

## **Determinação da Esfera de Influência em Função das Condições de Encontro.**

Rosana Ap.<sup>da</sup> Nogueira de Araújo<sup>1</sup> (FEG-UNESP, Bolsista PIBIC/CNPq)  
Dr. Antônio F. Bertachini de A. Prado<sup>2</sup> (DMC/INPE)

### **RESUMO**

Em problemas envolvendo a delimitação da influência gravitacional de dois corpos sobre um terceiro corpo se faz importante a determinação de suas esferas de influência.

As esferas de influência normalmente adotadas são fixas e se baseiam em parâmetros estáticos como as massas dos corpos envolvidos e a distância entre eles. Neste trabalho foi proposto levar em consideração efeitos dinâmicos como a velocidade relativa anterior a um encontro, entre uma partícula e um planeta por exemplo, bem como parâmetros da geometria desse encontro na determinação da esfera de influência de um corpo.

Desta forma foi possível a obtenção de uma formulação matemática para o cálculo do raio de influência (a partir de que distância do planeta a partícula começa a sentir a sua influência) em função destes parâmetros, para que seja proporcionada uma porcentagem de variação de energia pré-estabelecida.

O procedimento adotado foi o da simulação numérica do problema restrito de três-corpos, onde é feito um acompanhamento da energia do problema de dois-corpos (entre os corpos que fazem o encontro). Utilizando a linguagem FORTRAN e o integrador Gauss-Radau foi redigida uma rotina para realizar as integrações numéricas. Esta rotina fornece o valor da energia do problema de dois-corpos para a partícula ao longo do período de integração quando esta faz uma grande aproximação com um outro corpo no decorrer de sua evolução orbital.

O desenvolvimento deste trabalho permitiu concluir que de fato o raio da esfera de influência de um corpo que proporciona o efeito de ganho ou de perda de energia sobre outro de massa muito inferior, está relacionado com a distância a que este passa do outro corpo e de sua velocidade.

O resultado encontrado leva à conclusão de que a relação entre esse raio de influência e a velocidade da partícula é diretamente proporcional, ou seja, quanto maior a velocidade, maior deve ser o raio da esfera de influência. Isso se deve ao fato de que a partícula de maior velocidade deverá sentir a influência do outro corpo por mais tempo para que lhe seja proporcionada a mesma porcentagem de variação de energia que ocorre para o corpo de menor velocidade.

Pretende-se futuramente, através da inclusão de outros parâmetros, obter uma função matemática, que possibilite a delimitação do raio da esfera de influência de um corpo, para diferentes velocidades de eventuais partículas que sofram uma grande aproximação com este.

<sup>1</sup> Aluna do Curso de Licenciatura em Física, FEG-UNESP. E-mail: [fis00041@feg.unesp.br](mailto:fis00041@feg.unesp.br)

<sup>2</sup> Pesquisador da Divisão de Mecânica Espacial e Controle. E-mail: [prado@dem.inpe.br](mailto:prado@dem.inpe.br)



INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

**AUTORIZAÇÃO PARA PUBLICAÇÃO**

Número  
**PIBIC-055/04**

Título

*1102*

Determinação da Esfera de Influência em Fusão das Condições de Encontro

Autor

Rosana Aparecida Nogueira de Araújo

Tradutor

Não há

Editor

Origem	Projeto	Série	No. de Páginas	No. de Fotos	No. de Mapas
			26	0	0

Tipo

RPQ  PRE  NTC  PRP  MAN  PUD  TAE

Divulgação

Externa  Interna  Reservada  Lista de Distribuição Anexa

Periódico / Evento

Seminário de Iniciação Científica do INPE - SICINPE 2004

Convênio

Autorização Preliminar

Data:    /   /   

 Coordenador do PIBIC  
 Programa Institucional de Bolsas  
 de Iniciação Científica do INPE

Revisão Técnica

Solicitada       Dispensada  
 Recebida    /   /         Devolvida    /   /   

 \_\_\_\_\_  
 Titular de Nível "A"  
 \_\_\_\_\_  
 Assinatura do Revisor

Revisão de Linguagem

Solicitada       Dispensada  
 Recebida    /   /         Devolvida    /   /   

 \_\_\_\_\_  
 Titular de Nível "A"  
 \_\_\_\_\_  
 Assinatura do Revisor

Autorização Final

Data:    /   /   

 Marcos Dias de Silva  
 Coordenador de Estudos, Desenvolvimento e Projetos Institucionais

Palavras Chave

Determinação - Esfera - Encontro



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
**INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS**

**INPE-11588-PRE/6972**

**DETERMINAÇÃO DA ESFERA DE INFLUÊNCIA EM FUNÇÃO  
DAS CONDIÇÕES DE ENCONTRO**

Rosana Aparecida Nogueira de Araújo

Relatório Final de Projeto de Iniciação Científica  
(PIBIC/CNPq/INPE)

INPE  
São José dos Campos  
2004



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

## **DETERMINAÇÃO DA ESFERA DE INFLUÊNCIA EM FUNÇÃO DAS CONDIÇÕES DE ENCONTRO.**

### **RELATÓRIO FINAL DE PROJETO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA (PIBIC/CNPq/INPE)**

**Rosana Ap.<sup>da</sup> Nogueira de Araújo (FEG-UNESP, Bolsista PIBIC/CNPq)**  
E-mail: [fis00041@feg.unesp.br](mailto:fis00041@feg.unesp.br)

**Dr. Antônio F. Bertachini de A. Prado (DMC/INPE, Orientador)**  
E-mail: [prado@dem.inpe.br](mailto:prado@dem.inpe.br)

**COLABORADOR**

**Dr. Othon Cabo Winter (FEG-UNESP)**

**Maio de 2004**

## **SUMÁRIO**

### **CAPÍTULO I – INTRODUÇÃO TEÓRICA**

- I- O problema de três corpos
- II- O problema circular restrito de três corpos

### **CAPÍTULO II – METODOLOGIA**

- I- Formulação matemática
- II- Ferramenta computacional
- III- Obtenção dos dados

### **CAPÍTULO III – RESULTADOS E ANÁLISES**

### **CAPÍTULO IV – CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS**

## INTRODUÇÃO

Em problemas envolvendo a delimitação da influência gravitacional de dois corpos sobre um terceiro corpo se faz importante a determinação de suas esferas de influência. O conceito de esfera de influência está relacionado à técnica de manobra gravitacionalmente assistida (Broucke, 1988), e pode ser descrita como, a região onde a atração gravitacional de um corpo sobre outro corpo é predominante, em relação à atração gravitacional de outros corpos.

As esferas de influência normalmente adotadas são fixas e se baseiam em parâmetros estáticos como as massas dos corpos envolvidos e a distância entre eles. É proposto neste trabalho levar em consideração efeitos dinâmicos como a velocidade relativa anterior ao encontro, bem como parâmetros da geometria do encontro, na determinação da esfera de influência de um corpo.

Desta forma pretende-se obter uma formulação matemática para o cálculo da esfera de influência em função destes parâmetros.

O procedimento adotado é o da simulação numérica do problema restrito de três-corpos, onde é feito um acompanhamento da energia do problema de dois-corpos (entre os corpos que fazem o encontro).

Utilizando a linguagem FORTRAN e o integrador Gauss-Radau foi redigida uma rotina para realizar as integrações numéricas.

Esta rotina fornece o valor da energia do problema de dois-corpos para a partícula ao longo do período de integração, além de diversos outros parâmetros que nos permitem compreender as alterações no movimento da partícula, quando esta faz uma grande aproximação com um outro corpo, no decorrer de sua evolução orbital.

## I- INTRODUÇÃO TEÓRICA.

### I. O PROBLEMA DE TRÊS CORPOS.

O problema de dois corpos que descreve a interação gravitacional entre dois pontos de massa, pode ser resolvido analiticamente e a solução é a equação geral das cônicas. No entanto, o caso particular mais simples e talvez mais importante do problema de N corpos é o caso em que  $N=3$ , referente ao problema de três corpos. Mesmo assim nem esse caso possui uma solução analítica fechada.

O problema de três corpos é separado em problema geral dos três corpos, em que é estudado o movimento das três partículas interagindo gravitacionalmente entre si, e em problema restrito de três corpos.

Existem soluções particulares conhecidas para esse caso, como, as soluções de Lagrange. O subcaso conhecido como “Problema Restrito de Três Corpos” é um dos tópicos mais investigados em Mecânica Celeste, existindo uma grande quantidade de trabalhos publicados na literatura que abordam esse assunto.

