entre o método da <i>Patched Conics</i> e do PCRTC com $r_p = 0.00675$ , $v_p = 2.6$ e $\gamma = 0^\circ$ . . . . .	49
5.42	Curvas de nível da diferença obtida entre o método da <i>Patched Conics</i> e do PCRTC com $r_p = 0.009$ , $v_p = 2.6$ e $\gamma = 0^\circ$ . . . . .	50
5.43	Curvas de nível da diferença obtida entre o método da <i>Patched Conics</i> e do PCRTC com $r_p = 0.00675$ , $v_p = 2.6$ e $\gamma = 0^\circ$ . . . . .	50
5.44	Curvas de nível da diferença obtida entre o método da <i>Patched Conics</i> e do PCRTC com $r_p = 0.00675$ , $v_p = 2.6$ e $\gamma = 30^\circ$ . . . . .	51
5.45	Curvas de nível da diferença obtida entre o método da <i>Patched Conics</i> e do PCRTC com $r_p = 0.00675$ , $v_p = 2.6$ e $\gamma = 60^\circ$ . . . . .	51
5.46	Classificação de Trajetórias. . . . .	52
5.47	Simulação para a Lua com $l = 0.00104$ (correspondente a 400 km) e $\delta = 60^\circ$ . . . . .	55
5.48	Simulação para Mab (lua de Urano) com $l = 0.00102$ (correspondente a 100 km) e $\delta = 60^\circ$ . . . . .	56
5.49	Simulação para Caronte (lua de Plutão) com $l = 0.00511$ (correspondente a 400 km) e $\delta = 60^\circ$ . . . . .	57



# SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
<b>1 Introdução</b> . . . . .	<b>1</b>
<b>Introdução</b> . . . . .	<b>1</b>
1.1 Objetivo . . . . .	5
1.2 Metodologia . . . . .	5
1.3 Revisão Bibliográfica . . . . .	5
<b>2 <i>Swing-by</i> por <i>Patched Conics</i></b> . . . . .	<b>9</b>
2.1 <i>Patched Conics</i> . . . . .	9
2.2 <i>Swing-by</i> em Duas Dimensões . . . . .	10
2.3 <i>Swing-by</i> em Três Dimensões . . . . .	11
<b>3 <i>Swing-by</i> pelo Problema Circular Restrito dos Três Corpos</b> . . .	<b>15</b>
3.1 Problema Circular Restrito dos Três Corpos . . . . .	15
3.2 Mecânica do <i>Swing-by</i> no PCRTC . . . . .	16
3.2.1 Análise Sistema Terra-Lua . . . . .	17
3.2.2 Exemplo de <i>Swing-by</i> . . . . .	19
<b>4 <i>Swing-by</i> Com Uso de Cabos</b> . . . . .	<b>23</b>
<b>5 Resultados</b> . . . . .	<b>25</b>
5.1 Modelo Analítico da <i>Patched Conics</i> . . . . .	25
5.1.1 Efeitos da Velocidade de Pericentro . . . . .	25
5.1.1.1 Energia . . . . .	25
5.1.1.2 Inclinação . . . . .	27
5.1.2 Efeitos da Distância de Pericentro . . . . .	28
5.1.2.1 Energia . . . . .	28
5.1.2.2 Inclinação . . . . .	30
5.1.3 Efeitos de $\gamma$ . . . . .	31
5.1.3.1 Energia . . . . .	31
5.1.3.2 Inclinação . . . . .	33
5.2 Modelo Numérico do PCRTC e Algumas Considerações Sobre a Mecânica do Problema . . . . .	34
5.2.1 Algoritmo e Condições Iniciais . . . . .	35



5.2.2	Efeitos da Velocidade de Pericentro . . . . .	35
5.2.2.1	Energia . . . . .	35
5.2.2.2	Inclinação . . . . .	38
5.2.3	Efeitos do Raio de Pericentro . . . . .	39
5.2.3.1	Energia . . . . .	39
5.2.3.2	Inclinação . . . . .	41
5.2.4	Efeitos de $\gamma$ . . . . .	42
5.2.4.1	Energia . . . . .	42
5.2.4.2	Inclinação . . . . .	44
5.3	Comparação Entre os Dois Modelos . . . . .	45
5.3.1	Efeitos da Velocidade de Pericentro . . . . .	46
5.3.2	Efeitos do Raio de Pericentro . . . . .	48
5.3.3	Efeitos de $\gamma$ . . . . .	50
5.4	Comparação Com e Sem Uso de Cabos . . . . .	51
5.4.1	Resultados da Comparação . . . . .	53
<b>6</b>	<b>Conclusão . . . . .</b>	<b>59</b>
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS . . . . .</b>	<b>61</b>

## 1 Introdução

O interesse da humanidade pelo céus não é recente, desde seus primórdios, da Mesopotâmia à América Central à Ásia, em toda civilização e cultura, nossos antepassados admiraram os céus em uma mistura de sentimentos e impressões: curiosidade, misticismo, medo, espanto. Se comunicavam com os céus, ele lhes dizia quando plantar, quando colher, que caminho seguir, por vezes anunciava sangue, peste, morte. Ícaro fascinado, contrariando as instruções de seu pai Dédalo, voou cada vez mais alto, até encontrar seu fim nas águas do Mar Egeu. O sonho dos homens de tocar os céus e se juntar aos astros não morreu no mito de Ícaro, nem como um mito, inatingível, inalcançável.

E assim, junto ao trabalho e coragem de outros grandes homens que o precederam, Isaac Newton com suas leis do movimento e sua lei da gravitação universal, mostrou que as mesmas leis da natureza que descreviam os céus se aplicavam à Terra, e o homem finalmente pode sentir que podia alcançar os astros. Desde então, a Mecânica Celeste se desenvolveu a passos largos, o homem pisou em outros mundos e artefatos humanos foram lançados além dos limites do Sistema Solar.

Newton demonstrou que os corpos celestes descrevem trajetórias cônicas (círculo, elipse, parábola e hipérbole) quando interagem entre si. Foi ele quem formulou O Problema dos N Corpos <sup>1</sup>, que consiste em analisar o problema de N corpos em interação gravitacional mútua. Do problema dos N corpos é possível obter 10 integrais do movimento (PRUSSING; CONWAY, 1993). Geralmente, o problema é diminuído para interações menos complexas, como o Problema de Dois Corpos e o Problema dos Três Corpos.

O Problema dos Dois Corpos consiste na determinação da dinâmica entre dois corpos de massas  $M$  e  $m$  sob interação gravitacional mútua em torno do centro de massa do sistema. No caso particular em que  $M \gg m$  (Sistema Terra-Satélite, Sol-Cometa), pode-se considerar o centro de massa como o próprio centro geométrico do corpo de massa muito maior (MURRAY; DERMOTT, 1999). O Problema dos Dois Corpos nos permite definir os chamados elementos orbitais, que descrevem e facilitam a observação da geometria da órbita e o movimento do corpo<sup>2</sup>.

Os elementos orbitais consistem em seis parâmetros, geralmente são: semi-eixo maior ( $a$ ) e excentricidade ( $e$ ), que definem o formato e tamanho da órbita, inclinação

---

<sup>1</sup>Para mais detalhes, consultar Prussing e Conway (1993) capítulo 1

<sup>2</sup>Para mais detalhes, consultar Prussing e Conway (1993) capítulo 3

( $i$ ) e longitude do nodo ascendente ( $\Omega$ ) definindo o plano orbital, o argumento do pericentro ( $\omega$ ) que define o ponto de maior aproximação entre os corpos (conhecido como pericentro) e, finalmente, a anomalia verdadeira ( $\nu$ ), que define a posição do corpo. Para melhor compreensão e visualização, atente para a figura 1.1.

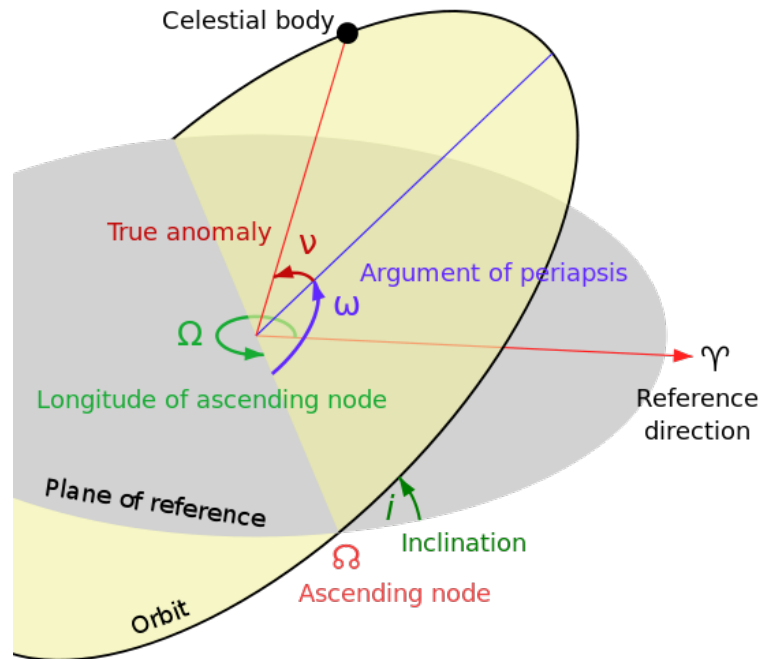


Figura 1.1 - Esquema ilustrando os quatro elementos orbitais que são representados por ângulos ( $i$ ,  $\Omega$ ,  $\omega$  e  $\nu$ ). Retirado em [Wikipedia \(2016\)](#).

Ao se abandonar o Problema dos Dois Corpos e partir para análises mais complexas, as órbitas de cada corpo passam a ser perturbadas <sup>3</sup> e os elementos orbitais não mais definem o movimento dos corpos e a geometria da órbita a qualquer instante de tempo. Então, os elementos orbitais passam a ser usados para definir a órbita e trajetória do corpo em determinado instante de tempo, por vezes sendo chamados de elementos osculadores.

Uma dessas análises mais complexas é conhecida como O Problema dos Três Corpos, e, como o contexto sugere, trata da interação gravitacional mútua entre três corpos. Com o Problema dos Três Corpos já não é mais possível obter uma solução geral que descreva o movimento dos três corpos. Porém é possível obter soluções restritas, como as Soluções de Lagrange e a solução do Problema Restrito dos Três Corpos.

<sup>3</sup>Para mais detalhes sobre perturbações, consultar [Murray e Dermott \(1999\)](#) capítulos 6, 7 e 8, ou para algo mais restrito a espaçonaves [Vallado e McClain \(2001\)](#) capítulos 8 e 9.

O Problema Restrito dos Três Corpos é de grande interesse prático, tanto para a engenharia astronáutica quanto para a astronomia. A partir dele é possível obter explicações e projetar configurações mais complexas. Aqui, o problema original de três corpos tem sua complexidade reduzida ao considerar que um dos três corpos possui massa desprezível se comparado aos outros dois corpos (ditos como dominantes, ou primários). O Problema Restrito dos Três Corpos pode ser separado em: Problema Circular Restrito dos Três Corpos (PCRTC) e Problema Elíptico Restrito dos Três Corpos<sup>4</sup>.

Ao se assumir o PCRTC a complexidade do problema é reduzida mais uma vez, ao considerar que os dois corpos dominantes descrevem órbitas circulares, o que é uma boa aproximação, visto que sistemas tais como Sol-planeta, planeta-lua, usualmente têm excentricidades muito pequenas. Ademais, grandes conclusões qualitativas são possíveis de se obter dessa abordagem. Como dos cinco pontos de Lagrange, que descrevem pontos de equilíbrio<sup>5</sup> no sistema e fornecem explicação para, por exemplo, a configuração dos asteróides troianos de Júpiter; e também oferece meios para o projeto de órbitas especiais, como as órbitas Halo (HOWELL, 1984).

Pode-se levar os conceitos demonstrados até então para casos mais práticos, relacionados a trajetórias e manobras de espaçonaves. Para o cálculo da trajetória de espaçonaves pode-se fazer hipóteses, por exemplo, que diminuam a complexidade da trajetória de uma espaçonave que irá interagir fortemente com vários corpos diferentes. Para definir contornos do que seria interagir fortemente com um corpo, é usado o conceito desenvolvido por Laplace (VALLADO; MCCLAIN, 2001) de esfera de influência. Segundo esta abordagem, pode-se considerar uma órbita simples cônica entre a espaçonave e o corpo no qual a espaçonave encontra-se dentro de sua esfera de influência. Assim, quando uma espaçonave interage com vários corpos diferentes é possível usar um método conhecido como *Patched Conics* (traduzindo literalmente: cônicas remendadas; também conhecido como Cônicas Conjugadas), que se vale do conceito de esfera de influência para diminuir a complexidade do problema separando um Problema de N Corpos em vários Problemas de Dois Corpos.

Mantendo o enfoque levantado para espaçonaves, é de grande interesse o estudo de manobras e transferências orbitais que diminuam sensivelmente o gasto de combus-

---

<sup>4</sup>Boas discussões sobre o caso elíptico podem ser encontradas em Szebehely e Giacaglia (1964) e Broucke (1969)

<sup>5</sup>Boa discussão sobre estabilidade dos pontos de equilíbrio pode ser encontrada em Murray e Dermott (1999) capítulo 3

tível e o peso da espaçonave <sup>6</sup>. E é aqui que se encontra este trabalho, no estudo de um tipo específico de manobra conhecida como manobra gravitacionalmente assistida (ou *flyby*, ou *swing-by*, ou *slingshot*), que se aplica principalmente a missões interplanetárias, devido o grande ganho de energia que proporciona.

Neste trabalho será analisada manobras de *swing-by* realizadas na Lua por dois métodos distintos. Por equações analíticas utilizando uma abordagem via *Patched Conics*. E por modelos numéricos utilizando uma abordagem baseada no Problema Circular Restrito dos Três Corpos. Por fim, as duas abordagens serão comparadas e analisadas. O estudo terá como foco as manobras na Lua por dois motivos: primeiro, a Lua tem uma esfera de influência muito grande se comparada a distância Lua-Terra (devido a relação de massa entre os dois corpos), o que coloca em dúvida uma abordagem via *Patched Conics* (que é preferível devido sua menor complexidade), necessitando de uma análise do seu poder de descrição do problema; segundo, pois pretende-se fundamentar estudos posteriores sobre manobras a serem aplicadas à Missão Áster, que provavelmente virá a usar manobras lunares gravitacionalmente assistidas de forma a deixar o sistema Terra-Lua para sua viagem interplanetária (ver figura 1.2). <sup>7</sup>

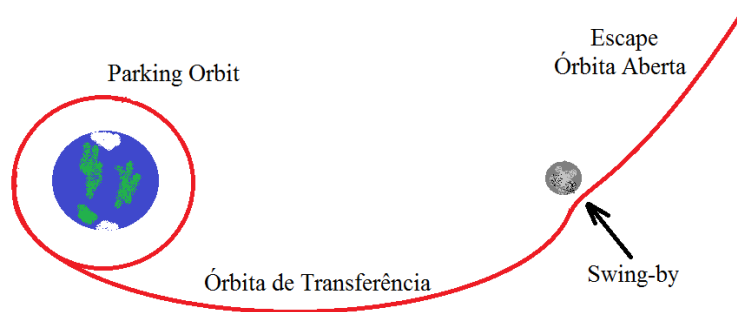


Figura 1.2 - Esquema de uma possível missão para deixar o sistema Terra-Lua. A espaçonave sai de uma *parking orbit* em torno da Terra para uma órbita de transferência, de forma a realizar um *swing-by* na Lua. Assim, ganha-se velocidade e deixa-se o sistema em uma órbita aberta (escape).

Além disso, é feito um pequeno estudo de *swing-by* realizado por meio de cabos. Que consiste no acoplamento de um cabo no corpo celeste na qual a manobra será executada, visando aumentar a mudança de trajetória possível e também a energia

<sup>6</sup>Para mais detalhes sobre manobras orbitais, consultar Vallado e McClain (2001) capítulo 6

<sup>7</sup>A Missão Áster deverá vir a ser primeira missão brasileira interplanetária, a qual pretende lançar uma sonda para estudar o sistema triplo de asteróides 2001SN<sub>263</sub>.

que se ganha ou perde.

## 1.1 Objetivo

Este trabalho busca estudar, analisar e comparar a mecânica de uma manobra gravitacionalmente assistida (*swing-by, flyby*) em três dimensões na Lua por duas abordagens distintas: modelo analítico das *Patched Conics* e modelo numérico do Problema Restrito dos Três Corpos. Além disso, uma pequena comparação de um *swing-by* em duas dimensões com e sem o uso de cabos.

## 1.2 Metodologia

O trabalho foi dividido em quatro etapas principais, as quais são:

- i*) Revisão teórica e Equacionamento;
- ii*) Desenvolvimento dos programas e códigos;
- iii*) Análise dos resultados;
- iv*) Produção do trabalho e apresentação.

A revisão teórica consistiu em consultar a literatura na área de forma a revisar alguns conceitos teóricos tais como: Problema dos Dois Corpos, Elementos Orbitais, Problema dos Três Corpos, Problema Restrito dos Três Corpos, Manobras Orbitais, dentre outros. Em seguida, foi elaborado todo o equacionamento do problema para que fosse possível produzir os modelos computacionais.

Feita a revisão, buscou-se o desenvolvimento dos programas e códigos necessários à análise do problema proposto. Esses foram desenvolvidos em Fortran, MATLAB<sup>®</sup> e C em uma máquina *desktop* comum Intel Core i5-5200U<sup>®</sup> 2,20GHz.

Posteriormente, os resultados foram processados em figuras e modelos comparativos de forma a possibilitar a análise da dinâmica do problema.

Por fim, os resultados e análise foram reunidos neste trabalho, apresentados e discutidos.

