

[Imprimir](#)[Fechar](#)*Referência Completa*

Tipo da Referência	Conference Proceedings
Chave Secundária	INPE-11556-PRE/6944
Chave de Citação	Honain:2004:DiAtSa
Autor(es)	Honain, Fernando Nechar
Título	Dinâmica de Atitude de Satélites Artificiais
Nome do Evento	Seminário de Iniciação Científica do INPE (SICINPE)
Data	03 e 04 de ago. 2004
Localização do Evento	São José dos Campos
Editora (Publisher)	INPE
Ano	2004
Páginas	1-25
Título do Livro	Anais
Endereço da Editora	São José dos Campos
Organização	Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais
Repositório do Metadado	sid.inpe.br/marciana/2004/11.17.11.14.31
Resumo	<p>O trabalho trata da dinâmica de satélites artificiais em órbita da terra, com enfoque na dinâmica de atitude. A atitude se refere ao movimento rotacional do veículo espacial em torno do seu centro de massa, em relação a um sistema de eixos conhecido. O problema de se analisar o movimento de atitude de um satélite envolve a modelagem matemática do veículo, ou seja, a obtenção das equações da dinâmica do mesmo. Além disto é preciso trabalhar com as equações da cinemática, que envolve a as coordenadas angulares do satélite e a sua taxa de variação no tempo. Tendo em vista uma visão do problema no espaço e no tempo, o trabalho mostra inicialmente um histórico da era espacial. Em seguida apresenta os conceitos fundamentais associados a dinâmica de atitude. Como os sistemas de referencias são muito importantes nesta área do conhecimento, o trabalho apresenta um estudo dos procedimentos de transformações de coordenadas de um sistema de referência para outros. Em seguida o trabalho apresenta um estudo do movimento do corpo rígido e a obtenção das equações de Euler para o movimento do satélite artificial. O estudo movimento livre de torque finaliza o estudo.</p>
Última Atualização do Metadado	2004:11.17.13.14.33 sid.inpe.br/banon/2003/08.15.17.40 sergio
Site	< <a href="http://iris.sid.inpe.br:1916">iris.sid.inpe.br:1916</a> >
Idioma	Portuguese
Detentor da Cópia	SID/SCD
Divulgação	

Formato	Papel
Area	ETES
Grupo(s)	LAS
Afiliação	FEI - UNIFEI
Usuário Avançado	sergio
Grupo de Usuários	sergio
Visibilidade	shown
Data de Acesso	17 nov. 2004
<a href="#">atualizar</a>	

[Fechar](#)

## **Dinâmica de Atitude de Satélites Artificiais**

Fernando Nechar Honain (FEI – UNIFEI)  
Orientador: Ijar M. da Fonseca (INPE/DMC)

### **RESUMO**

O trabalho trata da dinâmica de satélites artificiais em órbita da terra, com enfoque na dinâmica de atitude. A atitude se refere ao movimento rotacional do veículo espacial em torno do seu centro de massa, em relação a um sistema de eixos conhecido. O problema de se analisar o movimento de atitude de um satélite envolve a modelagem matemática do veículo, ou seja, a obtenção das equações da dinâmica do mesmo. Além disto é preciso trabalhar com as equações da cinemática, que envolve a as coordenadas angulares do satélite e a sua taxa de variação no tempo. Tendo em vista uma visão do problema no espaço e no tempo, o trabalho mostra inicialmente um histórico da era espacial. Em seguida apresenta os conceitos fundamentais associados a dinâmica de atitude. Como os sistemas de referencias são muito importantes nesta área do conhecimento, o trabalho apresenta um estudo dos procedimentos de transformações de coordenadas de um sistema de referência para outros. Em seguida o trabalho apresenta um estudo do movimento do corpo rígido e a obtenção das equações de Euler para o movimento do satélite artificial. O estudo movimento livre de torque finaliza o estudo.



# AUTORIZAÇÃO PARA PUBLICAÇÃO

Número

PIBIC-026/04

Título

Dinâmica de Atitude de Satélites Artificiais

Autor

Fernando Nechar Honain

Tradutor

Não há

Editor

Origem	Projeto	Série	No. de Páginas	No. de Fotos	No. de Mapas
			25	0	0

Tipo

RPQ  PRE  NTC  PRP  MAN  PUD  TAE

Divulgação

Externa  Interna  Reservada  Lista de Distribuição Anexa

Periódico / Evento

Seminário de Iniciação Científica do INPE - SICINPE 2004

Convênio

Autorização Preliminar

\_\_\_/\_\_\_/\_\_\_  
Data

Coordenador do PIBIC  
Programa Institucional de Bolsas  
de Iniciação Científica do INPE

Revisão Técnica

Solicitada  Dispensada  
Recebida \_\_\_/\_\_\_/\_\_\_ Devolvida \_\_\_/\_\_\_/\_\_\_

\_\_\_\_\_  
Titular de Nível "A"

\_\_\_\_\_  
Assinatura do Revisor

Revisão de Linguagem

Solicitada  Dispensada  
Recebida \_\_\_/\_\_\_/\_\_\_ Devolvida \_\_\_/\_\_\_/\_\_\_

\_\_\_\_\_  
Titular de Nível "A"

\_\_\_\_\_  
Assinatura do Revisor

Autorização Final

\_\_\_/\_\_\_/\_\_\_  
Data

\_\_\_\_\_  
Marcos Dias da Silva  
Coordenador de Ensino, Documentação  
e Programas de Pós-Graduação

Palavras Chave

Dinâmica de Atitude - Satélites Artificiais



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
**INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS**

**INPE-11556-PRE/6944**

## **DINÂMICA DE ATITUDE DE SATÉLITES ARTIFICIAIS**

Fernando Nechar Honain

Relatório de Bolsa de Iniciação Científica  
(PIBIC/CNPq/INPE)

INPE  
São José dos Campos  
2004

MCT – Ministério da Ciência e Tecnologia  
INPE – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais  
São José dos Campos / SECTPR

RELATÓRIO DE BOLSA DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA

Título do Projeto: Dinâmica de Atitude de Satélites Artificiais

Bolsista: Fernando Nechar Honain

Orientador: Dr. Ijar Milagre da Fonseca

Período: Julho/2003 – Julho/2004

Bolsa de Iniciação Científica suportada pelo Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica - PIBIC / CNPq, desenvolvido junto à Divisão de Mecânica Espacial e Controle DMC/INPE.

## 1. Introdução

- Atitude de satélites artificiais – perspectiva histórica (Contar um pouco da história dos satélites – sputnik, explorer I e outros).
- Procedimento para descrever a atitude (ângulos, quaternion)
- Em que consiste este trabalho.