### II. O PROBLEMA CIRCULAR RESTRITO DE TRÊS CORPOS.

No problema circular restrito de três corpos, é estudado o movimento de uma partícula  $m_3$ , de massa desprezível, que sofre a ação gravitacional de dois outros corpos  $m_1$  e  $m_2$ . Os outros dois corpos têm seu movimento descrito pelo problema de dois corpos.

Como foi considerado que a partícula  $m_3$  possui massa muito pequena em relação aos outros dois corpos, podemos dizer que ela não perturba o movimento destes, por isso o problema é chamado de restrito. E recebe o nome de circular porque o corpo de massa  $m_2$  está em órbita circular ao redor do corpo principal ( $m_1$ ).

#### **Equações do movimento.**

Considere um sistema de referência inercial de coordenadas  $(\xi, \eta)$  centrado no centro de massa do sistema (ponto O), como mostra a Figura (1);

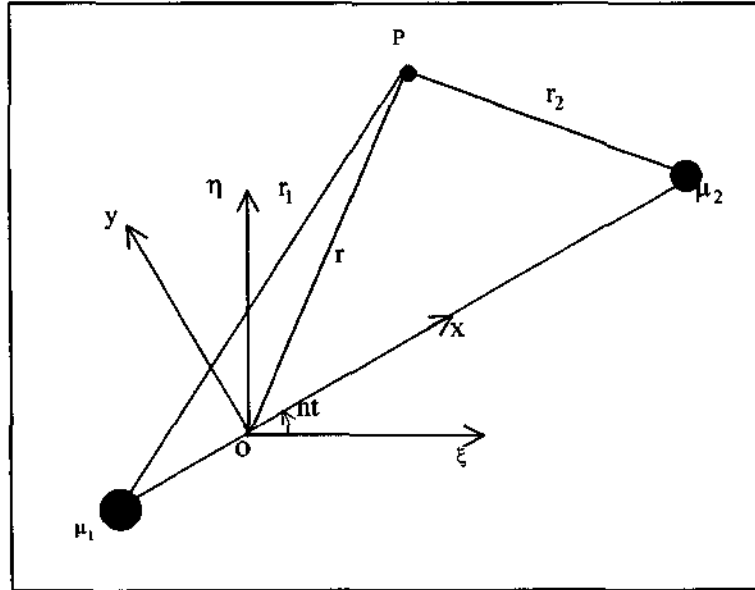


Figura 1- Esquema do problema de três corpos onde os sistemas de referência inercial  $(\xi, \eta)$  e girante  $(x, y)$  estão relacionados. A origem O está localizada no centro de massa dos dois corpos

Vamos assumir que as duas massas exercem uma força na partícula, embora a partícula não afete as duas massas.

Sendo, o eixo  $\xi$ , o eixo ao longo da linha que une  $m_1$  a  $m_2$  no tempo  $t=0$ , com o eixo  $\eta$  perpendicular a eles e ao plano orbital das duas massas, e  $(\xi_1, \eta_1)$  e  $(\xi_2, \eta_2)$  as coordenadas de  $m_1$  e  $m_2$ . Como  $m_2$  está em órbita circular ao redor de  $m_1$  será utilizado um sistema conveniente de unidades de medida de forma que a distância de separação entre eles, que é constante, seja  $a = 1$ , e que as unidades de tempo e massa sejam escolhidas de forma que  $G(m_1+m_2)=1$ . Nesse sistema de unidades a terceira Lei de Kepler leva à  $n = 1$ . Como  $m_1 > m_2$ , será definido que:

$$\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad (1)$$

de forma que:

$$\mu_1 = 1 - \mu_2 \quad \text{e} \quad \mu_2 = \mu \quad (2)$$

logo:  $\mu_1 + \mu_2 = 1$

As equações do movimento da partícula, no sistema inercial são:



$$\ddot{\xi}_3 = \mu_1 \frac{\xi_1 - \xi_3}{r_1^3} + \mu_2 \frac{\xi_2 - \xi_3}{r_2^3} \quad (3)$$

$$\ddot{\eta}_3 = \mu_1 \frac{\eta_1 - \eta_3}{r_1^3} + \mu_2 \frac{\eta_2 - \eta_3}{r_2^3}$$

onde:

$$r_1^2 = (\xi_1 - \xi_3)^2 + (\eta_1 - \eta_3)^2 \quad (4)$$

$$r_2^2 = (\xi_2 - \xi_3)^2 + (\eta_2 - \eta_3)^2$$

e  $(\xi_3, \eta_3)$  são as coordenadas da partícula. Como as massas principais estão se movendo em órbitas circulares ao redor do centro de massa, a distância entre elas é constante. Logo, essas massas movem-se com velocidade angular também constante. Portanto pode ser considerado o movimento da partícula em um sistema de referência que gira junto com as massas principais.

Considerando agora um sistema de coordenadas girantes  $(x, y)$  com origem no centro de massa. A direção do eixo  $x$  é escolhida de forma que os corpos principais estejam sempre situados nesse eixo. O eixo  $y$  é perpendicular ao eixo  $x$ . A figura 1 ilustra essa situação.

As coordenadas de  $m_1$  e  $m_2$  são  $(x_1, y_1) = (-\mu_2, 0)$  e  $(x_2, y_2) = (\mu_1, 0)$

$$\begin{aligned} r_1^2 &= (x + \mu_2)^2 + y^2 \\ r_2^2 &= (x - \mu_1)^2 + y^2 \end{aligned} \quad (5)$$

Onde  $(x, y)$  são as coordenadas da partícula em relação ao sistema girante.

Estas coordenadas relacionam-se com as coordenadas do sistema inercial através de uma rotação simples, dada pela seguinte matriz de rotação:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos nt & -\sin nt & 0 \\ \sin nt & \cos nt & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (6)$$

Se nós diferenciarmos cada componente dessa matriz duas vezes, obtemos:

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\zeta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos nt & -\sin nt & 0 \\ \sin nt & \cos nt & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} - ny \\ \dot{y} + nx \\ \dot{z} \end{pmatrix} \quad (7)$$

e:

$$\begin{pmatrix} \ddot{\xi} \\ \ddot{\eta} \\ \ddot{\zeta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos nt & -\sin nt & 0 \\ \sin nt & \cos nt & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y \\ \ddot{z} \end{pmatrix} \quad (8)$$

Dessa matriz, concluímos que :

$$\begin{aligned} (\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x)\cos(nt) - (\ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y)\sin(nt) &= \left[ \mu_1 \frac{x_1 - x}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x_2 - x}{r_2^3} \right] \cos(nt) + \left[ \frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right] y \sin(nt) \\ (\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x)\sin(nt) + (\ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y)\cos(nt) &= \left[ \mu_1 \frac{x_1 - x}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x_2 - x}{r_2^3} \right] \sin(nt) - \left[ \frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right] y \cos(nt) \end{aligned} \quad (9)$$

Multiplicando essas duas equações por  $\cos(nt)$  e  $\sin(nt)$  respectivamente e somando-as, e multiplicando a primeira por  $-\sin(nt)$  e a segunda por  $\cos(nt)$  e somando-as, obtemos as equações do movimento da partícula no sistema girante:

$$(\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x) = -\mu_1 \frac{x + \mu_2}{r_1^3} - \mu_2 \frac{x - \mu_1}{r_2^3} \quad (10)$$

$$(\ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y) = -\left( \frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right) y \quad (11)$$

Podemos escrever essas equações na forma:

$$\ddot{x} - 2n\dot{y} = \frac{\partial U}{\partial x} \quad \text{e} \quad \ddot{y} + 2n\dot{x} = \frac{\partial U}{\partial y} \quad (12)$$

onde:

$$U = \frac{n^2}{2}(x^2 + y^2) + \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2} \quad (13)$$

## II- METODOLOGIA

Como foi dito anteriormente, as diversas formulações matemáticas existentes atualmente para o cálculo da esfera de influência de um corpo, levam em consideração fatores ditos estáticos, como as massas dos corpos envolvidos e a distância entre eles.

No entanto o que se constata é que outros fatores da órbita do corpo  $m_3$ , como a sua velocidade ou a distância com que esse se aproxima do corpo  $m_2$ , entre outros, são fundamentais nesse tipo de problema, resultando em diferentes variações de energia.

