



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

INPE-13017-PRE/8294

DINÂMICA DE CONTATO: O PÊNDULO COM RESTRIÇÕES AO MOVIMENTO

Michelle Bararúá Dias*

*Bolsista EEI

Relatório Final de Projeto de Iniciação Científica (PIBIC/CNPq/INPE), orientado pelo
Dr. André Fenili

INPE
São José dos Campos
2005



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

DINÂMICA DE CONTATO: O PÊNDULO COM RESTRIÇÕES AO MOVIMENTO

**RELATÓRIO FINAL DE PROJETO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA
(PIBIC/CNPq/INPE)**

Michelle Bararuá Dias (EEI, Bolsista PIBIC/CNPq)
E-mail: mickadias@yahoo.com.br

Dr. André Fenili (DMC/INPE, Orientador)
E-mail: fenili@dem.inpe.br

Julho de 2005

ÍNDICE

Capítulo 1 – Introdução	3
Capítulo 2 – Modelagem matemática	4
2.1 – Introdução	4
2.2 – Análise do sistema I (sem restrição)	4
2.2.1 – Energia cinética e energia potencial	5
2.2.2 – Função de dissipação	5
2.2.3 – Lagrangiano	6
2.3 – Análise do sistema II (sem restrição)	7
2.3.1 – Energia cinética, energia potencial e Lagrangiano	7
2.4 – Análise do sistema dinâmico com restrição	9
2.4.1 – Multiplicadores de Lagrange e equações governantes	9
2.4.2 – Coeficiente de restituição	11
Capítulo 3 – Simulações numéricas (do sistema com restrição)	13
Capítulo 4 – Conclusões	20
Capítulo 5 – Referências Bibliográficas	21
Apêndice A – Trabalhos publicados	22

Capítulo 1

Introdução

O principal interesse no estudo de sistemas com restrição ao movimento é investigar o problema da instabilidade do contato entre os corpos, como acontece com manipuladores robóticos ao interagirem com o ambiente ao redor.

É interessante que o manipulador possua alguma flexibilidade nas juntas (ou nos elos) ou que haja alguma compliância na região do contato. A literatura sobre dinâmica de contato é vasta e abrange diversas disciplinas.

O modelo investigado neste trabalho consiste em um pêndulo cujo movimento é restringido por um anteparo. Este anteparo possui determinada rigidez e amortecimento e não possui massa. O pêndulo está conectado a uma mola torsional. O objetivo é determinar as influências causadas no comportamento das partes quando interagem. Neste caso, o pêndulo poder ser visto como um elo do manipulador robótico e o anteparo pode ser visto como o ambiente com o qual o manipulador deverá interagir. Inicialmente, não é considerado nenhum tipo de atrito.

O modelo matemático é obtido utilizando as equações de Lagrange. As equações governantes do movimento são integradas utilizando o método de Runge-Kutta de quarta ordem. As restrições ao movimento (vínculos) são inseridas por meio dos multiplicadores de Lagrange.

Apesar de ser um modelo simples, muitas informações de caráter geral podem ser obtidas deste modelo.

Capítulo 2

Modelagem Matemática

2.1 – Introdução

Seja o sistema dinâmico apresentado na Figura 1.

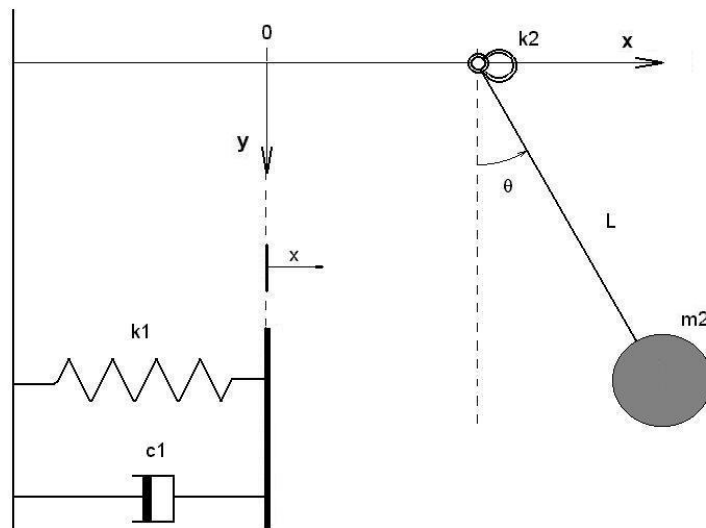


Figura 1 – Sistema dinâmico composto pelo anteparo e pelo pêndulo

O pêndulo está conectado a uma mola torsional de constante elástica k_2 . m_2 representa uma massa concentrada na extremidade da haste. A haste não possui massa. O movimento do pêndulo é restringido por um anteparo com rigidez k_1 e amortecimento c_1 e não possui massa.

Este sistema é inicialmente estudado sem qualquer tipo de interação. Os dois corpos estão em movimento, porém não há o contato entre eles. A análise é feita separadamente para cada um.

Para facilitar a análise, o sistema dinâmico é dividido em duas partes:

- sistema I: anteparo, mola e amortecedor.
- sistema II: pêndulo e mola torsional.

2.2 – Análise do sistema I (sem restrição)

2.2.1 – Energia cinética e energia potencial

Seja o sistema apresentado na Figura 2.