## 2. Conceitos fundamentais:

- Dinâmica de atitude
- Ângulos de atitude
- Equações da cinemática
- Rolamento
- Arfagem
- Guinada
- Quaternion
- Sistemas de referência orbital
- Quantidade de movimento angular (Angular momentum)

## 3. Equações da Cinemática

- Sistemas de referência
- Matrizes de Rotação
- Ângulos de Euler

## 4. Movimento do Corpo Rígido – Equações da Dinâmica

- Quantidade de Movimento Angular (Angular Momentum)
- Equações de Euler (Derivada temporal da quantidade de movimento angular)
- Estudo do Movimento Livre de Torque

## 5. Estudo de Estabilidade

## 6. Resultados obtidos até o momento.

Fernando Nechar Honain

Cnpq/Pibic – Dinâmica de Atitude de Satélites Artificiais

## 1) Introdução

### 1.1) Atitude de Satélites Artificiais – Perspectiva Histórica

À exceção dos experimentos pioneiros com foguetes, do Dr. Robert H. Goddard, nas décadas de vinte e trinta, o interesse americano pela exploração espacial, antes da II Guerra Mundial, estava restrito aos clubes amadores e à fértil imaginação dos escritores de ficção científica. Com o advento da guerra, e a demanda militar, tornou-se necessário o desenvolvimento de armas de longo alcance que pudessem ser usadas contra tanques, veículos blindados e submarinos. A ciência espacial, um termo pouco utilizado na época, estava restrita a estudos do tempo e das camadas superiores da atmosfera terrestre através do uso de balões e de pequenas sondas-foguete. Embora a idéia de se colocar em órbita satélites artificiais com fins militares e científicos tenha sido sugerida pelas forças armadas e várias agências civis, nunca se passou da fase de conversação.

Até o final da guerra, o interesse dos Estados Unidos nessa tecnologia, porém, aumentaria dramaticamente. A causa primordial desse fato foi o impacto causado pelos foguetes alemães V-2 nos círculos militares e científicos americanos. Os militares viram no longo alcance dos V-2 um novo horizonte na emergente era nuclear, enquanto os cientistas vislumbravam a possibilidade de levá-lo a ser um instrumento que possibilitasse pesquisas conduzidas a grandes altitudes, e como o veículo-protótipo para uma viagem de exploração ao espaço. Ávidos pelo dinheiro que possibilitaria a continuidade de suas pesquisas, experts alemães em foguetes foram contratados pelos Estados Unidos. Além disso, quase cem V-2 foram confiscados após o término do conflito mundial.

O exército começou a testar os V-2 em 1946. Cientistas e técnicos alemães, encabeçados por Wernher von Braun (o "pai" do V-2) trabalharam ao lado dos americanos no sentido de fazer uso dos V-2 para pesquisa. Pelos próximos cinco anos, equipes do Exército, da Marinha e da Aeronáutica; das indústrias espaciais e de universidades coletaram informações acerca dos quarenta lançamentos de V-2 realizados no período. Enquanto os testes trouxeram dados pouco úteis em relação a pesquisas em altas altitudes, a ênfase foi dada no longo alcance e poder de fogo dos V-2, facetas úteis quando relacionadas à defesa nacional. À medida que o programa espacial ia sofisticando-se, tornou-se evidente que era necessário um novo local para a realização dos lançamentos. A partir de outubro de 1949, o local utilizado passou a ser o Cabo Canaveral.



O cabo era ideal para lançamentos. Não havia perigos para comunidades das redondezas, o clima da região possibilitava operações durante o ano todo e os foguetes eram lançados sobre o mar ao invés de áreas habitadas. Uma cadeia de ilhas providenciava locais para a construção de zonas de rastreamento que seguiriam o progresso dos foguetes após o lançamento. Alguns anos mais tarde, esses mesmos critérios foram levados em conta na seleção da área adjacente ao Cabo Canaveral (Ilha de Merrit) para a locação do Kennedy Space Center.

No dia 24 de julho de 1950 uma equipe do exército conduziu o primeiro lançamento a partir do Cabo Canaveral. O foguete, chamado Bumper 8, era um V-2 modificado. Ele alcançou uma altitude de dezesseis quilômetros. As facilidades de lançamento da época contrastam severamente com as de hoje. Naquele primeiro lançamento, os técnicos do exército usaram um patíbulo de pintor para trabalhar no foguete antes do lançamento e o centro de controle foi uma espécie de cabine feita com papel de alcatrão, circundada por sacos de areia.

Pouco mais tarde o exército decidiu dar continuidade ao seus programas no arsenal Redstone, um antigo centro de desenvolvimento químico em Huntsville, no Alabama. Os primeiros projetos desenvolvidos aí foram as construções dos mísseis Redstone e Júpiter. O Redstone era um descendente direto dos V-2 (com alcance de trezentos e trinta e dois quilômetros) enquanto o Júpiter era uma versão mais potente do Redstone (com alcance de dois mil e oitocentos quilômetros).

O exército começou a testar esses mísseis no Cabo Canaveral em agosto de 1953. Cerca de setenta e cinco técnicos e engenheiros dirigiam em comboio do Alabama ao cabo para cada teste. Lá, eles preparavam e lançavam o foguete e, logo após, retornavam ao Alabama para trabalhar no próximo míssil. Quando, mais tarde, o exército contratou a Chrysler Corp. para produzir os Redstones e os Júpiteres em Michigan, a equipe do Alabama mudou-se em definitivo para o Cabo Canaveral para conduzir os testes de vôo e dar assistência ao pessoal que manusearia essas armas.

No meio da década de cinquenta, a tecnologia espacial nos Estados Unidos atingiu um estágio onde sérias considerações a respeito do lançamento de satélites artificiais à órbita terrestre estavam sendo feitas. A oportunidade surgiu em julho de 1955, quando o presidente Dwight D. Eisenhower anunciou que os Estados Unidos colocariam um satélite em órbita como parte de sua contribuição ao Ano Internacional Geofísico (1957-58). A União Soviética também anunciara sua intenção de orbitar um satélite durante aquele ano, sugerindo até que a sua Lua artificial seria muito maior do que qualquer uma que os E. U. A. viessem a lançar.

A competição entre as forças armadas americanas para saber quem teria a honra de impulsionar o satélite à órbita estava lançada. O exército sugeriu o uso de um veículo Redstone modificado. A Aeronáutica propôs o seu Atlas, que ainda estava em fase de desenvolvimento, e a Marinha expôs um modelo melhorado de seu foguete de pesquisa a grandes altitudes (Viking), que seria chamado Vanguard.

O projeto Vanguard foi selecionado porque oferecia a possibilidade de desenvolvimento de

um foguete cujos sistemas estariam mais voltados para fins civis do que militares. Além disso, era um projeto científico e, ao contrário das propostas do exército e da aeronáutica, teria pouco impacto sobre o desenvolvimento dos mísseis balísticos de defesa nacional.

A equipe Vanguard chegou ao Cabo Canaveral ao final de 1955 e iniciou as preparações para o lançamento. Dois Vanguards de teste foram lançados em vôos suborbitários de sucesso em 1956 e 1957. Aí veio o Sputnik.

O lançamento, por parte dos russos, do primeiro satélite artificial, em 4 de outubro de 1957, ocasionou profundos efeitos no povo americano e nas agências governamentais envolvidas com o desenvolvimento de satélites. Mais do que isso, o tamanho e peso do Sputnik (oitenta e três quilos) provaram que os russos tinham desenvolvido foguetes muito mais potentes do que qualquer um do arsenal americano.

O satélite Sputnik estava a 500 milhas (805Km) de distância, viajando a 18000 milhas por hora (28970Km/h), e dava uma volta no mundo a cada 96 minutos. Ele voava sobre os EUA sete vezes por dia. E o som do seu incessante beep fascinava e incomodava.

O nome oficial do satélite era *Iskustvennyi Sputnik Zemli* (homem viajante do mundo). O veículo de lançamento era uma versão de teste do míssil balístico Intercontinental Soviético. O Sputnik 2 foi lançado em 3 de Novembro de 1957. Ele levava uma cadela chamada Laika. Instrumentos a bordo mostraram que a Laika sobreviveu no espaço durante vários dias até o seu fornecimento de oxigênio acabar.