Temos por objetivo obter uma função para o cálculo do raio de influência de um corpo, que proporcione uma variação de energia previamente estabelecida no corpo  $m_3$  quando este se encontra no ponto de maior aproximação com o corpo  $m_2$ , considerando inicialmente determinados parâmetros como: a sua massa, a velocidade com que a partícula se aproxima deste e o parâmetro de aproximação  $d$ .

Para isso, consideramos inicialmente a seguinte configuração;

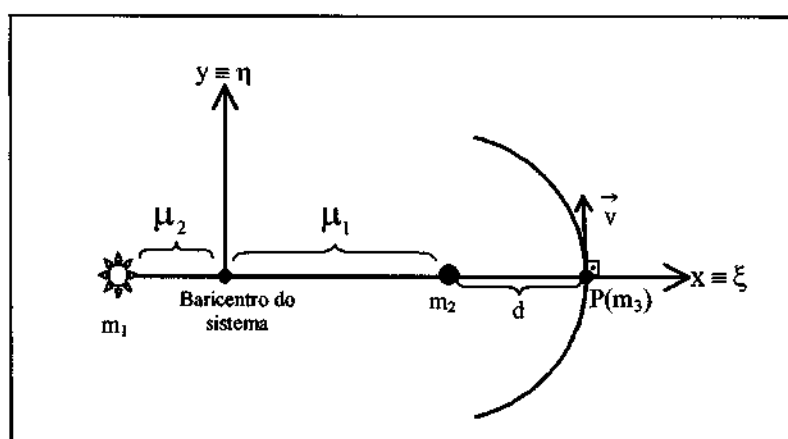


Figura 2- Condição Inicial

A partir de agora, para esse problema, iremos assumir que  $m_1$  é o Sol,  $m_2$  um planeta cuja massa será variada, e  $m_3$  uma partícula que orbita ao redor do Sol, mas que em um determinado momento sofre uma grande aproximação com o planeta tendo sua energia alterada.

Nessa figura,  $\mu_1$  e  $\mu_2$  são respectivamente, a distância entre os corpo de massa  $m_2$  e  $m_1$  ao baricentro do sistema, e  $d$  é o parâmetro de aproximação, que é a distância mínima de aproximação da partícula (P) ao corpo de massa  $m_2$ .

Observando essa condição inicial imposta propositalmente, e mostrada na Figura 2, podemos chegar a algumas conclusões.

Inicialmente o sistema girante  $(x,y)$  coincide com o sistema inercial  $(\xi,\eta)$ . Como a partícula é colocada exatamente sobre o eixo  $x$ , sua posição inicial não terá componente em  $y$ , sendo portanto dada, pela simples soma das distâncias  $\mu_1$  e  $d$ . O mesmo é válido para a obtenção da velocidade da partícula, que nessa configuração é perpendicular ao eixo  $x$ , tendo portanto somente componentes em  $y$ . Assim, as condições iniciais do problema podem ser resumidas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x &= \mu_1 + d & y &= 0 \\ \dot{x} &= 0 & \dot{y} &= v \end{aligned} \quad (14)$$

## I. FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

Para a análise do problema é necessário o cálculo das energias inicial e final da partícula, pois somente assim pode-se afirmar se um corpo esteve, está ou se já deixou a região de influência de um outro corpo.

Para o cálculo dessas energias será usada a seguinte função, bastante conhecida da mecânica celeste:

$$E = \frac{1}{2} v^2 - \frac{\mu}{r} \quad (15)$$

Para o cálculo da energia da partícula em relação ao Sol essa função fica:

$$E = \frac{1}{2} v_{ps}^2 - \frac{\mu_{sol}}{r_{sol}} \quad (16)$$

onde:

$v_{ps}$ : é a velocidade da partícula em relação ao Sol, no sistema inercial.

$r_{sol}$ : é a distância da partícula ao Sol.

Analogamente, para o cálculo da energia em relação ao planeta, temos:

$$E = \frac{1}{2} v_{pp}^2 - \frac{\mu_{plan}}{r_{plan}} \quad (17)$$

onde:

$v_{pp}$ : é a velocidade da partícula em relação ao planeta no sistema inercial.

$r_{plan}$ : é a distância da partícula ao planeta.

As velocidades da partícula em relação ao Sol ( $v_{ps}$ ) e em relação ao planeta ( $v_{pp}$ ) são velocidades relativas, e podem ser calculadas através de:

$$v_{ps} = \sqrt{(\dot{\xi} - \dot{\xi}_{plan})^2 + (\dot{\eta} - \dot{\eta}_{plan})^2}$$

$$v_{pp} = \sqrt{(\dot{\xi} - \dot{\xi}_{sol})^2 + (\dot{\eta} - \dot{\eta}_{sol})^2}$$
(18)

Como pode ser observado, são necessárias as componentes da velocidade da partícula  $(\dot{\xi}, \dot{\eta})$ , do planeta  $(\dot{\xi}_{plan}, \dot{\eta}_{plan})$ , e do Sol  $(\dot{\xi}_{sol}, \dot{\eta}_{sol})$ , no sistema inercial, que devido à configuração inicial (figura 2) são dadas no sistema girante.

A transformação dessas componentes da velocidade da partícula do sistema girante para as do sistema inercial, é possível utilizando a matriz de rotação (7), obtendo-se então:

$$\dot{\xi} = (\dot{x} - ny)\cos(nt) - (\dot{y} + nx)\sin(nt)$$

$$\dot{\eta} = (\dot{x} - ny)\sin(nt) + (\dot{y} + nx)\cos(nt)$$
(19)

Para o cálculo das velocidades do planeta e do Sol no sistema inercial, será feito o seguinte desenvolvimento geométrico e matemático.

- Para o planeta.

Na figura (3) é demonstrado como se dá a evolução orbital do planeta. No sistema inercial, ele se move com uma velocidade  $\vec{v}$  ao redor do Sol. No sistema girante ele se move em uma órbita circular em torno do baricentro do sistema, estando parado em relação ao Sol.

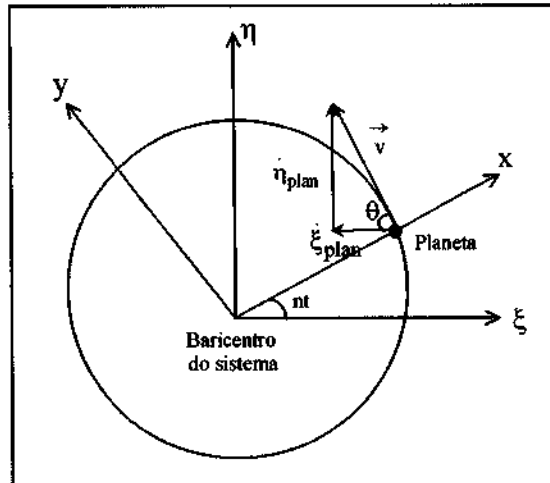


Figura 3- Representação da evolução orbital do planeta no sistema girante. Nessa figura  $\theta = 90^\circ - nt$ .

Dessa situação, obtêm-se que:

$$\dot{\xi}_{plan} = v \cos(90^\circ - nt) = v(\cos(90^\circ) \cos(nt) + \sin(90^\circ) \sin(nt))$$

e portanto:

$$\boxed{\dot{\xi}_{plan} = v \sin(nt)} \quad (20)$$

e ainda que:

$$\dot{\eta} = v \sin(90^\circ - nt) = v(\sin(90^\circ) \cos(nt) - \cos(90^\circ) \sin(nt))$$

e então:

$$\boxed{\dot{\eta}_{plan} = v \cos(nt)} \quad (21)$$

▪ Para o Sol.

A mesma figura pode ser considerada para o cálculo dos componentes da velocidade do Sol no sistema inercial, já que este assim como o planeta também possui movimento circular em relação ao baricentro do sistema. Sendo assim as componentes  $(\dot{\xi}_{sol}, \dot{\eta}_{sol})$  também serão dadas por:

$$\boxed{\dot{\xi}_{sol} = v \sin(nt)} \quad \boxed{\dot{\eta}_{plan} = v \cos(nt)} \quad (22)$$

No sistema girante, a velocidade do Sol e do planeta é nula (eles estão sobre o mesmo eixo (x), estando portanto parado um em relação ao outro).

