

ESTABILIDADE DO MOVIMENTO ROTACIONAL EM SATÉLITES DUAL-SPIN COM UM AMORTECEDOR DE NUTAÇÃO AXIAL NA PLATAFORMA

Alex Thaumaturgo Dias e Mário César Ricci

(*) Programa de Iniciação Científica, PIBIC-CNPq/INPE

e-mails: alexthaumaturg@bol.com.br; mcr@dem.inpe.br

Esse trabalho tem Como objetivo fazer uma investigação sobre a estabilidade do movimento de um satélite *dual-spin* com um amortecedor de nutação axial. O estudo da dinâmica do movimento de um satélite *dual-spin* é um caso especial de muito interesse na área de engenharia e tecnologia de satélites. Alguns satélites de sensoriamento remoto e de comunicação possuem partes rotativas que podem ser representadas pelo esquema *dual-spin*. Essa denominação é dada a satélites que combinam as vantagens de uma plataforma orientada e de um rotor encarregado de manter a rigidez giroscópica. Para efeito de estabilização em torno do eixo de menor momento de inércia um dispositivo dissipador de energia deve ser incluído na parte orientada.. As equações do movimento foram obtidas através da energia cinética total do sistema e utilizando as equações de Lagrange para coordenadas generalizadas e para quase-coordenadas.

Em muitos casos, que ocorrem na prática, a plataforma gira em torno do eixo z , que é o eixo axial do rotor. Esse eixo faz parte do sistema x, y, z que é fixo na plataforma a qual gira com uma velocidade angular ω_p (constante) em torno de z . Em muitos casos práticos ω_p é a taxa orbital que permite o apontamento contínuo da plataforma em relação à Terra (essa condição é a nominal e supõe-se também que $\omega_x = \omega_y = 0$). O rotor deve girar com relação à plataforma com uma velocidade constante Ω_r , de tal forma que a velocidade angular absoluta do rotor em torno do eixo z , será $\omega_r = \omega_p + \Omega_r$. Ora, o módulo do momento angular total do satélite é, então, $h = I_p \omega_p + I_r \omega_r$, onde I_p e I_r são os momentos de inércia da plataforma e do rotor em relação ao eixo do rotor (eixo z). É possível mostrar, para um satélite *dual-spin* com um amortecedor tipo massa-mola na plataforma, que para o movimento ser estável nessas condições é necessário observar as seguintes condições de estabilidade

$$h - I_x \omega_p > 0, \quad h - I_y \omega_p > 0,$$

onde I_x e I_y são os momentos de inércia do satélite em relação aos eixos x e y .

Algumas conclusões importantes desse trabalho são as seguintes:

- a) Em muitas aplicações a plataforma não possui giro nenhum ($\omega_z = \omega_p = \omega_x = \omega_y = 0$). Então a condição de estabilidade se torna $h > 0$. Essa condição pressupõe amortecimento somente na plataforma (um amortecedor de nutação deve ser colocado na plataforma). Observe que a condição não especifica qualquer relação de inércias. Logo, o eixo z pode ser, por exemplo, o eixo de menor momento de inércia do satélite.
- b) Suponha que o rotor não gira absolutamente ($\omega_r = 0$) e a plataforma, com amortecedor, gira com ω_p . A estabilidade requer

$$I_p - I_x > 0, \quad I_p - I_y > 0,$$

que é análoga a regra do giro em torno do eixo de maior momento de inércia (o momento de inércia da plataforma em torno do eixo de giro z deve ser maior que os momentos de inércia do satélite em torno dos eixos x e y).

- c) Se ambos, plataforma e rotor, giram com velocidades diferentes, tem-se

$$I_r \omega_r + \omega_p (I_p - I_x) > 0, \quad I_r \omega_r + \omega_p (I_p - I_y) > 0.$$

Se ω_r e ω_p têm o mesmo sinal verifica-se que é necessário uma rotação mínima no rotor para alcançar a estabilidade em torno do eixo de menor momento de inércia. Se ω_r e ω_p têm sinais opostos pode acontecer que as condições para a estabilidade não sejam atendidas mesmo que I_z seja o eixo de maior momento de inércia. Então, é possível que um satélite *dual-spin* seja instável mesmo girando em torno de seu eixo de maior momento de inércia.

