



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
**INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS**

**INPE-13019-PRE/8296**

## **DINÂMICA CAÓTICA E TRAVAMENTO DE FREQUÊNCIA EM MAPAS ACOPLADOS**

Pedro Fernando Almeida Di Donato\*

\*Bolsista ITA

Relatório Final de Projeto de Iniciação Científica (PIBIC/CNPq/INPE), orientado pelo  
Dr. Elbert Einstein Nehrer Macau

INPE  
São José dos Campos  
2005



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
**INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS**

# **DINÂMICA CAÓTICA E TRAVAMENTO DE FREQUÊNCIA EM MAPAS ACOPLADOS**

RELATÓRIO FINAL DE PROJETO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA  
(PIBIC/CNPq/INPE)

Pedro Fernando Almeida Di Donato (ITA, Bolsista PIBIC/CNPq)  
E-mail: [pfadidonato@uol.com.br](mailto:pfadidonato@uol.com.br)

Dr. Elbert Einstein Nehrer Macau (LAC/CTE/INPE, Orientador)  
E-mail: [elbert@lac.inpe.br](mailto:elbert@lac.inpe.br)

**Junho de 2005**

## **DINÂMICA CAÓTICA E TRAVAMENTO DE FREQUÊNCIA EM MAPAS ACOPLADOS**

### **RESUMO**

Este trabalho tem por objetivo o desenvolvimento de um sistema de controle capaz de, por meio de uma excitação externa, levar o sistema dinâmico constituído por um pêndulo forçado e amortecido a apresentar o fenômeno de travamento de frequência em uma razão qualquer desejada. Este sistema dinâmico teve seu comportamento estudado de forma extensiva no trabalho executado no primeiro ano de bolsa de iniciação científica, sendo que o atual trabalho, com duração de agosto de 2004 até julho de 2005, uma continuação natural deste. Em uma primeira etapa do trabalho trabalhou-se com o Mapa de Círculo Padrão, que é uma modelagem simples de sistemas dinâmico, mas que permite estudar o fenômeno do travamento de frequência. Três algoritmos de controle a serem aplicados neste mapa foram propostos e testados, sendo seus resultados analisados e discutidos. O primeiro algoritmo era simplesmente um buscador do sinal de controle ótimo, enquanto os outros dois eram baseados em controladores clássicos: o controlador integral e o proporcional-integral. Os resultados desta primeira etapa do trabalho foram significativos o suficiente para serem aceitos para apresentação no IV Congresso Temático de Dinâmica, Controle e Aplicações (DINCON 2005) em junho de 2005. Após esta etapa, o trabalho evoluiu para a sua próxima parte que seria a aplicação destes algoritmos diretamente no modelamento por equações diferenciais do sistema dinâmico do pêndulo forçado e amortecido. Tal parte encontra-se ainda em andamento com previsão de término em julho de 2005, ao final do período de bolsa.

## CHAOTIC DYNAMICS AND PHASE LOCKING IN COUPLED MAPS

### ABSTRACT

The goal of this work is the development of a control system that could make the dynamical system of the damped and periodically driven pendulum to present phase-locking in any desired ratio. This dynamical system had its behavior extensively studied in the work done during the first year of the scholarship. Therefore, this work is a evolution from the previous with a duration from August 2004 until July 2005. In a first phase of the work, the Standard Circle Map was used since it is a simple model of dynamical systems that can be used to study the phase-locking. Three different control systems to be applied to this map were proposed and tested, and its results have been analyzed. The first algorithm was simply an searcher of the best control signal, while the other two were base in classical control systems: the integral and the proportional-integral controller. The results of this first phase of the work were significant enough to be approved to presentation in the “*IV Congresso Temático de Dinâmica, Controle e Aplicações*” (DINCON 2005) in July 2005. After that, the work progressed to its new phase that is the apply of these control algorithms directly to the model by differential equations of the dynamical system of the damped and driven pendulum. This part of the work is in progress with a finish prevision of July 2005, at the end of the scholarship.

## SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
LISTA DE FIGURAS.....	5
CAPÍTULO 1 INTRODUÇÃO.....	6
CAPÍTULO 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA: MAPA DE CÍRCULO E QUASE-PERIODICIDADE.....	10
2.1 Mapa de Círculo.....	10
2.2 Quase-periodicidade.....	11
2.3 Línguas de Arnold e Escadaria do Diabo.....	13
2.4 Série de Farey.....	16
CAPÍTULO 3 ESTUDO DA EVOLUÇÃO DO VALOR DO NÚMERO DE ROTAÇÃO AO LONGO DA ESCADARIA DO DIABO.....	18
CAPÍTULO 4 MÉTODOS DE CONTROLE APLICADOS AO MAPA DE CÍRCULO E RESULTADOS OBTIDOS.....	22
4.1 Algoritmo de Busca.....	23
4.2 Algoritmo Integral.....	25
4.3 Algoritmo Proporcional-Integral.....	29
CAPÍTULO 5 APLICAÇÃO DOS MÉTODOS DE CONTROLE PARA O SISTEMA DO PÊNDELO FORÇADO E AMORTECIDO.....	32
CAPÍTULO 6 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS.....	34
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	36

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Exemplo de evolução de uma órbita em um espaço de estados toroidal .....	10
Figura 2: Representação gráfica da idéia do Mapa de Círculo.....	11
Figura 3: Diferença entre comportamento periódico e quase-periódico no espaço de estados e no Mapa de Círculo .....	12
Figura 5: Escadaria do Diabo .....	15
Figura 8: Diagrama de blocos do sistema controlado .....	22
Figura 9: Caminho realizado pelo sistema ao longo da Escadaria do Diabo .....	23
Figura 10: Exemplo de resultado do algoritmo de busca .....	24
Figura 11: Variação do número de ciclos de controle em função de $k_i$ .....	26
Figura 12: Desvio padrão dos resultados apresentados na Figura 11 .....	27
Figura 13: Evolução do número de rotação do sistema com diferentes valores de $k_i$ ....	28
Figura 14: Influência dos coeficientes $k_p$ e $k_i$ na atuação do controlador proporcional derivativo .....	30
Figura 15: Evolução do número de rotação do sistema com diferentes valores de $k_i$ com $k_p$ constante igual a 0,4.....	31
Figura 16: Esquema do sistema físico.....	31

## CAPÍTULO 1

### INTRODUÇÃO

Em 1657, o astrônomo e matemático holandês Christiaan Huygens patenteou o primeiro relógio de pêndulo da história. Sua motivação era aumentar a precisão dos instrumentos de medida da época, algo necessário para o avanço de seus estudos com astronomia. Huygens acabou desenvolvendo e construindo vários outros tipos de relógios de pêndulo, entre eles o relógio de pêndulo cicloidal, que, adaptado para suportar as viagens marítimas, tinha por objetivo permitir uma medida correta da longitude em alto mar. Durante esta pesquisa, surgiu a necessidade de se estudar o comportamento de dois relógios de pêndulo utilizados simultaneamente, de forma a obter-se redundância para o caso de um deles falhar. Em uma carta datada de 27 de fevereiro de 1665 para a Sociedade Real Britânica Huygens descreve uma interessante observação acerca de sua invenção:

*“Of an odd kind of sympathy perceived by him in these watches [two maritime clocks] suspended by the side of each other.”*

Huygens observou que dois relógios de pêndulos colocados contíguos em uma mesma parede tinham seus pêndulos sincronizados em fase ou em oposição de fases. Mesmo que alguma perturbação fosse aplicada a um dos relógios, dentro de trinta minutos a sincronização se restabelecia. Huygens fez numerosos estudos acerca deste tema, e chegou a conclusão que a interação entre os dois osciladores se dava por pequenos movimentos da parede em que ambos estavam fixos. O cientista, entretanto, não tinha a sua disposição ferramentas matemáticas para poder ampliar seus estudos uma vez que Newton só iria publicar as leis da mecânica em seu livro Principia apenas 20 anos mais tarde [Bennet et al.].

Tal comportamento está ligado ao fenômeno físico conhecido por **travamento de frequência** (*phase locking*) que ocorre quando a razão entre as frequências fundamentais de um sistema físicos fica travada em uma razão  $p/q$  de dois números inteiros para um intervalo finito de valores dos parâmetros deste sistema.

A sincronização de osciladores com explicação por base neste fenômeno vem sendo relatada na literatura em diversos sistemas da mais variada natureza. Exemplos são: a interação entre os sistemas circulatório e respiratório, o piscar da luzes de um conjunto de uma espécie de

vaga lumes, e as interações entre os neurônios do cérebro. Para uma exposição geral deste interessante fenômeno veja [Macau 2003].

Outro exemplo simples de sistema que apresenta este comportamento é o pêndulo simples amortecido e forçado por uma força com magnitude regida por uma função seno. O travamento de frequência ocorre quando a razão entre a frequência de oscilação do pêndulo e a da força externa a ele aplicada fica travada em uma razão em uma razão de inteiros para certo intervalo de valores de parâmetros, neste caso o relativo ao amortecimento e à massa do pêndulo.