## 1.3 Revisão Bibliográfica

As manobras gravitacionalmente assistidas são amplamente empregadas na exploração espacial, principalmente em missões interplanetárias. Por meio delas é possível

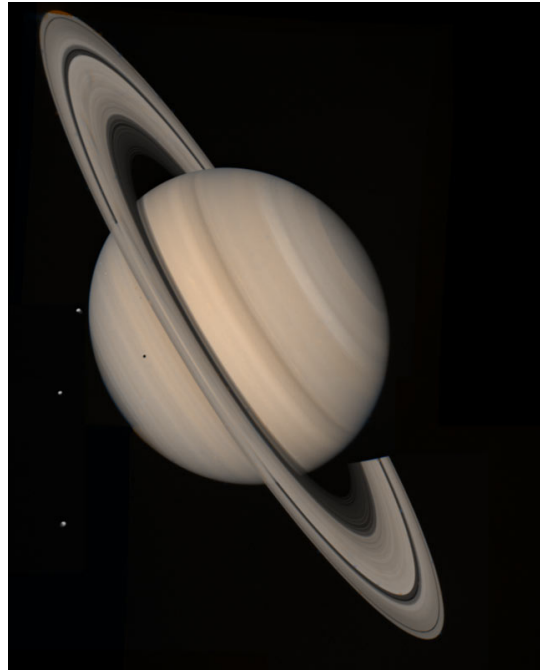
conseguir grande economia de combustível e conseqüentemente uma diminuição da carga paga da espaçonave, diminuindo o custo da missão e possibilitando a instalação de mais equipamentos científicos na espaçonave, já que grande parte das missões espaciais interplanetárias são de cunho científico.

Dado suas vantagens para missões interplanetárias, as manobras gravitacionalmente assistidas foram e são amplamente estudadas. [Minovitch \(1961\)](#) escreveu o artigo que seria o ponto de partida para a realização do *Grand Tour* (alinhamento Júpiter-Saturno-Urano-Netuno) das missões Voyagers. Posteriormente, baseado nesse trabalho, [Flandro \(1966\)](#) planejou as missões Voyagers, que permitiram uma maior compreensão dos planetas do sistema solar exterior e as belíssimas fotos da figura 1.3. [Sohn \(1964\)](#), [Sohn \(1966\)](#) estudou a realização de *swing-bys* em Vênus com vistas a aplicação em missões tripuladas a Marte. [Felipe e Prado \(2000\)](#) mostrou a mudança de inclinação em uma manobra de *swing-by* em três dimensões e [Prado \(2000\)](#) derivou equações analíticas para *swing-by* em três dimensões considerando a técnica das *Patched Conics*. Posteriormente, [Prado \(2007\)](#) comparou a mecânica de um *swing-by* em três dimensões pela abordagem das *Patched Conics* e pelo PCRTC.

Há estudos que levantam a possibilidade de realizar manobras gravitacionalmente assistidas com uso de dispositivos artificiais, de forma a aumentar os ganhos em velocidade e o desvio da espaçonave. Uma dessas possibilidades é por meio do uso de cabos, conforme proposto por [Penzo e Mayer \(1986\)](#), [Lanoix e Misra \(2000\)](#) e [Prado \(2015\)](#). [Prado \(2014\)](#) estuda o uso de cabos no sistema de asteróide triplo 2001SN<sub>263</sub> que virá a ser o objetivo da Missão Áster. Outra proposta de meio artificial é por meio do uso de superfícies aerodinâmicas, como estudado por [McRonaldd e Randolph \(1992\)](#) e [Sims et al. \(2000\)](#).



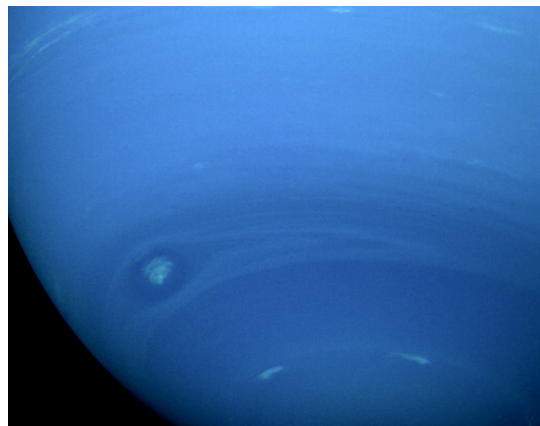
(a) Júpiter



(b) Saturno



(c) Urano



(d) Netuno

Figura 1.3 - Imagens realizadas pelas missões Voyagers em seus *flybys* pelos planetas do Sistema Solar Exterior. Retiradas em [JPL \(2016\)](#).





## 2 *Swing-by* por *Patched Conics*

### 2.1 *Patched Conics*

O método *patched conics* consiste em uma aproximação para calcular trajetórias sob a influência de  $N$  corpos. A aproximação consiste em considerar vários problemas de 2 corpos de acordo com a posição da espaçonave e a esfera de influência de cada corpo.

Quando a espaçonave está sob a esfera de influência de um corpo menor, somente a força gravitacional desse corpo é considerada. Quando a espaçonave não está sob a esfera de influência de nenhum corpo menor, apenas a força gravitacional do corpo dominante é considerada. Isso reduz um complicado problema de  $N$  corpos para múltiplos problemas de 2 corpos.

A esfera de influência de cada corpo menor é determinada segundo:

$$r_{SOI} = a \left( \frac{m}{M} \right)^{2/5}, \quad (2.1)$$

onde  $a$  é o semi-eixo maior do corpo menor (usualmente um planeta) em torno do corpo dominante (no caso de um planeta, o Sol),  $m$  a massa do corpo menor e  $M$  a massa do corpo dominante.

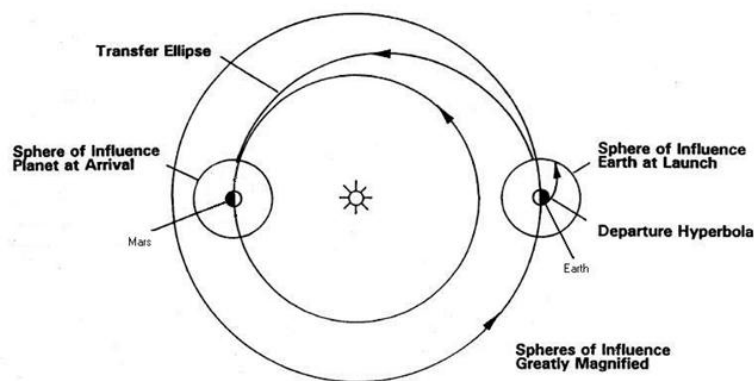


Figura 2.1 - Método das *patched conics* aplicado a uma transferência Terra-Marte. Retirado em [CU-Boulder \(2016\)](#).

Como exemplo, pode-se citar uma transferência Terra-Marte, como mostrado na figura 2.1. Onde a espaçonave parte da Terra como uma hipérbole, considerando apenas a força gravitacional terrestre. Ao deixar a esfera de influência terrestre,

apenas a força gravitacional do Sol é considerada, neste caso a órbita é uma elipse. Ao entrar sob a esfera de influência de Marte, apenas a força gravitacional marciana é considerada, e a órbita volta a ser considerada uma hipérbole. Caso o objetivo da missão seja a inserção da espaçonave em órbita sobre Marte, é necessária uma desaceleração da espaçonave. Vale ressaltar que, na figura, as esferas de influência estão exageradas. Pois, comparativamente à distância dos planetas ao Sol, são insignificamente pequenas. Por exemplo, a distância Terra-Sol é 1 UA (unidade astronômica), o tamanho da esfera de influência terrestre é de aproximadamente  $6 \times 10^{-3}$  UA.

## 2.2 *Swing-by* em Duas Dimensões

Um *swing-by* é o nome dado a manobra orbital na qual a espaçonave sofre um ganho ou perda de energia de acordo com a interação gravitacional de passagem (órbita hiperbólica/parabólica) por um corpo celeste. É uma manobra muito utilizada com vistas a economia de combustível em missões espaciais, poupando energia propulsiva, com ganhos significativos em aceleração/desaceleração e mudança de trajetória de uma espaçonave.

O mecanismo básico de uma manobra de *swing-by* é representado na figura 2.2. No quadrante (a), tem-se uma representação simples de uma órbita aberta (parábola ou hipérbole) de uma espaçonave em interação gravitacional com um corpo celeste, uma representação simples de um Problema de Dois Corpos. No quadro do meio, (b), é representado o princípio de uma manobra de *swing-by* que visa uma aceleração da espaçonave. A espaçonave simplesmente passa atrás do corpo celeste em relação a sua trajetória, ganhando momento <sup>1</sup> e ao fim obtendo uma velocidade absoluta maior em relação ao sistema de coordenadas inercial. Por fim, o quadrante (c), mostra uma mesma manobra de *swing-by*, todavia, a espaçonave passa a frente do corpo celeste em relação sua trajetória e é desacelerada em relação a um sistema de coordenadas inercial.

Note que a velocidade do corpo celeste se mantém constante durante todo o *swing-by*, isso se deve ao fato de que a manobra não precisa levar em consideração variações de velocidade na órbita do corpo celeste, pois o *swing-by* é uma manobra rápida e tais diferenças se tornam desprezíveis ou mesmo inexistentes.

Do Problema dos Dois Corpos sabe-se que o ângulo  $\beta$  apresentado na figura pode

---

<sup>1</sup>Devido o campo gravitacional do corpo celeste e relativo a um observador inercial

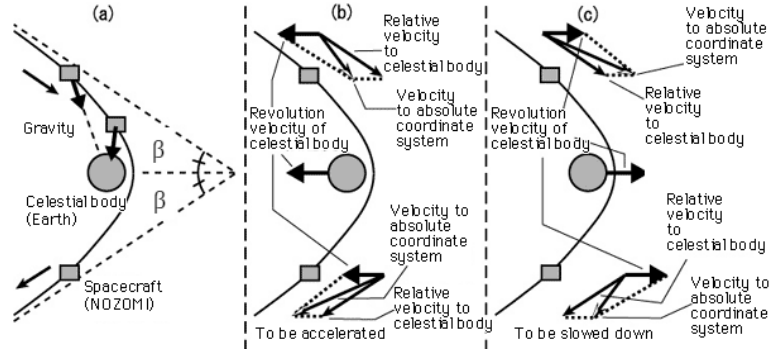


Figura 2.2 - Mecanismo básico do *swing-by*. Retirado em Spaceref (2016).

ser calculo por:

$$\beta = \arccos\left(\frac{1}{e}\right), \quad (2.2)$$

sendo  $e$  a excentricidade da órbita de passagem. Por vezes, é preferível calcular a metade do ângulo entre os vetores velocidade relativa de entrada e saída em relação ao corpo celeste. Esse ângulo é a metade do ângulo de desvio e descrito como:

$$\delta = 90^\circ - \beta. \quad (2.3)$$

Do Problema dos Dois Corpos é possível obter a relação  $e = 1 + r_p V_\infty^2 / \mu$  para uma órbita hiperbólica, onde  $r_p$  representa a distância ao pericentro,  $V_\infty$  a velocidade relativa ao corpo celeste na entrada/saída da espaçonave na esfera de influência<sup>2</sup> e  $\mu$  o parâmetro gravitacional<sup>3</sup>. Com essa relação e as equações apresentadas acima é possível obter:

$$\delta = \arcsin\left(\frac{1}{1 + \frac{r_p V_\infty^2}{\mu}}\right) \quad (2.4)$$

### 2.3 *Swing-by* em Três Dimensões

A figura 2.3 representa uma manobra de *swing-by* em três dimensões e os parâmetros que a definem. O corpo  $M_2$  é o corpo celeste no qual a manobra será executada. Dentre os vários possíveis conjuntos para se representar uma manobra de *swing-by*, neste trabalho o seguinte conjunto de variáveis é utilizado: os ângulos  $\alpha$  e  $\beta$ ,

<sup>2</sup>ou qualquer outra esfera definida maior que a de influência

<sup>3</sup>O parâmetro gravitacional é dado por  $\mu = GM$ , onde  $G$  é a constante gravitacional e  $M$  a massa do corpo.

que indicam a direção do pericentro da trajetória em torno de  $M_2$  em um espaço tridimensional,  $r_p$  a distância de pericentro,  $\gamma$  o ângulo entre o vetor velocidade da espaçonave e a intersecção do plano horizontal que passa pelo pericentro e o plano perpendicular ao pericentro, o qual contém  $\vec{v}_p$ .

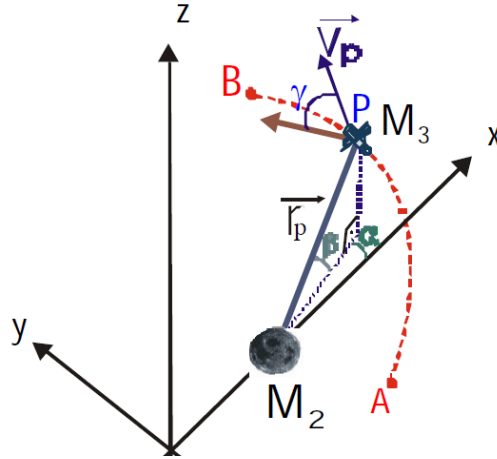


Figura 2.3 - *Swing-by* em três dimensões realizado sobre o corpo  $M_2$ .

Prado (2000) deriva equações analíticas para calcular variações de propriedades físicas antes e depois de um *swing-by* em relação a Terra, considerando a interação de dois corpos, as quais são:

i) Velocidade:

$$\Delta V = -2V_\infty \sin \delta. \quad (2.5)$$

ii) Momento angular:

$$\Delta C = 2x_2 V_\infty \sin \delta (\cos^2 \beta \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.6)$$

onde  $x_2$  é a posição do corpo  $M_2$ .

iii) Energia:

$$\Delta E = -2V_2 V_\infty \cos \beta \cos \alpha \sin \delta. \quad (2.7)$$

iv) Inclinação:

Da definição de inclinação no Problema dos Dois Corpos, sabe-se que  $i = \arccos(C_z/C)$  ( $C$  representa o momento angular, e o subíndice  $z$  a componente do momento angular na direção do eixo  $z$ ).

Prado (2000) mostra que na entrada da Esfera de Influência tem-se<sup>4</sup>:

$$C_{ix} = 0, \quad (2.8a)$$

$$C_{iy} = x_2 V_\infty \sin \beta \sin \delta + \cos \beta \cos \delta \sin \gamma, \quad (2.8b)$$

$$C_{iz} = x_2 V_\infty \left( \frac{V_2}{V_\infty} + \cos \alpha \cos \delta \cos \gamma + \cos \beta \sin \alpha \sin \delta - \cos \delta \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \right) \quad (2.8c)$$

Logo, utilizando as equações 2.8,  $i_i$  pode ser calculado como:

$$i_i = \arccos \left( \frac{C_{iz}}{\sqrt{C_{ix}^2 + C_{iy}^2 + C_{iz}^2}} \right). \quad (2.9)$$

O mesmo pode ser feito para as condições de saída (*outbound*):

$$C_{ox} = 0, \quad (2.10a)$$

$$C_{oy} = x_2 V_\infty \sin \beta \sin \delta - \cos \beta \cos \delta \sin \gamma, \quad (2.10b)$$

$$C_{oz} = x_2 V_\infty \left( \frac{V_2}{V_\infty} + \cos \alpha \cos \delta \cos \gamma - \cos \beta \sin \alpha \sin \delta - \cos \delta \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \right). \quad (2.10c)$$

Então, utilizando 2.10:

$$i_o = \arccos \left( \frac{C_{oz}}{\sqrt{C_{ox}^2 + C_{oy}^2 + C_{oz}^2}} \right). \quad (2.11)$$

---

<sup>4</sup>O subíndice "i" indica *inbound* e "o" *outbound*.

Dessa forma, pode-se obter a variação da inclinação como:

$$\Delta i = i_o - i_i. \quad (2.12)$$

### 3 *Swing-by* pelo Problema Circular Restrito dos Três Corpos

#### 3.1 Problema Circular Restrito dos Três Corpos

O PCRTC considera a interação gravitacional entre 3 corpos, 2 corpos primários e um corpo de massa desprezível em três dimensões. Ainda, os 2 corpos primários, neste caso, descrevem órbitas circulares em um plano comum em torno do centro de massa do sistema (que está localizado na origem do sistema de referência).

Foi utilizado o sistema adimensional canônico de unidades em que: a unidade de distância é a distância entre  $M_1$  e  $M_2$ , os dois corpos primários; a velocidade angular média de  $M_1$  e  $M_2$  é assumida como unitária; a massa do menor primário ( $M_2$ ) é dada por  $\bar{\mu} = \frac{M_2}{M_1+M_2}$ , onde  $M_1$  e  $M_2$  são as massas reais dos primários, e a massa do maior é  $1 - \bar{\mu}$ ; a unidade de tempo é tal que o período dos primários seja  $2\pi$  e a constante gravitacional  $G$  assume o valor 1.

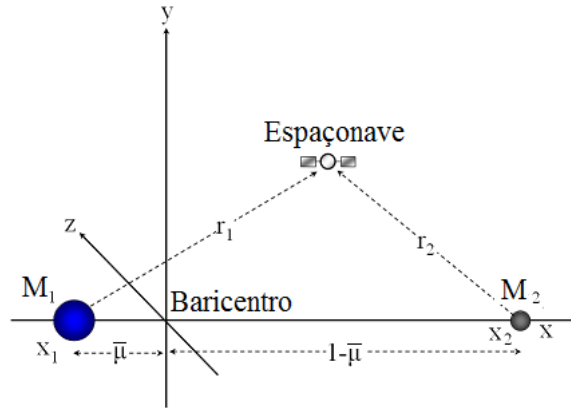


Figura 3.1 - Representação do PCRTC em um sistema de referência sinódico.

Em um sistema de referência girante (sinódico) em torno do eixo  $z$ , em que  $M_1$  e  $M_2$  estão posicionados no eixo  $x$ , respectivamente nas posições  $x_1 = -\bar{\mu}$  e  $x_2 = 1 - \bar{\mu}$ , representado na figura 3.1, as equações do movimento são:

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = x - (1 - \bar{\mu})\frac{x + \bar{\mu}}{r_1^3} - \bar{\mu}\frac{x - 1 + \bar{\mu}}{r_2^3}, \quad (3.1a)$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} = y - (1 - \bar{\mu})\frac{y}{r_1^3} - \bar{\mu}\frac{y}{r_2^3}, \quad (3.1b)$$



$$\ddot{z} = -(1 - \bar{\mu})\frac{z}{r_1^3} - \bar{\mu}\frac{z}{r_2^3}; \quad (3.1c)$$

onde  $r_1$  e  $r_2$  são distâncias do baricentro até  $M_1$  e  $M_2$ , respectivamente. A derivação completa das equações podem ser encontradas em Murray e Dermott (1999).