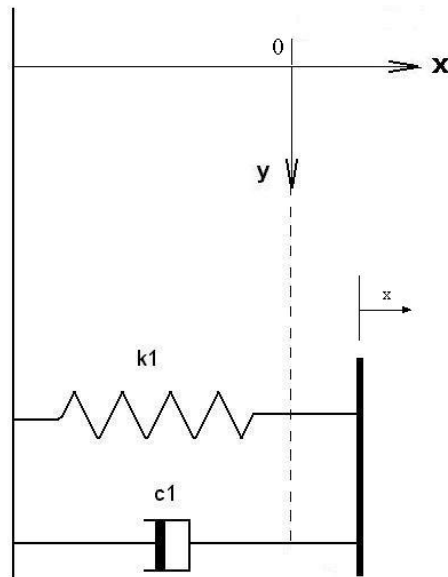


Figura 2 - Anteparo.

A energia cinética armazenada no sistema I é dada por:

$$T = 0 \quad (2.1)$$

A energia potencial armazenada na mola é dada por:

$$V = \frac{1}{2} k_1 x^2 \quad (2.2)$$

2.2.2 -Função de dissipação

A função de dissipação de Rayleigh para esse sistema é dada por:

$$R = \frac{1}{2} c_1 \dot{x} \quad (2.3)$$

2.2.3 – Lagrangiano

O Lagrangiano para o sistema I é dado por: (Craig, 1981)

$$L = T - V$$

ou:

$$L = 0 - V = -\frac{1}{2}k_1x^2 \quad (2.4)$$

Aplicando-se as equações de Lagrange, dadas por (Greenwood, 1965):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.5)$$

obtem-se:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial R}{\partial \dot{x}} \right) = 0 \quad (2.6)$$

Então, fazendo por partes:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{\partial \left(-\frac{1}{2}kx^2 \right)}{\partial \dot{x}} = 0 \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \left(\frac{\partial \left(-\frac{1}{2}kx^2 \right)}{\partial x} \right) = -kx \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{x}} = \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{2}c\dot{x}^2 \right)}{\partial \dot{x}} \right) = c\dot{x} \quad (2.9)$$

A equação governante do movimento para o sistema I é dada por:

$$c_1\dot{x} + k_1x = 0 \quad (2.10)$$

2.3 – Análise do sistema II (sem restrição)

2.3.1 – Energia cinética, energia potencial e Lagrangiano

Seja o sistema II, de acordo com a Figura 3.

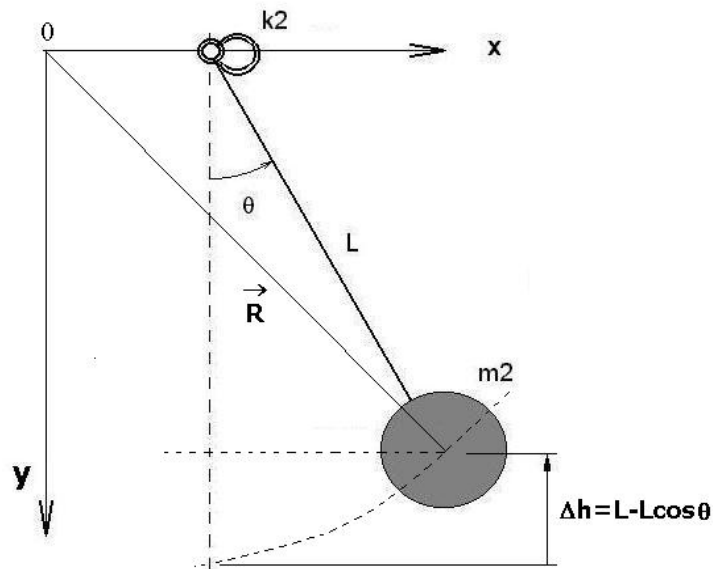


Figura 3 – Pêndulo e mola torsional

A energia cinética armazenada no sistema II é dada por:

$$T = \frac{1}{2} m_2 L^2 \dot{\theta}^2 \quad (2.11)$$

A energia potencial armazenada devido a efeitos gravitacionais e devido à mola torsional é dada por:

$$V = \frac{1}{2} k_2 \theta^2 + m_2 g L (1 - \cos \theta) \quad (2.12)$$

Seja o vetor posição dado por:

$$\vec{R} = (E + L \cos \theta) \vec{j} + (L \sin \theta) \vec{i}$$

Derivando em relação ao tempo a equação para \vec{R} , obtém-se o vetor velocidade, dado por:

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \dot{\vec{R}} = (-L \operatorname{sen} \theta \dot{\theta}) \cdot \vec{j} + (L \cos \theta \dot{\theta}) \cdot \vec{i}$$

Elevando ao quadrado, tem-se:

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m |\dot{\vec{R}}|^2$$

Substituindo $\dot{\vec{R}}$ na energia cinética, resulta:

$$|\dot{\vec{R}}|^2 = L^2 \operatorname{sen}^2 \theta \dot{\theta}^2 + L^2 \cos^2 \theta \dot{\theta}^2 = L^2 \dot{\theta}^2 (\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta)$$

ou:

$$|\dot{\vec{R}}| = L \dot{\theta} \quad (2.13)$$

O lagrangiano do sistema II é dado por:

$$L = \frac{1}{2} m_2 L^2 \dot{\theta}^2 - \left(\frac{1}{2} k_2 \theta^2 + m_2 g L (1 - \cos \theta) \right) \quad (2.14)$$

Aplicando as equações de Lagrange, tem-se:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}} \right)$$

ou, calculando por partes:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} \left(\frac{\frac{1}{2} m_2 L^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} k_2 \theta^2 - m_2 g L (1 - \cos \theta)}{\partial \dot{\theta}} \right) = m_2 L^2 \ddot{\theta} \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\frac{1}{2} m_2 L^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} k_2 \theta^2 - m_2 g L (1 - \cos \theta)}{\partial \theta} \right) = -k_2 \theta - m_2 g L \operatorname{sen} \theta \quad (2.16)$$

A equação governante do movimento para o sistema II é dada por:

$$m_2 L^2 \ddot{\theta} + k_2 \theta + m_2 g L \sin \theta = 0 \quad (2.17)$$

2.4 – Análise do sistema dinâmico com restrição

2.4.1 – Multiplicadores de Lagrange e equações governantes

Inicia-se aqui a obtenção das equações de movimento para o sistema com restrição ao movimento. O método de multiplicadores de Lagrange permite a inclusão de forças internas nas equações de Lagrange.