Quando dois osciladores são acoplados entre si, para determinados valores de seus parâmetros, surge a sincronização, o que significa que suas frequências combinadas se tornam periódicas. No espaço de parâmetros, as regiões para as quais a sincronização ocorre ou não, enovelam-se de uma forma complexa. As regiões de sincronização associadas a cada número racional  $p/q$  se estendem por regiões com medida topológica diferente de zero e com propriedades de escala características, denominadas de *línguas de Arnold*.

Em 1965, Arnold propôs um modelo fenomenológico [Arnold 1965], denominado Mapa de Círculo Padrão, que possibilita a compreensão teórica e a análise de diversos comportamentos que envolvem não só o cenário da interação não-linear entre osciladores periódicos, como também aquele onde se tem um oscilador sob ação de uma força periódica. Este modelo possui dois parâmetros de controle: a razão entre as frequências fundamentais dos osciladores e o fator de acoplamento não-linear.

Quando se explora seu espaço de estados, surgem as línguas de Arnold, associada às regiões de sincronização. Quando se mantém fixa o fator de acoplamento não-linear, surge uma estrutura fractal interessante, denominada Escadaria do Diabo, onde as regiões de travamento de frequência estão presentes em patamares bem definidos. A disposição e tamanho destes patamares são bem organizados e regidos pela chamada série de Farey. Através do conhecimento desta organização, surge a idéia de se projetar um sistema de controle simples capazes de levar um sistema dinâmico que pode ser modelado pelo Mapa de Círculo padrão, com parâmetros desconhecidos, a ter a razão entre suas frequências travada em um número racional  $p/q$  qualquer desejado.



O objetivo deste trabalho foi, portanto, o desenvolvimento e aplicação de sistemas de controle capazes de “travar” um sistema dinâmico em uma determinada razão de travamento de frequência, baseados no conhecimento da organização dos patamares de travamento de frequência regida pela Série de Farey. Tais controladores foram primeiramente implementados e testados inicialmente no Mapa de Círculo Padrão. A seguir, estão sendo aplicados diretamente sobre o modelamento através de equações diferenciais do sistema do pêndulo forçado e amortecido. Tal sistema teve seu comportamento estudado de forma extensiva durante a primeira parte deste trabalho realizada durante o período de agosto de 2004 a julho de 2005, sendo o presente trabalho uma evolução natural do anterior.

A primeira etapa do trabalho, a aplicação dos sistemas de controle ao Mapa de Círculo rendeu um trabalho intitulado “Controle da razão de Travamento de Frequência no Mapa de Círculo” que foi apresentado em junho de 2005 no IV Congresso Temático de Dinâmica, Controle e Aplicações, e que se encontra em anexo a este relatório. Quanto todo o trabalho estiver concluído, o objetivo é enviá-lo para publicação em revista internacional na área de dinâmica não-linear.

Para melhor organização deste trabalho, ele foi dividido em mais 5 seções, descritas a seguir:

- SEÇÃO 2 – FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA: MAPA DE CÍRCULO E QUASE-PERIODICIDADE: Nesta seção faz-se a discussão do modelamento de sistemas dinâmicos pelo Mapa de Círculo Padrão, das características do comportamento quase-periódico. A seguir, descreve-se o conceito e usos dos diagramas da Escadaria do Diabo e das Línguas de Arnold terminando com uma introdução às Séries de Farey e sua relação com o fenômeno de travamento de frequência.
- SEÇÃO 3 – ESTUDO DA EVOLUÇÃO DO VALOR DO NÚMERO DE ROTAÇÃO AO LONGO DA ESCADARIA DO DIABO: Como tal parâmetro é definido como um limite, o estudo da convergência de seu valor durante a simulação numérica para variadas combinações de parâmetros do Mapa de Círculo Padrão tornou-se necessário antes da implementação dos sistemas de controle. Tal seção descreve sobre os resultados e conclusões deste estudo.

- SEÇÃO 4 – MÉTODOS DE CONTROLE APLICADOS AO MAPA DE CIRCULO E RESULTADOS OBTIDOS: Tal seção descreve os métodos testados de controle aplicado diretamente ao mapa de círculo e os resultados obtidos com eles nas simulações numéricas realizadas.
- SEÇÃO 5 – APLICAÇÃO DOS MÉTODOS DE CONTROLE PARA O SISTEMA DO PÊNDULO FORÇADO E AMORTECIDO: Esta última seção descreve em primeiro lugar como o sistema dinâmico formado pelo pêndulo forçado e amortecido pode ter as equações diferenciais que regem seu comportamento ligadas ao Mapa de Círculo. A seguir, as aplicações dos métodos de controle que estão sendo executadas diretamente sobre o modelamento por equações diferenciais do sistema dinâmico formado pelo pêndulo forçado e amortecido são discutidas.
- SEÇÃO 6 – CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS: Por fim, esta seção tem por objetivo discutir os resultados e a viabilidade de implementação dos sistemas de controle sugeridos neste trabalho em sistemas dinâmicos reais, assim como propostas para melhoria e ampliação do trabalho.

## CAPÍTULO 2

### FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA:

#### MAPA DE CÍRCULO E QUASE-PERIODICIDADE

##### 2.1 Mapa de Círculo

Seja um sistema dinâmico qualquer que apresente duas frequências fundamentais distintas e independentes. A sua função de estado pode ser representada da seguinte forma [Barker et al.]:

$$x(t) = G(t_1, t_2) \quad (2.1)$$

sendo a função  $G$  periódica em  $t_1$  e  $t_2$  com frequências respectivamente iguais a  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$ . Fazendo a seguinte mudança de variável:

$$\theta_i = \Omega_i t_i \quad (2.2)$$

o estado do sistema pode, então, ser escrito em função de dois ângulos:

$$x(t) = G\left(\frac{\theta_1}{\Omega_1}, \frac{\theta_2}{\Omega_2}\right) = H(\theta_1, \theta_2) \quad (2.3)$$

Qualquer estado deste sistema pode ser sempre representado por um ponto na superfície de um toróide tridimensional como apresentado na Figura 1 a seguir, sendo que sua órbita o percorre rodando na menor direção com a frequência  $\Omega_1$  e na outra com  $\Omega_2$ .

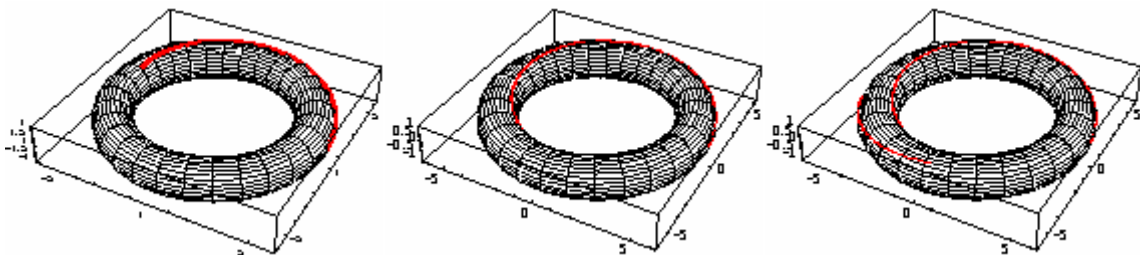


Figura 1: Exemplo de evolução de uma órbita em um espaço de estados toroidal

A representação do toróide pode ser simplificada se apenas uma de suas seções for tomada, como um diagrama de Poincaré conforme mostrado na Figura 2 a seguir. Neste caso, obtém-se o seguinte mapa unidimensional:

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \omega \quad (2.4)$$

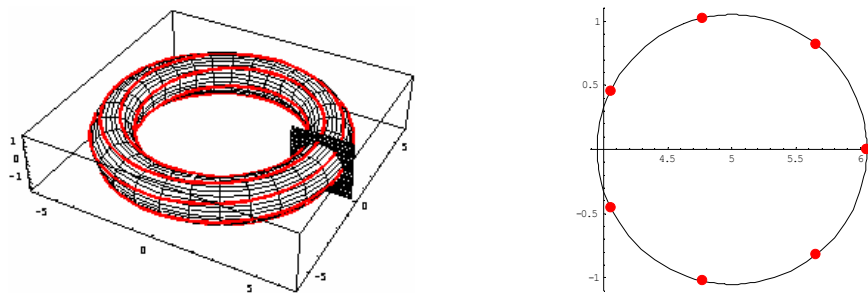


Figura 2: Representação gráfica da idéia do Mapa de Círculo

Onde  $\omega = \Omega_1/\Omega_2$ . Este mapa, no entanto, não descreve o caso de um acoplamento não-linear para estas duas frequências fundamentais. Para tal modelamento, Arnold em 1965 [1] propôs o mapa de círculo padrão:

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \omega + \frac{k}{2\pi} \text{sen}(2\pi\theta_n) \quad \text{mod } 1 \quad (2.5)$$

Neste mapa, o parâmetro  $k$  descreve o fator de acoplamento não linear, que é modelado pelo termo que contém a função seno. Desta forma, o Mapa de Círculo Padrão apresenta apenas dois parâmetros, um referente à razão entre as frequências fundamentais do sistema ( $\omega$ ), e outro ao acoplamento não-linear entre elas ( $k$ ).