A pressão sobre o programa Vanguard era grande. Aumentou mais ainda quando o secretário de defesa dos E. U. A. pediu ao exército que se preparasse para um lançamento de satélite para o caso do Vanguard falhar. Após o sucesso de um terceiro vôo de teste, a equipe Vanguard tentou lançar um satélite no dia 6 de dezembro de 1957, pouco mais de dois meses após a Sputnik 1. Poucos segundos após o acionamento dos motores, quando a Vanguard estava a cerca de 1. 2 metros do chão, seu foguete perdeu força, caindo de volta na área de lançamento. A explosão transformou a Vanguard numa bola de fogo que feriu profundamente a confiança americana. Antes que a equipe Vanguard pudesse preparar um segundo lançamento, o exército decolou o seu satélite Explorer 1 e colocou-o em órbita no dia 31 de janeiro de 1958, usando um foguete Júpiter-C modificado como veículo de lançamento, chamado Juno 1. Os Estados Unidos estavam no espaço. A Explorer 1 tinha em qualidade o que lhe faltava em tamanho. Um experimento de bordo, designado pelo Dr. James Van Allen detectou o cinturão de radiação da Terra, subseqüentemente chamado de Cinturão de Radiação Van Allen.

O exército tentaria um segundo lançamento em março. No entanto, houve uma falha na ignição do quarto estágio do Juno 1. No dia 17 de março de 1958, a Vanguard colocou o segundo satélite americano em órbita, uma esfera de 1. 6 quilos que permanecerá acima de nós por dois mil anos. Chamado de Vanguard 1, este minúsculo satélite levou ao espaço as primeiras células solares e é, agora, a mais antiga e menor espaçonave em órbita. Embora o exército tenha sido o primeiro herói americano da era espacial, o pessoal do projeto Vanguard teve a satisfação de saber que desenvolveu em tempo recorde (apenas dois

anos, seis meses e oito dias) um veículo de alta performance, um sistema de tração mundial e uma estação de instrumentação de longo alcance. Mais importante: eles alcançaram seu objetivo, que era colocar um satélite em órbita durante o Ano Internacional Geofísico.

Em resposta ao sucesso que os Estados Unidos obtiveram com a Explorer e a Vanguard, os russos lançaram o Sputnik 3 em 15 de Maio de 1958.

Cada um dos três primeiros Sputniks carregavam instrumentos para medir a temperatura e a densidade da camada superior da atmosfera terrestre. Para completar, o Sputnik 3 carregava o primeiro laboratório espacial, um largo arranjo de instrumentos que podiam transmitir informações sobre o meio ambiente fora do satélite. Energia solar foi usada pela primeira vez pelo Sputnik 3 para dar energia para os seus instrumentos e seus transmissores. Desta forma, os russos produziram um extenso clamor que fez os E. U. A. embarcar num vasto programa espacial. No dia 1 de outubro de 1958, surge a NASA. A NASA absorveu grande parte da equipe do projeto Vanguard que, ao lado de outros membros de comunidades científicas e militares, tornou-se a equipe Goddard, responsável pelo lançamento da maioria dos programas de satélite pioneiros dos Estados Unidos, incluindo os primeiros satélites de tempo e de comunicações do mundo.

Durante esse período, o Cabo Canaveral tornou-se uma base de lançamentos mais ampla. O exército continuou testando seus Redstones e Júpiteres e um novo míssil de campo chamado Pershing. A marinha ocupava-se com o desenvolvimento do Polaris, míssil que podia ser lançado de um submarino. A aeronáutica desenvolvia o Thor, o Atlas, o Titan e o Minutemen. O Thor seria, mais tarde, o estágio de propulsão do Delta, que foi responsável pela colocação em órbita de mais satélites do que qualquer outro foguete americano. O Atlas e o Titan seriam usados durante os programas tripulados e não tripulados da NASA no futuro.

De 1958 a 1959 a União Soviética interrompeu o programa do Sputnik para se concentrarem na série de veículos Luna que foram mandados para a Lua. O programa Sputnik recomeçou com Sputniks 5 até 10, que foram lançados de 1960 a 1961. Os Sputniks 5, 6, 9 e 10 levavam cachorros, dos quais a maioria reentrou a atmosfera terrestre seguramente e foram recuperadas. Cada um desses satélites pesava milhares de quilogramas e foram modelos da espaçonave Vostok, o qual viria a levar o primeiro passageiro humano, Yury Alekseyevich Gagarin, pro espaço em Abril de 1961. Os Sputniks 7 e 8, lançados em Fevereiro de 1961, serviram de plataformas de lançamento para a espaçonave Venera, que foi mandada para Vênus. A série Cosmos de espaçonaves levou em frente o trabalho do programa Sputnik a partir de 1961.

1.3) Objetivos deste trabalho: Fazer um estudo da dinâmica de atitude de satélites artificiais, com enfoque nos procedimentos de descrição do movimento de atitude, na dedução das equações do movimento, nos tipos de estabilização passiva de atitude (estabilização por spin e estabilização por gradiente de gravidade). O trabalho apresentará também uma discussão sobre as ferramentas de software utilizadas para o estudo da dinâmica de atitude.

1.2) Procedimento para a descrever a atitude (ângulos, quaternion):

Definem-se dois sistemas de referência para o presente estudo. O sistema orbital  $Ox_oY_oZ_o$ , cujo eixo  $X_o$  é colinear ao raio vetor que liga o centro da Terra ao Centro de Gravidade do satélite;  $Y_o$  é perpendicular a  $X_o$ , pertencendo ao plano orbital, no sentido do movimento; e  $Z_o$  completa o sistema dextrogiro. O sistema  $Oxyz$  é fixo no corpo e coincidente com os eixos principais de inércia do satélite. Ambos os sistemas se relacionam através da matriz de rotação, obtida por meio de três rotações sucessivas de  $\theta_3$ ,  $\theta_2$  e  $\theta_1$  nos eixos  $z$ ,  $y$  e  $x$ , respectivamente.

## 2) Conceitos Fundamentais:

2.1) Dinâmica de atitude: A dinâmica de Atitude é a ciência aplicada cujo propósito é entender e prever como se comporta a orientação de uma nave espacial. Desta forma, atitude de um satélite artificial é a orientação de um ou mais eixos do satélite em relação a algum sistema de eixos de referência.

Uma parte da tecnologia de aeronaves espaciais procura prever os torques que agem em uma aeronave específica e qual atitude do movimento estes torques causarão, incluindo como minimizar movimentos indesejados através da aplicação de estratégias de concepções sutis.

A Dinâmica de Atitude, naturalmente não existe em isoladamente. Ela está interligada com muitas outras disciplinas irmãs. Algumas das mais importantes interfaces serão mostradas a seguir.

### 2.1.1) Interface Orbital

A Dinâmica de Atitude, (dinâmica rotacional) e a Dinâmica Orbital (dinâmica translacional, ou de translação) estão mutuamente relacionadas. (Isto tende a ser menos verdadeiro para espaçonaves ocasionais, de missões interplanetárias). Até mesmo se a gravidade for a única força no campo considerado (o problema clássico), a dinâmica orbital afeta a dinâmica de atitude e vice-versa. Porque a gravidade é uma força conservativa no campo, o sistema energético e momento angular são conservados. No entanto, o "sistema" inclui a translação e a rotação de todo o satélite e é primitivamente gravitacional (usualmente terrestre). Teoricamente, os movimentos translacionais e rotacionais, tanto da Terra como do satélite são mutuamente ligados por interações gravitacionais sem mencionar outros corpos celestiais no sistema solar.