INPE - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais

DMC - Divisão de Mecânica Espacial e Controle

**PIBIC/CNPq - Programa de Bolsa de Iniciação
Científica-**

RELATÓRIO FINAL

Título do Projeto:

**INSTABILIDADES EM UM SATÉLITE *DUAL-SPIN* COM UM
AMORTECEDOR DE NUTAÇÃO AXIAL**

Bolsista:

Alex Thaumaturgo Dias

Orientador:

Mário César Ricci

SUMÁRIO

Lista de Figuras	Página 2
Lista de Símbolos	Página 3
Capítulo 1	Página 4
Capítulo 2	Página 5
Capítulo 3	Página 10
Capítulo 4	Página 17
Capítulo 5	Página 25
Capítulo 6	Página 28
Capítulo 7	Página 31
Capítulo 8	Página 35
Capítulo 9	Página 36

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 - Representação de um sistema de partículas

Figura 3.1 - Corpo rígido girando com velocidade angular ω .

Figura 3.2 - Diferenciação de um vetor \mathbf{r} referenciado a um sistema rotativo.

LISTA DE SÍMBOLOS

- R** - Raio do centro de massa
- r_j** - Raio de cada partícula do sistema
- M** - Massa total do sistema
- m_j** - Massa de cada partícula
- F_j** - Força externa aplicada em cada partícula
- f_{jk}** - Força interna entre as partículas
- δ_{jk}** - Delta de Kronecker
- δ_{jk}^*** - Delta de Kronecker complementar
- P** - Momento Linear
- L** - Momento Angular
- N** - Torque
- T** - Energia Cinética
- x** - Referencial Cartesiano
- y** - Referencial Cartesiano
- z** - Referencial Cartesiano
- \hat{u}** - Velocidade Angular
- v** - Velocidade Linear
- Δt** - Variação do Tempo
- I** - Momento de Inércia
- δx** - Deslocamento Virtual
- W** - Trabalho
- q_k** - Coordenada Generalizada
- U** - Energia Potencial

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

O objetivo desse trabalho é a investigação de fenômenos não-lineares no movimento de um satélite *dual-spin* com um amortecedor de nutação axial. O problema envolve o estudo do movimento de um corpo com partes internas móveis (movimento da massa do amortecedor e rotações angulares da plataforma e do rotor). Será verificado o comportamento do sistema quando um torque senoidal for aplicado ao rotor (que pode ser uma roda de reação, por exemplo). O movimento será estudado por meio de diagramas de bifurcação, funções temporais, espaço de fase, espectro de potência, mapeamentos de Poincaré, expoentes característicos de Liapunov e dimensão de correlação.

Numa primeira fase, foi feita uma revisão bibliográfica e estudos preliminares, como *Energia Cinética de um sistemas de pontos materiais*, *Energia Cinética de um corpo rígido*, *Energia Cinética rotacional de um corpo rígido*, *Momentos linear e angular*, *Equações de Euler do movimento e os Fundamentos da Mecânica Analítica*, obtendo informações suficientes e sólidas, para que na segunda fase possa ser feita assim a modelagem matemática do sistema.

CAPÍTULO 2

SISTEMA DE PARTÍCULAS

Nesse capítulo são apresentadas as equações do *momento linear* e do *momento angular* para um sistema de partículas à partir das Leis de Newton do movimento. Também, de especial interesse para os objetivos dessa dissertação, é a obtenção de uma generalização da fórmula para a energia cinética do sistema, que permite que a energia cinética seja calculada em relação a um referencial arbitrário possuindo um movimento arbitrário. Para facilitar a leitura e a compreensão do leitor que não está familiarizado com o assunto, uma exposição detalhada foi realizada e, por essa razão, muito do que está aqui exposto, foi retirado de livros textos, mais especificamente do livro *Methods of Analytical Dynamics* de Leonard Meirovitch (1970).