## 2.2 Quase-periodicidade

Dentre os tipos mais comuns de comportamentos que os sistemas dinâmicos podem apresentar destacam-se o ponto fixo, o comportamento periódico e o comportamento caótico. No primeiro caso, o sistema assume apenas um estado fixo. No segundo, seu estado varia entre um número finito deles de forma que, após certo intervalo  $\Delta T$ , seus estados anteriores

se repetem. Por fim, no terceiro temos um comportamento em que o sistema nunca volta a seu estado inicial percorrendo todos os estados possíveis.

Existem, entretanto, outros tipos de comportamento apresentáveis por sistemas dinâmicos. Um deles é denominado *quase-periódico*. Tal tipo de comportamento é caracterizado pelo sistema, uma vez em um estado inicial nunca a ele retornar, percorrendo todos os estados possíveis, de forma semelhante ao caótico, mas com uma diferença fundamental com relação a este: dados dois estados iniciais diferentes, a distância entre os estados após algum tempo continua constante.

A Figura 3 abaixo apresenta a diferença do espaço de estados e do mapa de círculo, entre o sistema apresentando um comportamento periódico e quase-periódico. Observa-se que o quase-periódico cobre todo o espaço de estados, e conseqüentemente, todo o Mapa de Círculo.

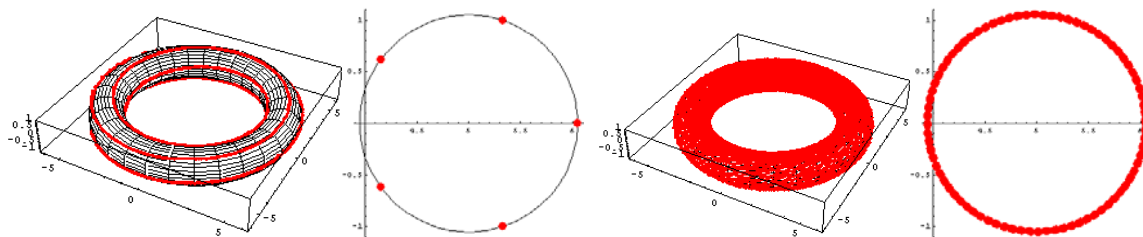


Figura 3: Diferença entre comportamento periódico e quase-periódico no espaço de estados e no Mapa de Círculo

Matematicamente a quase-periodicidade pode ser apresentada da seguinte forma: sejam  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  as duas frequências fundamentais do sistema dinâmico. Caso elas sejam comensuráveis, ou seja, caso a equação 2.6 abaixo:

$$a_1\Omega_1 + a_2\Omega_2 = 0 \tag{2.6}$$

onde  $a_1$  e  $a_2$  são números inteiros, apresentar uma solução diferente da trivial, então o sistema percorrerá uma órbita fechada ao redor do toróide, sendo o seu comportamento, neste caso, periódico.

Caso contrário, ou seja, no caso das frequências fundamentais do sistema serem incomensuráveis então eles percorrerá todos os pontos do espaço de fase sem voltar ao ponto inicial, apresentando, assim, um comportamento quase-periódico.

No caso de um sistema linear, ou seja, quando ele pode ser representado pela equação (2.4), fica fácil observar que ele apresentará comportamento quase-periódico somente quando as suas frequências foram incomensuráveis, ou seja, se uma delas for irracional. Já no caso de um sistema não-linear, representado pelo mapa de círculo padrão (eq. 2.5) não se pode afirmar algo desta natureza diretamente, uma vez que uma frequência atua sobre a outra, não sendo assim independentes e constantes como é no caso linear.

Assim, para a determinação do tipo de comportamento de um sistema não-linear faz-se uso de um novo parâmetro denominado *número de rotação* e definido como mostra a equação 2.7 a seguir:

$$W = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\theta_n - \theta_0}{n} \quad (2.7)$$

Quando o número de rotação assume um valor racional  $p/q$ , o sistema apresenta um comportamento periódico. Caso seu valor seja irracional, observa-se que o sistema apresenta um comportamento quase-periódico.

No caso do Mapa de Círculo Padrão, para valores do parâmetro  $k$  contidos no intervalo de zero até um, que será o intervalo de valores considerado neste trabalho, o sistema apresenta apenas dois comportamentos periódico ou quase-periódico. É fácil observar que no caso de  $k = 0$  (sem acoplamento não linear),  $W = \omega$ .

### 2.3 Línguas de Arnold e Escadaria do Diabo

Um estudo inicial do comportamento do Mapa de Círculo leva diretamente a pergunta: para que valores de parâmetros o sistema apresenta um comportamento periódico? A sua resposta, entretanto, não é simples de ser obtida diretamente, uma vez que é difícil analiticamente calcular o valor do número de rotação para cada conjunto de valor de parâmetros. A solução prática mais utilizada é a simulação da evolução do mapa para numerosos destes conjuntos até que o número de rotação de cada um encontrado.

A apresentação clássica deste resultado é através de um diagrama  $k \times \omega$ , em que, caso o mapa apresente um comportamento periódico, o ponto que o representa no diagrama é pintado de preto, enquanto para outros casos ele é pintado de branco. A Figura 4 a seguir, obtida com a ferramenta computacional desenvolvida na parte anterior deste trabalho, apresenta tal diagrama.

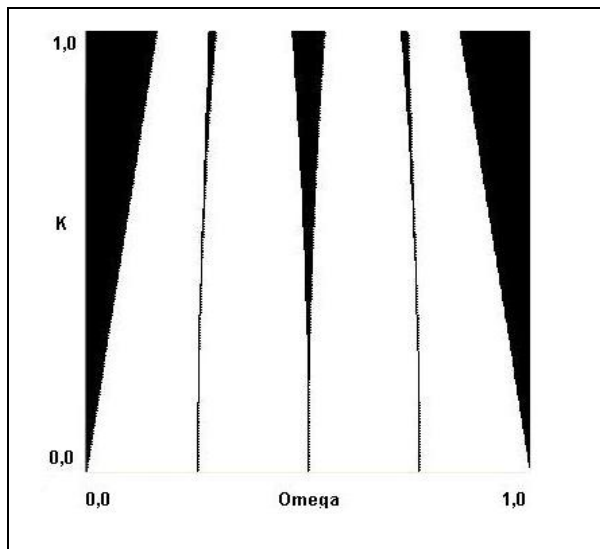


Figura 4: Línguas de Arnold

Nela observa-se uma estrutura como se fossem línguas (daí seu nome de Línguas de Arnold), que aumentam de largura com o aumento do coeficiente de acoplamento não-linear  $k$ . Cada língua representa o sistema travado em uma razão  $p/q$ . No caso desta figura, devemos lembrar que apenas os pontos no qual o sistema apresenta comportamento periódico com número de rotação igual a  $0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$  e  $1$  estão marcados.

Para o valor de  $k = 0$ , ou seja, sem acoplamento não linear, o sistema apresenta comportamento periódico apenas se  $\omega$  for racional, em concordância com o que já foi explicado na seção anterior. Assim, existem infinitos valores de  $\omega$  para os quais, com  $k = 0$ , o sistema apresenta comportamento periódico. Entretanto, entre dois números racionais consecutivos, sempre existe um irracional, desta forma, os pontos relativos ao comportamento periódico não formam nenhum intervalo, apresentando medida topológica nula.

À medida que o valor de  $k$  aumenta, tais pontos evoluem para intervalos. Desta forma, observa-se que o acoplamento não-linear permite que o sistema apresente um comportamento periódico mesmo que suas frequências naturais sejam incomensuráveis. Daí a estrita relação do fenômeno de travamento de frequência com a não-linearidade do sistema.

No caso limite de  $k = 1$ , os intervalos tornam-se largos o suficiente de forma que os valores de  $\omega$  para os quais o sistema apresenta comportamento quase-periódico tornam-se um conjunto de medida nula.

Se ao invés de se variar o valor de  $k$  e  $\omega$ , e apenas verificar se o número de rotação ( $W$ ) do sistema é racional ou não, o valor de  $k$  for fixado em 1, e o valor de  $W$  for plotado em função de  $\omega$ , obtêm-se um outro tipo de diagrama, denominado Escadaria do Diabo, novamente fazendo alusão à sua forma. A Figura 5 a seguir apresenta tal diagrama obtido através de uma ferramenta computacional em ambiente MATLAB® desenvolvida ao longo desta etapa do trabalho.