No sistema inercial, eles movem-se com uma velocidade linear dada por:

$$v = \omega r \quad (23)$$

em termos orbitais:  $\omega = n$ , e  $r$  é a distância que o corpo se encontra do ponto de rotação, sendo portanto  $r = \mu_1$  para o planeta, e  $r = -\mu_2$  para o sol. Substituindo esses valores em (20), (21) e nas equações (22), tem-se que:

$$v = n\mu_1 \quad (\text{planeta}) \quad (24)$$

$$v = n\mu_2 \quad (\text{Sol})$$

Substituindo (22) em (18, 19 e 20), chegamos em:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_{\text{plan}} &= \mu_1 \text{sen}(nt) \\ \dot{\eta}_{\text{plan}} &= \mu_1 \text{cos}(nt) \\ \dot{\xi}_{\text{sol}} &= -\mu_2 \text{sen}(nt) \\ \dot{\eta}_{\text{sol}} &= -\mu_2 \text{cos}(nt) \end{aligned} \quad (25)$$

Com o cálculo dessas componentes da velocidade do planeta e do Sol no sistema inercial, é possível voltar em (18) e obter as velocidades relativas da partícula em relação ao planeta e ao Sol ( $v_{ps}$  e  $v_{pp}$ ), e por fim calcular a energia da partícula em relação ao planeta ( $E_{\text{plan}}$ ) e em relação ao Sol ( $E_{\text{sol}}$ ).

## II. FERRAMENTA COMPUTACIONAL

Como estamos interessados na variação de energia sofrida por uma partícula quando ela eventualmente sofre uma grande aproximação com um corpo bastante massivo, como um planeta, iremos observar como varia a sua energia em relação ao Sol, isto porque o corpo tem uma órbita ao redor do Sol, que dependendo da variação de energia proporcionada por um encontro próximo será alterada.

Se o corpo não sente a influência do planeta, a sua órbita permanece a mesma, e portanto não haverá variação de energia em relação ao sol.

Então, utilizando a linguagem FORTRAN e o integrador Gauss-Radau foi redigida uma rotina para realizar integrações numéricas que forneça o valor da energia do problema de dois-corpos para a partícula ao longo do período de integração.

Neste programa entramos com as condições iniciais dadas por (14), e variamos o parâmetro de aproximação  $d$  e a velocidade da partícula  $v$ .

O método usado consiste em fixar uma velocidade e variar o  $d$  até um valor para o qual a energia varie uma porcentagem pré-estabelecida. Quando isso acontecer, é possível obter através dos dados gerados na integração, o instante em que a energia deixou de variar, ficando daí em diante constante com um valor acrescido da porcentagem.

É possível também obter a distância  $r_2$  e a velocidade da partícula exatamente nesse instante em que a energia deixa de variar. Como esse valor de  $r_2$  corresponde exatamente ao ponto em que  $m_3$  deixa de sentir a influência do corpo  $m_2$ , iremos assumir que esse valor corresponde ao limite do raio de influência do corpo  $m_2$  como mostra a figura 4.

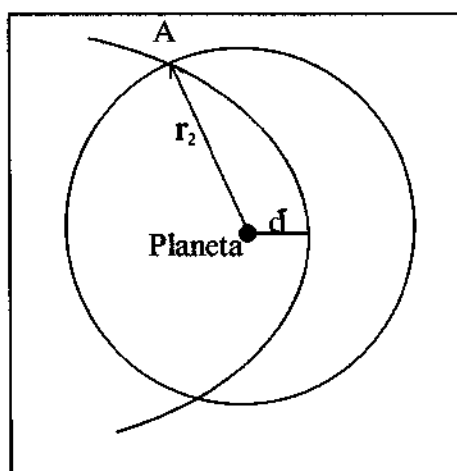


Figura 4- No ponto A a partícula está a uma distância  $r_2$  do planeta. A partir desse ponto a sua energia passa a ser constante. Por isso esse valor de  $r_2$  passa a ser considerado o limite do raio de influência do planeta

Construindo um gráfico com vários valores desse raio de influência em função da velocidade nesse ponto, é possível observar o seu comportamento, possibilitando a posterior formulação matemática desejada, que fornecerá o raio de influência em função da velocidade da partícula.



É possível também obter vários dados como as componentes  $x$  e  $y$ ,  $\xi$  e  $\eta$  que permitem observar como a trajetória da partícula evolui ao longo da integração.

### III. OBTENÇÃO DOS DADOS

Após a integração é criado um arquivo que mostra como as variáveis  $x$ ,  $y$ ,  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $E_{\text{plan}}$ ,  $E_{\text{sol}}$ ,  $v$ ,  $r_2$ , variam com o tempo.

Além disso é feito também o cálculo da razão ( $\sigma$ ) entre a energia da partícula em relação ao Sol no ponto de maior aproximação (chamada  $E_{\text{inicial}}$ ) e da energia da partícula em relação ao Sol no ponto em que a partícula deixa de sentir a influência do planeta.

Foram estabelecidos dois parâmetros que determinam se a partícula está ou não sob a influência do planeta. Em um primeiro caso é considerado que a partícula está sob a influência do planeta se a variação de sua energia for de 1% (e portanto a razão  $\sigma = E_{\text{INICIAL}} / E_{\text{FINAL}} = 0.9900$ ), e num outro caso se a variação for de 10% (e portanto a razão  $\sigma = E_{\text{INICIAL}} / E_{\text{FINAL}} = 0.9000$ ).

A seguir, na Tabela (1) é demonstrado como os dados são organizados após a integração, como é feita a seleção de  $r_2$  e da velocidade correspondente para esse ponto.

Ficou definida uma precisão para a variação de quatro casas decimais. Acompanhando na tabela, a coluna “variação” é possível perceber quando a precisão passou a ser menor do que a estipulada. Nesse ponto assume-se a partícula deixou de sentir a presença do planeta, e obtêm-se na mesma linha de dados qual o  $r_2$  para o qual isso aconteceu e qual a velocidade que a partícula possuía nesse momento. Esses são os valores que serão usados nos gráficos de  $r_2$  pela velocidade  $v$ .

É importante perceber também que após esse ponto, a energia da partícula em relação ao Sol permaneceu constante (dentro do limite de quatro casas de precisão), o que também pode ser percebido nos gráficos que seguem após a Tabela (1).

Neste exemplo apresentado na Tabela (1) a massa do corpo  $m_2$  foi assumida como sendo  $1,0 \times 10^{-6}$ , a velocidade inicial da partícula ( $v$ ) fixada foi de 0,130.

Após vários testes, o valor do parâmetro de aproximação  $d$  (1%), que é a distância para a qual a variação de energia que a partícula sofrerá após o encontro será de 1%, foi de 0,00236.

A linha destacada na tabela fornece todos os valores das variáveis que caracterizam a órbita da partícula tanto no sistema girante, quanto no sistema inercial.

Tabela (1): Para  $m_2 = 1,0 \times 10^{-6}$ ,  $v = 0,130$ ,  $d = 0,00236$ , e variação de energia proporcionada pelo encontro = 1%