### 3.2 Mecânica do Swing-by no PCRTC

Nesta seção é investigada a mecânica do *swing-by* via PCRTC. Para tanto, será estudada a variação de energia possível em cada ponto do espaço, similar ao feito por Qi e Xu (2015), porém, diferentemente deles, fora do plano (ou seja, considerando 3 dimensões).

Sabe-se que a energia  $E$  da espaçonave é:

$$E = K + U; \quad (3.2)$$

onde  $K$  é a energia cinética e  $U$  a energia potencial.

Adotando a partir daqui coordenadas em letras maiúsculas para representar coordenadas do sistema inercial, e em letras minúsculas para coordenadas do sistema sinódico, pode-se escrever:

$$K = \frac{1}{2}(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2) = \frac{1}{2}[(\dot{x} - \dot{y})^2 + (\dot{y} + \dot{x})^2 + \dot{z}^2], \quad (3.3)$$

$$U = -\frac{1 - \bar{\mu}}{r_1} - \frac{\bar{\mu}}{r_2}. \quad (3.4)$$

Logo:

$$E = \frac{1}{2}[(\dot{x} - \dot{y})^2 + (\dot{y} + \dot{x})^2 + \dot{z}^2] - \frac{1 - \bar{\mu}}{r_1} - \frac{\bar{\mu}}{r_2}; \quad (3.5)$$

Reescrevendo:

$$E = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + (xy - \dot{x}y) - \left(\frac{1 - \bar{\mu}}{r_1} + \frac{\bar{\mu}}{r_2}\right). \quad (3.6)$$

Do PCRTC, é conhecida a única integral de movimento, a Constante de Jacobi <sup>1</sup>,

---

<sup>1</sup>É uma constante de movimento. É importante dizer que ela não é uma integral de energia porque no PCRTC nem a energia e nem o momento angular são conservados. A Constante de Jacobi é a única integral do PCRTC, o que significa que o problema não pode ser solucionado de forma fechada para casos gerais.(MURRAY; DERMOTT, 1999)

dada por:

$$C_J = (x^2 + y^2) + 2 \left( \frac{1 - \bar{\mu}}{r_1} + \frac{\bar{\mu}}{r_2} \right) - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2). \quad (3.7)$$

Dessa forma, a equação para a energia torna-se:

$$E = -\frac{C_J}{2} + (x^2 + y^2) + (x\dot{y} - \dot{x}y). \quad (3.8)$$

Tirando a derivada de  $E$  no tempo:

$$\frac{dE}{dt} = 2\dot{x}x + 2\dot{y}y + x\ddot{y} - \ddot{x}y, \quad (3.9)$$

e utilizando as equações 3.1a e 3.1b, pode-se chegar a:

$$\frac{dE}{dt} = y(1 - \bar{\mu})\bar{\mu} \left( \frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3} \right). \quad (3.10)$$

Com esta equação é possível realizar uma análise qualitativa de um *swing-by* em três dimensões.

### 3.2.1 Análise Sistema Terra-Lua

A seguir realiza-se uma análise do Sistema Terra-Lua ( $\bar{\mu} = 0.01214$ ).

A figura 3.2 mostra a distribuição de  $dE/dt$  próximo a Lua no plano  $z = 0$  e no plano  $x = 0$ <sup>2</sup>. Percebe-se que em passagens atrás da Lua (valores negativos de  $y$ ) a espaçonave ganha energia, enquanto que em passagens a frente da Lua (valores positivos de  $y$ ) perde energia. Esse resultado é consistente com a teoria de *swing-by* apresentada no capítulo anterior. Pode-se notar que apesar de haver um termo dependente do corpo  $M_1$  (Terra) na equação 3.10, a sua influência nas proximidades de  $M_2$  (Lua) é desprezível, já que  $r_1 \approx 1$ . Logo, nas proximidades da Lua,  $dE/dt$  pode ser aproximado como:

$$\frac{dE}{dt} \approx -y(1 - \bar{\mu})\bar{\mu} \frac{1}{r_2^3}. \quad (3.11)$$

A figura 3.2 mostra a distribuição de  $dE/dt$  próximo a Lua no plano  $z = 0$  e no plano  $x = 0$ <sup>3</sup>. Percebe-se que em passagens atrás da Lua (valores negativos de  $y$ )

<sup>2</sup>Lembre-se, letras minúsculas representam coordenadas no sistema sinódico.

<sup>3</sup>Lembre-se, letras minúsculas representam coordenadas no sistema sinódico.

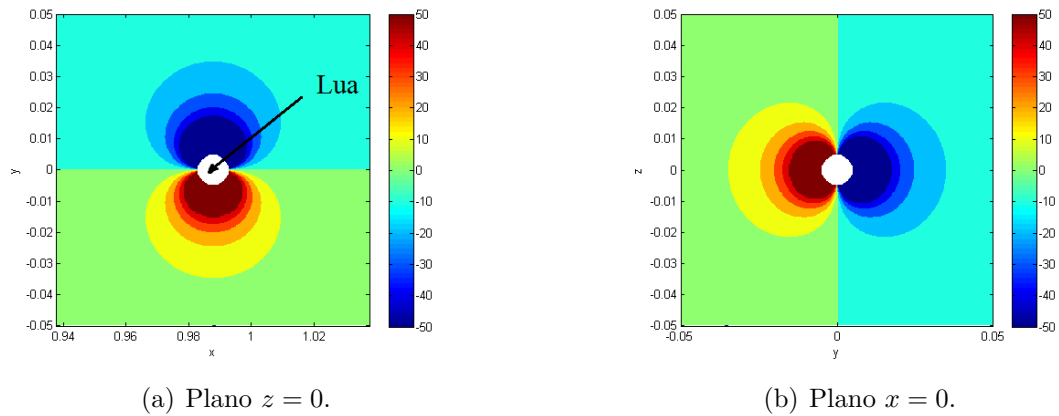


Figura 3.2 - Curvas de nível para  $\frac{dE}{dt}$  no plano  $z = 0$  e  $x = 0$  próximo a Lua. Os extremos são valores maiores ou iguais a 50.

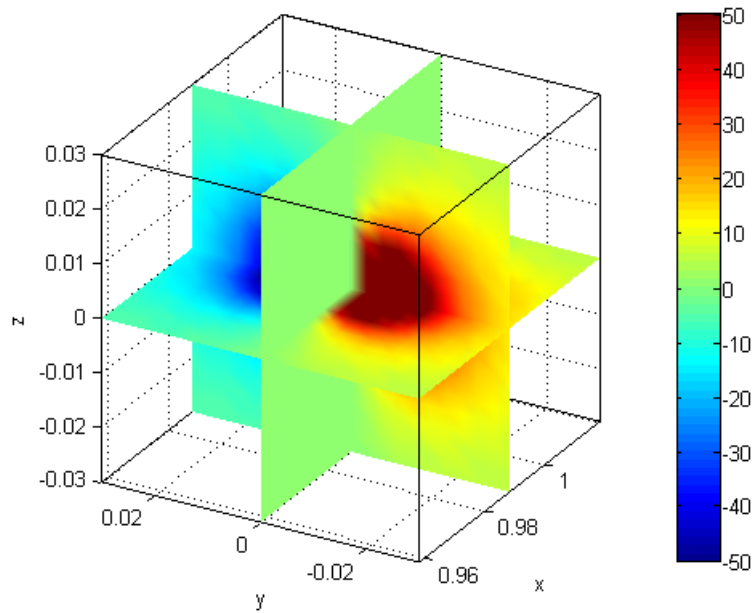


Figura 3.3 - Representação tridimensional em cortes de  $\frac{dE}{dt}$ .

a espaçonave ganha energia, enquanto que em passagens a frente da Lua (valores positivos de  $y$ ) perde energia. Esse resultado é consistente com a teoria de *swing-by* apresentada no capítulo anterior. Pode-se notar que apesar de haver um termo dependente do corpo  $M_1$  (Terra) na equação 3.10, a sua influência nas proximidades de  $M_2$  (Lua) é desprezível, já que  $r_1 \approx 1$ . Logo, nas proximidades da Lua,  $dE/dt$

pode ser aproximado como:

$$\frac{dE}{dt} \approx -y(1 - \bar{\mu})\bar{\mu}\frac{1}{r^3}. \quad (3.12)$$

Na figura 3.3, é apresentada uma figura tridimensional em cortes da distribuição de  $dE/dt$ . Perceba que no plano  $y = 0$  não há variação de  $dE/dt$ , o que é esperado, visto que uma espaçonave nessa posição não se aproveita de parte alguma do momento angular do corpo  $M_2$ .

A análise pode ser estendida para o sistema de forma mais ampla, conforme apresentado na figura 3.4. Nessa figura, percebe-se claramente que grandes variações de energia se dão somente em regiões próximas dos dois corpos primários. Além disso, a análise mantém-se coerente, visto que mesmo para a Terra a figura é consistente com a teoria, ou seja, a espaçonave ganha energia ao passar atrás do sentido de movimento da Terra (valores positivos de  $y$ ).

Também, vale notar na figura 3.4 que há uma divisão clara entre valores positivos e negativos de  $dE/dt$ , coerentes com a análise realizada até então. Porém, como dito anteriormente, em regiões não próximas aos primários a variação é desprezível e muito próxima de 0.

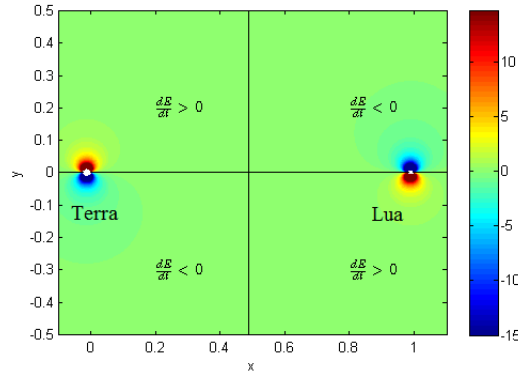


Figura 3.4 - Visualização geral do Sistema Terra-Lua para  $\frac{dE}{dt}$  no plano  $z = 0$ .

### 3.2.2 Exemplo de *Swing-by*

Seguindo o trabalho baseado no Sistema Terra-Lua, nessa seção é apresentado um exemplo de *swing-by*. O exemplo mostrado nas figuras 3.5, 3.6, 3.7 e 3.8 é

uma reprodução do exemplo usado por Qi e Xu (2015). As condições iniciais são  $(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = (-0.8896, 0.2511, 0, -0.2346, 0.6169, 0)$ . Logo, já que não há movimento em  $z$ , o movimento se dá no plano.

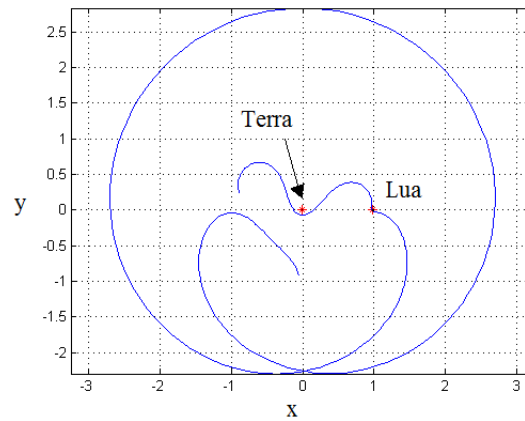


Figura 3.5 - Trajetória no Referencial Sinódico Terra-Lua.

Na figura 3.5, é mostrada a trajetória no sistema de coordenadas sinódico. Nela é possível observar claramente que há duas aproximações entre a espaçonave e os corpos primários. Notadamente, uma na Terra e outra na Lua.

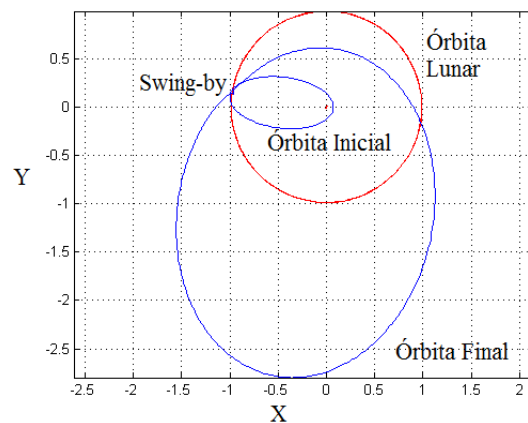


Figura 3.6 - Trajetória no Referencial Inercial centrado no baricentro Terra-Lua.

A figura 3.6 representa a trajetória no sistema de coordenadas inercial centrado no baricentro. Note a diferença entre a órbita final e a inicial devido o *swing-by*, passando de uma pequena elipse que intercepta a órbita lunar para uma grande

elipse. Estudando mais a fundo o problema, como no próximo capítulo, é possível de se obter órbitas finais de escape do Sistema Terra-Lua.

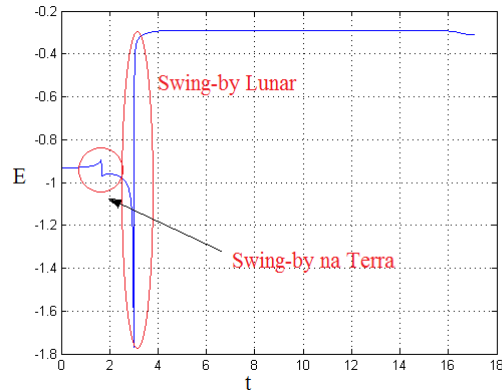


Figura 3.7 - Gráfico energia vs tempo.

As vantagens do *swing-by* ficam ainda mais evidentes ao se olhar para a variação temporal de energia, como na figura 3.7. Perceba que a energia mantém-se quase que constante por todo o período de tempo, exceto por duas variações bruscas e de grande amplitude. Uma menor, na Terra, havendo uma pequena perda de energia, e uma maior na Lua, havendo um ganho considerável de energia.

A figura 3.7 fica ainda mais clara sob a luz da figura 3.8, a qual representa a trajetória da espaçonave, em seu *swing-by* na Lua, sobreposta as curvas de nível de  $dE/dt$ . A espaçonave tem sua aproximação com a Lua a frente dela ( $y$  positivo), o que explica a inicial perda de energia em seu *swing-by* pela Lua na figura 3.7. Todavia, a maior parte da trajetória se dá atrás da Lua, explicando o grande ganho de energia constatado a posteriore.

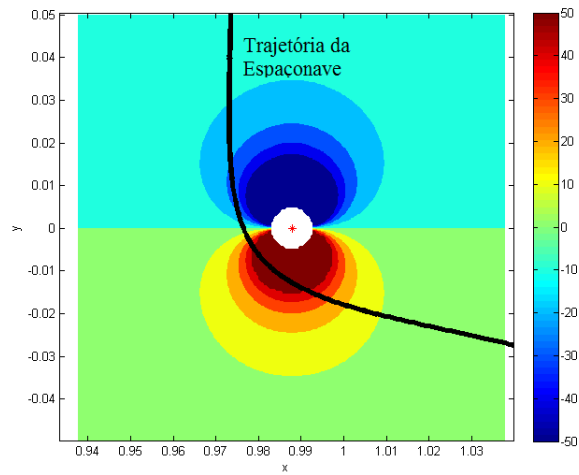


Figura 3.8 - Curvas de nível de  $dE/dt$  e trajetória da espaçonave no sistema sinódico próximo a Lua.

Pode-se fazer a mesma análise para a Terra. De forma não tão clara quanto na figura 3.8, percebe-se na figura 3.5 que a maior parte da trajetória da espaçonave em seu *swing-by* na Terra se dá a frente da Terra (valores negativos de  $y$ ), o que explica a perda líquida de energia ao fim do *swing-by* conforme mostrado na figura 3.7.

#### 4 *Swing-by* Com Uso de Cabos

Nesse caso, é considerado que a espaçonave está em órbita de um planeta, e de forma a acelerar ou desacelerar, é desejável que ela faça um *swing-by* em alguma de suas luas, economizando assim combustível.

Aqui é considerado apenas o caso em duas dimensões, com parâmetros conforme a figura 4.1. Pode-se descrever esse problema tanto por via *Patched Conics* quanto por PCRTC; aqui é utilizado PCRTC, logo o eixo x da figura 4.1 é o mesmo eixo x da figura 3.1. É assumido que a espaçonave se aproxima da lua com uma velocidade  $v_{inf}$  e assume-se que o cabo é conectado a lua, como uma espécie de âncora, assim que a espaçonave está em seu pericentro. O cabo tem comprimento  $l$  e provê um ângulo de rotação de  $2\delta$  para a espaçonave. Por fim,  $\Psi$  representa o ângulo entre o meio da trajetória com o cabo conectado e o eixo x, e  $B$  o ângulo entre o meio da trajetória com o cabo conectado e o ponto onde o cabo acaba de se conectar (o pericentro).

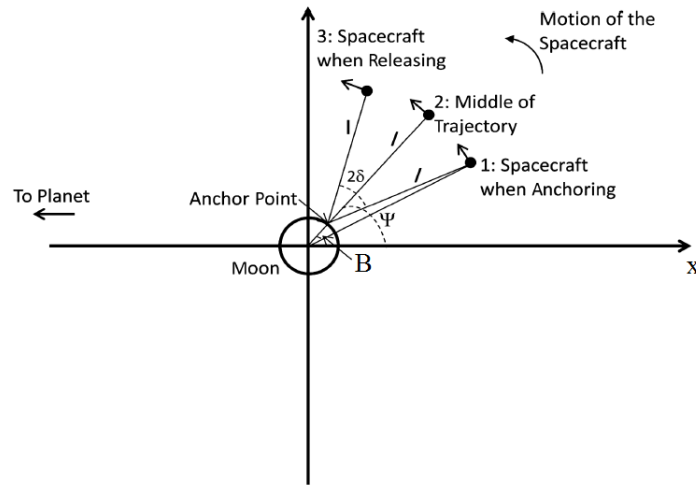


Figura 4.1 - Geometria de *Swing-by* com uso de cabos e suas variáveis. Retirado de Prado (2015).

O ângulo  $B$  é calculado como:

$$\sin(B) = \frac{l \sin(\delta)}{(r_m^2 + l^2 + 2lr_m \cos(\delta))^{\frac{1}{2}}}, \quad (4.1)$$

sendo  $r_m$  o raio da lua onde se realiza a manobra.