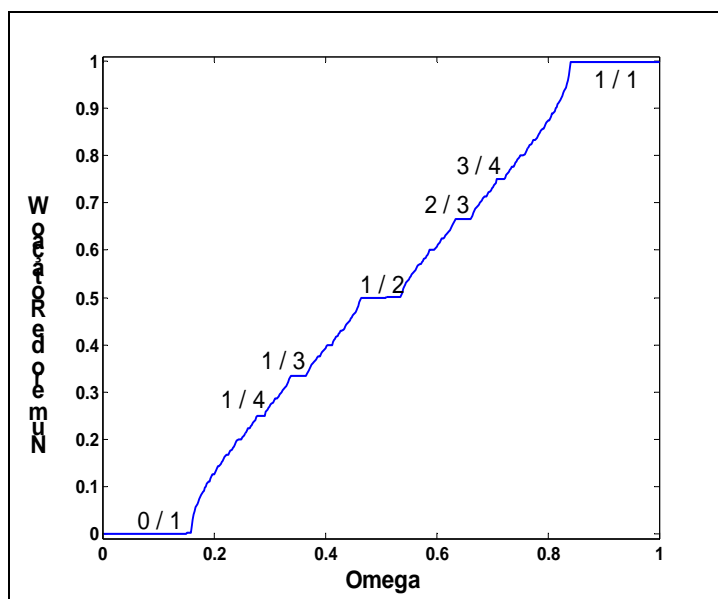


Figura 5: Escadaria do Diabo

Observa-se nesta figura inúmeros patamares, cada um correspondente a uma língua que aparece na Figura 4, sendo a figura formada com características de um fractal, apresentando



semelhança consigo própria. Cada patamar representa uma razão  $p/q$  de travamento de frequência.

No caso de se fazer o mesmo procedimento para um valor de  $k$  inferior à 1, observa-se uma figura similar, que também apresenta tais patamares. A diferença, entretanto, é que neste caso, os patamares não preencherão totalmente o intervalo, sendo que existirão regiões, com dimensão maior do que zero, de comportamento quase-periódico entre dois patamares.

## 2.4 Série de Farey

John Farey (1766-1826) foi um geólogo inglês e não um matemático [O'Connor et al]. Mesmo assim, devido a uma interessante observação sua a respeito dos números racionais, seu nome foi imortalizado na matemática com as chamadas séries de Farey. Tal observação foi feita em seu artigo de 1817: “On a curious property of vulgar fractions”, publicado na revista *Philosophical Magazine*. Em tal artigo, com apenas quatro parágrafos, ele definiu as séries de Farey e anunciou a sua “curiosa observação”.

A série de Farey de ordem  $n$  ( $F_N$ ) é definida como o conjunto de todos os números racionais, escritos na forma de frações irredutíveis, de forma que o coeficiente máximo de tais funções seja igual a  $n$ , organizadas de forma crescente. Assim, por exemplo, a série de Farey de ordem cinco é a seguinte:

$$(F_N) = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1} \right\} \quad (2.8)$$

A curiosa propriedade desse conjunto de frações organizado dessa maneira é a seguinte: dada uma fração qualquer pertencente à série ela, é a mediana entre as duas funções adjacentes à ela. Matematicamente, dadas três frações consecutivas ( $a/b$ ,  $c/d$ ,  $e/f$ ) temos que:

$$\frac{c}{d} = \frac{a}{b} \oplus \frac{e}{f} = \frac{a+e}{b+f} \quad (2.9)$$

Tal propriedade pode ser facilmente observada a partir da série de Farey de ordem cinco apresentada acima:

$$\frac{1}{5} = \frac{0}{1} \oplus \frac{1}{4} = \frac{0+1}{1+4} \quad e \quad \frac{2}{3} = \frac{3}{5} \oplus \frac{3}{4} = \frac{3+3}{5+4} = \frac{6}{9} \quad (2.10)$$

Farey não demonstrou tal propriedade, apenas a enunciou, e, no último parágrafo do artigo disse que deixava está prova para algum leitor matemático. Cauchy publicou a demonstração no mesmo em seu livro *Exercises de mathématiques*. Tal demonstração, que se utiliza da árvore de Stern-Brocot está fora dos escopos deste trabalho.

Existem algumas discussões a respeito da “descoberta” desta propriedade ser creditada a Farey. Em 1802, Haros publicou um artigo em que ensinava a construir o que era a série de Farey de ordem 99. Para esta construção ele utilizava essa propriedade das funções o que, entretanto, não provava. De qualquer forma o nome do conjunto de frações ficou sendo Séries de Farey.

Analisando agora a relação desta “observação” matemática com o fenômeno do travamento de frequência. Voltando a Figura 5, observa-se que os dois maiores estão nas extremidades da escada correspondentes ao número de rotação travado em  $0$  e  $1$ . O próximo, em ordem decrescente de tamanho, é o relativo ao número de rotação  $\frac{1}{2}$ . Continuando a análise, é possível observar que os próximos são os patamares correspondentes a  $\frac{1}{3}$  e  $\frac{2}{3}$ , e assim por diante.

Observa-se assim, que a organização e tamanho dos patamares de travamento de frequência no Mapa de Círculo obedecem à hierarquia da Série de Farey [Kapraff et al.]. Tal informação é a base de partida deste trabalho. A idéia é caminhar com o sistema através da Escadaria do Diabo até o patamar desejado seguindo desde os patamares menores até o desejado. Tal procedimento é necessário devido à existência de influências externas e ruídos no caso de sistemas físicos reais, conforme será explicado melhor na seção em que discute o aspecto geral dos sistemas de controle desenvolvidos.

### CAPÍTULO 3

#### ESTUDO DA EVOLUÇÃO DO VALOR DO NÚMERO DE ROTAÇÃO AO LONGO DA ESCADARIA DO DIABO

Na maioria dos casos de controle de sistemas discretos, o parâmetro observável é uma grandeza definida a cada iteração. No caso do mapa de círculo, entretanto, esse não é o caso, uma vez que o número de rotação é definido como um limite.

Como tal parâmetro seria a variável observável para o sistema de controle, conforme será explicado na próxima seção deste relatório, fazia-se necessário um estudo que revelasse qual a melhor forma de se obter seu valor através das simulações computacionais da evolução do Mapa de Círculo, e qual a influência dos parâmetros do sistema neste cálculo. Todos programas para se fazer tais simulações foram desenvolvidos ao longo do trabalho em plataforma MATLAB®.

Para se resolver a primeira destas questões, foram testados métodos que se baseiam em comparar os valores da seqüência do número de rotação calculado ao longo dos ciclos de iteração. Caso a diferença absoluta entre eles fosse menor do que um determinado valor definia-se como limite o valor do último. A diferença entre os métodos é apenas o número de termos da série testados, mais precisamente dois, três ou quatro.

Como resultado desta comparação, observa-se que os métodos não apresentam resultados significativamente diferentes para o valor do número de rotação, apenas diferem pelo número de ciclos até que o limite seja atingido. Desta forma optou-se por uma solução intermediária, analisando-se os três últimos termos da seqüência de forma a reduzir o esforço computacional. Esse foi o método usado em todo o trabalho que se procedeu a essa comparação.

A seguir, buscou-se estudar o segundo problema, ou seja, a variação do número de iterações necessário para que a seqüência do número de rotação tende a um limite para os diferentes pontos da Escadaria do Diabo, ou seja, para diferentes valores de  $\omega$  mantendo-se  $k = 1$ .

Isto foi feito sobrepondo a escadaria com o gráfico do número de iterações necessárias para se obter o limite para cada valor de  $\omega$ . A Figura 6 abaixo apresenta o resultado para toda a escadaria, considerando-se 500 diferentes valores de  $\omega$  analisados e uma precisão do limite de  $5 \cdot 10^{-5}$ .

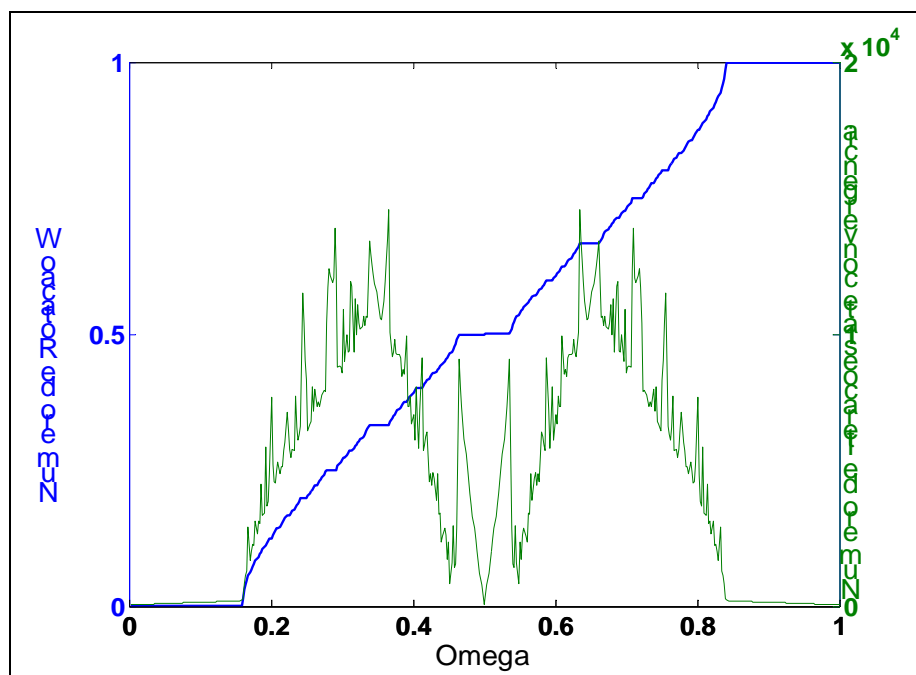


Figura 6: Estudo da convergência do número de rotação

Observa-se nesta figura uma forma bastante interessante para a curva que liga o número de iterações necessário para que o valor do número de rotação convirja. Nota-se, em particular, que esta curva é simétrica com relação ao eixo vertical que passa pelo valor  $\omega = 0,5$ , e que de forma geral, segue uma forma que lembra uma função seno, para cada lado deste eixo de simetria, mas com um número muito grande de picos pontuais, para diversos valores de  $\omega$ .