As Leis de Newton do movimento foram formuladas para partículas únicas. Entretanto, tais leis podem ser estendidas, sem dificuldade, para um sistema de partículas assim como para corpos com dimensões finitas. Ao estender os conceitos para sistemas de partículas deve-se distinguir as forças entre *externas* e *internas*. Forças externas são aquelas devidas às fontes que estão fora do sistema, e as forças internas são devidas às interações entre as partículas.

Considere um sistema de n partículas de massa m_j ($j=1, \dots, n$) como mostrado na Figura 2.1. A posição do *centro de massa* é definida por

$$\mathbf{R} \equiv \frac{1}{M} \sum_{j=1}^n m_j \mathbf{r}_j, \quad (2.1)$$

onde $M \equiv \sum m_j$ é a massa total do sistema. Fisicamente o centro de massa pode ser interpretado como uma posição média do sistema de partículas e, no caso de um campo gravitacional uniforme, o centro de massa coincide com o *centro de gravidade*.

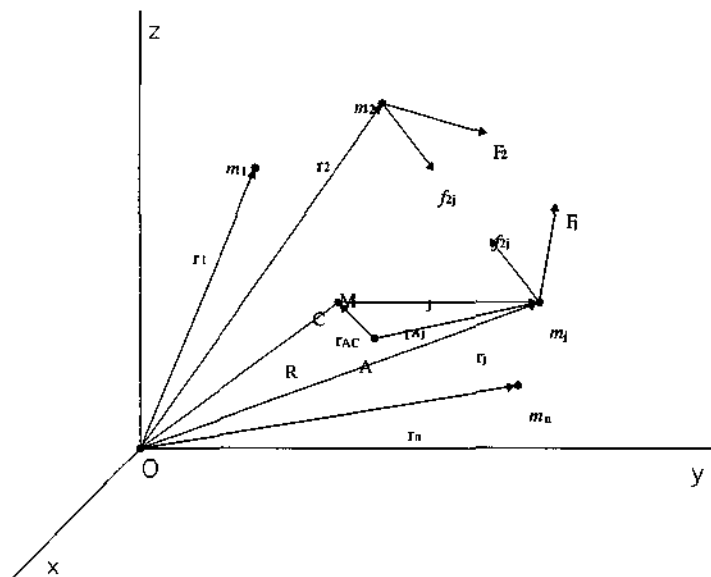


Figura 2.1- Representação de um sistema de partículas

Seja \mathbf{F}_j a força externa que atua sobre um partícula j e \mathbf{f}_{jk} a força interna que a partícula k exerce sobre a partícula j . Aplicando a segunda Lei de Newton na partícula j tem-se

$$\mathbf{F}_j + \sum_{k=1}^n \delta_{jk}^* \mathbf{f}_{jk} = m_j \ddot{\mathbf{r}}_j, \quad (2.2)$$

onde δ_{jk}^* é denominado de *delta de Kronecker complementar*, definido por

$$\delta_{jk}^* \equiv 1 - \delta_{jk} \equiv \begin{cases} 0 & \text{se } j = k \\ 1 & \text{se } j \neq k. \end{cases} \quad (2.3)$$

O símbolo δ_{jk} na Equação (2.3) representa o *delta de Kronecker ordinário* definido por

$$\delta_{jk} \equiv \begin{cases} 1 & \text{se } j = k \\ 0 & \text{se } j \neq k. \end{cases}$$

O delta de Kronecker complementar foi utilizado na Equação (2.2) considerando o fato de que não existe força de interação de uma partícula sobre si mesma. Aplicando a segunda Lei de Newton, definida na Equação (2.2), para todo o sistema obtém-se

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{F}_j + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \delta_{jk}^* \mathbf{f}_{jk} = \sum_{j=1}^n m_j \ddot{\mathbf{r}}_j. \quad (2.4)$$