Entretanto, o movimento terrestre é insignificamente afetado pela presença de um pequeno satélite artificial. Apesar disso, permanece a ligação entre a translação do satélite (as variáveis orbitais) e a rotação de um veículo espacial (as variáveis de atitude).

Como um exemplo da órbita afetando a atitude, os torques que o satélite é submetido dependem da altitude. Outro exemplo da atitude afetando a órbita a navegação interplanetária solar, utilizando a pressão irradiada e baseada no ajuste de atitude para produzir a trajetória descrita.

Apesar destes vários efeitos (indicados pela intersecção da dinâmica de atitude de naves espaciais) e órbitas elípticas, na maioria das análises dos procedimentos, são largamente ignorados os efeitos orbitais. São duas justificativas para estes estudos. Primeiro, muitas naves espaciais são também rotacionadas ou guiadas, contendo rotores ou movimentos giratórios. Para uma boa aproximação, estes podem ser analisados como uma convenção,

isoladamente de todas as forças externas.

O ponto imediato é determinar se uma designação básica dada é estabilizada por atitude. Se então, torques externos, se orbitalmente induzidos ou de outro modo, podem ser admitidos subsequenteemente como distúrbios ou distorções. Segundo, para aquelas naves espaciais as quais contam com um torque circundante para a sua estabilização e para estender que este torque circundante depende de variáveis orbitais, o efeito da órbita na atitude é incluído nas análises. Outros torques são novamente considerados como distorções.

### 2.1.2) Interface Estrutural

Apesar de corpos reais não serem rígidos, a dinâmica de atitude de muitas naves espaciais é estudada em relação a um corpo rígido e alguns aspectos da observação e comportamento da orientação de veículos espaciais poder ser explanados nestas bases. A vantagem de um corpo rígido, para as análises, é que contribuem, na maioria das partes, em seis passos do estudo, sendo que somente três destes são rotacionais. Um corpo rígido é essencialmente uma abstração geométrica. Muitos pequenos princípios são representados. O passo extra e interno do estudo, possuído por um corpo real, contribui importantemente para a junção de efeitos, sendo que o mais importante é a dissipação de energia. A dinâmica de atitude aplica na Segunda Lei do movimento, precisamente enquanto ignorada a Segunda Lei da Termodinâmica. Por outro lado, a análise estrutural exata implica num enorme aumento da complexibilidade do modelo matemático, de fato, para algumas espaçonaves, especialmente aquelas de fabricação recente e aquelas a serem brevemente construídas, modelos dinâmicos complexos são inevitáveis. Porém, um entendimento dos princípios básicos da estabilização passiva requer que somente duas propriedades gerais da dinâmica estrutural que são lidadas com: o efeito da dissipação da energia estrutural, sobre a estabilização da atitude de rotação (ou rotação parcial) da espaçonave e os efeitos adversos dos graus internos de liberdade sobre o eixo maior.

### 2.1.3) Interface dos Fluídos

A dinâmica de fluídos também traz, no assunto de dinâmica de atitude de espaçonaves importantes caminhos. A queima de combustível de propulsão e o transporte de líquido de refrigeração, para controle térmico são exemplos que vem para concentrar nesta conexão. Desta maneira a dissipação de energia é a influência mais significativa.

### 2.1.4) Interface Dinâmica

Com relação à interface Dinâmica, a mesma será estudada posteriormente, sendo que a abordagem da Mecânica Vetorial será feita para analisar a seqüência fundamental de modelos dinâmicos (demonstração de importantes princípios). Estes modelos básicos são importantes no campo da escolha dos procedimentos dinâmicos e as equações do movimento.

### 2.1.5) Interface de Estabilidade

Equações diferenciais exatas para o movimento de atitude de naves espaciais não são

lineares e não podem ser resolvidas de uma determinada forma. O primeiro passo lógico é localizar o equilíbrio, isto é, identificar condições sob as quais o sistema ou está em repouso ou em movimento uniforme. Cada tal equilíbrio sugere um esquema de estabilização potencial, especialmente se o equilíbrio for estável.

O assunto de Estabilidade é por si mesmo tão sutil, especialmente quando aplicado aos sistemas mecânicos, onde muitos resultados específicos são disponibilizados.

#### 2.1.6) Interface de Controle

Na prática, não há uma interface reduzida entre a dinâmica de atitude de naves espaciais e o controle de atitude desta nave espacial. As mais modernas espaçonaves são estabilizadas através de uma combinação de controle passivo (significado dinâmico somente) e controle ativo (significado no sentido de apenas um sensor, um atuador, um sistema de energia, e controle de ajuste).

#### 2.1.7) Análises passo a passo por Simulação

Muitas das equações que regem o movimento de espaçonaves não podem ser resolvidas analiticamente na sua forma exata. As equações cinemáticas gerais e equações gerais de movimento não são propriamente lineares.

Soluções exatas podem usualmente ser encontradas somente na forma numérica, através de alguns tipos de simulação computacional. A saída é essencialmente numérica, em qualquer caso.

Rolamento, Arfagem e Guinada são termos aeronáuticos para a rotação usando o sistema de coordenadas Euclideo, (Ângulos de Euler), relativos para o local do sistema de coordenadas de uma aeronave.

### 2.2) Ângulos de Atitude

Quando definimos a orientação de um corpo com relação a um sistema de referência, uma série de rotações puras é usada, e estas resultam em transformações ortogonais. As rotações associadas são chamadas de Ângulos de Euler, sendo que estas determinam unicamente a orientação do corpo. Por exemplo, representando vetorialmente:

$[ 0 \ 0 \ 0 ]$  será a matriz genérica.

Outros ângulos são representados como segue:

$[ 90 \ 0 \ 0 ]$  é a rotação de  $90^\circ$  no eixo X;

$[ 0 \ 90 \ 0 ]$  é a rotação de  $90^\circ$  no eixo Y;

$[ 0 \ 0 \ 90 ]$  é a rotação de  $90^\circ$  no eixo Z.

2.4) Rolamento (Roll) : Movimento da espaçonave em torno de seu eixo longitudinal (eixo Z). Também conhecido por rolagem, bancagem ou inclinação lateral, podendo ser feito para a esquerda ou para a direita.

2.5) Arfagem (Pitch): Movimento da espaçonave em torno de seu eixo lateral ou transversal (eixo X). Pode ser para cima (cabragem) ou para baixo (picagem).

2.6) Guinada (Yaw): Movimento da espaçonave em torno de seu eixo vertical (eixo Y), podendo ser feita para a esquerda ou para a direita.

## 2.7) Quaternions

O que são Quatérnions

Quatérnions estendem o conceito de rotação em três dimensões para a rotação em quatro dimensões. Também são denominados Parâmetros de Euler. As vantagens da utilização dos mesmos são que estes não envolvem funções trigonométricas e consomem menor tempo computacional. Os Parâmetros de Euler são definidos por:

$$q_1 = e_1 \text{ sen } (\Phi/2);$$

$$q_2 = e_2 \text{ sen } (\Phi/2);$$

$$q_3 = e_3 \text{ sen } (\Phi/2);$$

$$q_4 = \text{cos } (\Phi/2);$$

onde:

$e_1, e_2, e_3$  são as componentes do vetor unitário  $e$ , ao longo do eixo de rotação e  $\Phi$  o ângulo de rotação.