## 5 Resultados

Este capítulo será dedicado a mostrar e analisar, primeiramente, os resultados obtidos por ambos os métodos (*Patched Conics* e PRCTC) aplicados a Lua. Primeiro será mostrado os resultados e particularidades de cada um dos métodos, depois será feita uma comparação entre os métodos, de forma a determinar quão precisa é uma análise analítica via *Patched Conics*, de menor complexidade.

Os resultados consistem basicamente de curvas de nível da variação da energia e da inclinação com  $\beta$  variando de  $-90^\circ$  a  $90^\circ$ , e  $\alpha$  de  $180^\circ$  a  $360^\circ$ <sup>1</sup>. A inclinação e a energia da espaçonave é mensurada relativo ao corpo  $M_1$ , no caso a Terra.

Por último, é realizado uma pequena comparação entre uma manobra realizada com e sem uso de cabos, em figuras que variam  $v_{inf}$  e  $\Psi$  e classificam possíveis trajetórias para espaçonaves que se encontram no sistema Terra-Lua, Mab-Urano e Caronte-Plutão.

### 5.1 Modelo Analítico da *Patched Conics*

Utilizando as equações 2.7 e 2.12 foram geradas figuras para analisar as variações de inclinação e energia de acordo com  $\alpha$  e  $\beta$  para várias condições iniciais diferentes de  $r_p$ ,  $v_p$  e  $\gamma$ .

#### 5.1.1 Efeitos da Velocidade de Pericentro

Aqui será analisado os efeitos do aumento da velocidade no pericentro na variação da energia e inclinação para condições iniciais de  $r_p = 0.00675$  e  $\gamma = 0^\circ$ .

##### 5.1.1.1 Energia

Observando atentamente as figuras 5.1, 5.2 e 5.3 percebe-se que há um decréscimo no ganho de energia por conta da manobra conforme há um aumento da velocidade de pericentro. Essa condição pode ser explicada utilizando a análise de  $dE/dt$  feita no capítulo anterior, visto que para maiores velocidades de pericentro a espaçonave consequentemente permanece menor tempo realizando a manobra de swing-by, acumulando uma menor quantidade de energia, ou seja, menor  $\Delta E$ .

---

<sup>1</sup>Esse intervalo de  $\alpha$  foi escolhido de forma a analisar apenas manobras para ganho de energia.

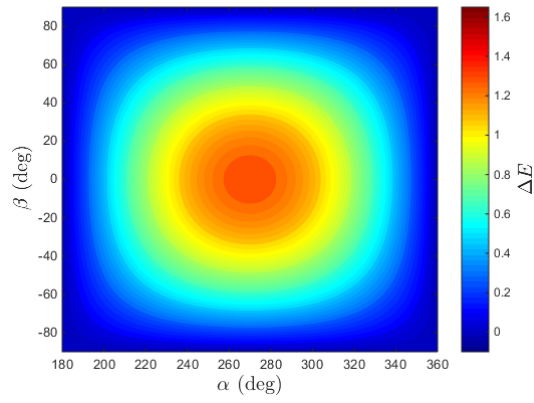


Figura 5.1 - Curvas de nível de  $\Delta E$  para  $v_p = 2.2$  ( $r_p = 0.00675$  e  $\gamma = 0^\circ$ ).

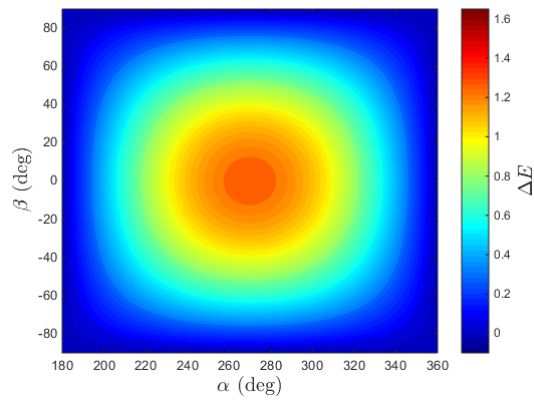


Figura 5.2 - Curvas de nível de  $\Delta E$  para  $v_p = 2.6$  ( $r_p = 0.00675$  e  $\gamma = 0^\circ$ ).

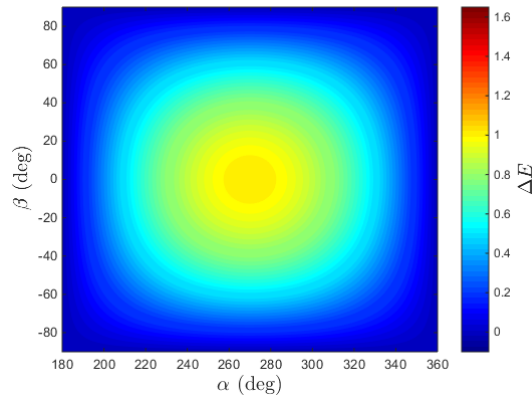


Figura 5.3 - Curvas de nível de  $\Delta E$  para  $v_p = 3.4$  ( $r_p = 0.00675$  e  $\gamma = 0^\circ$ ).

### 5.1.1.2 Inclinação

O mesmo fenômeno na diminuição de  $\Delta E$  com o aumento de  $v_p$  pode ser observado para  $\Delta i$ . Constanta-se nas figuras 5.4, 5.5 e 5.6 que com o aumento de  $v_p$  há uma diminuição de regiões possíveis para grandes mudanças de inclinação. Além disso, parece haver uma tendência dessa região se acumular a valores próximo de  $260^\circ$ .

Algo que pode ser notado em todas as figuras de  $\Delta i$  quando  $\gamma = 0^\circ$  é que quando a manobra se dá no plano ( $\beta = 0^\circ$ ), ela se mantém no plano. Pois, na maior parte,  $\Delta i = 0^\circ$  e em algumas regiões de  $\beta = 0^\circ$ ,  $\Delta i = -180^\circ$ , como pode ser visto nas figuras.  $\Delta i = -180^\circ$  representa uma mudança no sentido de rotação da espaçonave.

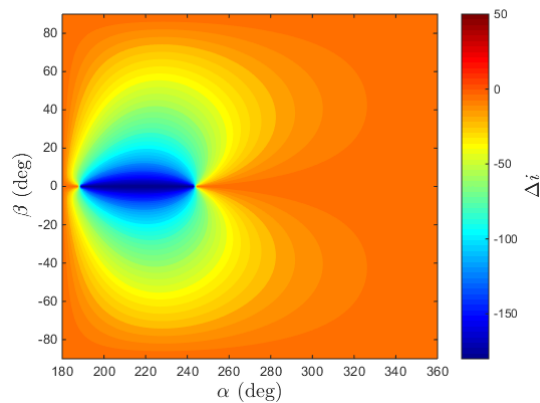


Figura 5.4 - Curvas de nível de  $\Delta i$  para  $v_p = 2.2$  ( $r_p = 0.00675$  e  $\gamma = 0^\circ$ ).

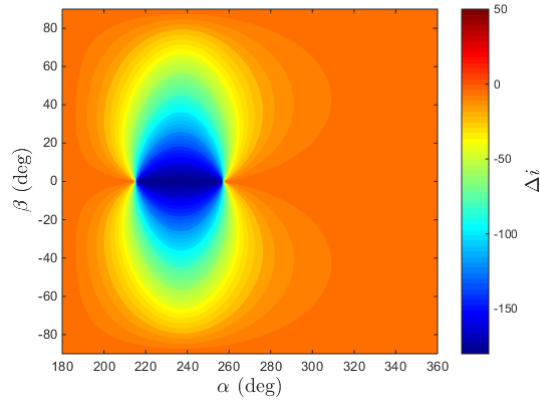


Figura 5.5 - Curvas de nível de  $\Delta i$  para  $v_p = 2.6$  ( $r_p = 0.00675$  e  $\gamma = 0^\circ$ ).

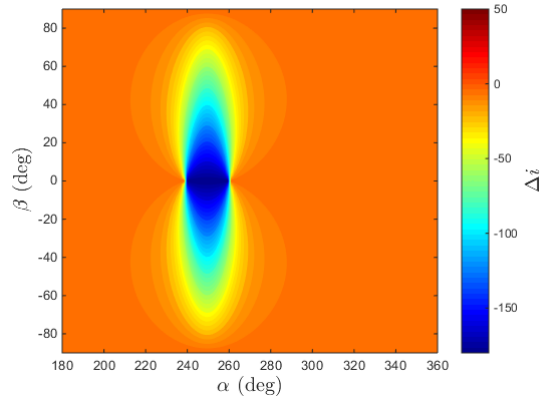


Figura 5.6 - Curvas de nível de  $\Delta i$  para  $v_p = 3.4$  ( $r_p = 0.00675$  e  $\gamma = 0^\circ$ ).

### 5.1.2 Efeitos da Distância de Pericentro

Mantendo  $v_p = 2.6$  e  $\gamma = 0^\circ$  e obtendo figuras para diferentes valores de  $r_p$  é possível fazer algumas observações quanto ao efeito da distância do pericentro na manobra.

#### 5.1.2.1 Energia

Similarmente ao que ocorre com  $v_p$ , há uma diminuição do ganho de energia com o aumento de  $r_p$ , como pode se notar nas figuras 5.7, 5.8 e 5.9. O que pode ser mais uma vez confirmado com a análise feita de  $dE/dt$ . Especialmente ao se analisar a equação 3.12.

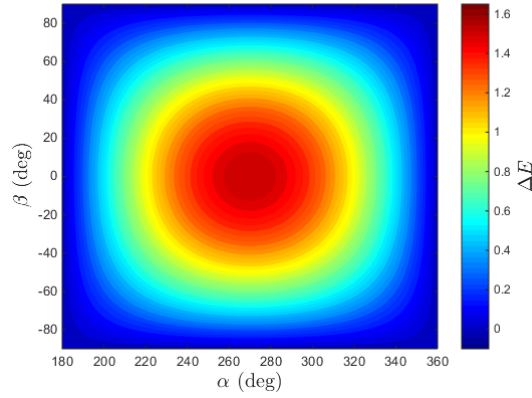


Figura 5.7 - Curvas de nível de  $\Delta E$  para  $r_p = 0.00476$  ( $v_p = 2.6$  e  $\gamma = 0^\circ$ ).

Sabendo que  $y$  pode ser escrito como:

$$y = r_2 \cos \beta \sin \alpha, \quad (5.1)$$

a equação 3.12 fica:

$$\frac{dE}{dt} \approx -\cos \beta \sin \alpha (1 - \bar{\mu}) \bar{\mu} \frac{1}{r_2^2}, \quad (5.2)$$

ficando evidente que com o aumento da distância da espaçonave em relação ao corpo em que realiza a manobra há uma diminuição do ganho de energia.

Outra coisa que fica evidente ao observar a equação 5.2 é uma explicação para um padrão que parece se repetir nas figuras de  $\Delta E$ , que é maiores ganhos de energia em regiões onde  $\alpha$  e  $\beta$  assumem valores próximos a  $270^\circ$  e  $0^\circ$ , respectivamente.

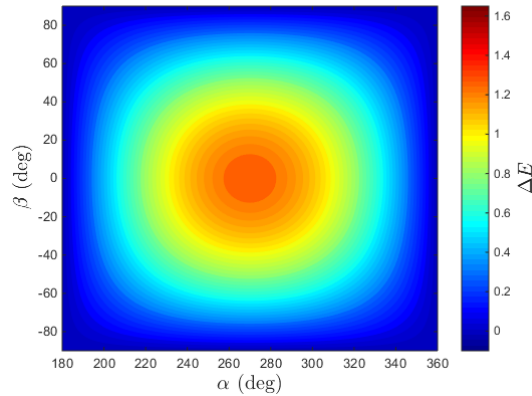


Figura 5.8 - Curvas de nível de  $\Delta E$  para  $r_p = 0.00675$  ( $v_p = 2.6$  e  $\gamma = 0^\circ$ ).

Além disso, é possível notar que as figuras de  $\Delta E$  parecem manter dois eixos de simetria para esses mesmos valores de  $\alpha$  e  $\beta$ . O que já era possível de inferir ao observar a figura 3.3. Essa simetria poderia ser quebrada ao considerar uma expansão do potencial gravitacional do corpo em que se realiza a manobra, o que deverá ser realizado em trabalhos futuros.

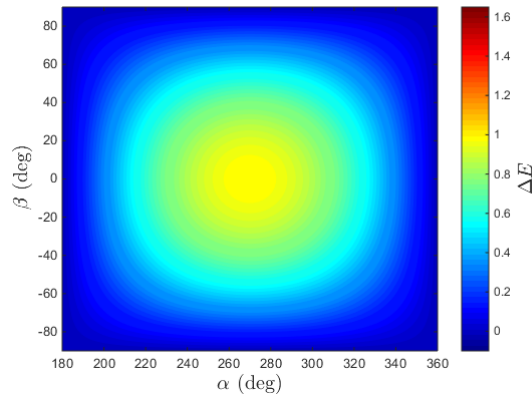


Figura 5.9 - Curvas de nível de  $\Delta E$  para  $r_p = 0.009$  ( $v_p = 2.6$  e  $\gamma = 0^\circ$ ).

### 5.1.2.2 Inclinação

Ao se observar as figuras 5.10, 5.11 e 5.12, mais uma vez, similarmente ao que ocorre com  $v_p$ , parece haver uma diminuição das regiões com grande variação de inclinação ao se aumentar  $r_p$ , assim como um deslocamento dessas regiões para a direita.

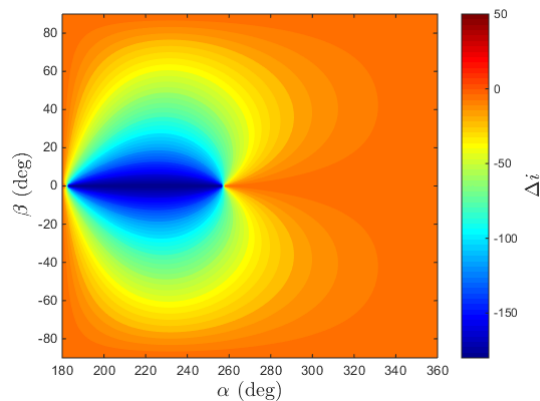


Figura 5.10 - Curvas de nível de  $\Delta i$  para  $r_p = 0.00476$  ( $v_p = 2.6$  e  $\gamma = 0^\circ$ ).

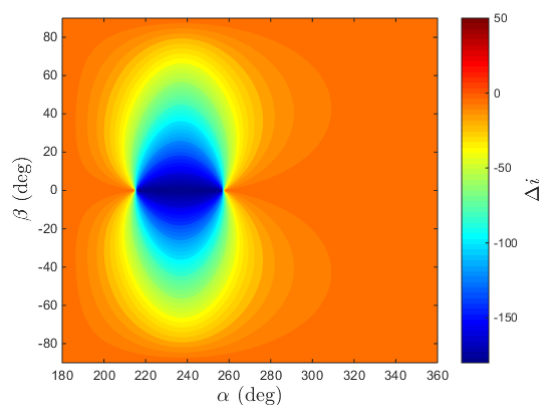


Figura 5.11 - Curvas de nível de  $\Delta i$  para  $r_p = 0.00675$  ( $v_p = 2.6$  e  $\gamma = 0^\circ$ ).

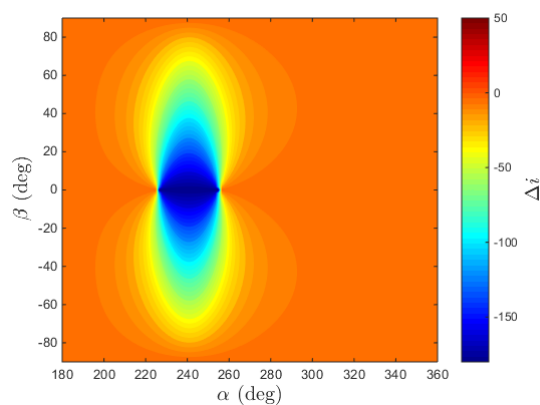


Figura 5.12 - Curvas de nível de  $\Delta i$  para  $r_p = 0.009$  ( $v_p = 2.6$  e  $\gamma = 0^\circ$ ).

### 5.1.3 Efeitos de $\gamma$

Testando para valores de  $\gamma$  diferentes de  $0^\circ$  pode-se tirar algumas conclusões, que são apresentadas a seguir.

#### 5.1.3.1 Energia

Ao observar as figuras 5.13, 5.14 e 5.15 percebe-se que mesmo para valores de  $\gamma$  diferentes de  $0^\circ$  as curvas de nível permanecem com o mesmo formato. Outro ponto a se notar é que aparentemente as curvas de nível têm os mesmos valores, ou valores muito próximos, evidenciando que a influência de  $\gamma$  sobre a variação de energia é nula, ou quase nula.



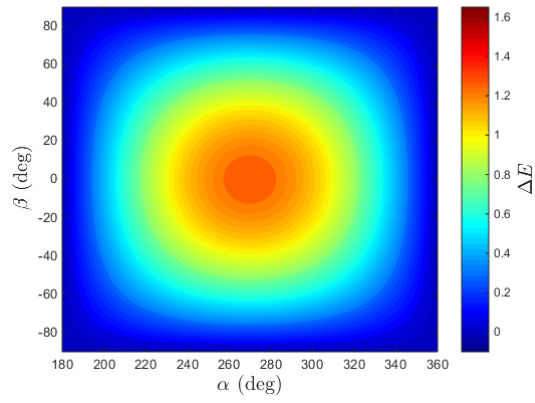


Figura 5.13 - Curvas de nível de  $\Delta E$  para  $\gamma = 0^\circ$  ( $v_p = 2.6$  e  $r_p = 0.00675$ ).

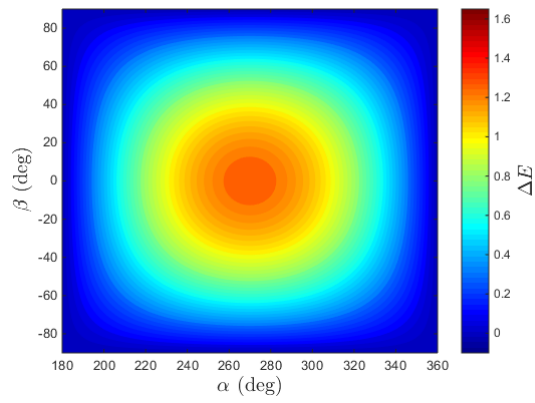


Figura 5.14 - Curvas de nível de  $\Delta E$  para  $\gamma = 30^\circ$  ( $v_p = 2.6$  e  $r_p = 0.00675$ ).