Os dois corpos irão agora interagir entre si. Durante um certo tempo, ambos estarão em contato. Quando a distância entre eles é zero, surge uma força de interação entre m_2 e o anteparo.

Os multiplicadores de Lagrange, λ , podem ser interpretados como as amplitudes das forças de contato. São considerados como uma nova variável para o problema.

Seja o sistema apresentado na Figura 1.

A energia cinética armazenada no anteparo é nula, portanto, a energia cinética total do sistema será dada somente pela energia cinética armazenada no pêndulo, ou seja:

$$T = \frac{1}{2} m_2 L^2 \dot{\theta}^2 \quad (2.18)$$

A energia potencial total é dada por:

$$V = -\frac{1}{2} k_1 x^2 + \frac{1}{2} k_2 \theta^2 + m_2 g L (1 - \cos \theta) \quad (2.19)$$

Introduzindo o conceito de multiplicadores de Lagrange, λ , o novo Lagrangiano será escrito como (Routh (1960)) :

$$L = \frac{1}{2} m_2 L^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} k_1 x^2 - \frac{1}{2} k_2 \theta^2 - m_2 g L (1 - \cos \theta) + \lambda (d + x - E - L \sin \theta) \quad (2.20)$$

onde o último termo está relacionado a condição da restrição.

A equação do movimento para o anteparo, quando ocorre o contato, é dada por:

$$c_1 \dot{x} + k_1 x = -\lambda \quad (2.21)$$

A equação que representa o comportamento do pêndulo, quando em contato, é dada por:

$$m_2 L^2 \ddot{\theta} + k_2 \theta + m_2 g L \sin \theta = \lambda L \cos \theta \quad (2.22)$$

Obtém-se, então, uma relação geométrica para a distância entre os corpos, conforme:

$$d - E - L \sin \theta + x = 0 \quad (2.23)$$

ou

$$d = E + L \sin \theta - x \quad (2.24)$$

Nas Equações (2.21) e (2.22), λ representa a amplitude da força de contato entre o anteparo e o pêndulo. Esta força, entretanto, não existirá sempre, ou seja, os corpos estarão em contato durante apenas um certo tempo.

A equação para o sistema da Figura 1 quando ocorre o contato pode ser obtida isolando-se λ em (2.21) e substituindo na equação (2.22), resultando assim :

$$m_2 L^2 \ddot{\theta} + c_1 \dot{x}(L \cos \theta) + k_2 \theta + k_1 x(L \cos \theta) + m_2 g L \sin \theta = 0 \quad (2.25)$$

Na Equação (2.25), tem-se duas incógnitas para apenas uma equação. Uma das variáveis deve ser eliminada. Seja esta a variável x .

Fazendo $d=0$ (contato) e isolando x na Equação (2.24) encontra-se:

$$x = L \sin \theta + E \quad (2.26)$$

Derivando a Equação (2.26) em relação ao tempo, tem-se:

$$\dot{x} = \dot{\theta} L \cos \theta \quad (2.27)$$

As Equações (2.26) e (2.27) são então substituídas na Equação (2.25).

As seguintes relações são válidas:

- **sem contato:** $d > E + L \sin \theta - x$

as equações do movimento são obtidas fazendo $\lambda = 0$ em (2.21) e (2.22):

$$c\dot{x} + kx = 0 \quad (2.28)$$

$$mL^2\ddot{\theta} + k\theta + mgL \sin \theta = 0 \quad (2.29)$$

- **contato:** $d = 0$ e $\lambda \neq 0$.

vale a relação: $x = L \sin \theta + E$.

a equação do movimento é dada por:

$$m_2L^2\ddot{\theta} + c_1\dot{x}(L \cos \theta) + k_2\theta + k_1x(L \cos \theta) + m_2gL \sin \theta = 0 \quad (2.30)$$

$$\text{onde } x = L \sin \theta + E \quad (2.31)$$

As Equações (2.28) e (2.29) mostram que ambos os corpos agem independentemente. O mesmo não acontece quando as Equações (2.30) e (2.31) são consideradas (lembrar que λ também é uma variável). Neste último caso, o pêndulo e o anteparo estão se movendo por um determinado instante de tempo como um só corpo.

2.4.2 – Coeficiente de restituição

Seja o coeficiente de restituição dado por:

$$e = \frac{v'_2 - v'_1}{v_1 - v_2} \quad (2.32)$$

onde v'_2 e v'_1 são as velocidades dos corpos após o impacto e v_1 e v_2 são as velocidades dos corpos antes do impacto.