Tempo	x	y	$E_{plan}$	$E_{sol}$	$\xi$	$\eta$	Velocidade (v)	r2	variação
0	1,0023570	0	0,0083359	-0,3565272	1,0023570	0	0,1300000	0,0023600	1,0000000
0,010000	1,0023620	0,0012985	0,0085654	-0,3569837	1,0022989	0,0113219	0,1295913	0,0026980	0,9987212
0,020000	1,0023815	0,0025909	0,0092245	-0,3577289	1,0021292	0,0226366	0,1289222	0,0035211	0,9966409
0,030000	1,0024217	0,0038767	0,0102850	-0,3582906	1,0018543	0,0339431	0,1284172	0,0045726	0,9950785
0,040000	1,0024856	0,0051575	0,0117402	-0,3586697	1,0014775	0,0452421	0,1280775	0,0057265	0,9940267
0,050000	1,0025745	0,0064339	0,0135890	-0,3589308	1,0010000	0,0565337	0,1278461	0,0069310	0,9933037
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1,200000	1,1649023	0,0194218	1,5733626	-0,3600915	0,4040096	1,0927721	0,3001125	0,1660451	0,9901018
1,210000	1,1672303	0,0175019	1,5846005	-0,3600916	0,3956799	1,0982579	0,3033931	0,1681466	0,9901015
1,220000	1,1695627	0,0155360	1,5956042	-0,3600917	0,3873254	1,1036745	0,3066877	0,1702760	0,9901011
1,230000	1,1718993	0,0135241	1,6063715	-0,3600919	0,3789466	1,1090222	0,3099958	0,1724335	0,9901008
1,240000	1,1742395	0,0114659	1,6169001	-0,3600920	0,3705444	1,1143010	0,3133169	0,1746193	0,9901005
1,250000	1,1765830	0,0093613	1,6271881	-0,3600921	0,3621192	1,1195110	0,3166506	0,1768340	0,9901002
1,260000	1,1789294	0,0072102	1,6372335	-0,3600922	0,3536718	1,1246522	0,3199964	0,1790776	0,9900998
1,270000	1,1812782	0,0050123	1,6470343	-0,3600923	0,3452028	1,1297249	0,3233539	0,1813505	0,9900997
1,280000	1,1836290	0,0027677	1,6565889	-0,3600923	0,3367129	1,1347289	0,3267225	0,1836529	0,9900995
1,290000	1,1859815	4,76126E-4	1,6658955	-0,3600924	0,3282027	1,1396646	0,3301020	0,1859851	0,9900992
1,300000	1,1883352	-0,0018624	1,6749525	-0,3600925	0,3196728	1,1445319	0,3334918	0,1883474	0,9900990
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
4,950000	-0,5196947	-1,6949645	0,7993670	-0,3600923	-1,7696677	0,1061297	1,1345297	2,2764814	0,9900997
4,960000	-0,5305820	-1,6917693	0,8087469	-0,3600923	-1,7702111	0,0997663	1,1347515	2,2813933	0,9900997
4,970000	-0,5414480	-1,6884955	0,8181042	-0,3600923	-1,7707228	0,0934011	1,1349620	2,2862786	0,9900997
4,980000	-0,5522923	-1,6851431	0,8274370	-0,3600923	-1,7712027	0,0870342	1,1351613	2,2911371	0,9900996
4,990000	-0,5631140	-1,6817124	0,8367436	-0,3600923	-1,7716509	0,0806657	1,1353491	2,2959688	0,9900996
5,000000	-0,5739126	-1,6782034	0,8460218	-0,3600923	-1,7720673	0,0742958	1,1355257	2,3007734	0,9900996

Esses dados possibilitam a construção de gráficos que além de mostrar como a órbita da partícula evolui em ambos os sistemas, também ilustram que de fato, após determinado ponto, a partícula deixou de ser influenciada pelo planeta.

Segue os gráficos da energia da partícula em relação ao Sol pelo tempo ( $E_{\text{sol}}$  x tempo), dessa mesma energia pela distância  $r_2$ , das trajetórias da partícula nos sistemas inercial e girante respectivamente e da variação da energia da partícula em relação ao planeta também pelo tempo, para a situação exemplificada na tabela anterior.

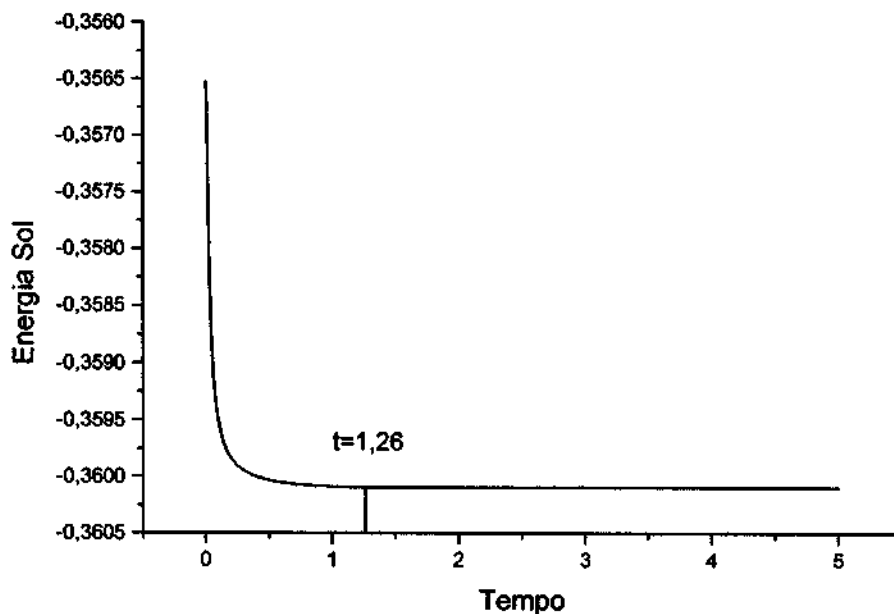


Figura 5- Energia da partícula (Tabela 1) em relação ao Sol (Energia Sol) em função do tempo. A partir de  $t=1,26$  essa energia passa a ser constante dentro da precisão considerada, o que indica que o planeta não mais exerce influência significativa.

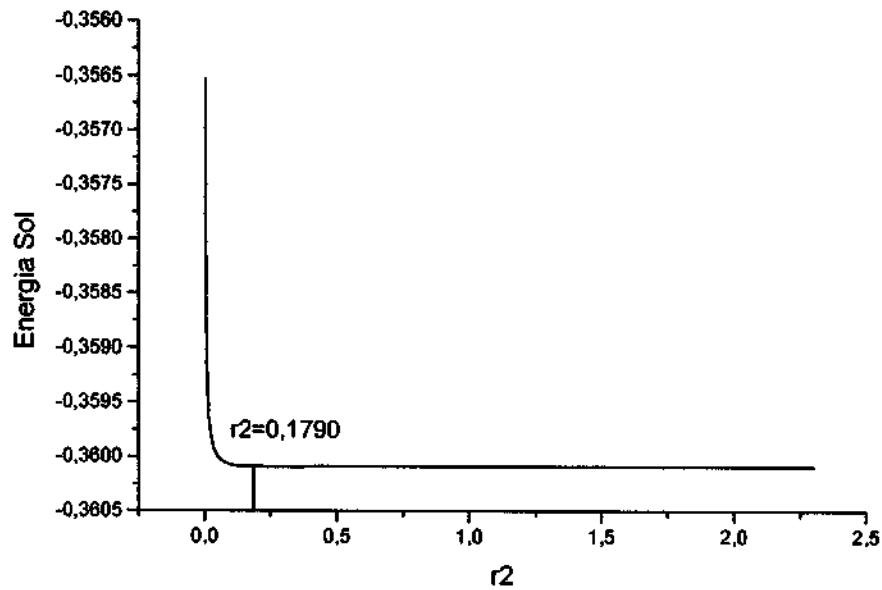


Figura 6- Variação da energia da partícula (Tabela 1) em relação ao Sol em função da distância da partícula ao planeta.

Após o ponto  $r_2 = 0,1790$  que é a distância da partícula ao planeta no instante  $t = 1,26$  (gráfico 1) a energia passa a ser constante ao longo da órbita da partícula, indicando que o planeta deixou de influenciá-la significativamente

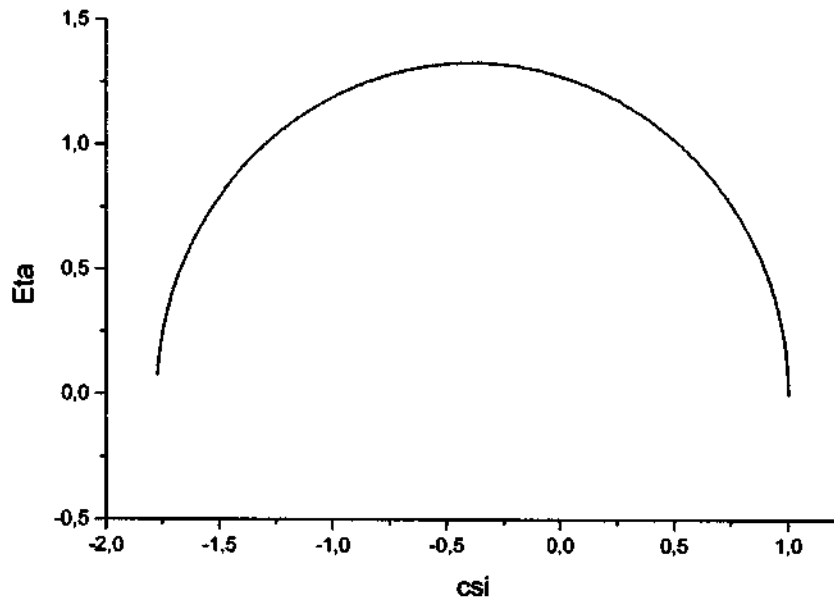


Figura 7- Trajetória da partícula (Tabela 1) no sistema inercial para aproximadamente metade do seu período orbital.