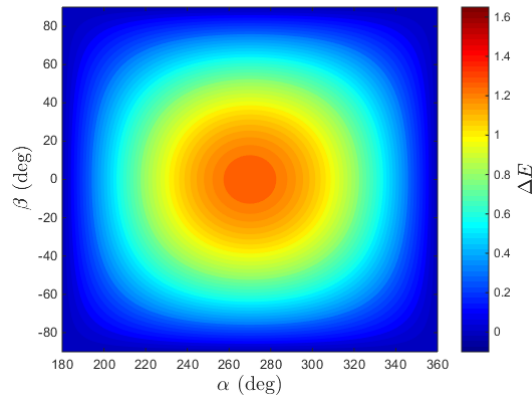


Figura 5.15 - Curvas de nível de  $\Delta E$  para  $\gamma = 60^\circ$  ( $v_p = 2.6$  e  $r_p = 0.00675$ ).

### 5.1.3.2 Inclinação

Diferentemente do que ocorre para  $\Delta E$ , o efeito de gamma sobre  $\Delta i$  é drástico e evidente, como pode ser observado nas figuras 5.16, 5.17 e 5.18. Isso leva a crer que a grande influência de  $\gamma$  é na variação de inclinação. Algo a se notar, com o aumento de  $\gamma$ , é o surgimento de variações de inclinação positivas (denotadas principalmente pelas cores avermelhadas nas figuras) e o desaparecimento de grandes variações de inclinação negativas (diminuição das regiões azuladas).

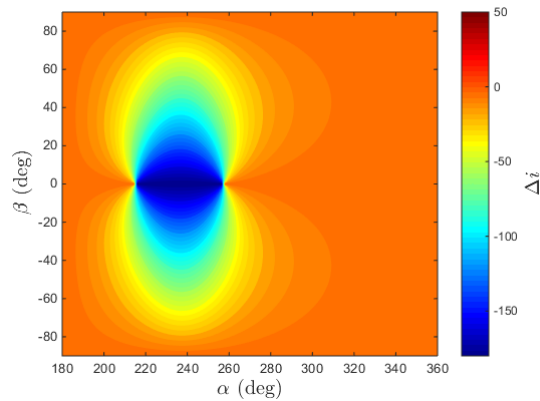


Figura 5.16 - Curvas de nível de  $\Delta i$  para  $\gamma = 0^\circ$  ( $v_p = 2.6$  e  $r_p = 0.00675$ ).

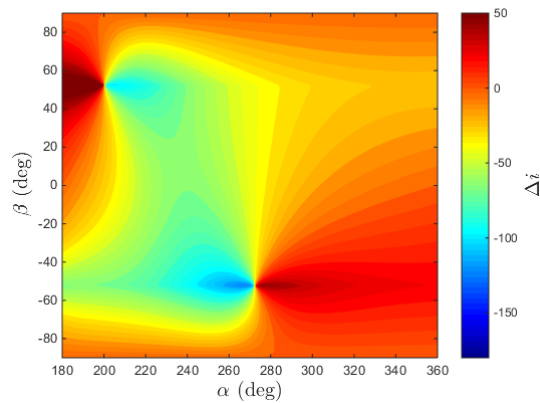


Figura 5.17 - Curvas de nível de  $\Delta i$  para  $\gamma = 30^\circ$  ( $v_p = 2.6$  e  $r_p = 0.00675$ ).

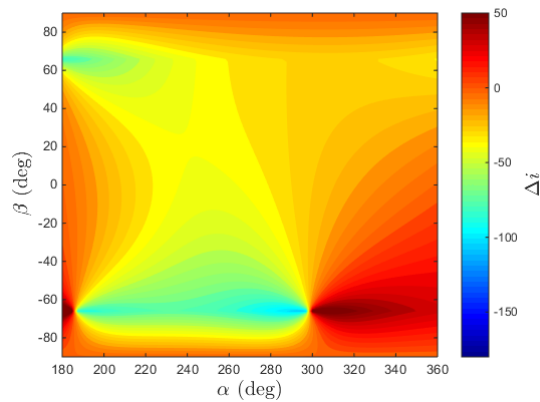


Figura 5.18 - Curvas de nível de  $\Delta i$  para  $\gamma = 60^\circ$  ( $v_p = 2.6$  e  $r_p = 0.00675$ ).

## 5.2 Modelo Numérico do PCRTC e Algumas Considerações Sobre a Mecânica do Problema

Esta seção não se dedicará meramente a mostrar os resultados obtidos por PCRTC em relação a variação de energia e inclinação para diferentes condições iniciais, já que qualitativamente são muito semelhantes aos obtidos pela *Patched Conics*, apresentado anteriormente. Aproveitando da maior precisão do PCRTC, nessa seção serão utilizadas figuras de variação de energia e inclinação associadas a outras curvas que permitam analisar melhor a mecânica do problema e que possam vir a servir como mapas base para um projeto inicial de *swing-by* na Lua.

### 5.2.1 Algoritmo e Condições Iniciais

Foi utilizado o mesmo algoritmo desenvolvido por Felipe e Prado (2000) para solucionar as equações 3.1a, 3.1b e 3.1c. O algoritmo consiste nos seguintes passos:

- Valores arbitrários para os parâmetros  $r_p$ ,  $v_p$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  são dados;
- Com esses valores as condições iniciais no sistema sinódico são calculadas através de:

$$X_i = 1 - \bar{\mu} + r_p \cos \beta \cos \alpha, \quad (5.3)$$

$$Y_i = r_p \cos \beta \sin \alpha, \quad (5.4)$$

$$Z_i = r_p \sin \beta, \quad (5.5)$$

$$V_{xi} = -v_p \sin \gamma \sin \beta \cos \alpha - v_p \cos \gamma \sin \alpha + r_p \cos \beta \sin \alpha, \quad (5.6)$$

$$V_{yi} = -v_p \sin \gamma \sin \beta \sin \alpha + v_p \cos \gamma \cos \alpha - r_p \cos \beta \cos \alpha, \quad (5.7)$$

$$V_{zi} = v_p \cos \beta \sin \gamma; \quad (5.8)$$

- Com essas condições iniciais, as equações do movimento são integradas adiante no tempo até que a distância  $d$  de  $M_2$  para a espaçonave seja tal que sua influência gravitacional seja desprezível<sup>2</sup> (neste trabalho foi utilizado  $d=0.5$ ). Ao atingir esse ponto, a energia e momento angular após o encontro são calculados;

- Então, a partícula volta para suas condições iniciais e é integrada para trás no tempo até que atinja a distância  $d$ . Ao atingir esse ponto, a energia e momento angular antes do encontro são calculados;

- A partir da energia é possível saber o tipo de órbita que a espaçonave descreve em relação ao planeta. Sabendo a energia antes e depois da manobra pode-se classificar a manobra como tipo 1, 2, 3 e 4 de acordo com a tabela a seguir<sup>3</sup>:

### 5.2.2 Efeitos da Velocidade de Pericentro

#### 5.2.2.1 Energia

Nas figuras 5.19, 5.20 e 5.21 são mostradas as variações de energia para diferentes velocidades de pericentro. Perceba que as curvas de nível de  $\Delta E$  são plotadas em

---

<sup>2</sup>Ao menos, do tamanho da esfera de influência de  $M_2$ .

<sup>3</sup>Lembrando que uma órbita fechada é uma elipse ou círculo. Uma órbita aberta, uma hipérbole ou parábola.

Tabela 5.1 - Classificação da manobra segundo o tipo de órbita.

		Órbita Depois do <i>Swing-by</i>	
		Órbita Fechada ( $E < 0$ )	Órbita Aberta ( $E \geq 0$ )
Órbita Antes do <i>Swing-by</i>	Órbita Fechada ( $E < 0$ )	tipo <b>2</b>	tipo <b>1</b>
	Órbita Aberta ( $E \geq 0$ )	tipo <b>3</b>	tipo <b>4</b>

conjunto com outras curvas de nível, que são curvas de nível que classificam as órbitas de acordo com definição da tabela 5.1. As linhas pretas definem as curvas de nível de  $\Delta E$ . A cor cinza indica condições em que ocorre manobra do tipo 1, a cor amarela manobra do tipo 2, verde clara do tipo 3 e verde escura do tipo 4.

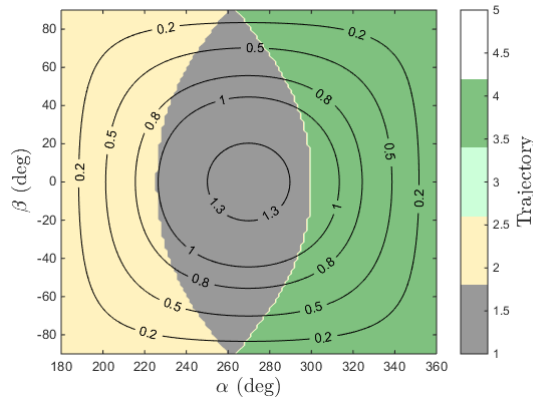


Figura 5.19 - Curvas de nível de  $\Delta E$  (linhas pretas) e classificação de órbitas (regiões coloridas) para  $v_p = 2.2$  ( $\gamma = 0^\circ$  e  $r_p = 0.00675$ ).

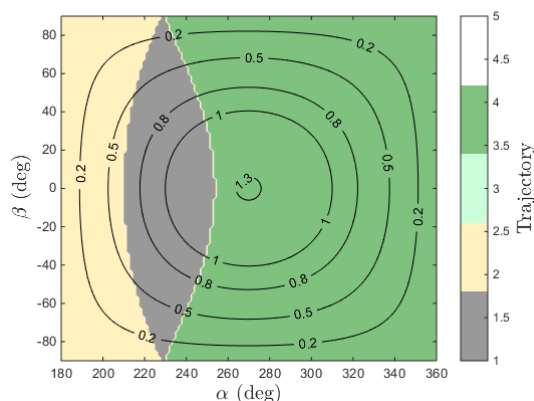


Figura 5.20 - Curvas de nível de  $\Delta E$  (linhas pretas) e classificação de órbitas (regiões coloridas) para  $v_p = 2.6$  ( $\gamma = 0^\circ$  e  $r_p = 0.00675$ ).

Note que com o aumento da velocidade há uma diminuição nos possíveis ganhos de  $\Delta E$ , como visto na seção anterior. Bem como há uma redução nas áreas que permitem órbitas fechadas, e estas desaparecendo completamente para  $v_p = 3.4$ . O interesse aqui é que a órbita antes da manobra seja fechada (tipo 1 e 2), pois isso se traduz em um menor gasto de energia em uma transferência da Terra para Lua. No caso em que é realizado apenas uma única manobra gravitacionalmente assistida na Lua, é também de interesse que a órbita depois na manobra seja aberta (tipo 1 e 4), caso o objetivo seja escape do sistema Terra-Lua. Logo, se as duas condições (transferência da Terra para a Lua com mínimo gasto de combustível e escape do sistema Terra-Lua em um único *swing-by*) devem ser encontradas, a preferência se dá para a manobra do tipo 1.

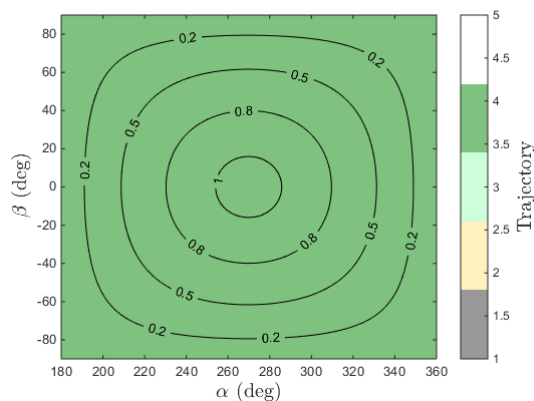


Figura 5.21 - Curvas de nível de  $\Delta E$  (linhas pretas) e classificação de órbitas (regiões coloridas) para  $v_p = 3.4$  ( $\gamma = 0^\circ$  e  $r_p = 0.00675$ ).

### 5.2.2.2 Inclinação

Para analisar as figuras de  $\Delta i$  é sobreposto curvas de nível para a inclinação antes da manobra ( $i_i$ ), o que permite visualizar melhor o que ocorre com a espaçonave depois do *swing-by*.

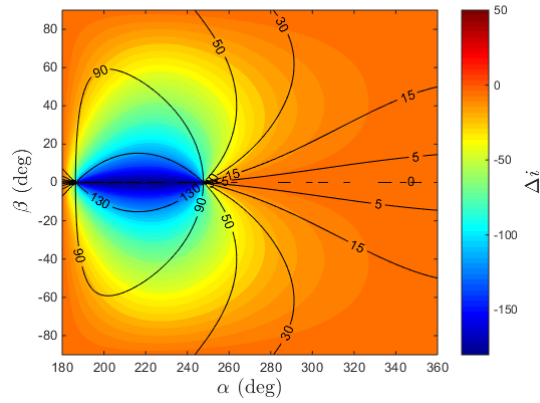


Figura 5.22 - Curvas de nível de  $\Delta i$  e curvas de nível de  $i_i$  para  $v_p = 2.2$  ( $\gamma = 0^\circ$  e  $r_p = 0.00675$ ).

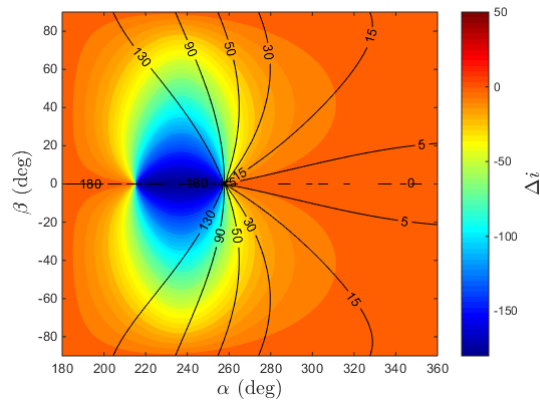


Figura 5.23 - Curvas de nível de  $\Delta i$  e curvas de nível de  $i_i$  para  $v_p = 2.6$  ( $\gamma = 0^\circ$  e  $r_p = 0.00675$ ).

Nas figuras 5.22, 5.23 e 5.24 é possível ver facilmente, para o movimento no plano ( $\beta = 0^\circ$ ), três condições para diferentes intervalos de  $\alpha$ : o movimento da espaçonave era retrógrado ( $i = 180^\circ$ ) e se mantém retrógrado, era retrógrado e se inverte e se

mantém com inclinação de  $0^\circ$ .

Tomando a figura 5.23 como exemplo, para valores de  $\alpha$  até em torno de  $220^\circ$  a espaçonave chega em movimento retrógrado para o *swing-by* e mantém o movimento retrógrado depois da manobra ( $\Delta i = 0^\circ$ ). Entre  $220^\circ$  e  $260^\circ$ , a espaçonave que tinha movimento retrógrado inverte seu sentido de rotação em torno do corpo  $M_1$  após a manobra ( $\Delta i = -180^\circ$ ). Para valores maiores que  $260^\circ$ , a espaçonave mantém sua inclinação de  $0^\circ$ .

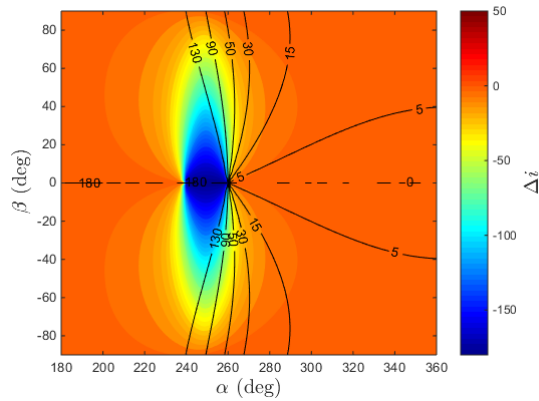


Figura 5.24 - Curvas de nível de  $\Delta i$  e curvas de nível de  $i_i$  para  $v_p = 3.4$  ( $\gamma = 0^\circ$  e  $r_p = 0.00675$ ).

## 5.2.3 Efeitos do Raio de Pericentro

### 5.2.3.1 Energia

Nas figuras 5.25, 5.26 e 5.27 pode-se ver que o aumento do raio de pericentro também diminui as regiões em que manobras do tipo 1 e 2 ocorrem.



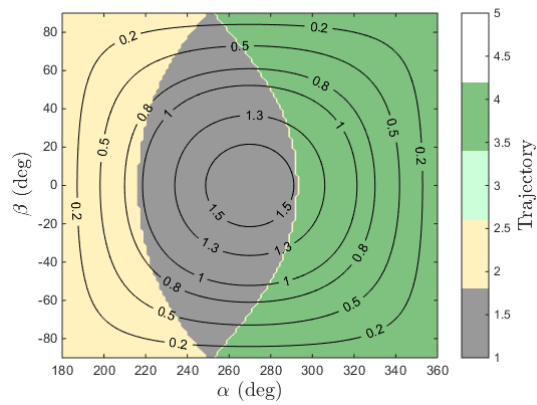


Figura 5.25 - Curvas de nível de  $\Delta E$  (linhas pretas) e classificação de órbitas (regiões coloridas) para  $r_p = 0.00476$  ( $\gamma = 0^\circ$  e  $v_p = 2.6$ ).

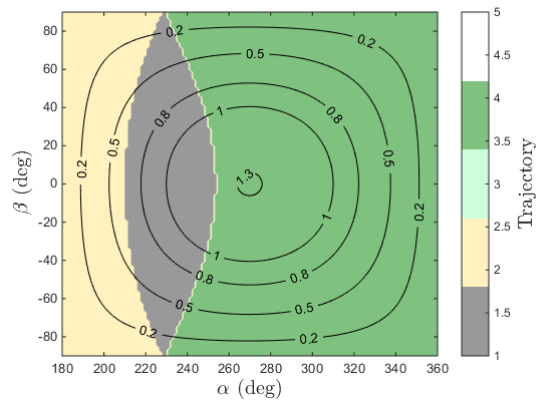


Figura 5.26 - Curvas de nível de  $\Delta E$  (linhas pretas) e classificação de órbitas (regiões coloridas) para  $r_p = 0.00675$  ( $\gamma = 0^\circ$  e  $v_p = 2.6$ ).