A Equação (2.32) pode ser reescrita como:

$$(v_1 - v_2) * e = v'_2 - v'_1$$

ou

$$(v_1 - v_2) * e + v'_1 = v'_2 \quad (2.33)$$

Seja $e = 0$ (considera-se que os corpos permanecem juntos após o impacto). Assim,

$$v'_2 = v'_1 \quad (2.34)$$

Utilizando o princípio da conservação da quantidade de movimento, tem-se:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \quad (2.35)$$

Substituindo na Equação (2.35) a Equação (2.34) obtém a seguinte expressão:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_1$$

ou

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = v'_1 (m_1 + m_2)$$

ou, finalmente:

$$v'_1 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \quad (2.36)$$

Escrevendo a expressão (2.36) utilizando as variáveis dos problemas, tem-se:

$$x'_2 = \dot{\theta} r \cos \theta \quad (2.37)$$

pois $m_1 = 0$ (massa do anteparo). A Equação (2.37) deve ser utilizada para fornecer as condições iniciais para a equação para o contato (ou as Equações (2.25) a (2.27)).

Capítulo 3

Simulação numérica (do sistema com restrição)

Os valores para os parâmetros considerados nas simulações numéricas são dados na Tabela 1. Três diferentes casos são considerados, variando somente o valor da rigidez da mola do anteparo, k_1 .

Para integração numérica, o integrador numérico denominado Runge-Kutta de quarta ordem é usado. O passo de integração considerado é 0.0001s.

parâmetros	caso 1	caso 2	caso 3
k_1 (N/m)	10.00	200.00	500.00
c_1 (kg/s)	0.30	0.30	0.30
k_2 (N/m)	5.00	5.00	5.00
m_2 (kg)	8.00	8.00	8.00
L (m)	0.50	0.50	0.50
g (m/s^2)	9.81	9.81	9.81
E (m)	L/2	L/2	L/2

Tabela 1 – Parâmetros do sistema.

As Figuras 5 a 8 mostram o comportamento no tempo do deslocamento e velocidade do anteparo quando se considera o contato entre os corpos. A condição inicial para o anteparo é a sua posição de repouso. Três impactos são verificados. As Figuras 9 e 10 mostram o deslocamento angular e a velocidade angular do pêndulo considerando contato. A condição inicial do pêndulo é de 40° . A Figura 11 mostra a evolução temporal da distância, d , entre os corpos. A Figura 12 mostra o comportamento da força de reação, λ , entre os corpos. As Figuras 13 a 15 mostram a relação entre d e λ para cada um dos casos investigados.

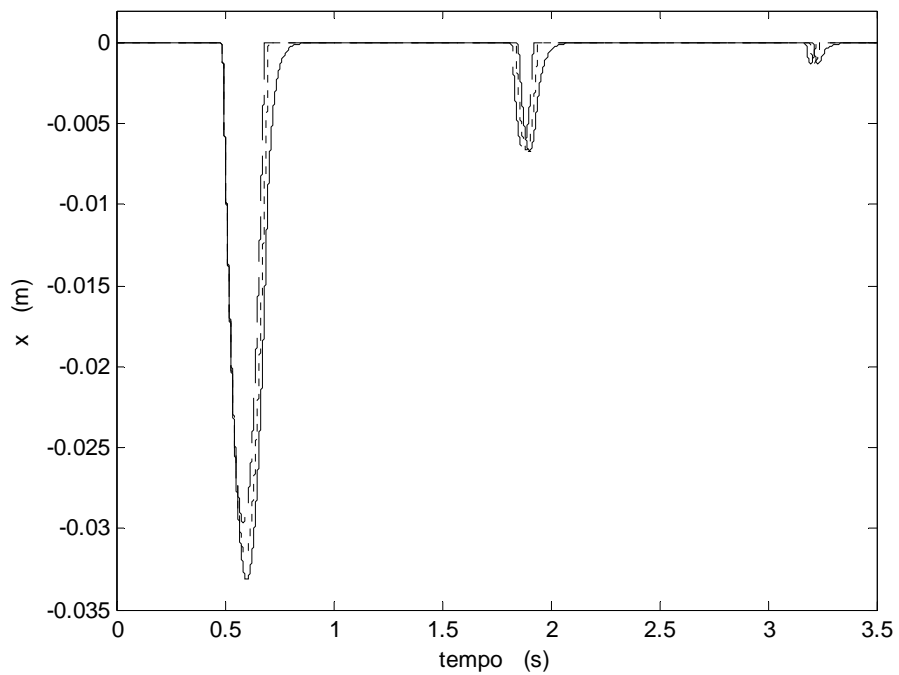


Figura 5 – Deslocamento do anteparo; caso 1 (—), caso 2 (.....) e caso 3 (-----).