As equações cinemáticas, colocadas em função dos quatérnions, são escritas na forma:

$$dq/dt = \frac{1}{2} \Delta q.$$

Onde:

$$q = (q_1, q_2, q_3, q_4)^T$$

$q_1, q_2, q_3$  e  $q_4$  satisfazem a relação

$$q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 = 1$$

e  $\Delta$  é dado por:

$$\Delta = \begin{bmatrix} 0 & r & -q & p \\ -r & 0 & p & q \\ q & -p & 0 & r \\ -p & -q & -r & 0 \end{bmatrix}$$

## 2.9) Quantidade de movimento angular (Angular momentum)

O conceito de momento do momento ou Momento Angular, é outra importante idéia no desenvolvimento da dinâmica da partícula e da dinâmica do corpo rígido.

Considere uma partícula de massa  $m$  com momento linear  $p$ ,

$$P = m\dot{R}$$

O momento deste momento de um ponto arbitrário  $O$  é definido por:

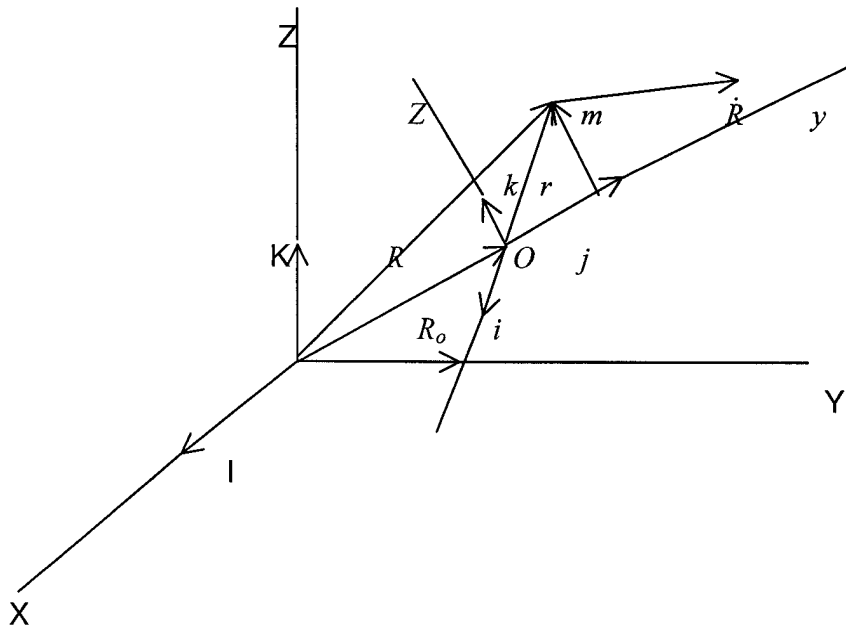
$$h_o = r \times m\dot{R}$$

sendo  $\dot{R} = \dot{R}_o + \dot{r}$ , então vem:

$$h_o = r \times m\dot{r} + r \times m\dot{R}_o$$



O primeiro termo na direita da equação é o momento angular aparente no movimento dos eixos x, y, z, e o outro termo é a correção devido ao movimento do ponto O.



A taxa de variação de  $h_o$  é de importância particular no desenvolvimento das equações de movimento de atitude. Ela está na forma:

$$\dot{h}_o = \frac{d}{dt}(r \times m\dot{r}) - \ddot{R}_o \times mr - \dot{R}_o \times m\dot{r}$$

Cada termo na direita da equação tem um significado físico. O primeiro é a taxa de variação do momento angular aparente no sistema de referência x, y, z. O segundo termo representa o efeito da aceleração do ponto O, e o último representa a correção devido à velocidade do ponto O. Esta taxa de variação de momento pode ser relacionada com o torque aplicado no ponto O, definido como  $M_o$ . O momento da força agindo do ponto O até M é definido como:

$$M_o = r \times F$$

Onde  $F = m\ddot{R}$  para este caso. Então,  $M_o$  vem:

$$M_o = r \times m\ddot{R} = r \times m(\ddot{R}_o + \ddot{r})$$

Sendo  $\dot{r} \times \dot{r} = 0$ , a equação fica da seguinte forma:

$$M_o = \frac{d}{dt}(r \times m\dot{r}) - \ddot{R}_o \times mr$$

Comparando com a expressão de  $h_o$ , fica:

$$M_o = \dot{h}_o + \dot{R}_o \times m\dot{r}$$

Uma importante observação pode ser feita imediatamente, com relação a este resultado. Se o ponto O está fixado no espaço ou  $r$  é constante, então

$$M_o = \dot{h}_o$$

Se o torque aplicado na equação acima é zero, indica que  $h_o$  é constante, ou seja, o momento angular do sistema é conservado

### 3) Equações da Cinemática

#### 3.1) Sistemas de Referência

Transformações entre sistemas de referência são requisitadas para a resolução de muitos problemas. Tanto os componentes do deslocamento como os da velocidade serão expressos em mais de um sistema de coordenadas. Considere a posição absoluta da massa  $m$  na figura abaixo. Assuma os vetores unitários para serem  $I, J, K$  e  $i, j, k$  para os sistemas  $X, Y, Z$  e  $x, y, z$ , respectivamente. Então a posição de  $m$  é  $R = R_o + r$ , em relação ao

sistema  $x, y, z$ . Estes vetores podem ser escritos na forma de componentes como:

$$R = XI + YJ + ZK$$

$$R_o = X_oI + Y_oJ + Z_oK$$

$$r = xi + yj + kz$$

Cada componente de  $R$  pode ser expressa em termos de  $x, y$  e  $z$ , fazendo o produto escalar de  $R$  e cada um dos vetores unitários,  $I, J$ , e  $K$ . Então:

$$R \cdot I = X = X_o + xI \cdot i + yI \cdot j + zI \cdot k$$

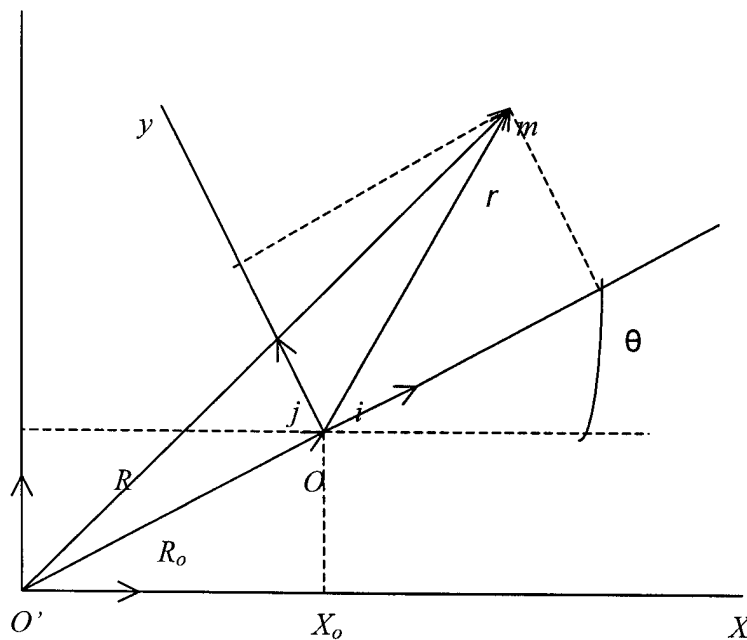
$$R \cdot J = Y = Y_o + xJ \cdot i + yJ \cdot j + zJ \cdot k$$