Com o objetivo de se estudar mais a fundo a razão do comportamento característico desta curva, foram feitas simulações com intervalos limitados, porém mais refinados, de valores de  $\omega$ . A Figura 7, a seguir é um exemplo do resultado de tal estudo. Neste caso, os cálculos foram refeitos apenas no intervalo de  $\Omega$  entre 0,32 e 0,38 de forma a observar o que ocorre com tal curva nas proximidades do patamar relativo a fração  $1/3$ . O número de divisões e critério de convergência aplicados foram os mesmos daquele da Figura 6.

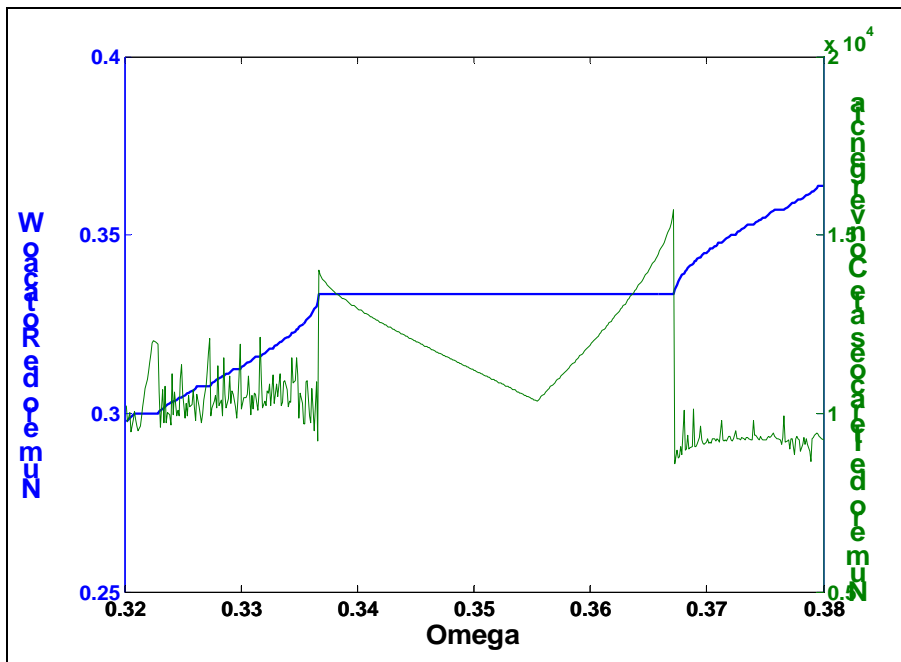


Figura 7: Estudo da convergência do número de rotação em um intervalo restrito

Destaca-se, na Figura 7, a forma particular da curva referente ao número de iterações no interior do patamar de travamento de frequência. Tal forma, bastante definida, foi observada em outros patamares e também com outras configurações de critério de parada de iterações e refinamento do intervalo, o que sugere ser um comportamento geral do Mapa de Círculo Padrão.

Em cada extremo de patamar, existe um pico para o número de iterações até a convergência, enquanto que ao longo do intervalo este valor decresce até que atinge um “bico”, onde a curva não é suave, e torna a crescer até o outro pico no outro extremo do patamar. Este bico não é, entretanto, localizado no centro do patamar. Isto pode ser explicado pelo formato das línguas de Arnold, apresentadas na Figura 4 anteriormente. Não é difícil observar que se fosse marcado uma linha média em cada língua, várias delas não são paralelas ou eixo de  $k$ . Isto porque elas se acomodam, sem sobreposição, à medida que vão tendo a sua largura aumentada com o incremento do valor do parâmetro  $k$ .

A partir deste resultado para um patamar, torna-se simples explicar o comportamento da curva ao longo da Escadaria do Diabo. Em cada um dos infinitos patamares, observa-se um comportamento similar ao apresentado para o patamar da Figura 7. Para cada extremo deles observa-se um pico, por isso os inúmeros picos que podem ser vistos na Figura 6. Ademais,

neste primeiro estudo observou-se que quanto maior a largura do intervalo, maior o valor de seus picos. Tal afirmação não pode ser provada, entretanto, pois variando-se o critério usado para definição do limite e o número de divisões do intervalo analisado de  $\omega$ , foram observadas algumas variações no tamanho dos picos. Isso pode ser explicado principalmente pela amostragem de pontos. A divisão do intervalo analisado era uniforme, de forma que não se pode garantir que o verdadeiro extremo do patamar foi analisado.

Este interessante comportamento da convergência do número de rotação do Mapa de Círculo, que a princípio não era esperado, motivou algumas outras experiências. Estas foram feitas com casos em que o valor do parâmetro  $k$  era diferente de 1 e no que fixando-se o valor de  $\omega$  e variando-se  $k$ , foi realizada uma varredura das línguas de Arnold no sentido perpendicular àquele da Escadaria do Diabo usual. Os resultados obtidos para ambos estes estudos foram similares aos já apresentados para o caso de  $k = 1$ .

O conhecimento deste comportamento pode ser também usado para o desenvolvimento de um sistema de controle do travamento de frequência, uma vez que os picos de dificuldade de convergência são evidências da existência de um patamar. Como o objetivo inicial do trabalho, não era utilizar este conhecimento, e sim, apenas a Série de Farey, optou-se por deixar a implementação de um sistema deste tipo como sugestão de um trabalho futuro.

## CAPÍTULO 4

### MÉTODOS DE CONTROLE APLICADOS AO MAPA DE CÍRCULO E

#### RESULTADOS OBTIDOS

O objetivo do trabalho é controlar um sistema físico do qual não temos conhecimento de todos os seus parâmetros, os métodos de controle elaborados atuam recebendo como sinal de entrada apenas o número de rotação do sistema. A partir da observação deste valor, o algoritmo fornece um novo sinal de controle ( $\delta$ ) até que o sistema fique com seu número de rotação travado no patamar desejado. A Figura 8 a seguir apresenta o diagrama de blocos do sistema com o sistema de controle aplicado.

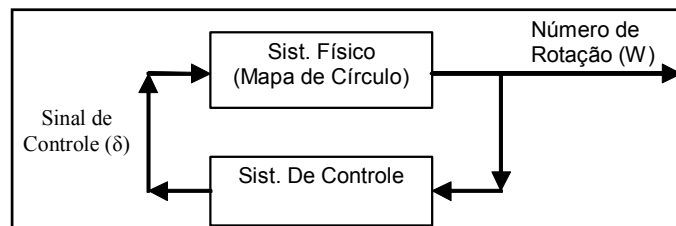


Figura 8: Diagrama de blocos do sistema controlado

Tal sinal de controle, atua no mapa de círculo como uma excitação externa independente, de forma que o Mapa de Círculo Controlado pode ser expressado pela função 4.1 a seguir:

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \omega + \frac{k}{2\pi} \text{sen}(2\pi\theta_n) + \delta \quad \text{mod}1 \quad (4.1)$$

A princípio, o trabalho do sistema de controle, bastando levar o sistema, por meio de modificação dos parâmetros  $k$  e/ou  $\omega$ . Em sistemas físicos reais, entretanto, existem ruídos e influências externas que atrapalham, ou em muitos casos até impossibilitam o sistema de se manter com os mesmo valores de parâmetros. Daí a importância de se colocar o sistema em meio a um intervalo de travamento de frequência. Desta forma, garante-se uma margem de segurança para que o sistema possa apresentar modificações em seus parâmetros sem que seu comportamento se modifique.

Dependendo da razão  $p/q$  desejada para o valor do número de rotação, entretanto, este intervalo é muito pequeno, de forma a dificultar ao máximo a operação de se colocar o

sistema exatamente neste intervalo de travamento de frequência diretamente. A idéia, portanto, é que o sistema de controle “caminhe” sobre a Escadaria do Diabo, de forma a passar de um intervalo maior para o seguinte em escala decrescente de tamanho, até que o patamar desejado seja alcançado. Para exemplificar esta idéia, a Figura 9 a seguir apresenta o caminho sobre a Escadaria do Diabo necessário para colocar o sistema no patamar referente a fração  $3/5$ .