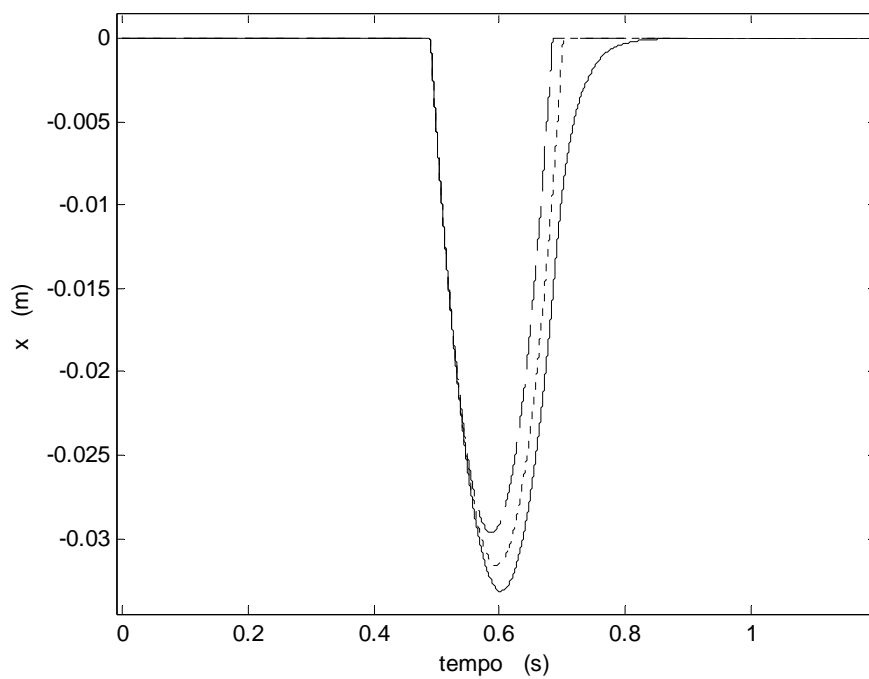


Figura 6 – Zoom na Figura 5; caso 1 (—), caso 2 (.....) e caso 3 (-----).

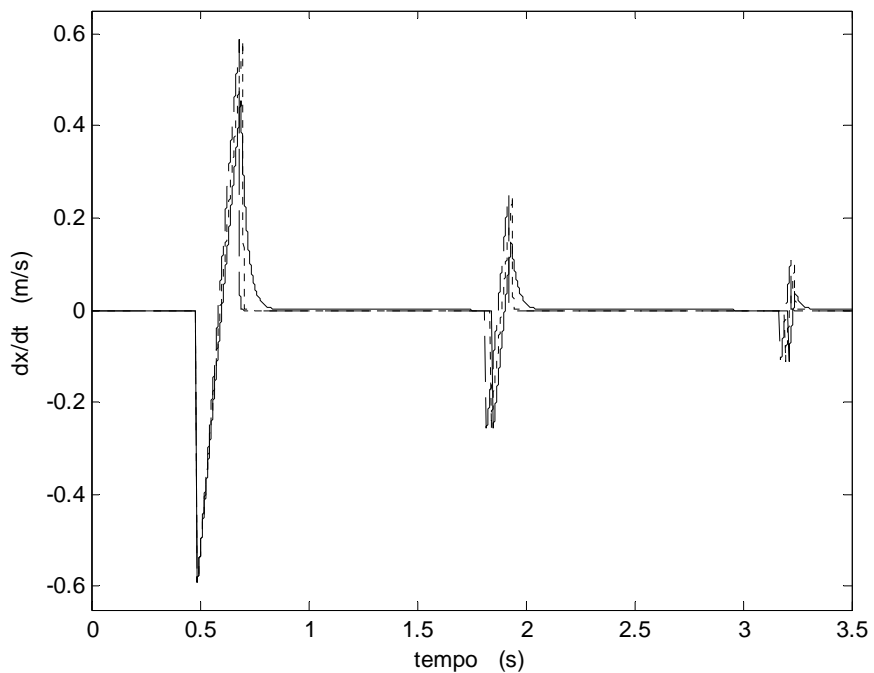


Figura 7 – Velocidade do anteparo; caso 1 (—), caso 2 (.....) e caso 3 (-----).

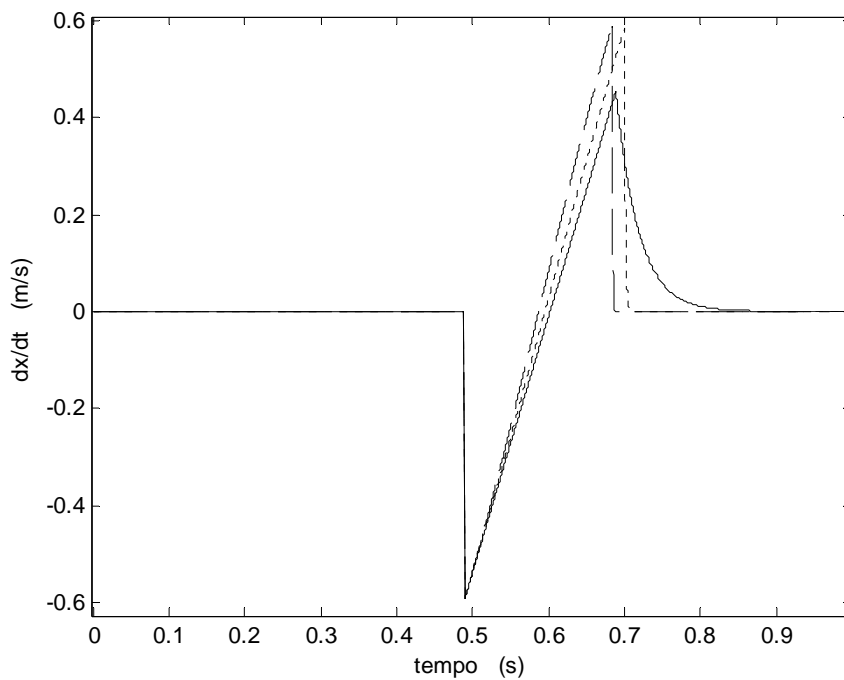


Figura 8 – Zoom na Figura 7; caso 1 (—), caso 2 (.....) e caso 3 (-----).