Em virtude da terceira Lei de Newton

$$\mathbf{f}_{jk} = -\mathbf{f}_{kj}, \quad (2.5)$$

e tem-se que o somatório duplo da Equação (2.4) se reduz a zero indicando que as forças internas do sistema se anulam. Além do mais, seja \mathbf{F} a resultante das forças externas que agem sobre o sistema

$$\mathbf{F} \equiv \sum_{j=1}^n \mathbf{F}_j. \quad (2.6)$$

Derivando a Equação (2.1) duas vezes em relação ao tempo tem-se

$$\sum_{j=1}^n m_j \ddot{\mathbf{r}}_j = M \ddot{\mathbf{R}}. \quad (2.7)$$

Introduzindo as Equações (2.5), (2.6) e (2.7) na Equação (2.4) Obtém-se

$$\mathbf{F} = M \ddot{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{P}}, \quad (2.8)$$

onde

$$\mathbf{P} \equiv M\dot{\mathbf{R}} \quad (2.9)$$

é o vetor *momento linear* do sistemas de partículas. A Equação (2.8) indica que o movimento do centro de massa do sistema de partículas é igual ao movimento de um corpo fictício de massa M concentrado no centro de massa, onde a resultante das forças externas atua. As forças internas não influenciam o movimento do centro de massa. Por exemplo, o centro de massa de um projétil explosivo livre de forças externas, como resistência do ar e forças gravitacionais, continua, após a explosão, a mover-se ao longo da trajetória original. Esta afirmação pode ser colocada mais formalmente da seguinte maneira: *na ausência de quaisquer forças externas atuando sobre as partículas, $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, o momento linear do sistema será conservado, $\mathbf{P} = M\dot{\mathbf{R}} = \text{const}$.* Este é o *teorema da conservação do momento linear para um sistema de partículas*, e assume que a massa total do sistema não varia com o tempo.

O *momento angular* de um sistema de partículas em relação a qualquer ponto móvel A é definido por

$$\mathbf{L}_A \equiv \sum_{j=1}^n \mathbf{L}_{Aj} \equiv \sum_{j=1}^n \mathbf{r}_{Aj} \times m_j \dot{\mathbf{r}}_j. \quad (2.10)$$

Derivando a Equação (2.10) em relação ao tempo tem-se

$$\dot{\mathbf{L}}_A = \sum_{j=1}^n \dot{\mathbf{r}}_{Aj} \times m_j \dot{\mathbf{r}}_j + \sum_{j=1}^n \mathbf{r}_{Aj} \times m_j \ddot{\mathbf{r}}_j. \quad (2.11)$$

Pela Figura (2.1) tem-se

$$\mathbf{r}_{Aj} = \mathbf{r}_{AC} + \boldsymbol{\rho}_j, \quad \mathbf{r}_j = \mathbf{R} + \boldsymbol{\rho}_j, \quad (2.12)$$

onde \mathbf{r}_{AC} é o raio vetor indo do ponto A até o centro de massa C e $\boldsymbol{\rho}_j$ é o raio vetor que liga o centro de massa C à partícula j . Substituindo as Equações (2.2) e (2.12) na Equação (2.11) tem-se

$$\dot{\mathbf{L}}_A = \sum_{j=1}^n (\dot{\mathbf{r}}_{AC} + \dot{\boldsymbol{\rho}}_j) \times m_j (\dot{\mathbf{R}} + \dot{\boldsymbol{\rho}}_j) + \sum_{j=1}^n \mathbf{r}_{Aj} \times \mathbf{F}_j. \quad (2.13)$$

Pela definição de centro de massa, $\sum m_j \boldsymbol{\rho}_j = 0$. Logo, a Equação (2.13) reduz-se a

$$= M\dot{\mathbf{r}}_{AC} \times \dot{\mathbf{R}} + \mathbf{N}_A, \quad (2.14)$$

onde reconhece-se \mathbf{N}_A como o torque produzido pelas forças externas em relação ao ponto A . Na eventualidade do ponto A coincidir com a origem fixa O , $\mathbf{r}_{AC} = \mathbf{R}$, e a Equação (2.14) reduz-se a forma simplificada

$$\dot{\mathbf{L}}_O = \mathbf{N}_O. \quad (2.15)$$

Quando o ponto A coincide com o centro de massa do móvel C , $\mathbf{r}_{AC} = \mathbf{0}$, e a Equação (2.14) torna-se

$$\dot{\mathbf{L}}_C = \mathbf{N}_C. \quad (2.16)$$

Portanto, a taxa de mudança do momento angular com relação à origem fixa O , ou em relação ao centro de massa C , é igual a resultante do torque externo em relação a O ou C , respectivamente.