$$R \cdot K = Z = Z_o + xK \cdot i + yK \cdot j + zK \cdot k$$

Os produtos escalares  $I \cdot i, I \cdot j, I \cdot k, J \cdot i$ , etc são os 9 cossenos direcionais representando a orientação de cada eixo de um sistema com relação a outro eixo de outro sistema. Considere uma situação geral, em duas dimensões, como mostrado na figura. Os cossenos direcionais são:

$$I \cdot i = \cos\theta = J \cdot j$$

$$I \cdot j = -\sin\theta = -J \cdot I$$



Se  $R = R_o + r$ ,  $(R-R_o) \cdot I = X-X_o = r \cdot I$  e  $r \cdot I = x \cdot I.i + y \cdot I.j = x \cos \theta - y \sin \theta$ . Então:

$$X-X_o = x \cos \theta - y \sin \theta$$

De modo análogo:

$$Y-Y_o = x \sin \theta + y \cos \theta$$

Em notação matricial vem:

$$\begin{bmatrix} X - X_o \\ Y - Y_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Os componentes  $x$  e  $y$  podem agora ser expressos em termos de  $X$  e  $Y$  invertendo a matriz de transformação:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X - X_o \\ Y - Y_o \end{bmatrix}$$

Note que por deslocamento da origem de  $X$ ,  $Y$ , para  $X_o$ ,  $Y_o$ , uma simples rotação através do ângulo  $\theta$  completa a transformação.

Desta forma, com este tipo de transformação, pode-se transferir de um sistema de coordenadas ortogonal para outro, através de uma série de puras rotações.

### 3.2) Matrizes de Rotação – Ângulos de Euler

Para definirmos a orientação de um corpo, relativo a um sistema de referências, uma série de rotações puras é utilizada (matrizes de rotação). Estas rotações são chamadas de Ângulos de Euler. Uma seqüência conveniente de será ilustrada nas figuras posteriores e podem ser listadas como:

Cada transformação é caracterizada como uma transformação ortogonal:

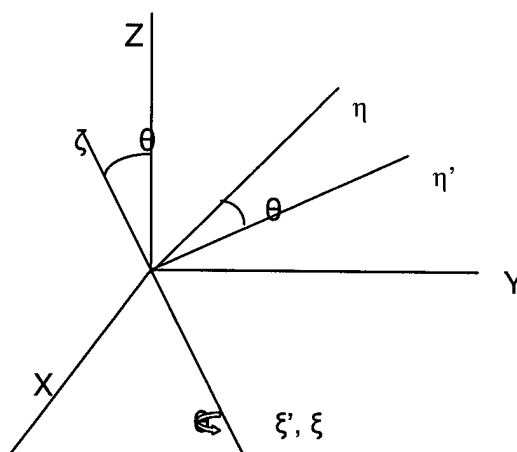
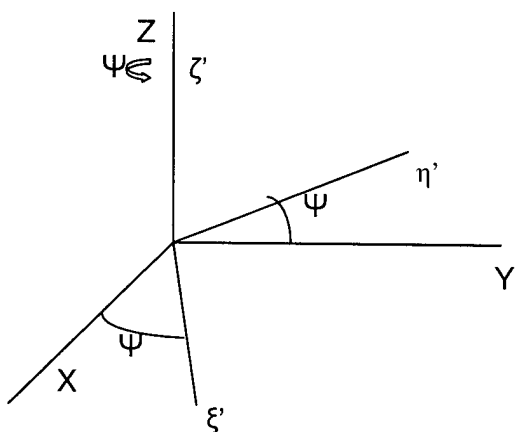
$$\begin{bmatrix} \hat{\eta}' \\ \eta' \\ \zeta' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \text{sen } \psi & 0 \\ -\text{sen } \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \delta \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

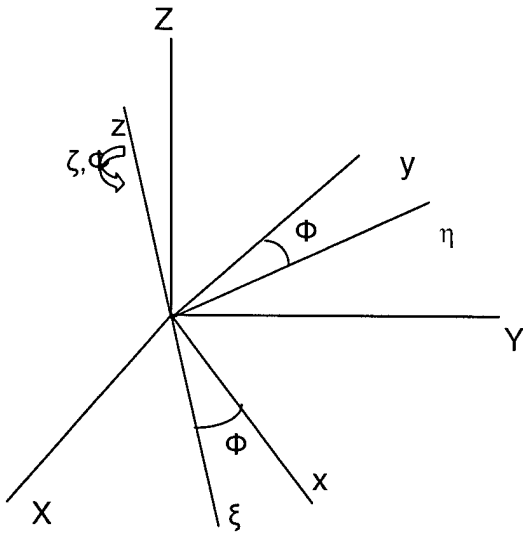
$$\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \text{sen } \theta \\ 0 & -\text{sen } \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon' \\ \eta' \\ \zeta' \end{bmatrix} = \gamma \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon' \\ \eta' \\ \zeta' \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \text{sen } \phi & 0 \\ -\text{sen } \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = \beta \cdot \gamma \cdot \delta \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

Agora é possível fazer a transformação do sistema X,Y,Z para o sistema x,y,z por combinando a seqüência de rotações, isto é:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \beta \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = \beta \cdot \gamma \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon' \\ \eta' \\ \zeta' \end{bmatrix} = \beta \cdot \gamma \cdot \delta \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \alpha \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$





$$\alpha = \begin{bmatrix} (\cos \phi \cdot \cos \psi - \sin \phi \cdot \cos \theta \cdot \sin \psi) & (\cos \phi \cdot \sin \psi + \sin \phi \cdot \cos \theta \cdot \cos \psi) & (\sin \phi \cdot \sin \theta) \\ (-\sin \phi \cdot \cos \psi - \cos \phi \cdot \cos \theta \cdot \sin \psi) & (-\sin \phi \cdot \sin \psi + \cos \phi \cdot \cos \theta \cdot \cos \psi) & (\cos \phi \cdot \sin \theta) \\ (\sin \theta \cdot \sin \psi) & (-\sin \theta \cdot \cos \psi) & (\cos \theta) \end{bmatrix}$$

A taxa de variação dos Ângulos de Euler são dadas por  $\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\phi}$ . O vetor genérico da velocidade angular pode ser escrito na seguinte forma:

$$\omega = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

Onde:

$$\omega_x = \dot{\theta} \cos \phi + \dot{\psi} \sin \theta \sin \phi$$

$$\omega_y = -\dot{\theta} \sin \phi + \dot{\psi} \sin \theta \cos \phi$$

$$\omega_z = \dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta$$

ou

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ \sin \theta \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \cos \theta & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}$$

$\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\phi}$  são obtidos da seguinte forma:

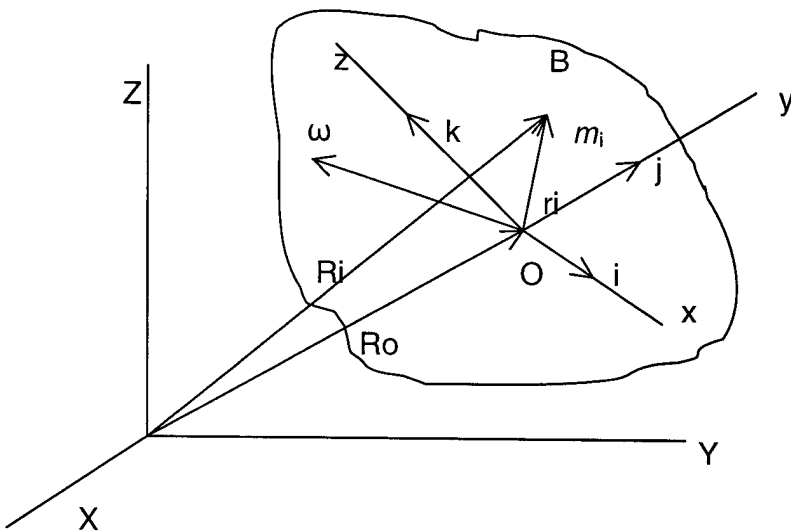
$$\begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sin \theta} \cdot \begin{bmatrix} \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ \cos \phi \cdot \sin \theta & -\sin \phi \cdot \sin \theta & 0 \\ -\sin \phi \cdot \cos \theta & -\cos \phi \cdot \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

#### 4) Movimento do Corpo Rígido – Equações da Dinâmica

##### 4.1) Quantidade de Movimento Angular (Angular Momentum)

Um tratamento básico do movimento da partícula no espaço deveria ser balanceado com introdução à dinâmica de atitude e as equações fundamentais do corpo rígido. Isto será feito por desenvolvimento de uma expressão para o momento angular de um corpo rígido qualquer. Considere a situação da figura abaixo, que o corpo B contém fixado o sistema de coordenadas  $x, y, z$ , e como centro de massa o ponto O. A partícula de massa  $m_i$  está localizada no corpo por  $r_i$  e tem velocidade absoluta da forma:

$$v_i = v_o + \omega \times r_i + [V_i]_B$$



Onde,  $v_o = \dot{R}_o$ ,  $v_i = \dot{R}_i$  e  $[V_i]_B = 0$ , porque B é rígido. Aplicando a definição de momento angular, para de O até  $m_i$  fica:

$$h_{oi} = r_i \times m_i v_i = r_i \times m_i (V_o + \omega \times r_i)$$

Se o corpo está através de um largo número de pequenas massas, o momento total de O até B é:

$$h_o = \sum_i h_{oi} = \sum_i r_i \times m_i (V_o + \omega \times r_i)$$

que é mais convenientemente escrito como

$$h_o = \sum_i r_i \times (\omega \times r_i) m_i - V_o \times \sum_i m_i r_i$$

Todavia, o centro de massa é definido como um ponto que:

$$\sum_i m_i r_i = 0$$

Isto é:

$$h_o = \sum_i r_i \times (\omega \times r_i) m_i$$

que é verdadeiro se  $V_o = 0$ , isto é, se o ponto O está fixado no espaço. Agora, se  $m_i$  for uma somatória de pequenos diferenciais de massa, a expressão fica da seguinte forma:

$$h_o = \int_B r \times (\omega \times r) dm$$

Isto é válido escrevendo os produtos vetoriais nos componentes x, y, z. Primeiro, considere o vetor  $\omega \times r$ ,

$$\omega \times r = (\omega_y z - \omega_z y) i + (\omega_z x - \omega_x z) j + (\omega_x y - \omega_y x) k$$

Note que os três coeficientes são os componentes de x, y, z do momento linear de uma unidade de massa com relação a O, respectivamente. Integrando completamente a expressão, fica:

$$r \times (\omega \times r) = [\omega_x (y^2 + z^2) - \omega_y (xy) - \omega_z (xz)] i + [-\omega_x (xy) + \omega_y (x^2 + z^2) - \omega_z (yz)] j + [-\omega_x (xz) - \omega_y (yz) + \omega_z (x^2 + y^2)] k$$

Cada coeficiente aqui é o componente do momento angular de x, y ou z. A integração sobre as dimensões do corpo é estritamente uma função da distribuição de massas, enquanto os componentes da velocidade angular são independentes da forma do corpo e localização interna. Então, qualquer corpo rígido dado pode ser caracterizado como um grupo de constantes, para o



propósito de estudo do momento angular e, ultimamente, movimento de atitude. Estas constantes são definidas como:

$$I_x = \int_B (y^2 + z^2) dm, \quad I_y = \int_B (x^2 + z^2) dm, \quad I_z = \int_B (x^2 + y^2) dm,$$

$$I_{xy} = \int_B (xy) dm, \quad I_{xz} = \int_B (xz) dm, \quad I_{yz} = \int_B (yz) dm,$$

Onde  $I_x, I_y, I_z$ , são os momentos de inércia do corpo em relação aos eixos  $x, y, z$ , respectivamente, e  $I_{xy}, I_{xz}, I_{yz}$  são os produtos de inércia de B. Note que  $I_{xy} = I_{yx}$ , e  $I_{xz} = I_{zx}$ , e  $I_{yz} = I_{zy}$ , e que os produtos de inércia devem ser positivos ou negativos, enquanto que os momentos de inércia nunca podem ser negativos. Finalmente, a equação do momento angular de B na equação fica:

$$h_o = h_x i + h_y j + h_z k$$

onde os components deste vetor são definidos como:

$$h_x = I_x \omega_x - I_{xy} \omega_y - I_{xz} \omega_z$$

$$h_y = -I_{xy} \omega_x + I_y \omega_y - I_{yz} \omega_z$$

$$h_z = -I_{xz} \omega_x - I_{yz} \omega_y + I_z \omega_z$$

Na forma matricial podem ser escritos como:

$$h_o = \begin{bmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_y & I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

A matriz contendo os momentos e produtos de inércia é denominada I. Da mesma forma, os outros termos da equação são denominados h e  $\omega$ . Assim, a equação fica na forma simples:

$$h = I \cdot \omega$$

#### 4.2) Equação de Euler (Derivada Temporal da Quantidade de Movimento Angular)

Uma discussão de momento do corpo rígido é seguida pelo desenvolvimento das equações gerais de movimento de atitude. Começando, referindo-se a equação:

$$M_o = \dot{h}_o$$

para reação de um torque sobre um ponto, a taxa de variação do momento angular relativo a este ponto. O resultado é válido para um corpo rígido quando o ponto de interesse é também fixado no espaço ou o centro de massa. Torques devem ser aplicados através do centro de massa então:

$$M = \frac{dh}{dt}$$

$$M = \left[ \frac{dh}{dt} \right]_b + \omega \times h$$

$$M = (\dot{h}_x + \omega_y h_z - \omega_z h_y) i + (\dot{h}_y + \omega_z h_x - \omega_x h_z) j + (\dot{h}_z + \omega_x h_y - \omega_y h_x) k$$

A equação acima representa as três equações diferenciais aplicadas aos componentes x, y, z para o momento angular

$$M_x = \dot{h}_x + \omega_y h_z - \omega_z h_y$$

$$M_y = \dot{h}_y + \omega_z h_x - \omega_x h_z$$

$$M_z = \dot{h}_z + \omega_x h_y - \omega_y h_x$$

Estas equações são conhecidas como equações do Momento de Euler. Então o movimento geral de atitude de um corpo rígido pode ser modelado por estas três equações. Entretanto, não é uma solução geral, porque M não está especificado.