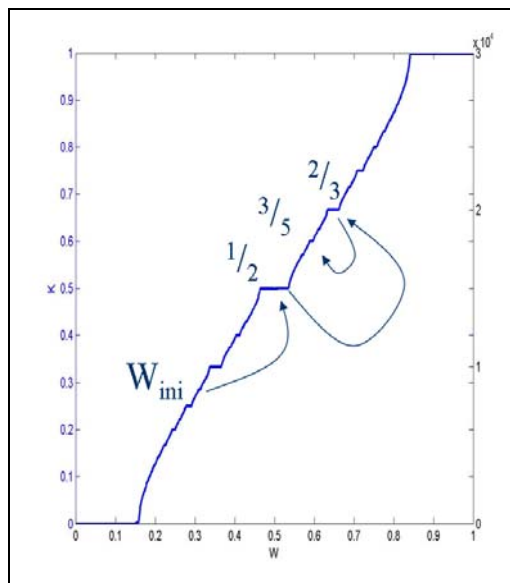


Figura 9: Caminho realizado pelo sistema ao longo da Escadaria do Diabo

#### 4.1 Algoritmo de Busca

O primeiro algoritmo utilizado apresenta mais características de um método de busca do que de controle. Nele, valores máximos e mínimos possíveis para o sinal de controle são armazenados e atualizados de acordo com o número de rotação encontrado. O sinal de controle testado é o valor médio deste intervalo. Seguindo tal procedimento, encontra-se um intervalo de controle tão pequeno quanto se necessite para que o sistema assuma determinado comportamento.

Supõe-se uma situação inicial, onde nenhuma informação acerca dos parâmetros do sistema que está sendo modelado pelo mapa de círculo é conhecida. A princípio, o valor do sinal de controle pode assumir todos os valores desde -1 até 1. Queremos o sistema primeiramente travado com número de rotação igual a  $1/2$ . O sinal de controle inicial é zero e itera-se o mapa



até que se obtenha o valor de seu número de rotação. Caso tal número seja maior do que  $\frac{1}{2}$ , então sabemos que devemos usar um sinal de controle negativo, logo nosso intervalo é atualizado para -1 até 0. O próximo sinal de controle a ser testado é então o -0,5 e assim progressivamente. De forma geral podemos descrever matematicamente este sistema de acordo com as equações de (4.2) até (4.4) apresentadas a seguir.

$$\delta \in [\delta_{\min}; \delta_{\max}] \Rightarrow \delta_n = \frac{\delta_{\max} + \delta_{\min}}{2} \quad (4.2)$$

$$se \ W > W_{des} \Rightarrow \delta_{\max} = \delta_n \quad (4.3)$$

$$se \ W < W_{des} \Rightarrow \delta_{\min} = \delta_n \quad (4.4)$$

A questão que surge é o que fazer depois que o sistema está travado em determinado patamar  $\frac{1}{2}$ , e é necessário travá-lo na próxima fração seguindo a série de Farey. O intervalo utilizado no método está, neste momento, bastante restrito e provavelmente não contém mais o sinal de controle necessário para que o sistema tenha seu número de rotação travado nesta outra fração. Devemos, então, ter um método artificial de ampliação deste intervalo.

A primeira idéia testada foi ampliar tal intervalo de forma totalmente arbitrária, escolhendo um valor seguro como, por exemplo: 0,5. O resultado desta experiência é apresentado na Figura 10 a seguir:

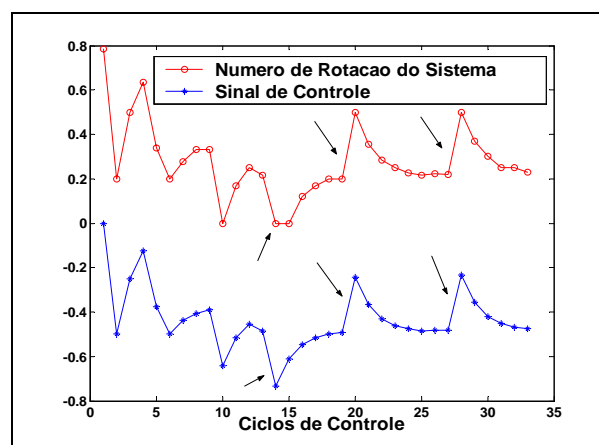


Figura 10: Exemplo de resultado do algoritmo de busca

Observa-se que cada vez que o número de rotação desejado muda de valor, ou seja, quando o sistema encontra-se sobre um patamar da escadaria e passa a buscar o próximo de acordo com a ordem da série de Farey, ocorre uma variação bruta do sinal de controle, e, conseqüentemente, do número de rotação do sistema. Tais pontos estão destacados pelas setas na Figura 10, que apontam para grandes variações após uma seqüência de valores que tendem para um número nas duas curvas. Tais mudanças bruscas são o resultado deste método de ampliação do intervalo e implicam em aumentar o tempo de convergência do sistema para o comportamento desejado.

## 4.2 Algoritmo Integral

Ao invés de desenvolver métodos mais elaborados para a redefinição deste intervalo do algoritmo de busca, optou-se por investir mais tempo no estudo dos outros algoritmos de controle, desta vez baseados na teoria clássica de controle, a fim de se obter melhores resultados.

Esses tipos de controladores são em geral aplicados no caso de sistemas contínuos, de forma que foram adaptados para o caso do Mapa de Círculo é tem por característica ser um sistema discreto.

O primeiro algoritmo de controle tipo a ser testado baseia-se no conhecido controlador integral. Neste tipo de controlador, o sinal de controle é proporcional à integral dos sinais de erros, ou seja, às diferenças entre o sinal de entrada e o de saída para todos os casos anteriores. Tal tipo de controlador foi utilizado, uma vez que um algoritmo baseado no controlador proporcional não funcionaria no caso do mapa de círculo, uma vez que o sinal de controle deve ser diferente de zero mesmo quando não exista erro. Ou seja, deve existir um sinal de controle, em geral diferente de zero, para o sistema se comportar da forma desejada.

Ao invés de somar todos os valores de erro anteriores para cada novo sinal de controle, basta acrescentarmos a ele o fator proporcional ao valor do erro atual. Matematicamente, sendo  $\delta$  o sinal de controle, tem-se que:

$$\delta_n = \delta_{n-1} + k_i |W_{n-1} - W_{des}| = k_i \sum_{i=1}^{n-1} |W_i - W_{des}| \quad (4.5)$$

Nesta equação,  $k_i$  é o fator de proporcionalidade.

Nos casos clássicos de controle aplicados a sistemas simples como, por exemplo, sistemas contínuos de primeira ou segunda ordem, é possível resolver a sua equação diferencial de forma que um valor ótimo para  $k_i$  pode ser calculado.

Já no caso do mapa do círculo, tal análise é bastante mais complicada. Desta forma, optou-se por fazer testes com vários valores de  $k_i$ , buscando aquele que levasse, com o menor número de ciclos de controle, o sistema para o comportamento desejado.

As Figura 11 e Figura 12 abaixo apresenta os resultados para o primeiro estudo deste modo realizado. Escolheu-se o valor de  $4/13$  para o número de rotação desejado em que o sistema fique travado. Mapas de círculo com diferentes valores para o parâmetro  $\omega$  foram iterados com um sistema de controle utilizando diferentes valores de  $k_i$ , sendo anotado o número de ciclos de controle necessários para que o sistema atingisse o comportamento desejado.

Para cada conjunto de  $\omega$  e  $k_i$  testado, ainda foram feitas cinco tentativas de controle com fase inicial randômica. Com os resultados tirou-se a média e o desvio padrão do número de ciclos de forma a estudar a influência deste fator no tempo de controle.

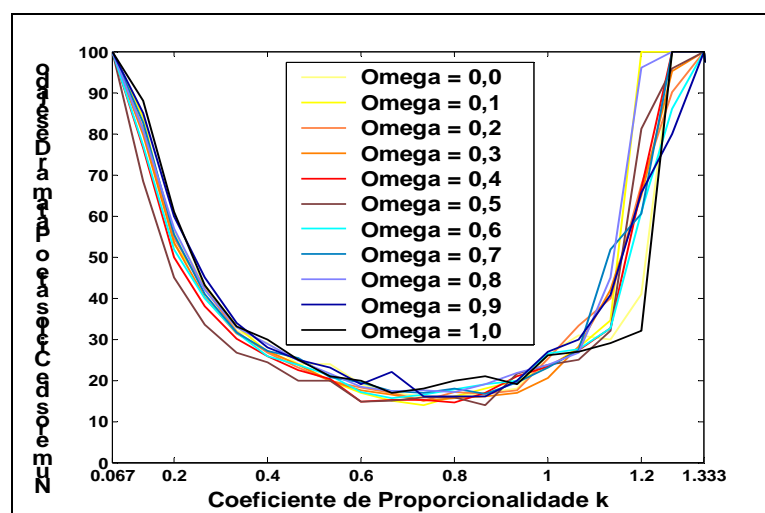


Figura 11: Variação do número de ciclos de controle em função de  $k_i$

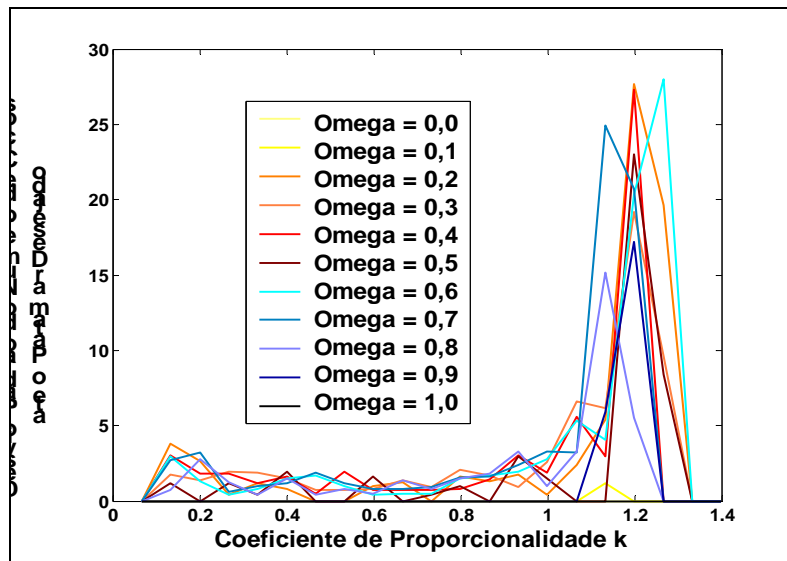


Figura 12: Desvio padrão dos resultados apresentados na Figura 11

A primeira observação que deve ser feita diz respeito à influência do valor de  $\omega$  quando um mesmo valor de  $k_i$  é utilizado no algoritmo. Observa-se que todas as dez curvas apresentadas em ambas figuras são praticamente coincidentes. Resultados semelhantes foram obtidos quando outro número de rotação foi escolhido como objetivo do sistema de controle. Desta forma, concluí-se que o valor de  $\omega$  do sistema não é decisivo na velocidade desse algoritmo.