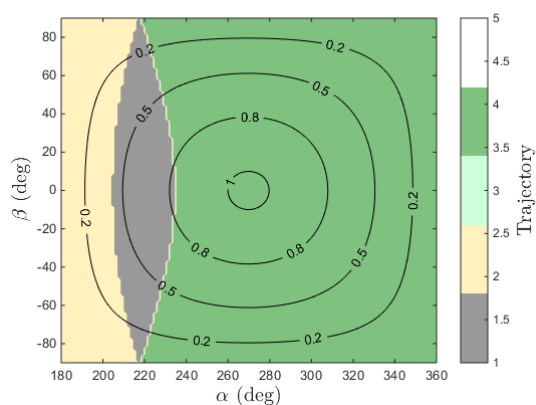


Figura 5.27 - Curvas de nível de  $\Delta E$  (linhas pretas) e classificação de órbitas (regiões coloridas) para  $r_p = 0.009$  ( $\gamma = 0^\circ$  e  $v_p = 2.6$ ).

### 5.2.3.2 Inclinação

Nas figuras 5.28, 5.29 e 5.30, pode-se notar que para o aumento de  $r_p$  ocorre o mesmo que para o aumento de  $v_p$ .

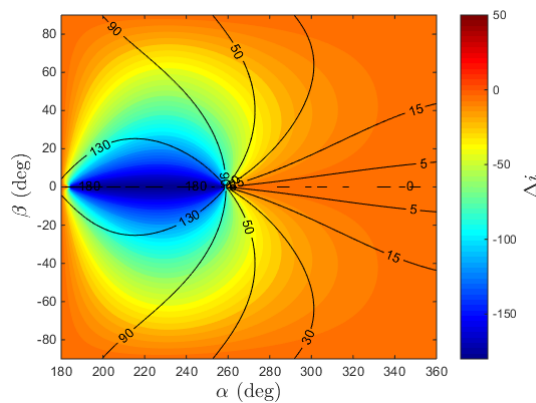


Figura 5.28 - Curvas de nível de  $\Delta i$  e curvas de nível de  $i_i$  para  $r_p = 0.00476$  ( $\gamma = 0^\circ$  e  $v_p = 2.6$ ).

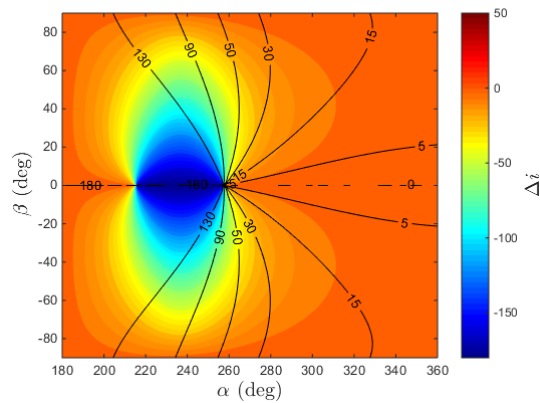


Figura 5.29 - Curvas de nível de  $\Delta i$  e curvas de nível de  $i_i$  para  $r_p = 0.00675$  ( $\gamma = 0^\circ$  e  $v_p = 2.6$ ).

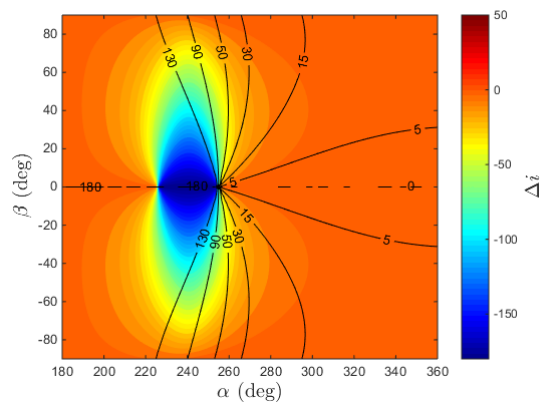


Figura 5.30 - Curvas de nível de  $\Delta i$  e curvas de nível de  $i_i$  para  $r_p = 0.009$  ( $\gamma = 0^\circ$  e  $v_p = 2.6$ ).

## 5.2.4 Efeitos de $\gamma$

### 5.2.4.1 Energia

Perceba nas figuras 5.31, 5.32 e 5.33 que, diferentemente do que foi dito na análise via *Patched Conics*, pode-se ver uma aparente pequena diminuição da variação de energia com o aumento de  $\gamma$ . Isso pode ser notado pela pequena diminuição da curva de nível de  $\Delta E = 1.3$  da figura 5.31 para 5.32, e posteriormente seu completo desaparecimento na figura 5.33.

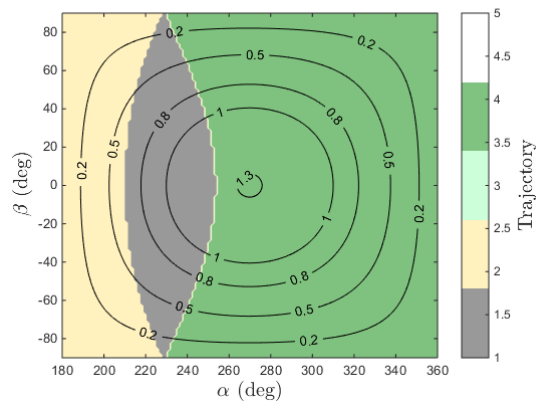


Figura 5.31 - Curvas de nível de  $\Delta E$  (linhas pretas) e classificação de órbitas (regiões coloridas) para  $\gamma = 0^\circ$  ( $v_p = 2.6$  e  $r_p = 0.00675$ ).

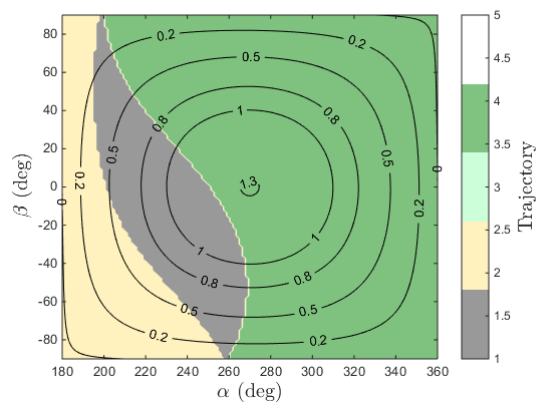


Figura 5.32 - Curvas de nível de  $\Delta E$  (linhas pretas) e classificação de órbitas (regiões coloridas) para  $\gamma = 30^\circ$  ( $v_p = 2.6$  e  $r_p = 0.00675$ ).

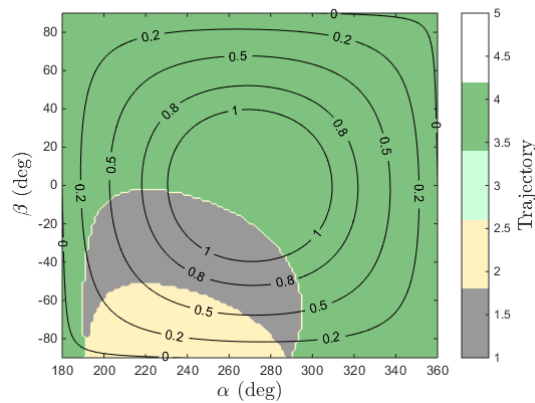


Figura 5.33 - Curvas de nível de  $\Delta E$  (linhas pretas) e classificação de órbitas (regiões coloridas) para  $\gamma = 60^\circ$  ( $v_p = 2.6$  e  $r_p = 0.00675$ ).

### 5.2.4.2 Inclinação

O mesmo que foi constatado na análise via *Patched Conics* para  $\Delta i$  com o aumento de  $\gamma$ , pode ser notado aqui nas figuras 5.34, 5.35 e 5.36. Ou seja, com o aumento de  $\gamma$  há o surgimento de regiões avermelhadas, que indicam valores de variação de inclinação maiores que zero, o que não é notado em casos de  $\gamma = 0^\circ$

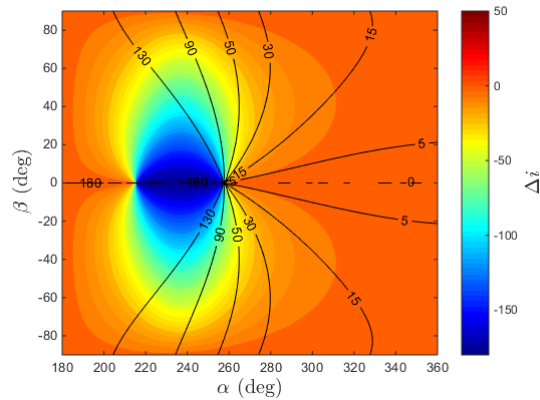


Figura 5.34 - Curvas de nível de  $\Delta i$  e curvas de nível de  $i_i$  para  $\gamma = 0^\circ$  ( $v_p = 2.6$  e  $r_p = 0.00675$ ).

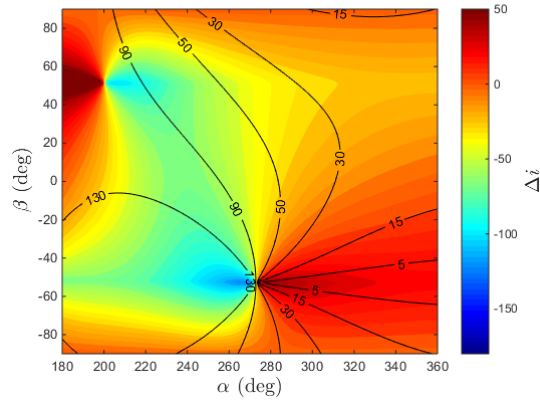


Figura 5.35 - Curvas de nível de  $\Delta i$  e curvas de nível de  $i_i$  para  $\gamma = 30^\circ$  ( $v_p = 2.6$  e  $r_p = 0.00675$ ).

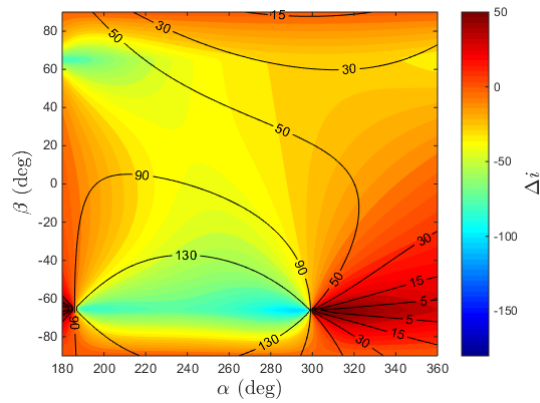


Figura 5.36 - Curvas de nível de  $\Delta i$  e curvas de nível de  $i_i$  para  $\gamma = 60^\circ$  ( $v_p = 2.6$  e  $r_p = 0.00675$ ).

### 5.3 Comparação Entre os Dois Modelos

Caso fique evidente que se ao usar o *Patched Conics* obtêm-se resultados semelhantes aos obtidos pelo PCRTC, é possível de elaborar algoritmos de menor complexidade para análise de manobras gravitacionalmente assistidas na Lua. Portanto, a seguir, são apresentadas figuras obtidas pela comparação dos dois métodos.

As figuras consistem no valor absoluto da diferença entre os resultados obtidos por PCRTC e *Patched Conics*, no intervalo de  $[0^\circ, 3^\circ]$  para  $\Delta i$  e  $[0, 0.05]$  para  $\Delta E$  <sup>4</sup>.

<sup>4</sup>Os dois limites superiores foram estabelecidos arbitrariamente, de forma a facilitar a análise

Colocado matematicamente:

$$\Delta_{\text{comparação}} = |\Delta_{PCRTC} - \Delta_{\text{Patched Conics}}|. \quad (5.9)$$

### 5.3.1 Efeitos da Velocidade de Pericentro

As figuras 5.37(a), 5.38(a) e 5.39(a) indicam que há uma aproximação do poder de descrição de  $\Delta E$  entre os dois métodos com o aumento de  $v_p$ . Para  $v_p = 2.2$  (figura 5.37(a)), há uma grande região com valores de diferença entre os dois métodos acima do limite superior de 0.05, o que desaparece completamente nas outras duas figuras,  $v_p = 2.6$  e  $v_p = 3.4$ .

Quanto a inclinação, a relação com a variação de  $v_p$  aparenta ser inexistente ou complexa, bastando observar as figuras 5.37(b), 5.38(b) e 5.39(b). Outro ponto a ser notado nessas figuras é que, ao compará-las com as figuras obtidas para  $\Delta i$  anteriormente, nota-se que a grande diferença entre os métodos toma lugar nos limites das regiões onde, para uma manobra no plano, haveria inversão do movimento ( $\Delta i = \pm 180^\circ$ ). Para elucidar, tome como exemplo a figura 5.37(b) e compare-a a figura 5.4. Note que na figura 5.37(b) há dois pontos de conexão <sup>5</sup>, quando  $\beta = 0^\circ$ , entre a região superior ( $\beta > 0$ ) e inferior ( $\beta < 0$ ) no limite do intervalo (contornos vermelho-escuros), essas regiões crescem a partir desses pontos para  $\beta \neq 0$ . Agora, observe a figura 5.4, perceba que os limites de  $\Delta i = -180^\circ$  quando  $\beta = 0^\circ$  ocorre por volta desses mesmos pontos. Isso indica que os limites da inversão de movimento no plano são pontos críticos, onde grandes diferenças na descrição da inclinação entre os métodos emerge.

---

das figuras. Ou seja, valores superiores a eles são representados nesse limite.

<sup>5</sup>Situam-se em torno de  $\alpha = 190^\circ$  e  $\alpha = 245^\circ$

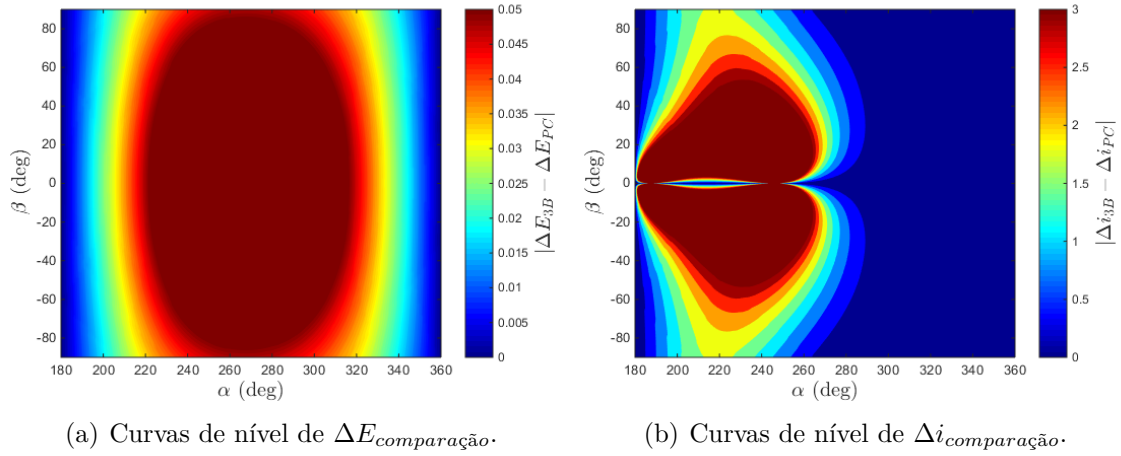


Figura 5.37 - Curvas de nível da diferença obtida entre o método da *Patched Conics* e do PCRTC com  $r_p = 0.00675$ ,  $v_p = 2.2$  e  $\gamma = 0^\circ$ .

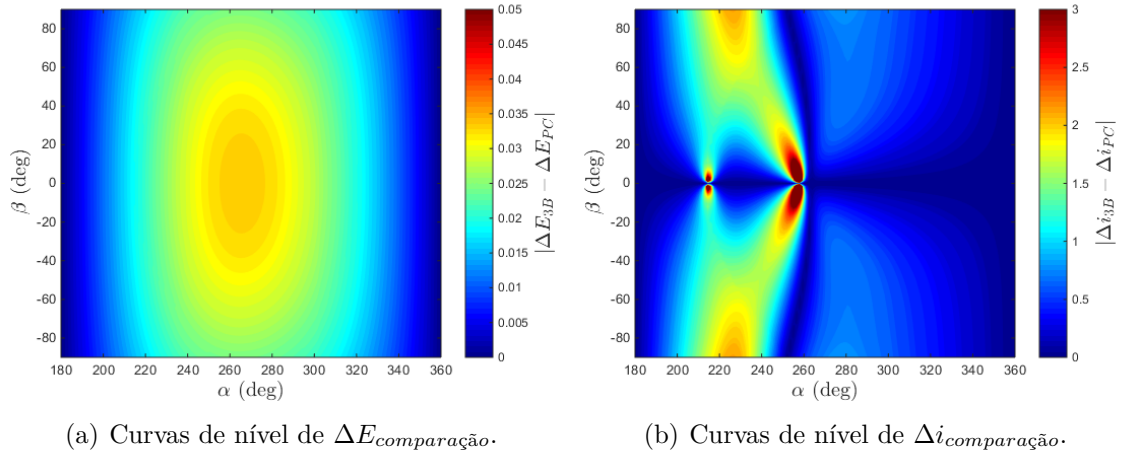


Figura 5.38 - Curvas de nível da diferença obtida entre o método da *Patched Conics* e do PCRTC com  $r_p = 0.00675$ ,  $v_p = 2.6$  e  $\gamma = 0^\circ$ .