#### 4.3) Estudo do Movimento Livre de Torque

Neste tópico será estudado o Torque Livre de movimento de atitude, somente em casos em que  $M = 0$ . Primeiro, para simplificar as equações, assumamos que o sistema de referência do corpo coincida com o eixo principal:

$$M_1 = I_1 \dot{\omega}_1 + \omega_2 \omega_3 (I_3 - I_2)$$

$$M_2 = I_2 \dot{\omega}_2 + \omega_1 \omega_3 (I_1 - I_3)$$

$$M_3 = I_3 \dot{\omega}_3 + \omega_1 \omega_2 (I_2 - I_1)$$

Então, iguale todos os componentes do torque igual a zero e considere o simples caso do eixo de simetria, que requer que  $I_1 = I_2$ :

$$I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_1)\omega_2\omega_3 = 0$$

$$I_1\dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1)\omega_1\omega_3 = 0$$

$$I_3\dot{\omega}_3 = 0$$

Da última equação,  $\omega_3 = n = \text{constante}$

Isto permite a linearização das outras duas equações:

$$\dot{\omega}_1 + \lambda\omega_2 = 0$$

$$\dot{\omega}_2 - \lambda\omega_1 = 0$$

Onde  $\lambda$  é definido como:

$$\lambda = \left( \frac{I_3 - I_1}{I_1} \right) n$$

Para resolver estas equações simultaneamente, multiplique a primeira por  $\omega_1$  e a segunda por  $\omega_2$  e some os resultados:

$$\omega_1\dot{\omega}_1 + \omega_2\dot{\omega}_2 = 0$$

isto é:

$$\omega_1 d\omega_1 + \omega_2 d\omega_2 = 0$$

Integrando a expressão:

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = \text{constante}$$

Isto é reconhecido como o quadrado dos componentes  $w$ , no plano 1,2, ou seja:

$$\omega_1^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2$$

Combinando com a equação de  $\omega_3$  fica:

$$\omega^2 = \omega_{12}^2 + n^2 = \text{constante}$$

Lembrando que  $h = \text{constante}$  porque  $M = 0$ , e note que  $h_1 = I_1\omega_1$ ,  $h_2 = I_1\omega_2$ ,  $h_3 = I_3\omega_3 = I_3n$ , isto evidencia que o componente de  $h$  no plano 1,2 é :

$$h_{12} = I_1(\omega_1 e_1 + \omega_2 e_2) = I_1\omega_{12}$$

e  $h$  fica:

$$h = I_1\omega_{12} + I_3\omega_3e_3$$

Isto implica que os três vetores,  $h$ ,  $\omega$  e  $e_3$  se encontram em um plano todas as vezes, porque  $\omega_{12}$  e  $h_{12}$  são paralelos e  $\omega_3$ ,  $h_3$  e  $e_3$  são paralelos. Além disso,  $h$  é fixado no espaço, o que requer que este plano rotacione sobre  $h$ , a menos que  $\omega$  seja paralelo a  $h$ . Em geral,  $\omega$  e  $h$  não são colineares e 2 cones devem ser usados para descrever o movimento. A trajetória de  $\omega$  cria um corpo cônico e um espaço cônico como representado para um corpo cuja o eixo de simetria coincide com o eixo maior.

## 5) Estudo de Estabilidade

O objetivo desta parte do trabalho é investigar a Estabilidade do movimento através de uma aproximação analítica. O termo Estabilidade é usado para descrever o movimento de torque livre.

O movimento é estável se a quantidade de distúrbios de amplitudes tiver valores iniciais. Então, se  $\omega = \omega_0 e_1$ , com solução  $\omega_1 = \omega_0, \omega_2 = \omega_3 = 0$ , esta é a representação de um caso geral, onde  $I_1, I_2$  e  $I_3$  não são especificados. Se há perturbação no movimento, então  $\omega_1 = \omega_0 + \varepsilon$  com  $\omega_2, \omega_3$  pequenos em relação a  $\varepsilon$  e  $\omega_0$  é constante.

As equações do movimento vem:

$$I_1\dot{\varepsilon} = (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3$$

$$I_2\dot{\omega}_2 = (I_3 - I_1)(\omega_0 + \varepsilon)\omega_3$$

$$I_3\dot{\omega}_3 = (I_1 - I_2)(\omega_0 + \varepsilon)\omega_2$$

Termos da ordem de  $\varepsilon^2$  são altos e devem ser ignorados. Então,  $\varepsilon$  é constante. As equações podem ser reescritas da seguinte forma:

Diferenciando fica:

$$\omega_2 + \left[ \frac{(I_1 - I_2)(I_1 - I_3)}{I_2 I_3} \cdot \omega_0 \right] \omega_2 = 0$$

$$\omega_3 + \left[ \frac{(I_1 - I_2)(I_1 - I_3)}{I_2 I_3} \cdot \omega_0 \right] \omega_3 = 0$$

Ambas as equações representam simples oscilações harmônicas, com a solução geral:

$$\omega_1 = \Omega_{j1} e^{i\lambda t} + \Omega_{j2} e^{\lambda t}$$

onde  $\lambda$  é definido como:

$$\lambda = \sqrt{\frac{(I_1 - I_2)(I_1 - I_3) \cdot \omega^2}{I_2 I_3}}$$

Se  $\lambda$  é imaginário,  $\omega_j$  divergirá e o movimento será instável. Então  $\lambda$  deve ter valor real para estabilidade, e  $\omega_j$  oscilará, satisfazendo os produtos  $(I_1 - I_2)(I_1 - I_3) > 0$ . O movimento é estável, no primeiro eixo, quando  $I_1 > I_2$  e  $I_1 > I_3$  ou quando  $I_1 < I_2$  e  $I_1 < I_3$ . Assim, o movimento sobre o eixo principal maior ou menor é estável, mas o movimento sobre o eixo intermediário é instável.

## 6) Resultados obtidos até o momento

Foram estudados, os procedimentos necessários para a determinação da Atitude de Satélites Artificiais, deduzindo equações e iniciando-se com a transformação do sistema de referência inercial para o orbital, utilizando os ângulos de Euler (matrizes de rotação) e também quatérnions (Parâmetros de Euler). Também foram deduzidas as equações da Quantidade de Movimento Angular (Angular Momentum), Equações de Euler (Derivada Temporal da Quantidade de Movimento Angular) e iniciado o estudo do Movimento Livre de Torque.

Uma próxima etapa do trabalho seria efetuar uma simulação computacional para a verificação dos resultados obtidos através de recursos computacionais (ambiente Matlab).

## BIBLIOGRAFIA:

<http://www.encyclopedia.com.br/MED2000/pedia98a/a1205yo.htm>

<http://www.fsa.com.br/glossario-FSA.htm>

<http://www.skal.planet.net/index.html>

Kaplan, M.H. "Modern Spacecraft, Dynamics & Control, John Wiley & Sons, N. York, 1976".

Hughes, C. "Spacecraft Attitude Dynamics, John Wiley & Sons, N. York, 1986".

Fonseca, Ijar Milagre. "Procedimentos para a Estabilização passiva de um Satélite, sob Condições Iniciais Críticas – VIII-COBEM, Dez 1985, INPE / Cnpq".

Moro, João. "Simulação do Movimento e de Observações de Atitude para Satélites Artificiais Terrestres – INPE-2649-RPI/076, Fev 1983".