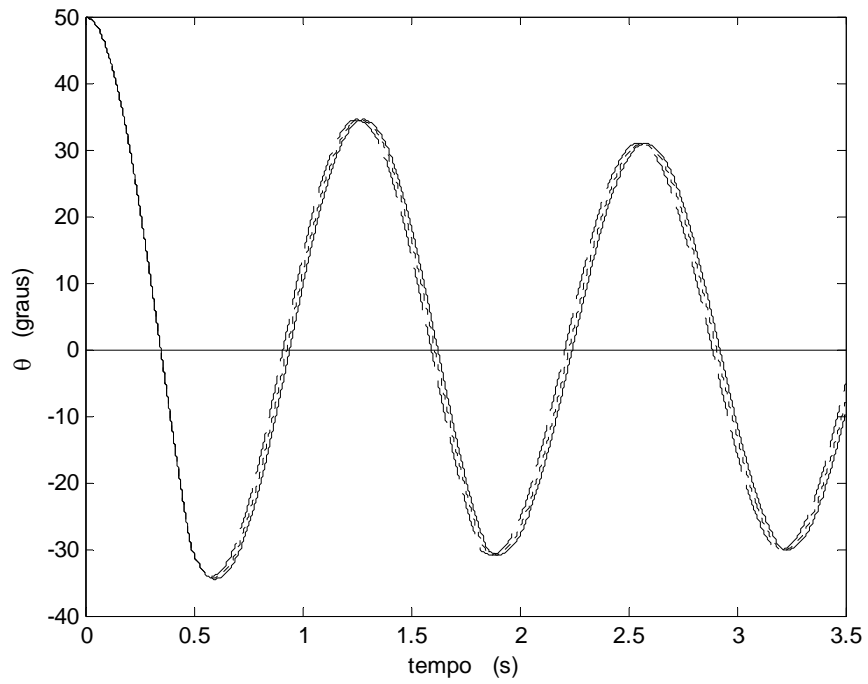


Figura 9 – Deslocamento angular do pêndulo; caso 1 (—), caso 2 (.....) e caso 3 (-----).

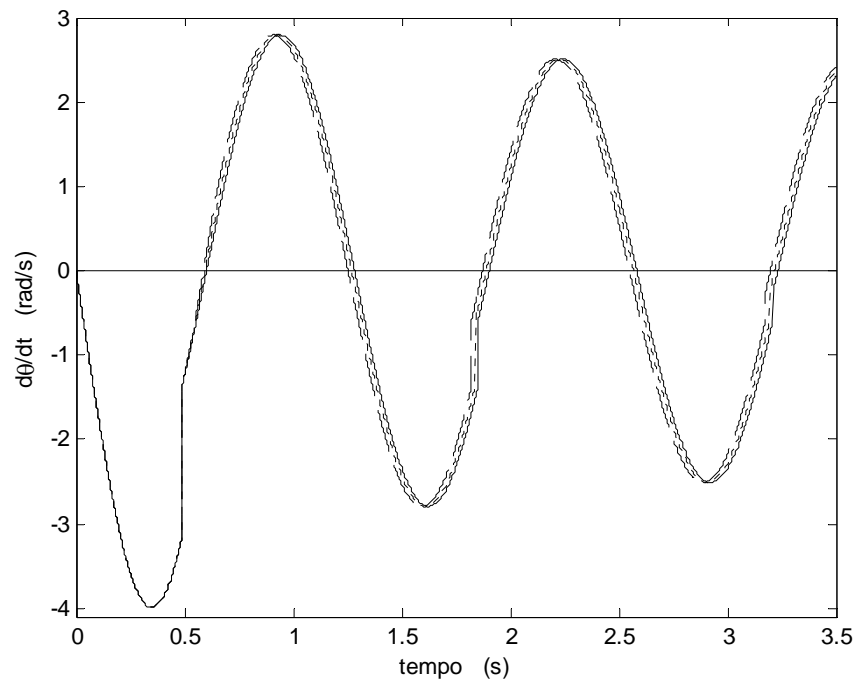


Figura 10 – Velocidade angular do pêndulo; caso 1 (—), caso 2 (.....) e caso 3 (-----).

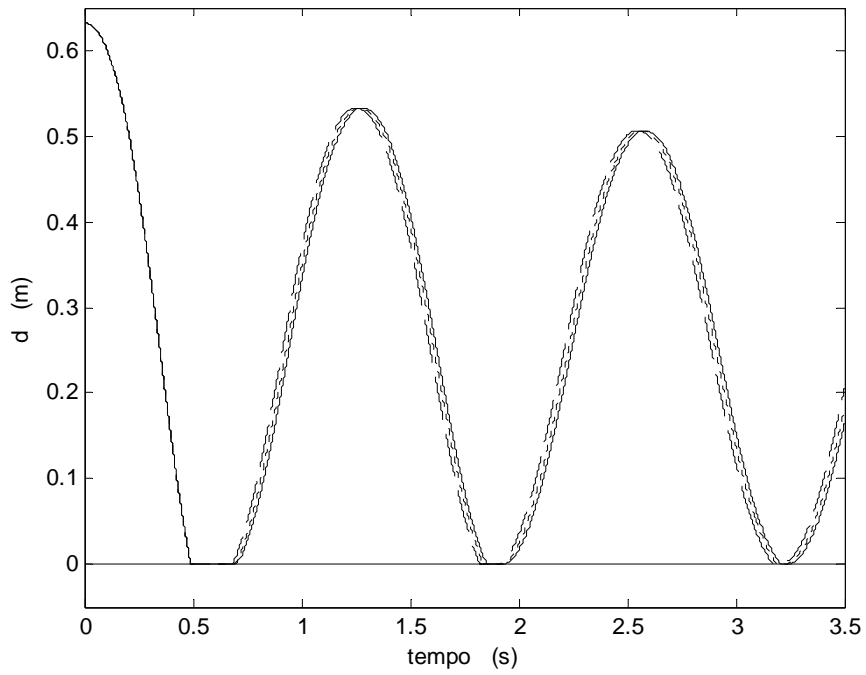


Figura 11 – Distância entre os corpos; caso 1 (—), caso 2 (.....) e caso 3 (-----).