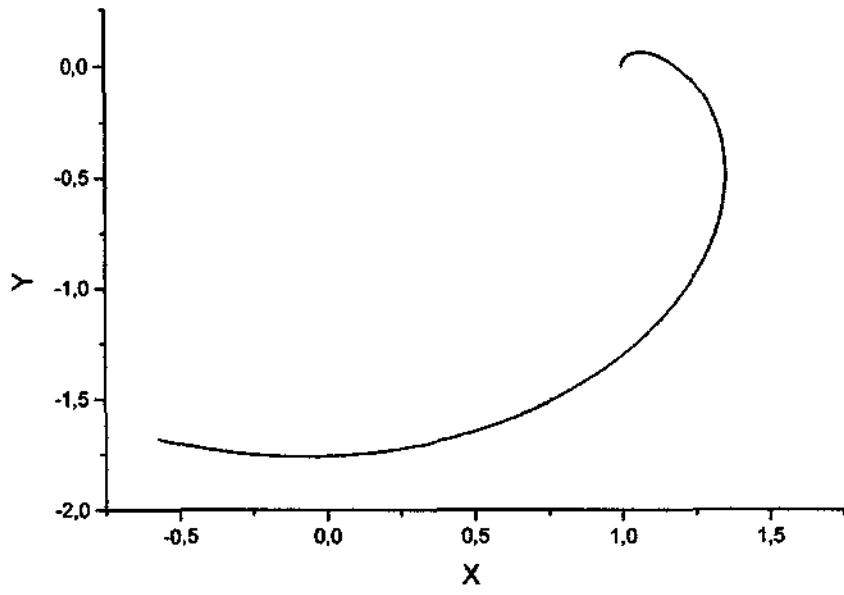


Figura 8- Trajetória da partícula (Tabela 1) no sistema girante

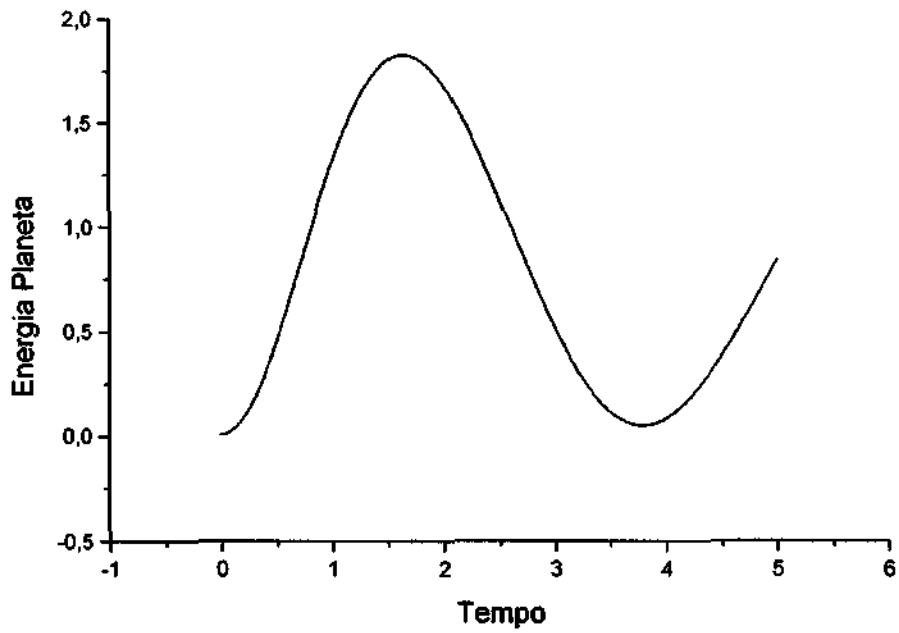


Figura 9- Energia da partícula (Tabela 1) em relação ao planeta.

### III- RESULTADOS

Utilizando o procedimento descrito acima, foram feitas inúmeras simulações com o objetivo de analisar qual o comportamento do raio de influência de um planeta para partículas com diferentes velocidades. Essas simulações foram feitas, considerando três diferentes massas para o planeta, com o qual a partícula poderia fazer um encontro próximo e para variações da energia da partícula em relação ao Sol da ordem de 1% e 10 %.

Cada um desses pontos foram obtidos após inúmeras tentativas, já que o procedimento consiste em fixar uma massa para o planeta e uma velocidade para uma partícula. Para essa situação foram testados vários valores para “d” até que fosse encontrado um valor que proporcionasse a porcentagem de variação de energia desejada. Quando esse ponto é encontrado, é possível através da análise dos dados da integração obter o exato ponto em que a partícula deixou de sentir a influência do corpo dentro de uma precisão determinada, e obter a sua posição ( $r_2$ ) e sua velocidade nesse ponto (mais detalhes no capítulo II, item III- obtenção dos dados)

Os resultados dessas simulações se encontram nas Tabelas (2), (3), (4), bem como os gráficos e a equação matemática que descrevem o seu comportamento.

**Tabela 2- para massa  $m_2 = 1,0 \times 10^6$**

r (1%)	v (1%)	r (10%)	v (10%)
0,0829572	0,0455487	0,0326828	0,0235725
0,0927672	0,0507020	0,0430654	0,0287671
0,1014904	0,0553094	0,0520563	0,0338262
0,1102501	0,0599569	0,0600389	0,0385696
0,1237160	0,0671447	0,0659152	0,0426057
0,1067201	0,0580227	0,0890829	0,0520788
0,1128038	0,0612132	0,0805251	0,0510688
0,1143908	0,0618445	0,0910065	0,0563287
0,1545392	0,0836868	0,1076595	0,0639934
0,1440838	0,0780059	0,0981926	0,0615648
0,1393294	0,0751799	0,1092539	0,0670480
0,1380920	0,0740250	0,1161219	0,0707955
0,1417230	0,0756261	0,1181426	0,0723017
0,1944980	0,1053105	0,1505005	0,0873674
0,1485855	0,0970194	0,1748975	0,0991943
0,1898349	0,1025535	0,1254651	0,0758029
0,1504230	0,0768339	0,1401550	0,0836386
0,3199964	0,1790776	0,1443810	0,0855823
0,1789933	0,0946591	0,1585349	0,0930597
0,1642978	0,0821653	0,1912186	0,1097845
0,1969524	0,1045906	0,1692276	0,0982128
0,2406085	0,1300902	0,1686743	0,0970832
0,1974229	0,1028246	0,1666227	0,0942877
0,1997716	0,1031147	0,1761650	0,0994739
0,1945846	0,0969952	0,1755815	0,0970733
0,2104737	0,1080211	0,1754524	0,0941422
0,3314811	0,1812855	0,2254775	0,1273659
0,2109344	0,1042348	0,2000730	0,1098213
0,2554942	0,1357465	0,3303033	0,1838463

0,3017504	0,1633177	0,2094910	0,1128217
0,2311166	0,1148906	0,2043510	0,1001567
0,2311121	0,1122221	0,2254796	0,1151358
0,2305108	0,1041037	0,2670497	0,1448830
0,2488962	0,1174106	0,3615074	0,2004893
0,2567109	0,1185050	0,3644703	0,2015393
0,3030779	0,1557145	0,2594385	0,1150642
0,2861922	0,1360834	0,4662167	0,2596212
0,3004233	0,1441030	0,3463523	0,1848372
0,3323402	0,1678292	0,2957243	0,1285978
0,3739738	0,1961378	0,4600826	0,2534841
0,3261243	0,1501325	0,4461255	0,2417704
0,3353815	0,1526099	0,4480929	0,2349240
0,3857186	0,1907656	0,5859298	0,3226941
0,5677082	0,3119538	0,9597130	0,5799350
0,5626895	0,3057207	0,3676304	0,1892031
0,4335387	0,2305156	0,7541722	0,4425820
0,5634240	0,3114552	0,8152104	0,4862421
0,4150723	0,2067464	0,6928531	0,3933427
0,5923742	0,3266579	0,5609961	0,3047137
		0,5548746	0,2983045

Os pontos da Tabela (2) fornecem os gráficos a seguir, quando a porcentagem de variação de energia estabelecida sofrida pela partícula foi de 1% e de 10%.