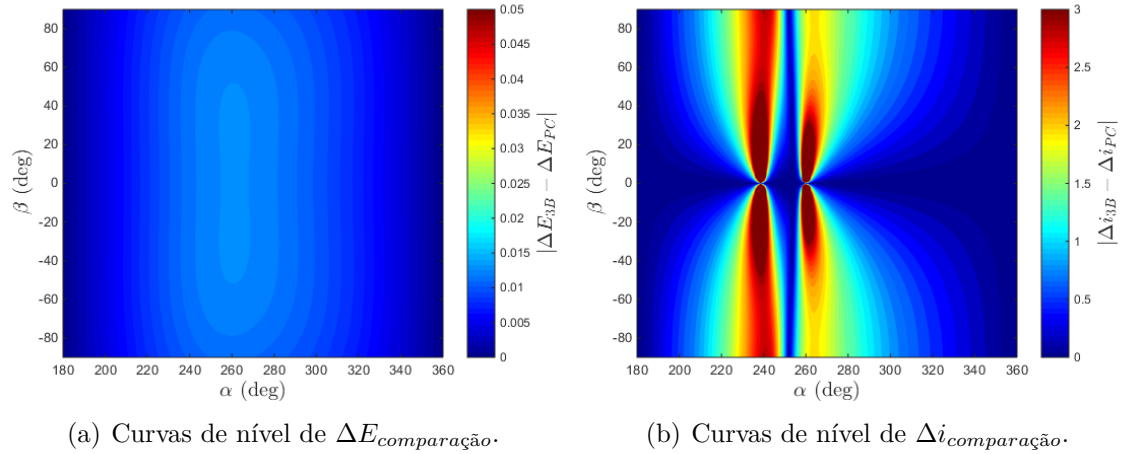


Figura 5.39 - Curvas de nível da diferença obtida entre o método da *Patched Conics* e do PCRTC com  $r_p = 0.00675$ ,  $v_p = 3.4$  e  $\gamma = 0^\circ$ .

### 5.3.2 Efeitos do Raio de Pericentro

Para  $r_p$ , a mesma discussão feita para  $v_p$  parece se aplicar. Veja que, para  $\Delta E$  (figuras 5.40(a), 5.41(a) e 5.42(a)), com o aumento de  $r_p$  mais uma vez é observado a aproximação dos métodos. Isso era esperado, uma vez que com o crescimento de  $r_p$  (e o mesmo se aplica a  $v_p$ ) espera-se que os efeitos do swing-by sejam menores, fazendo com que a subtração de tais resultados seja de pequena magnitude se comparado a condições que ampliam os efeitos (pequenos valores de  $r_p$  e  $v_p$ ).

Em relação a inclinação (figuras 5.40(b), 5.41(b) e 5.42(b)), as considerações também são semelhantes as feitas para  $v_p$ . Ou seja, note que grandes diferenças entre os métodos emergem nos limites da mudança de sentido de trajetória no plano.

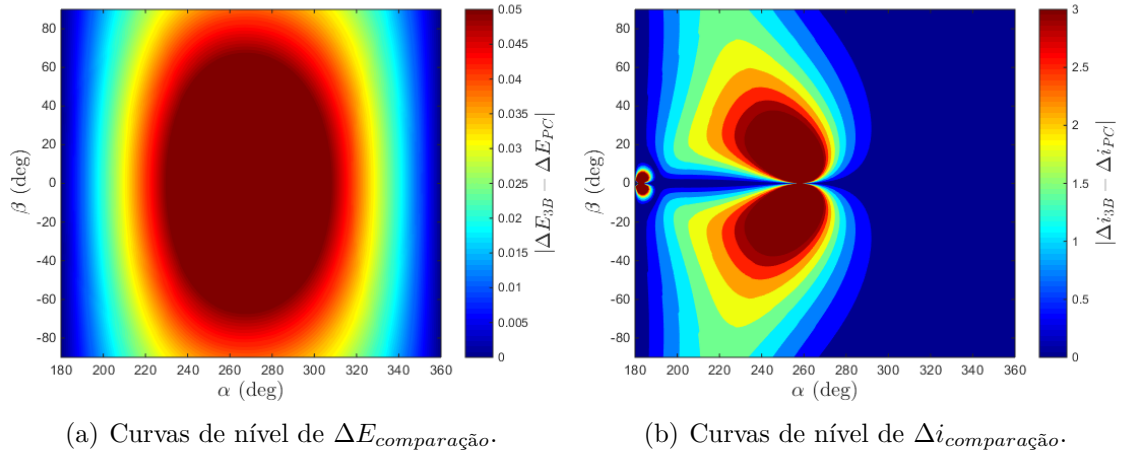


Figura 5.40 - Curvas de nível da diferença obtida entre o método da *Patched Conics* e do PCRTC com  $r_p = 0.00476$ ,  $v_p = 2.6$  e  $\gamma = 0^\circ$ .

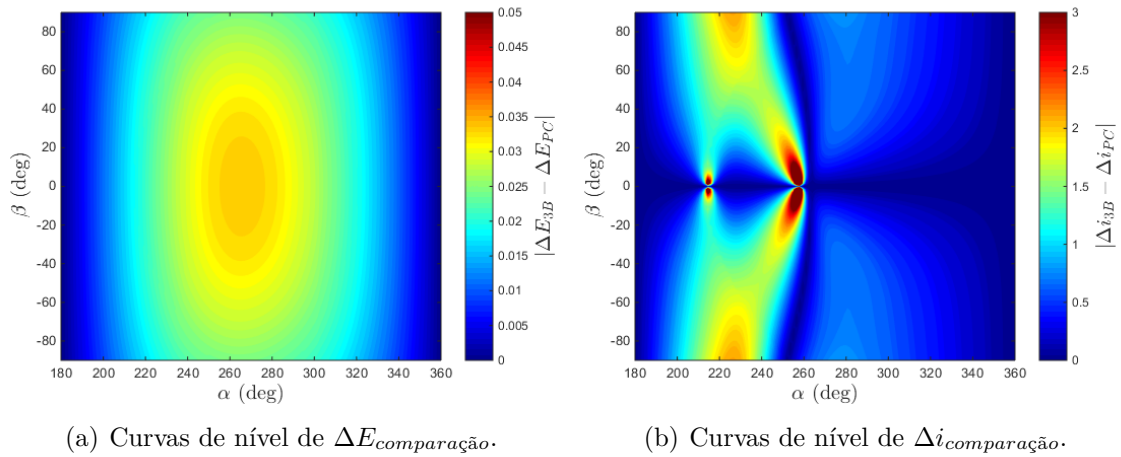


Figura 5.41 - Curvas de nível da diferença obtida entre o método da *Patched Conics* e do PCRTC com  $r_p = 0.00675$ ,  $v_p = 2.6$  e  $\gamma = 0^\circ$ .

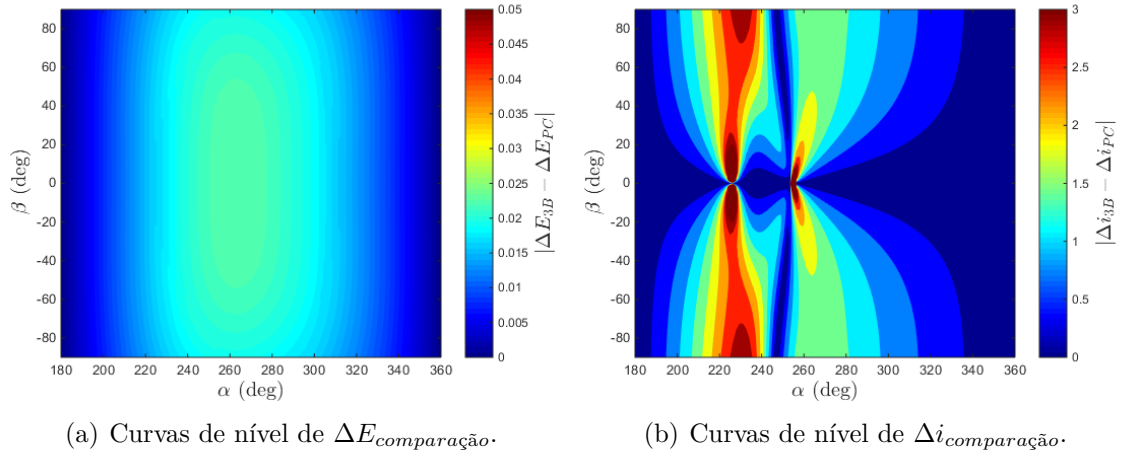


Figura 5.42 - Curvas de nível da diferença obtida entre o método da *Patched Conics* e do PCRTC com  $r_p = 0.009$ ,  $v_p = 2.6$  e  $\gamma = 0^\circ$ .

### 5.3.3 Efeitos de $\gamma$

Mais uma vez, com o aumento de  $\gamma$  observa-se o mesmo constatado para  $r_p$  e  $v_p$ . No entanto, para  $\gamma$ , é difícil estabelecer uma relação de causalidade do seu aumento com a diferença no poder de descrição dos métodos, ainda que nas figuras 5.43(a), 5.44(a) e 5.45(a) possa ser observado uma pequena aproximação entre os métodos junto ao aumento de  $\gamma$ .

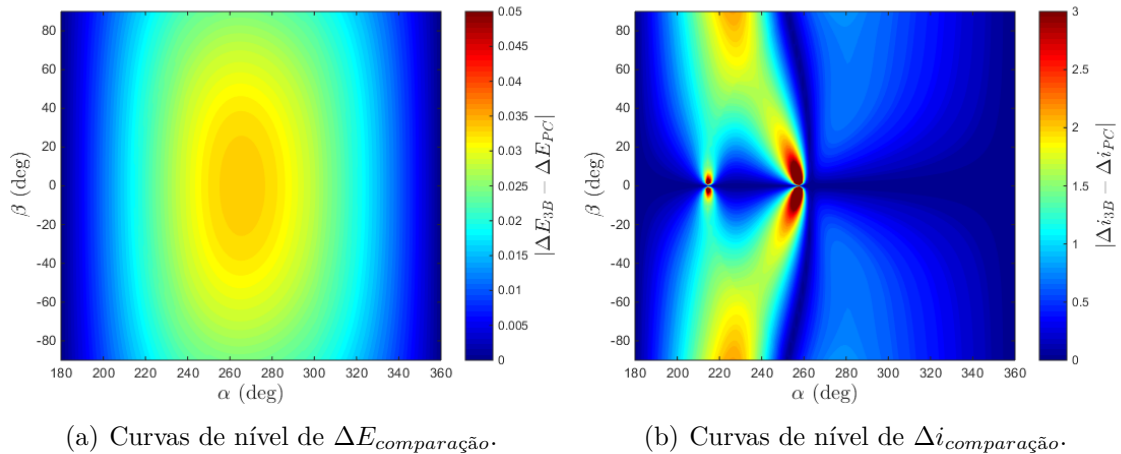


Figura 5.43 - Curvas de nível da diferença obtida entre o método da *Patched Conics* e do PCRTC com  $r_p = 0.00675$ ,  $v_p = 2.6$  e  $\gamma = 0^\circ$ .

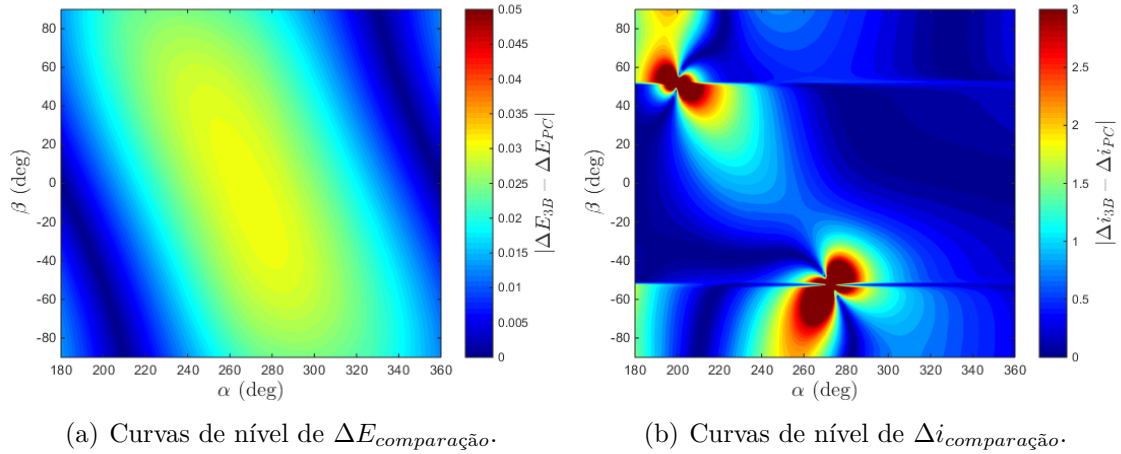


Figura 5.44 - Curvas de nível da diferença obtida entre o método da *Patched Conics* e do PCRTC com  $r_p = 0.00675$ ,  $v_p = 2.6$  e  $\gamma = 30^\circ$ .

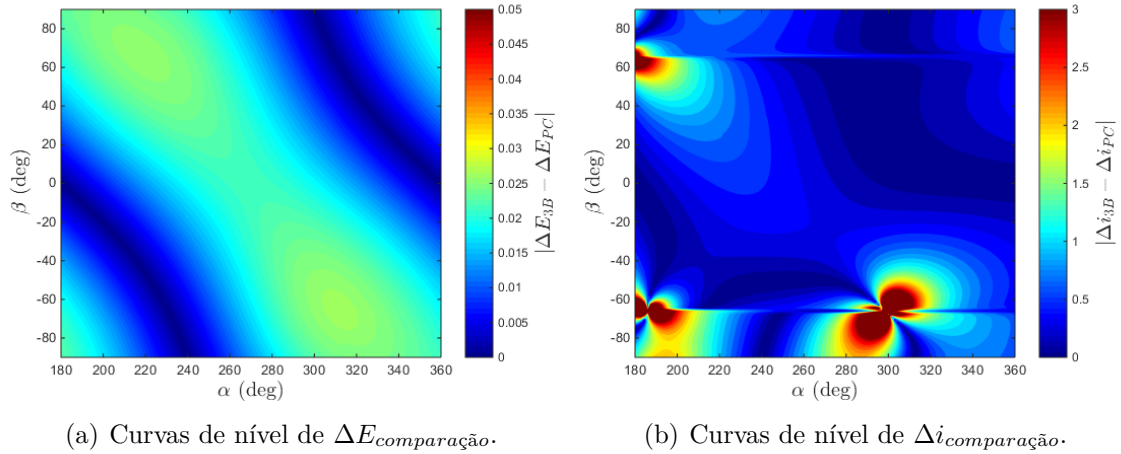


Figura 5.45 - Curvas de nível da diferença obtida entre o método da *Patched Conics* e do PCRTC com  $r_p = 0.00675$ ,  $v_p = 2.6$  e  $\gamma = 60^\circ$ .

#### 5.4 Comparação Com e Sem Uso de Cabos

Aqui é comparado os efeitos de *swing-by* com e sem uso de cabos em duas dimensões (plano xy). A comparação é feita pela classificação de 16 tipos de trajetórias de acordo com a figura 5.46, conforme proposto por Prado (2015). Para tanto, foi criado o seguinte algoritmo para solucionar a manobra por meio de cabos:

- São atribuídos valores iniciais de  $l$ ,  $\delta$ ,  $v_{inf}$  e  $\Psi$ , que são as condições iniciais;
- Para o caso com uso de cabos, as coordenadas iniciais no momento em que o cabo é desconectado são calculadas, conforme a figura 4.1, como:

$$x_i = l \cos(\Psi + \delta) + r_m \cos(\Psi) + (1 - \bar{\mu}), \quad (5.10)$$

$$y_i = l \sin(\Psi + \delta) + r_m \sin(\Psi), \quad (5.11)$$

$$v_{xi} = -v_{inf} \sin(\Psi + B), \quad (5.12)$$

$$v_{yi} = v_{inf} \cos(\Psi + B); \quad (5.13)$$

- As equações de movimento do PCRTC são integradas para frente no tempo até atingir uma distância de 0.5 da lua. Quando isso acontece, a energia e momento angular da espaçonave são calculadas e, a partir daí, obtém-se sua inclinação e excentricidade, permitindo classificar a trajetória depois da manobra como hiperbólica ou elíptica e direta ou retrógrada (conforme a figura 5.46);
- Em seguida, é desejável obter a classificação da trajetória antes da manobra com o uso de cabos, que é feita utilizando as seguintes coordenadas iniciais:

$$x_i = l \cos(\Psi - \delta) + r_m \cos(\Psi) + (1 - \bar{\mu}), \quad (5.14)$$

$$y_i = l \sin(\Psi - \delta) + r_m \sin(\Psi), \quad (5.15)$$

$$v_{xi} = -v_{inf} \sin(\Psi - B), \quad (5.16)$$

$$v_{yi} = v_{inf} \cos(\Psi - B); \quad (5.17)$$

- Agora, as equações de movimento do PCRTC são integradas para trás no tempo até uma distância de 0.5 da lua e a trajetória antes da manobra é classificada.

		After			
		Direct Ellipse	Retrograde Ellipse	Direct Hyperbola	Retrograde Hyperbola
Before	Direct Ellipse	A	E	I	M
	Retrograde Ellipse	B	F	J	N
	Direct Hyperbola	C	G	K	O
	Retrograde Hyperbola	D	H	L	P

Figura 5.46 - Classificação de Trajetórias.

De forma a comparar, é necessário também que se classifique as trajetórias sem o uso de cabos no *swing-by*. Isso é feito com um algoritmo semelhante, na qual a única alteração é que as equações de movimento do PCRTC são integradas para trás e para frente no tempo a partir da coordenada inicial usada no algoritmo anterior assim que o cabo é conectado, que é assumido como o pericentro da trajetória. Ou seja, o algoritmo consiste em:

- São atribuídos os mesmos valores iniciais de  $l$ ,  $\delta$ ,  $v_{inf}$  e  $\Psi$ ;
- As coordenadas iniciais são:

$$x_i = l \cos(\Psi - \delta) + r_m \cos(\Psi) + (1 - \bar{\mu}), \quad (5.18)$$

$$y_i = l \sin(\Psi - \delta) + r_m \sin(\Psi), \quad (5.19)$$

$$v_{xi} = -v_{inf} \sin(\Psi - B), \quad (5.20)$$

$$v_{yi} = v_{inf} \cos(\Psi - B); \quad (5.21)$$

- As equações de movimento do PCRTC são integradas para frente no tempo até atingir uma distância de 0.5 da lua. E também para trás no tempo, até atingir uma distância de 0.5
- A energia e momento angular são calculadas ao fim das duas integrações e a trajetória sem o uso de cabos também é classificada segundo a figura 5.46.

As trajetórias mais interessantes do ponto de vista prático vêm a ser as trajetórias que consistem na captura da espaçonave pelo planeta (C, D, G e H) e nas que a espaçonave escapa da atração gravitacional do planeta (I, J, M e N), após o *swing-by*.