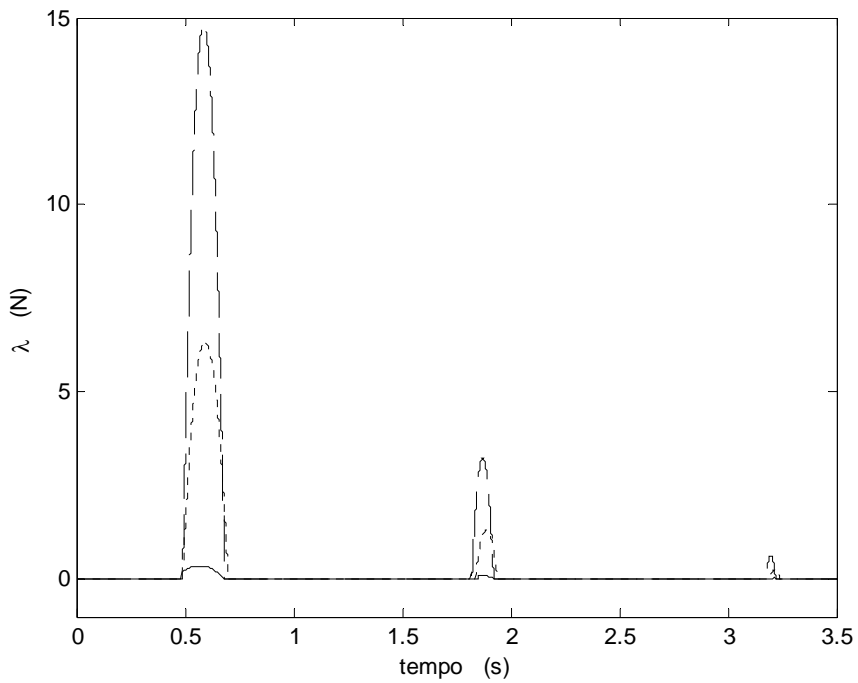


Figura 12 – Força de reação; caso 1 (—), caso 2 (.....) e caso 3 (-----).

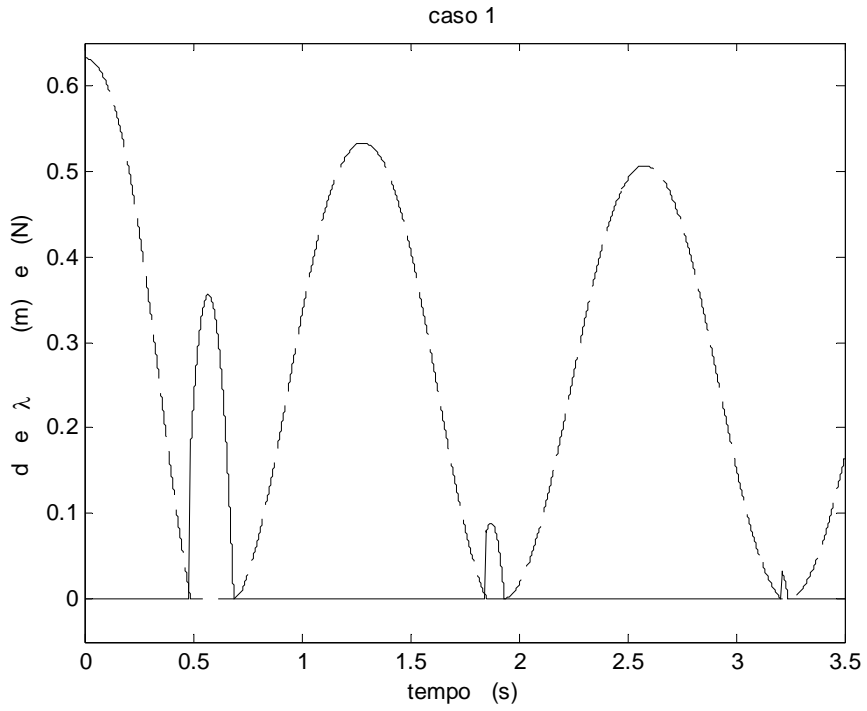


Figura 13 – Caso 1; λ (—) e d (-----).