Aproximando esses pontos por uma reta, foi feito então o ajuste linear que forneceu a função (26) para 1% e (27) para 10%.



**Para variação de 1%:**

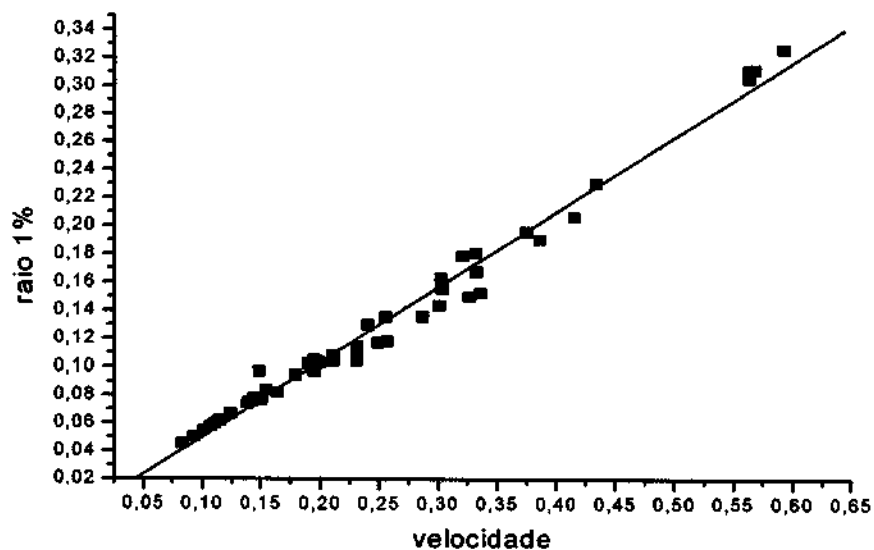


Figura 10- Gráfico do raio de influência pela velocidade da partícula, para variação de 1%

Que fornece a função do raio de influência em função da velocidade:

$$R = (0,53362 \pm 0,01011)v + (-0,00318 \pm 0,00285)$$

(26)

**Para variação de 10 % :**

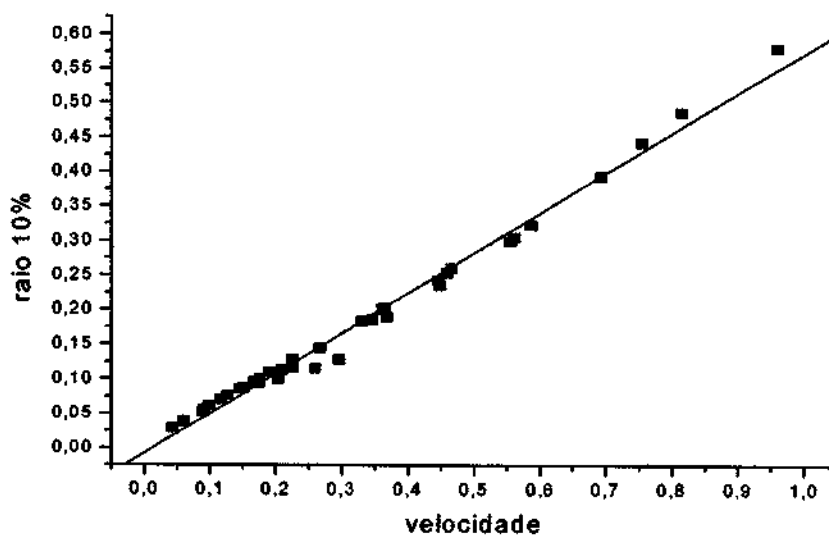


Figura 11- Gráfico do raio de influência pela velocidade da partícula, para variação de 10%

Que fornece a função do raio de influência em função da velocidade:

$$R = (0,58003 \pm 0,00947)v + (-0,00761 \pm 0,00365) \quad (27)$$

*Tabela 3- para massa  $m_z = 1,0 \times 10^5$*

r (1%)	v (1%)	r (10%)	v (10%)
0,0640200	0,1092000	0,0353800	0,0541500
0,0756500	0,1316000	0,0456700	0,0741700
0,0879400	0,1548000	0,0579500	0,0986200
0,1142000	0,2012000	0,0691200	0,1196000
0,1116000	0,1988000	0,0810500	0,1420000
0,1294000	0,2305000	0,0930400	0,1644000
0,1490000	0,2646000	0,1049000	0,1863000
0,1683000	0,2976000	0,1299000	0,2329000
0,1795000	0,3175000	0,1366000	0,2447000
0,1762000	0,3145000	0,1625000	0,2904000
0,1969000	0,3493000	0,1528000	0,2735000
0,2001000	0,3564000	0,1706000	0,3058000
0,2222000	0,3932000	0,1895000	0,3391000
0,2831000	0,4853000	0,1823000	0,3268000
0,2861000	0,4931000	0,2357000	0,4171000
0,2445000	0,4338000	0,2165000	0,3873000
0,2495000	0,4433000	0,2444000	0,4346000
0,3405000	0,5789000	0,2474000	0,4410000
0,3138000	0,5448000	0,2439000	0,4363000
0,3577000	0,6095000	0,2760000	0,4901000
0,4482000	0,7299000	0,3044000	0,5362000
0,4460000	0,7323000	0,3997000	0,6720000
0,3885000	0,6611000	0,2938000	0,5231000
0,4138000	0,6984000	0,4030000	0,6855000
		0,3205000	0,5688000
		0,3544000	0,6229000

0,4431000	0,7395000	0,4664000	0,7811000
0,0402700	0,0619700	0,4903000	0,8159000
0,0521100	0,0859500	0,4029000	0,7017000
		0,4650000	0,7915000
		0,5180000	0,8646000
		0,5402000	0,8970000

Os pontos da Tabela (3) fornecem os gráficos a seguir, quando a porcentagem de variação de energia estabelecida sofrida pela partícula foi de 1% e de 10%.

Aproximando esses pontos por uma reta, foi feito então o ajuste linear que forneceu a função (28) para 1% e (29) para 10%.

Para variação de 1%:

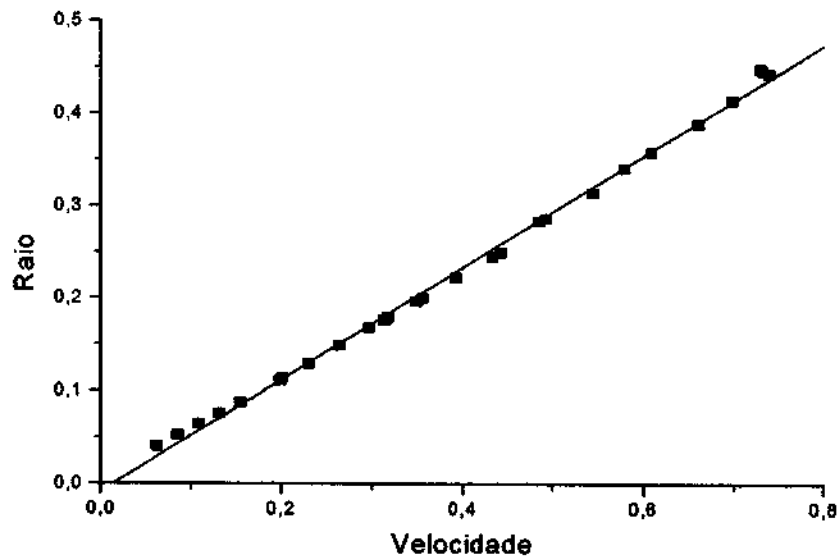


Figura 12- Gráfico do raio de influência pela velocidade da partícula, para variação de 1%

Que fornece a função do raio de influência em função da velocidade:

$$R = (0,60346 \pm 0,00615)v + (-0,00833 \pm 0,00274) \quad (28)$$

Para variação de 10%:

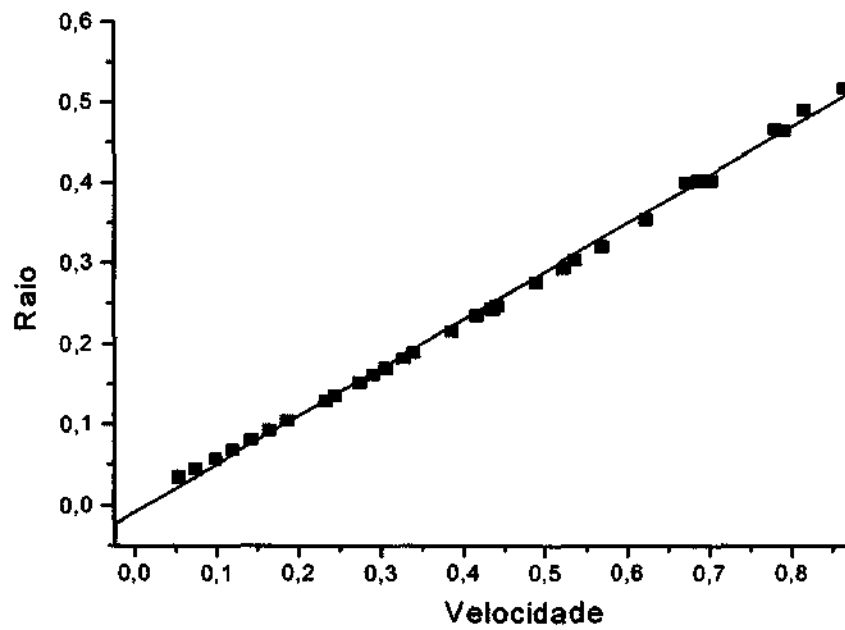


Figura 13- Gráfico do raio de influência pela velocidade da partícula, para variação de 10%

Que fornece a função do raio de influência em função da velocidade:

$$R = (0,59736 \pm 0,00536)v + (-0,00878 \pm 0,00268)$$

(29)

**Tabela 4- para massa  $m_2 = 1,0 \times 10^{-4}$**

r (1%)	v (1%)	r (10%)	v (10%)
		0,5993337	0,3042961
		0,9932683	0,3982822
2,0932651	1,0025231	1,0904404	0,5054489
2,3435513	1,1963967	1,3596717	0,5975977
2,5886322	1,3843134	1,5839032	0,6966769
2,8318327	1,5722027	1,6545871	0,8057615
3,0144151	1,7432597	1,9167883	0,9136363
3,0499093	1,8569972	1,9580542	1,0170007
3,1304935	1,9829014	2,2214104	1,1369164
3,4255392	2,2067503	2,2511523	1,2325512
3,8220794	2,5200815	2,4118610	1,2556183
1,9314240	0,8990122	2,3820619	1,3393350
2,2158072	1,1003063	2,5672802	1,4589028
2,5087992	1,2989118	2,8740411	1,6921877
2,6230664	1,4551388	3,0210240	1,8103105
2,8519775	1,6350923	2,9429827	1,8511903
3,0256363	1,7987191	3,1985606	2,0075423
3,2923035	2,0036278	3,4652720	2,1801881
3,5509485	2,2205901	3,5536376	2,2804832
3,0045250	1,9025426	3,5311524	2,3288084
1,7392209	0,7929550	3,4673146	2,3539866
		4,0279525	2,7493381
		3,9537771	2,8292569

Os pontos da Tabela (4) fornecem os gráficos a seguir, quando a porcentagem de variação de energia estabelecida sofrida pela partícula foi de 1% e de 10%.

Aproximando esses pontos por uma reta, foi feito então o ajuste linear que forneceu a função (30) para 1% e (31) para 10%.

Para variação de 1%:

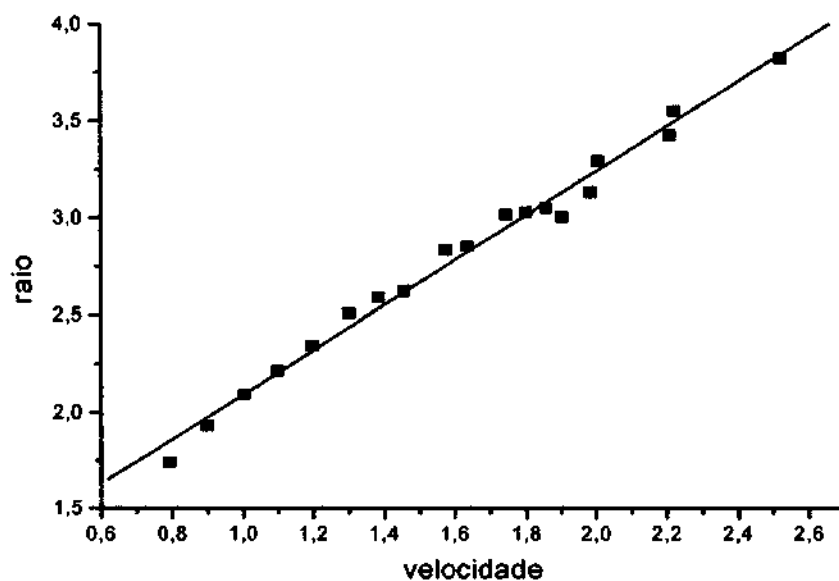


Figura 14- Gráfico do raio de influência pela velocidade da partícula, para variação de 1%

Que fornece a função do raio de influência em função da velocidade:

$$R = (1,15238 \pm 0,03131)v + (0,9375 \pm 0,05249) \quad (30)$$

Para variação de 10%:

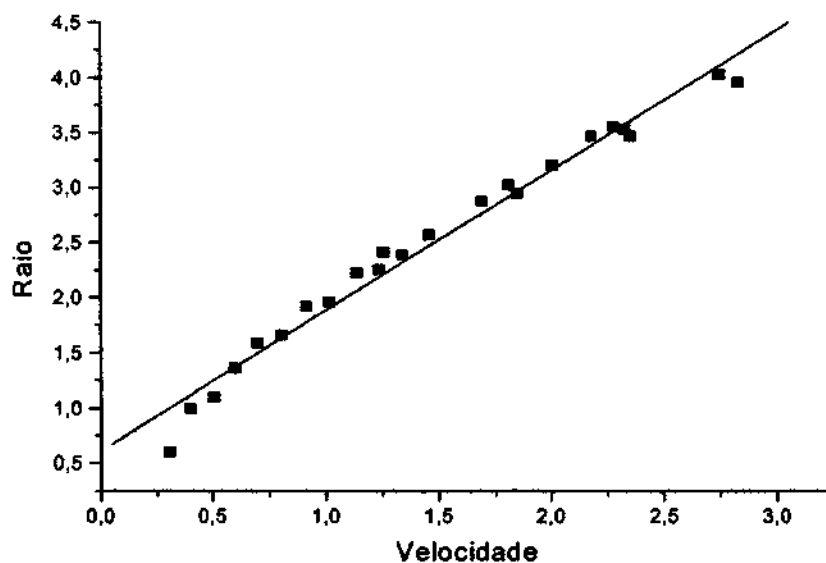


Figura 15- Gráfico do raio de influência pela velocidade da partícula, para variação de 10%

Que fornece a função do raio de influência em função da velocidade:

$$\boxed{R = (1,27281 \pm 0,04088)v + (0,61192 \pm 0,06727)} \quad (31)$$

#### **IV- CONCLUSÃO E RESULTADOS FUTUROS**

Neste trabalho foi proposto estudar os efeitos de uma grande aproximação entre dois corpos, sendo a massa de um muito maior em comparação à do outro, através da variação de energia do problema de dois corpos.

O desenvolvimento deste trabalho permitiu concluir que de fato o raio da esfera de influência de um corpo que proporciona o efeito de ganho ou de perda de energia sobre outro de massa muito inferior, está relacionado com a distância a que este passa do outro corpo e de sua velocidade.

O resultado encontrado leva à conclusão de que a relação entre esse raio de influência e a velocidade da partícula é diretamente proporcional, ou seja, quanto maior a velocidade, maior deve ser o raio da esfera de influência. Isso se deve ao fato de que a partícula de maior velocidade deverá sentir a influência do outro corpo por mais tempo para que lhe seja proporcionada a mesma porcentagem de variação de energia que ocorre para o corpo de menor velocidade.

Este trabalho foi útil por levar ao entendimento detalhado do comportamento de uma partícula quando esta se aproxima de um planeta por exemplo. No entanto o resultado encontrado não é suficiente para dizer em casos gerais se uma partícula esta ou não sob a influência de um corpo, já que para a configuração adotada todas as partículas sofrerão a variação de energia pré-estabelecida.

O que se pretende futuramente é estabelecer uma relação entre a esfera de influência de corpos com diferentes massas e a velocidade de eventuais partículas que passam à sua volta, de forma a delimitar o raio da esfera de influência apenas para algumas velocidades.