#### 5.4.1 Resultados da Comparação

Foram realizadas simulações para a Lua (figura 5.47), para Mab<sup>6</sup> (figura 5.48) e para Caronte<sup>7</sup> (figura 5.49). Parâmetros utilizados para cada uma dessas luas são mostrados na tabela 5.2, assim como algumas das condições iniciais usadas para cada. As condições iniciais faltantes,  $\Psi$  e  $v_{inf}$ , são as condições iniciais que serão analisadas, e o são por meio de sua variação e obtendo as figuras 5.47, 5.48 e 5.49, que mostram as regiões possíveis de  $\Psi$  e  $v_{inf}$  para cada uma das classificações de trajetórias.

---

<sup>6</sup>Uma pequena lua de Urano.

<sup>7</sup>Lua de Plutão.

	$\bar{\mu}$	$l$	$r_m$	$\delta$
Lua	0.01214	0.00104 (400 km)	0.00451 (1733 km)	60°
Caronte	0.10432	0.02044 (400 km)	0.03084 (603.6 km)	60°
Mab	$1.1519 \times 10^{-10}$	0.00102 (100 km)	0.00012 (12 km)	60°

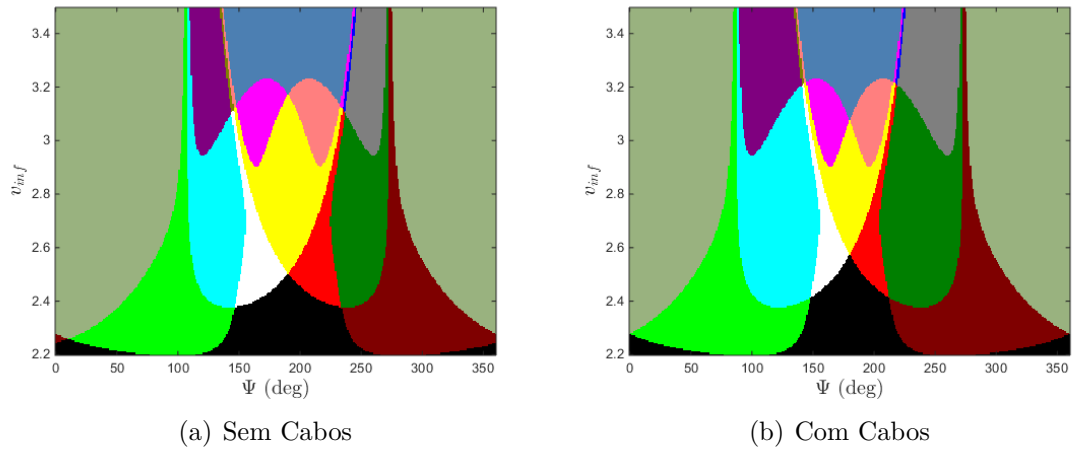
Tabela 5.2 - Parâmetros para cada uma das luas e algumas condições iniciais.

Foi utilizado o valor de  $\delta = 60^\circ$  de forma a ampliar os efeitos do uso de cabos. Pelo mesmo motivo, foi utilizado para os corpos maiores (Lua e Caronte) um cabo de tamanho  $l = 400$  km.

Para a Lua e Caronte, figuras 5.47 e 5.49, percebe-se com o uso de cabos um aumento razoável das regiões onde é possível de se realizar trajetórias de escape (I, J, M e N) e captura (C, D, G e H), e uma conseqüente diminuição das regiões A, B, E, F, K, L, O e P. Além disso, para o caso de uso de cabos é possível notar uma simetria em torno de  $\Psi = 180^\circ$ , considerando a seguinte equivalência: I-C, J-G, L-O, B-E, N-H e M-D. <sup>8</sup>

Para Mab, figura 5.48, o efeito de uso de cabos é ainda mais drástico. E consiste em um quase completo desaparecimento de F e uma grande diminuição de A, K e P. Que seriam as únicas quatro trajetórias dominantes sem o uso de cabos, indicando assim uma grande vantagem do uso de cabos para manobras em pequenos corpos celestes.

<sup>8</sup>Como já notado por Prado (2015)

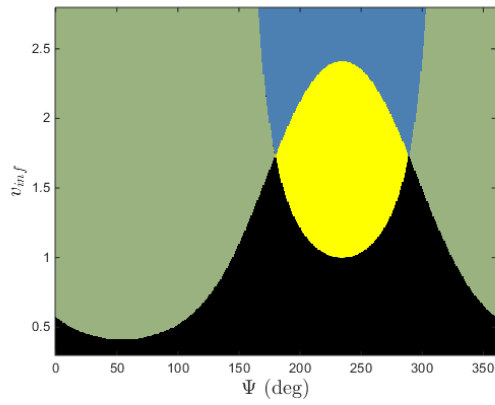


		After			
		Direct Ellipse	Retrograde Ellipse	Direct Hyperbola	Retrograde Hyperbola
Before	Direct Ellipse	A	E	I	M
	Retrograde Ellipse	B	F	J	N
	Direct Hyperbola	C	G	K	O
	Retrograde Hyperbola	D	H	L	P

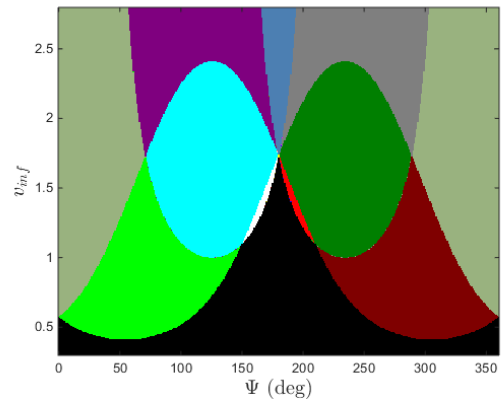
(c) Nomenclatura de Trajetórias

Figura 5.47 - Simulação para a Lua com  $l = 0.00104$  (correspondente a 400 km) e  $\delta = 60^\circ$ .





(a) Sem Cabos

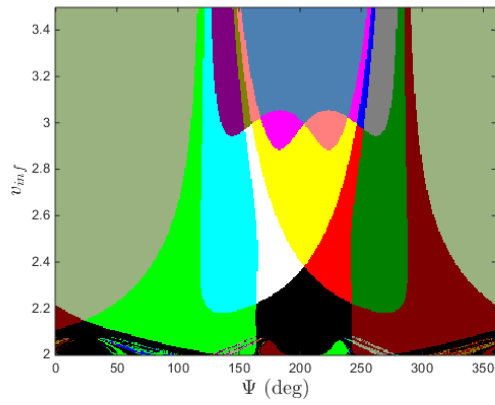


(b) Com Cabos

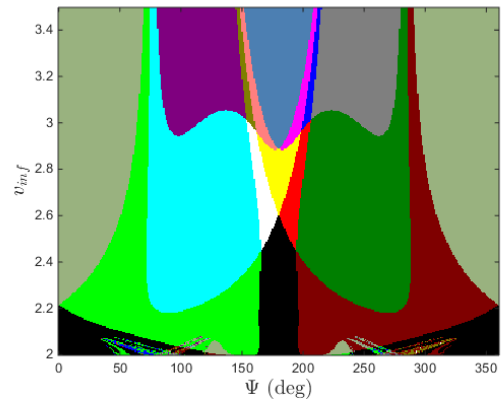
		After			
		Direct Ellipse	Retrograde Ellipse	Direct Hyperbola	Retrograde Hyperbola
Before	Direct Ellipse	A	E	I	M
	Retrograde Ellipse	B	F	J	N
	Direct Hyperbola	C	G	K	O
	Retrograde Hyperbola	D	H	L	P

(c) Nomenclatura de Trajetórias

Figura 5.48 - Simulação para Mab (lua de Urano) com  $l = 0.00102$  (correspondente a 100 km) e  $\delta = 60^\circ$ .



(a) Sem Cabos



(b) Com Cabos

		After			
		Direct Ellipse	Retrograde Ellipse	Direct Hyperbola	Retrograde Hyperbola
Before	Direct Ellipse	A	E	I	M
	Retrograde Ellipse	B	F	J	N
	Direct Hyperbola	C	G	K	O
	Retrograde Hyperbola	D	H	L	P

(c) Nomenclatura de Trajetórias

Figura 5.49 - Simulação para Caronte (lua de Plutão) com  $l = 0.00511$  (correspondente a 400 km) e  $\delta = 60^\circ$ .



## 6 Conclusão

Como já exposto anteriormente, este trabalho pretendia estudar a mecânica de um *swing-by* na Lua; obter e analisar resultados qualitativos através de figuras geradas por meio de modelos analíticos e numéricos; comparar o poder de descrição da manobra por métodos distintos, um analítico e outro numérico, a nomear: *Patched Conics* e Problema Circular Restrito dos Três Corpos, respectivamente; e, por fim, realizar um pequeno estudo comparando uma manobra de *swing-by* com e sem uso de cabos.

Estudar a mecânica do *swing-by* permitiu compreender mais a fundo a natureza do problema. Ficando claro como se dá o ganho de energia da espaçonave. O que acaba por ajudar tanto o leitor quanto o pesquisador, que se familiariza com os menores detalhes. Ainda, dessa análise emerge outras questões, tais quais: Quais são os efeitos ao se considerar uma expansão do potencial gravitacional do corpo onde se realiza a manobra? Para *swing-bys* de baixa altitude, que magnitude de efeitos dissipativos pode-se esperar quanto ao arrasto atmosférico? Entre outras... Porém, uma que chama a atenção, e permitindo vislumbrar um futuro de exploração interestelar, quais efeitos relativísticos esperar de um *swing-by* sobre um corpo extremamente massivo, tal qual um buraco-negro?

Voltando ao mundo das possibilidades iminentes, ao se obter figuras através dos modelos foi possível fazer análises qualitativas quanto a regiões de maior ganho de energia, regiões de mudança no sentido de movimento da espaçonave, classificação de trajetórias dado as condições iniciais, etc. Permitindo uma compreensão ainda mais profunda sobre a mecânica do problema.

Além disso, foi possível comparar os resultados obtidos pelos dois métodos, o que permitiu identificar condições nas quais os dois métodos se aproximam. Além disso, para a inclinação, foi possível notar que apesar de não haver uma relação direta de divergência entre os dois métodos, é possível esperar que em regiões nos limites da mudança de sentido de trajetória para  $\beta = 0^\circ$  apareçam o que foi chamado de "pontos críticos", onde a grande diferença entre os métodos é maior próximo a tais e diminui conforme afasta-se.

Portanto, pela grande diferença entre os métodos, quanto a energia, para valores pequenos de  $r_p$  e  $v_p$  e a dificuldade de estabelecer relações de causalidade para a inclinação, constata-se que seja interessante desenvolver um novo modelo analítico capaz de descrever com boa precisão uma manobra na Lua, tal como foi feito por Qi

e Xu (2015) para manobras no plano. Um modo de se fazer isso pode ser considerar modelos analíticos-perturbativos, que poderá ser estudado em breve.

Tendo um modelo analítico robusto é possível elaborar programas com baixo custo computacional para otimização de trajetória para espaçonaves que pretendem abandonar o sistema Terra-Lua, ou ser capturada em tal sistema. O que também poderá ser objeto de estudo nas próximas etapas, tendo como base o modelo desenvolvido por Wagner e Wie (2015) para o Sistema Solar.

Adicionalmente, aconselha-se que um estudo mais detalhado seja realizado quanto a variação de  $\gamma$ , dado seu efeito sutil e pouco fisicamente evidente.

Por fim, no pequeno estudo empregado utilizando cabos, obteve-se uma forte indicação do poder dessa manobra ao ser realizada em pequenos corpos celestes, com aumento drástico de regiões em que ocorrem capturas e escapes. Isso também virá a ser tema de um estudo mais detalhado e mais generalista.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BROUCKE, R. Stability of periodic orbits in the elliptic, restricted three-body problem. **AIAA journal**, v. 7, n. 6, p. 1003–1009, 1969. 3
- CU-BOULDER, C. **Patched Conic Orbit for Mars Sample Return**. 2016. Disponível em: <[http://ccar.colorado.edu/asen5050/projects/projects\\_2009/fanchiang/](http://ccar.colorado.edu/asen5050/projects/projects_2009/fanchiang/)>. Acesso em: 06 de Junho. ix, 9
- FELIPE, G. de; PRADO, A. F. B. de A. Study of the inclination change in three-dimensional swing-by trajectories. In: **PROCEEDINGS OF THE INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON SPACE TECHNOLOGY AND SCIENCE**. [S.l.: s.n.], 2000. v. 22, p. 1564–1569. 6, 35
- FLANDRO, G. Fast reconnaissance missions to the outer solar system utilizing energy derived from the gravitational field of jupiter1. **Earth**, v. 108, p. 6–1, 1966. 6
- HOWELL, K. C. Three-dimensional, periodic, halo orbits. **Celestial Mechanics**, Springer, v. 32, n. 1, p. 53–71, 1984. 3
- JPL, J. P. L. **Images by Voyager**. 2016. Disponível em: <<http://voyager.jpl.nasa.gov/imagesvideo/imagesbyvoyager.html>>. Acesso em: 06 de Junho. ix, 7
- LANOIX, E. L.-M.; MISRA, A. K. Near-earth asteroid missions using tether sling shot assist. **Journal of Spacecraft and Rockets**, v. 37, n. 4, p. 475–480, 2000. 6
- MCRONALD, A. D.; RANDOLPH, J. E. Hypersonic maneuvering for augmenting planetary gravity assist. **Journal of Spacecraft and Rockets**, v. 29, n. 2, p. 216–222, 1992. 6
- MINOVITCH, M. A. A method for determining interplanetary free-fall reconnaissance trajectories. **JPL Tec. Memo**, v. 312, p. 130, 1961. 6
- MURRAY, C. D.; DERMOTT, S. F. **Solar system dynamics**. [S.l.]: Cambridge university press, 1999. 1, 2, 3, 16
- PENZO, P. A.; MAYER, H. L. Tethers and asteroids for artificial gravity assist in the solar system. **Journal of Spacecraft and Rockets**, v. 23, n. 1, p. 79–82, 1986. 6

PRADO, A. F. Mapping swing-by trajectories in the triple asteroid 2001sn263. In: **13th International Conference on Space Operations 2014**. [S.l.: s.n.], 2014. 6

\_\_\_\_\_. Using tethered gravity-assisted maneuvers for planetary capture. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, American Institute of Aeronautics and Astronautics, v. 38, n. 9, p. 1852–1856, 2015. ix, 6, 23, 51, 54

PRADO, A. F. B. de A. An analytical description of the close approach maneuver in three dimensions. In: **IAF, International Astronautical Congress, 51 st, Rio de Janeiro, Brazil**. [S.l.: s.n.], 2000. 6, 12, 13

\_\_\_\_\_. A comparison of the patched-conics approach and the restricted problem for swing-bys. **Advances in Space Research**, Elsevier, v. 40, n. 1, p. 113–117, 2007. 6

PRUSSING, J. E.; CONWAY, B. A. **Orbital mechanics**. [S.l.]: Oxford University Press, 1993. 1

QI, Y.; XU, S. Mechanical analysis of lunar gravity assist in the earth–moon system. **Astrophysics and Space Science**, Springer, v. 360, n. 2, p. 1–15, 2015. 16, 20, 59

SIMS, J. A.; LONGUSKI, J. M.; PATEL, M. R. Aerogravity-assist trajectories to the outer planets and the effect of drag. **Journal of Spacecraft and Rockets**, v. 37, n. 1, p. 49–55, 2000. 6

SOHN, R. L. Venus swingby mode for manned mars missions. **Journal of Spacecraft and Rockets**, v. 1, n. 5, p. 565–567, 1964. 6

\_\_\_\_\_. Manned mars trips using venus flyby modes. **Journal of Spacecraft and Rockets**, v. 3, n. 2, p. 161–169, 1966. 6

SPACEREF. **Nozomi's Swingby of Earth**. 2016. Disponível em: <<http://www.spaceref.com/news/viewpr.html?pid=12734>>. Acesso em: 06 de Junho. ix, 11

SZEBEHELY, V.; GIACAGLIA, G. E. On the elliptic restricted problem of three bodies. **The Astronomical Journal**, v. 69, p. 230, 1964. 3

VALLADO, D. A.; MCCLAIN, W. D. **Fundamentals of astrodynamics and applications**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2001. 2, 3, 4

WAGNER, S.; WIE, B. Hybrid algorithm for multiple gravity-assist and impulsive delta-v maneuvers. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, American Institute of Aeronautics and Astronautics, v. 38, n. 11, p. 2096–2107, 2015. 60

WIKIPEDIA. **Nodo Orbital**. 2016. Disponível em:

<[https://pt.wikipedia.org/wiki/Nodo\\_orbital](https://pt.wikipedia.org/wiki/Nodo_orbital)>. Acesso em: 06 de Junho.  
ix, 2





**PUBLICAÇÕES TÉCNICO-CIENTÍFICAS EDITADAS PELO INPE**

### **Teses e Dissertações (TDI)**

Teses e Dissertações apresentadas nos Cursos de Pós-Graduação do INPE.

### **Manuais Técnicos (MAN)**

São publicações de caráter técnico que incluem normas, procedimentos, instruções e orientações.

### **Notas Técnico-Científicas (NTC)**

Incluem resultados preliminares de pesquisa, descrição de equipamentos, descrição e ou documentação de programas de computador, descrição de sistemas e experimentos, apresentação de testes, dados, atlas, e documentação de projetos de engenharia.

### **Relatórios de Pesquisa (RPQ)**

Reportam resultados ou progressos de pesquisas tanto de natureza técnica quanto científica, cujo nível seja compatível com o de uma publicação em periódico nacional ou internacional.

### **Propostas e Relatórios de Projetos (PRP)**

São propostas de projetos técnico-científicos e relatórios de acompanhamento de projetos, atividades e convênios.

### **Publicações Didáticas (PUD)**

Incluem apostilas, notas de aula e manuais didáticos.

### **Publicações Seriadas**

São os seriados técnico-científicos: boletins, periódicos, anuários e anais de eventos (simpósios e congressos). Constam destas publicações o Internacional Standard Serial Number (ISSN), que é um código único e definitivo para identificação de títulos de seriados.

### **Programas de Computador (PDC)**

São a seqüência de instruções ou códigos, expressos em uma linguagem de programação compilada ou interpretada, a ser executada por um computador para alcançar um determinado objetivo. Aceitam-se tanto programas fonte quanto os executáveis.

### **Pré-publicações (PRE)**