Da equação (2.15) conclui-se que se o torque externo em torno do ponto fixo O é zero, o momento angular do sistema de partículas em relação a O é conservado. Conclusão similar pode ser obtida no que concerne ao momento angular em torno do centro de massa móvel C . Essas duas afirmações representam o *teorema da conservação do momento angular para um sistema de partículas* em relação a um ponto fixo e em relação ao centro de massa móvel, respectivamente.

Há que se considerar ainda o *momento angular aparente* que é o momento angular visto por um observador localizado no centro de massa, definido por

$$\mathbf{L}'_C \equiv \sum_{j=1}^n \boldsymbol{\rho}_j \times m_j \dot{\boldsymbol{\rho}}_j. \quad (2.17)$$

No caso de A coincidir com C os momentos angular real e aparente se igualam e a Equação (2.16) pode ser escrita como

$$\dot{\mathbf{L}}'_C = \mathbf{N}_C. \quad (2.18)$$

Se a natureza do problema requer as equações do momento sejam escritas em relação a um ponto móvel, a escolha do centro de massa parece muito promissora pois, as equações do momento, em relação ao centro de massa, possuem a mesma forma simples daquelas escritas em relação a um ponto fixo qualquer.

Em problemas de dinâmica de atitude de satélites com partes móveis, talvez seja mais conveniente escrever as equações de momento em relação a um ponto arbitrário possuindo movimento arbitrário em relação ao centro de massa do sistema. É o caso que é abordado nessa dissertação. Aqui um referencial fixo num corpo, centrado em A , é adotado e observa-se que a posição de A , em relação ao centro de massa (considerado fixo), assim como os momentos principais de inércia do sistema em relação a A , variam com o movimento das partes móveis. Adota-se, ao invés da definição dada na Equação (2.10), a seguinte definição para o momento angular do sistema de partículas com relação ao ponto móvel A

$$\mathbf{L}_A \equiv \sum_{j=1}^n \mathbf{r}_{Aj} \times m_j \dot{\mathbf{r}}_{Aj}, \quad (2.19)$$

ligeiramente diferente, pois se considera aqui a velocidade de m_j relativamente ao ponto A , ao invés da velocidade absoluta $\dot{\mathbf{r}}_j$.

Especial atenção deve ser dada a determinação da *energia cinética* do sistema de partículas dada por

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n m_j \dot{\mathbf{r}}_j \cdot \dot{\mathbf{r}}_j . \quad (2.20)$$

Substituindo a Equação (12) na Equação (20) tem-se

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n m_j (\dot{\mathbf{R}} + \dot{\boldsymbol{\rho}}_j) \cdot (\dot{\mathbf{R}} + \dot{\boldsymbol{\rho}}_j) \\ &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{R}} \cdot \dot{\mathbf{R}} \sum_{j=1}^n m_j + \dot{\mathbf{R}} \cdot \sum_{j=1}^n m_j \dot{\boldsymbol{\rho}}_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n m_j \dot{\boldsymbol{\rho}}_j \cdot \dot{\boldsymbol{\rho}}_j \\ &= \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n m_j \dot{\boldsymbol{\rho}}_j^2 . \end{aligned} \quad (2.21)$$

Portanto, tem-se que a energia cinética de um sistema de partículas é igual a energia cinética considerando toda massa concentrada no centro de massa mais a energia cinética associada ao movimento das partículas em relação centro de massa.

Para fins dessa dissertação é conveniente obter uma generalização para a energia cinética do sistema escrevendo a fórmula da energia cinética em relação a um referencial arbitrário possuindo um movimento arbitrário (ponto A, por exemplo). Como já foi visto, pela definição de centro de massa, verifica-se que o segundo termo da Equação (2.21) se anula. Substituindo $\boldsymbol{\rho}_j$ na Equação (2.21) pela expressão dada na Equação (2.12) obtém-se

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n m_j (\dot{\mathbf{r}}_{Aj} - \dot{\mathbf{r}}_{AC}) \cdot (\dot{\mathbf{r}}_{Aj} - \dot{\mathbf{r}}_{AC}) \\ &= \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n m_j \dot{r}_{Aj}^2 - \sum_{j=1}^n m_j \dot{\mathbf{r}}_{Aj} \cdot \dot{\mathbf{r}}_{AC} + \frac{1}{2} M \dot{r}_{AC}^2 . \end{aligned} \quad (2.22)$$