Já na extremidade esquerda do gráfico, relativa a valores de  $k_i$  superiores a um, maiores discrepâncias entre as curvas são observadas. Para estes pontos, entretanto, o desvio padrão dos resultados, para valores de fase inicial diferentes também é bastante grande. A explicação para tais discordâncias será dada mais à frente quando os comportamentos padrões para cada valor de  $k_i$  forem comparados.

Observando agora o formato das linhas da Figura 11, três comportamentos completamente distintos de acordo com o valor de  $k_i$  podem ser identificados: próximo de zero, intermediário e para valores maiores do que um.

Para melhor compreensão de tais comportamentos, a Figura 13 abaixo apresenta a evolução do número de rotação de quatro mapas de círculos com parâmetros exatamente iguais, usando diferentes valores para o coeficiente de proporcionalidade do sinal de controle. Para facilitar a visualização, os diferentes patamares são marcados com as linhas tracejadas e identificados.

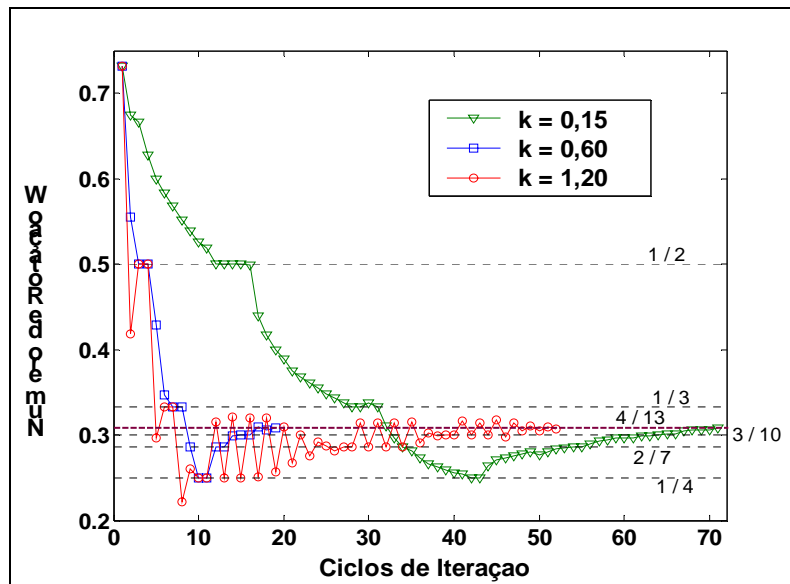


Figura 13: Evolução do número de rotação do sistema com diferentes valores de  $k_i$ .

Para valores do coeficiente de proporcionalidade próximos de zero, o número de ciclos de controle até o travamento em cada um dos patamares é muito grande. Isso porque a cada novo ciclo, a mudança do sinal de controle e, conseqüentemente do número de rotação do sistema, é muito pequena, já que  $k_i$  é pequeno. Por isso, a medida que tal fator aumenta, o número de ciclos necessários para o sistema alcançar o número de rotação desejado diminui.

No caso do valor intermediário  $k_i = 0,6$  observa-se que o sistema rapidamente alcança cada um dos patamares, em geral com apenas dois ciclos de controle, sendo o controlador extremamente eficiente. Conforme já era esperado pelo estudo do resultado apresentado na Figura 11.

Por fim, para o caso de valores de  $k_i$  grandes, observa-se que o número de ciclos de controle necessários para se alcançar cada um dos patamares é novamente elevado. Isso porque, em vários casos, o incremento do sinal de controle é muito grande, o que o leva para um valor maior ou menor do que o necessário para o travamento de frequência desejado.

Em alguns casos tal problema agrava-se a ponto de nunca se obter a convergência, uma vez que o sinal de controle acaba travado em uma seqüência de valores que se repete infinitamente. Esse comportamento é o responsável pela grande variação nas curvas da

Figura 11, e dos altos valores de desvio padrão representados na Figura 12 para tais valores de coeficiente de proporcionalidade.

Para valores muito altos de tal constante ( $k_i > 1,5$ ) foram observados casos em que o sistema tornou-se instável. O resultado era o sinal de controle ficar travado alternando entre dois valores, e o número de rotação do sistema assumir os seus valores máximos 0 e 1.

### 4.3 Algoritmo Proporcional-Integral

Como terceiro e último algoritmo que foi testado neste trabalho, optou-se por uma adaptação do controlador clássico proporcional-integral. A diferença para o controlador integral reside apenas no fato de que existe, por parte deste controlador, uma ênfase maior no valor atual do erro. Neste caso, a equação do sinal de controle era ligeiramente diferente da do controlador clássico, novamente motivado pelo fato do controlador clássico ser aplicado para sistemas contínuos, sendo representada pela equação (4.6) a seguir:

$$\delta_n = k_p |W_{n-1} - W_{des}| + k_i \sum_{i=1}^{n-1} |W_i - W_{des}| \quad (4.6)$$

Analogamente ao caso do algoritmo integral, o primeiro passo foi estimar valores para as duas constantes de nosso algoritmo  $k_p$  e  $k_i$ . Para isso foram feitas experiências variando-se ambos estes coeficientes. A Figura 14 a seguir apresenta o resultado de um estudo bastante similar ao apresentado na Figura 11, desta vez para este algoritmo, e sem variação da fase inicial, que foi escolhida arbitrariamente. O número máximo de ciclos de controle permitidos para cada combinação de valores foi fixado em 150.

Observa-se nesta figura que para valores pequenos de  $k_p$ , que no caso do controlador integral levam a um número muito grande de ciclos de controle, o uso de um controlador proporcional-integral, pode melhorar em muito a sua eficiência. Um exemplo é o caso de  $k_i = 0,2$ , que quando  $k_p = 0$  (controlador integral), o controlador necessita de aproximadamente 60 ciclos de controle para travar o sistema na razão desejada, enquanto com  $k_p = 0$  esse número passa para aproximadamente 25 ciclos.

Nota-se que os pontos em azul escuro, que representam o menor número de ciclos de controle necessários, aparecem na região de baixos valores de  $k_p$  e altos para  $k_i$ .

Outro fato interessante observado é a tendência de que, quanto maior o valor de  $k_p$ , menor o valor de  $k_i$  para a máxima eficiência do controlador.

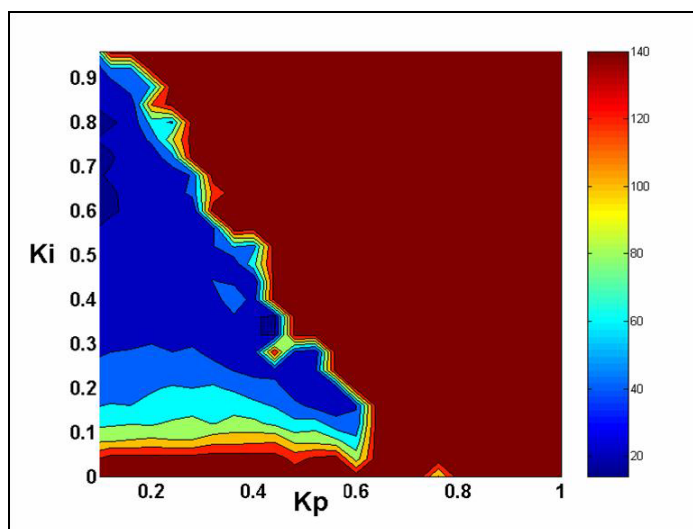


Figura 14: Influência dos coeficientes  $k_p$  e  $k_i$  na atuação do controlador proporcional derivativo

Para valores intermediários e grandes de  $k_p$ , entretanto, o uso do controlador proporcional-integral apresenta pior eficiência do que o uso do integral somente. Tal comportamento pode ser observado pela região azul tender a se mover para baixo com o aumento do valor de  $k_p$ .