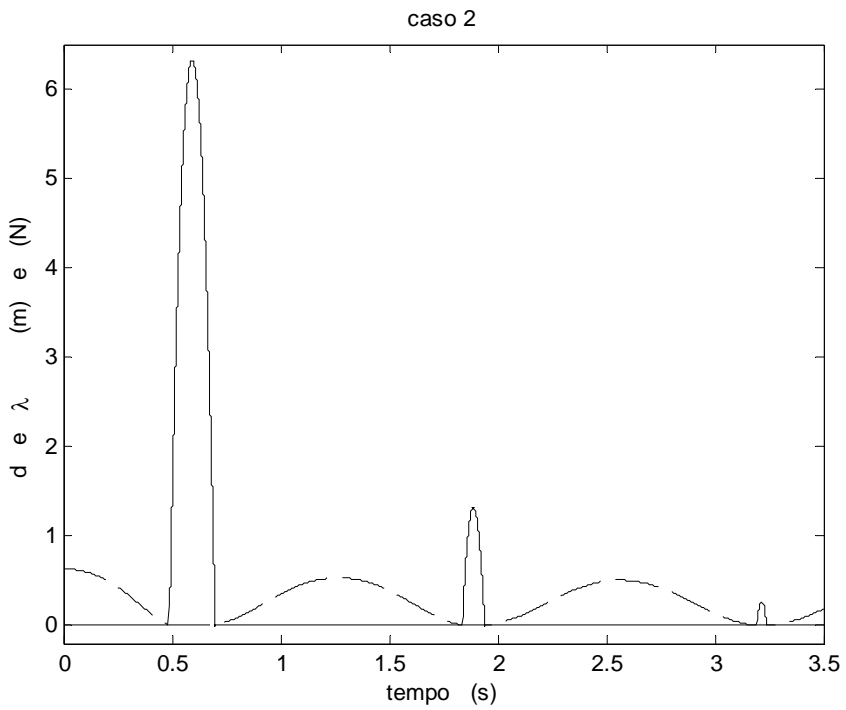


Figura 14 – Caso 2; λ (—) e d (-----)

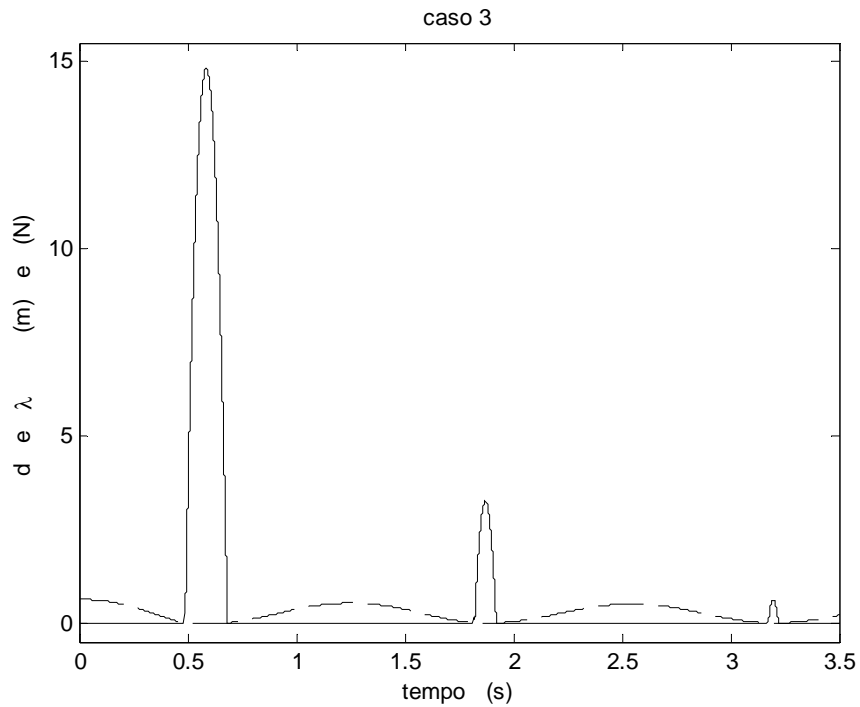


Figura 15 – Caso 3; λ (—) e d (-----).

Nota-se, como era de se esperar, que o aumento da rigidez do anteparo provoca um aumento da amplitude da força de reação. No limite, a amplitude de λ será “infinita” quando a rigidez do anteparo for “infinita”.

Percebe-se também que, quanto mais rígido for o anteparo, menor será o seu deslocamento, x . Vale lembrar que as condições iniciais são as mesmas para todos os casos analisados e, de acordo com a Tabela 1, apenas k_1 é alterado.

Singularidades são claramente observadas nas curvas de velocidade do anteparo e do pêndulo. As velocidades mudam bruscamente de valor quando ocorre o contato (impacto).

Capítulo 4

Conclusões

A idéia principal deste trabalho é que sistemas simples podem ser utilizados para estudar conceitos gerais presentes em sistemas mais complexos.

Uma vez que o sistema é composto de muitos parâmetros, foi escolhida a rigidez do anteparo como o parâmetro cuja influência no comportamento do sistema foi analisada. Como era de se esperar, quanto maior a rigidez do anteparo, maior a força de reação entre os corpos e menor o deslocamento do anteparo.

Algumas considerações foram feitas ao longo deste trabalho. Não foi considerado atrito em nenhuma das partes deste sistema e o coeficiente de restituição foi considerado igual a zero. Observa-se que uma quantidade significativa de estudos ainda pode ser desenvolvida utilizando o sistema com restrição apresentado aqui. Longe de esgotar o tema, este trabalho significa o início de uma longa investigação.

Capítulo 5

Referências Bibliográficas

Craig, R. R. Jr., "Structural Dynamics - An introduction to computer methods", Ed. John Wiley And Sons, 1981.

Fufaev, N. A., Neimark, J.I., "Dynamics of nonholonomic systems", American Mathematical Society, 1972.

Whittaker, E. T., "A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies", Cambridge University Press, 1965.

Lanczos, C., "Variational principles of mechanics", University Of Toronto Press, 1970.

Greenwood, D. T., "Principles of dynamics", 1965.

Apêndice A

Trabalhos Publicados

Dias, M. B., Fenili, A. “Estudos em dinâmica de contato: o pêndulo com restrições ao movimento”, SICINPE 2004 - Seminário de Iniciação Científica do INPE, 03 e 04 de agosto de 2004, São José dos campos, SP.

Dias, M. B., Fenili, A. “Dinâmica de contato: o pêndulo com restrições ao movimento”, SICINPE 2005 - Seminário de Iniciação Científica do INPE, 03 e 04 de agosto de 2005, São José dos campos, SP.