Substituindo \mathbf{r}_{Aj} na Equação (2.22) pela expressão dada na Equação (2.12) obtém-se

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n m_j \dot{r}_{Aj}^2 - \sum_{j=1}^n m_j (\dot{\mathbf{r}}_{AC} + \dot{\boldsymbol{\rho}}_j) \cdot \dot{\mathbf{r}}_{AC} + \frac{1}{2} M \dot{r}_{AC}^2 \\ &= \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n m_j \dot{r}_{Aj}^2 - \frac{1}{2} M \dot{r}_{AC}^2 - \sum_{j=1}^n m_j \dot{\boldsymbol{\rho}}_j \cdot \dot{\mathbf{r}}_{AC} \\ &= \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{R}}^2 - \frac{1}{2} M \dot{r}_{AC}^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n m_j \dot{r}_{Aj}^2 . \end{aligned} \quad (2.23)$$

O primeiro termo na Equação (2.23) representa a energia cinética do sistema de partículas assumindo que toda a massa está concentrada no centro de massa. O segundo termo representa uma correção que está associada ao movimento do sistema de referência, centrado em A, em relação ao centro de massa e o terceiro termo é a energia cinética do sistema no seu movimento relativo ao sistema de referência centrado em A.

CAPÍTULO 3

SISTEMA CORPO RÍGIDO

Considere um corpo rígido de massa m com x , y e z , sendo um referencial cartesiano, fixo no corpo, com a origem em O , como mostrado na Figura 1. O corpo pode ser considerado composto por um grande número de partículas de massa m_i , onde a distância entre duas partículas quaisquer é constante. O corpo também pode ser representado por um sólido contínuo onde, para cada ponto, define-se um elemento diferencial de massa, que pode ser interpretado como a massa de uma partícula.

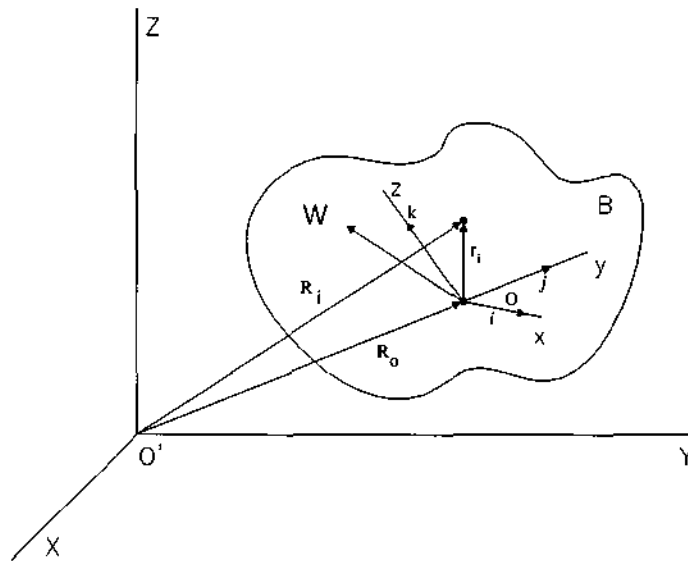


Figura 3.1 - Corpo rígido girando com velocidade angular ω .

Considere, agora, uma das partículas do corpo rígido movendo-se livremente no espaço. Há três graus de liberdade associado ao movimento da partícula. Considerando uma segunda partícula do corpo rígido, esta somente adiciona mais dois graus de liberdade ao cômputo, uma vez que é necessário descontar, dos três graus de liberdade associado ao movimento dessa segunda partícula, um grau de liberdade devido ao vínculo cinemático expresso pelo fato de que a distância entre as duas partículas é considerada constante. A adição de uma terceira partícula somente acrescenta mais um grau de liberdade, pois devem ser descontadas as distâncias às duas primeiras par. Qualquer outra partícula não adiciona nenhum grau de liberdade, pois as distâncias às três primeiras partículas são constantes. Logo, o movimento de três partículas do corpo rígido determina o movimento completamente, com a conclusão óbvia, de que o corpo rígido tem seis graus de liberdade.