Para um estudo melhor da influência do termo proporcional, fez-se a análise do histórico de números de rotação e sinal de controle para o caso de  $k_p = 0,2$ . O resultado é apresentado na a seguir.

Nota-se claramente, neste caso que o valor de  $k_i = 0,4$ , representa uma significativa melhora na eficiência do controlador. Entretanto, no caso de  $k_i = 0,6$ , o sistema tornasse instável e nunca o valor do número de rotação desejado é conseguido.

Esta instabilidade é semelhante àquela ocorrida no caso do algoritmo integral somente, com a diferença que, aumentando-se o valor de  $k_p$ , o valor de  $k_i$  máximo antes da instabilidade decresce.

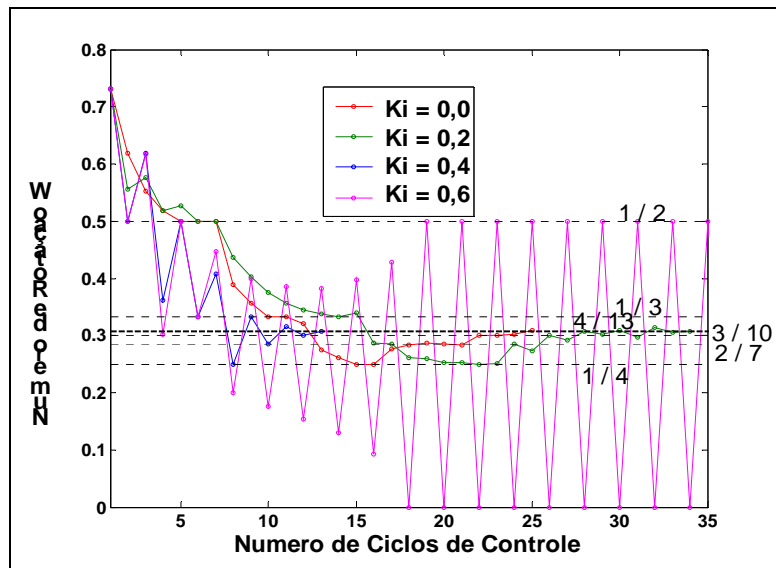


Figura 15: Evolução do número de rotação do sistema com diferentes valores de  $k_i$  com  $k_p$  constante igual a 0,4



## CAPÍTULO 5

### APLICAÇÃO DOS MÉTODOS DE CONTROLE PARA O SISTEMA DO PÊNDBULO FORÇADO E AMORTECIDO

Conforme explicado durante a introdução, o objetivo final do trabalho é desenvolver um sistema de controle para o travamento de frequência no caso de sistemas físicos. A aplicação dos sistemas de controle desenvolvidos para o Mapa de Círculo foi importante para testar os resultados e o próximo passo é aplicá-los a sistemas reais. Tal estudo está em desenvolvimento neste momento de forma que esta seção busca apenas apresentar a relação entre a relação entre as equações diferenciais que modelam o comportamento do sistema forçado e amortecido e o Mapa do Círculo. Esta dedução será aqui apresentada de forma resumida.

No sistema físico existe um pêndulo ligado a um ponto fixo no espaço que só pode se movimentar no plano vertical. Tal pêndulo está sujeito à ação de um amortecimento proporcional a sua velocidade angular, a uma força gravitacional com aceleração constante e uma força externa de módulo regido por uma função co-seno, com uma frequência fixa. A Figura 16 a seguir apresenta um esquema do sistema com as forças atuantes.

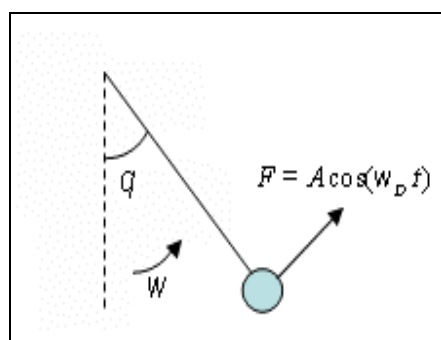


Figura 16: Esquema do sistema físico

Aplicando a segunda Lei de Newton para este sistema, facilmente obtêm-se a equação diferencial (5.1) apresentada a seguir.

$$\ddot{\theta} + \gamma \dot{\theta} + \sin \theta = A \cos(\omega t) \quad (5.1)$$

Aplicando a discretização de Naive para a derivada temporal [Ott ] na equação acima, temos, para  $\theta_n$  definido segundo a equação (5.2), a equação (5.3), ambas apresentadas a seguir:

$$\theta_n = \theta \left( t = \left( \frac{2\pi}{\omega} \right) n \right) \quad (5.2)$$

$$\theta_{n+1} - 2\theta_n + \theta_n + (1-b)(\theta_n - \theta_{n-1}) + K \sin \theta_n = (1-b)\Omega \quad (5.3)$$

Onde:

$$(1-b) = \gamma \frac{2\pi}{\omega} \quad ; \quad \Omega = \frac{2\pi}{\omega} \frac{A}{\gamma} \quad ; \quad K = \frac{2\pi}{\omega} \quad (5.4)$$

Assim, fazendo:

$$r_n = \theta_n - \theta_{n-1} + \Omega \quad (5.5)$$

Obtêm-se:

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \Omega - K \sin \theta_n + br_n \quad (5.6a)$$

$$r_{n+1} = br_n - K \sin \theta_n \quad (5.6b)$$

Analisando-se as equações (5.6 a e b), torna-se possível imaginar que o comportamento do sistema de alguma forma esteja ligado ao do Mapa de Círculo. Entretanto, elas não formam uma conexão rigorosa entre os dois modelos. Uma prova numérica foi fornecida em 1983 por Jensen, resolvendo numericamente a equação (5.1). Ele mostrou que, tomando o valor de  $\theta_n$  em intervalos múltiplos do período da força externa, para certos valores de parâmetros, obtêm-se um Mapa de Círculo unidimensional.

## CAPÍTULO 6

### CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

As conclusões que foram tiradas até este momento do trabalho dizem respeito principalmente à aplicação dos algoritmos de controle ao Mapa de Círculo. Uma vez que aplicação ao sistema do pêndulo forçado e amortecido ainda está sendo estudada, de forma a apresentar os resultados no termina da bolsa de iniciação científica ao final de julho deste ano.

Como principal conclusão do trabalho podemos dizer que a organização dos fenômenos de travamento de frequência no Mapa de Círculo Padrão através da série de Farey permite o desenvolvimento de algoritmos simples, mas que podem ser bastante eficientes no controle deste tipo de sistemas.

Do resultado dos estudos de convergência do número de rotação, chegou-se numa uma técnica alternativa de método de controle, baseada na forma característica da curva do número de iterações até que esse limite seja obtido. Algoritmos de controle que se baseiem neste conhecimento podem ser temas de trabalho futuros.

Dentre os algoritmos aqui propostos e analisados concluí-se que o de busca é bastante deficiente e que em casos práticos deve-se optar pelo uso de um dos outros dois baseados em controladores clássicos para sistemas dinâmicos contínuos.

A definição sobre qual destes dois algoritmos usar no caso do controle de um sistema dinâmico contínuo não foi possível com apenas este trabalho. Através deste estudo, é possível estimar valores de teste iniciais para os parâmetros do controlador, mas estudos mais específicos considerando principalmente a facilidade e custo de cada um dos controladores devem ser feitos antes de se fazer qualquer escolha.

De qualquer forma, o trabalho executado até o presente momento cumpriu seu objetivo de servir de base para a conclusão do trabalho final de aplicar os algoritmos de controle de forma eficiente para o sistema do pêndulo forçado e amortecido, que será a próxima etapa do projeto já em fase de andamento.

Além disso, apenas a primeira parte do trabalho já rendeu uma apresentação no IV Congresso Temático de Dinâmica, Controle e Aplicação (DINCON 2005). E o objetivo é, ao final do trabalho escrever um artigo para publicação em revista internacional da área de mecânica não-linear.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arnold, I. V. **Small denominators I: mapping the circumference into itself**. MAS Trans. Series 2,46,(1965),213

Barker, G.L. and Gollub J.P. **Chaotic Dynamics – an introduction**. 2º Edition, Cambridge. pp 184-199.

Bennett, M.; Schatz, M. F.; Rockwood, H.; Wiesenfeld, K. **Huygens' clocks**. Disponível em: <http://www.physics.gatech.edu/schatz/pubs/royclocks2.pdf>

Di Donato, P. F. A.; Macau, E. E. N. **Dinâmica caótica e travamento de frequência em mapas acoplados**. Relatório final de projeto de iniciação científica – INPE 2004

Kappraff, J. e Adamson, G.W. **A Fresh Look at Numbers** disponível em: <http://members.tripod.com/vismath4/kappraff1/>

Macau, E. E. N. **Sincronização em sistemas caóticos: fundamentos e aplicações**. Anais do 2º Congresso Temático de Dinâmica, Controle e Aplicações, SBMAC 2003, São José dos Campos – SP.

O'Connor, J.J. e Robertson, E.F. **John Farey**. Disponível em: <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/mathematicians/farey.html>

Ott, E. **Chaos in dynamical Systems**. Cambridge. cap 6, pp 145-183.