É conveniente escolher as seis coordenadas que descrevem o movimento do corpo rígido como sendo três translações de um dado ponto do mesmo e três rotações em torno do mesmo ponto. É com essa finalidade que se adota um referencial chamado *eixos do corpo*, que é fixo no mesmo e o movimento é descrito em termos das translações da origem O dos eixos do corpo, assim como das rotações desses eixos, com relação a um referencial inercial.

Antes de abordar as definições de momento linear e angular de um corpo rígido, que serão expressas em termos de integrais sobre o corpo ou em termos de somatórios sobre o sistema de partículas, é conveniente obter a expressão para a velocidade de um ponto do corpo rígido, levando-se em conta o fato de que o corpo rígido tem somente seis graus de liberdade.

Se um vetor \mathbf{r} está referenciado a um sistema de eixos coordenados rotativo, conforme mostra a Figura 3.2, o vetor \mathbf{r} , permanecendo estacionário relativamente ao sistema rotativo, sofrerá uma mudança $\Delta\theta r \sin\phi$ ao longo da tangente do círculo tracejado, cuja taxa é estabelecida pelo limite

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta\theta}{\Delta t} \right) r \sin\phi = (\omega r \sin\phi) \hat{\mathbf{t}}, \quad (3.1)$$

onde $\hat{\mathbf{t}}$ é o vetor unitário ao longo da tangente num instante t genérico.

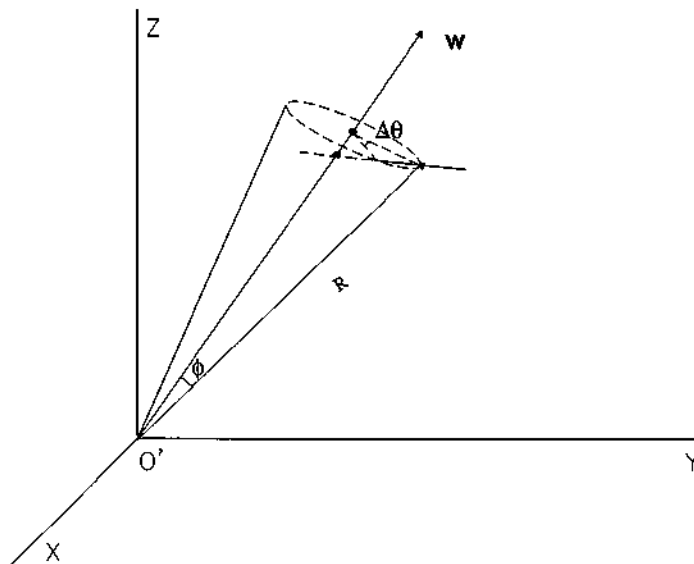


Figura 3.2 - Diferenciação de um vetor \mathbf{r} referenciado a um sistema rotativo.

Mas a Equação (3.1) é igual ao produto vetorial entre ω e \mathbf{r} . Conclui-se que devido a rotação ω do sistema de coordenadas a taxa de mudança do vetor \mathbf{r} é o produto vetorial $\omega \times \mathbf{r}$. Então, para obter a velocidade absoluta de um ponto do corpo rígido, deve-se somar a parcela relativa a velocidade absoluta do referencial rotativo, fixo no corpo, mais a parcela devida a rotação do referencial rotativo, ou seja,

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \omega \times \mathbf{r}. \quad (3.2)$$

3.1 - MOMENTO LINEAR E ANGULAR DE UM CORPO RÍGIDO

Tendo a expressão para a velocidade de um ponto do corpo rígido parte-se para as definições de momento linear e angular. Em vista da discussão anterior, o raio vetor da origem O até o centro de massa C , na Figura 3.1, é dado por

$$\mathbf{r}_C = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i = \frac{1}{m} \int_{\text{corpo}} \mathbf{r} dm. \quad (3.3)$$

Isso pode ser verificado facilmente substituindo \mathbf{R} por $\mathbf{R}_0 + \mathbf{r}_C$ e \mathbf{r}_j por $\mathbf{R}_0 + \mathbf{r}_i$ na expressão para a posição do *centro de massa* dada na Equação (2.1). É claro, na eventualidade da origem coincidir com o centro de massa tem-se $\int \mathbf{r} dm = 0$. O momento linear do corpo rígido é expresso por

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n m_i (\mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) \\ &= \mathbf{v}_0 \int dm + \boldsymbol{\omega} \times \int \mathbf{r} dm = m(\mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_C), \end{aligned} \quad (3.4)$$

onde supõe-se que a integração é realizada sobre todo o corpo. Mas, a quantidade entre parênteses na Equação (3.4) é reconhecidamente a velocidade do centro de massa C . Assim, a Equação (3.4) pode ser escrita na forma

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}_C, \quad (3.5)$$

onde \mathbf{v}_C é a velocidade do centro de massa. Então, o momento linear é igual ao produto da massa total pela velocidade do centro de massa. Se a origem O coincidir com o centro de massa C , a Equação (3.5) tem a mesma forma, mas a velocidade \mathbf{v}_C não depende da velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$, uma vez que \mathbf{r}_C é zero.

O momento angular em relação a origem O do sistema x, y e z é definido por

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_O &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i = \int \mathbf{r} \times (\mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) dm \\ &= -\mathbf{v}_0 \times \int \mathbf{r} dm + \int \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) dm. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Mas, se o ponto O é fixo, $\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$, e se O coincide com o centro de massa, $\int \mathbf{r} dm = 0$. Logo, o momento angular de um corpo rígido em relação a um ponto O que é fixo ou coincide com o centro de massa é

$$\mathbf{L}_O = \int \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) dm. \quad (3.7)$$

Para desenvolver a integral da Equação (3.7) é necessário obter primeiramente o produto vetorial $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, que é dado por

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = (\omega_y z - \omega_z y)\hat{\mathbf{i}} + (\omega_z x - \omega_x z)\hat{\mathbf{j}} + (\omega_x y - \omega_y x)\hat{\mathbf{k}}. \quad (3.8)$$

Multiplicando a Equação (3.8) por dm tem-se as componentes do momento linear nas direções x , y e z . O produto vetorial $\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})dm$ é

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})dm &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ x & y & z \\ (\omega_y z - \omega_z y) & (\omega_z x - \omega_x z) & (\omega_x y - \omega_y x) \end{vmatrix} dm \\ &= [\omega_x(y^2 + z^2) - \omega_y(xy) - \omega_z(xz)]dm\hat{\mathbf{i}} \\ &\quad + [-\omega_x(xy) + \omega_y(x^2 + z^2) - \omega_z(yz)]dm\hat{\mathbf{j}} \\ &\quad + [-\omega_x(xz) - \omega_y(yz) + \omega_z(x^2 + y^2)]dm\hat{\mathbf{k}}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

que representam os momentos, em torno dos eixos x , y e z , dos momentos lineares dados na Equação (3.8). Integrando sobre todo o corpo obtém-se a expressão do momento angular em termos de suas componentes ortogonais,

$$\mathbf{L}_0 = L_x\hat{\mathbf{i}} + L_y\hat{\mathbf{j}} + L_z\hat{\mathbf{k}}, \quad (3.10)$$

com L_x , L_y e L_z dadas por

$$\begin{aligned} L_x &= I_x\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z \\ L_y &= I_{xy}\omega_x + I_y\omega_y - I_{yz}\omega_z \\ L_z &= -I_{xz}\omega_x - I_{yz}\omega_y + I_z\omega_z, \end{aligned} \quad (3.11)$$

onde

$$I_x \equiv \int (y^2 + z^2)dm, \quad I_y \equiv \int (x^2 + z^2)dm \quad \text{e} \quad I_z \equiv \int (x^2 + y^2)dm \quad (3.12)$$

são os *momentos de inércia* do corpo em relação aos eixos coordenados, expressos em termos das coordenadas x , y , z e do elemento de massa dm e

$$I_{xy} \equiv \int xydm, \quad I_{xz} \equiv \int xzdm \quad \text{e} \quad I_{yz} \equiv \int yzdm \quad (3.13)$$

são os *produtos de inércia*.

A Equação (3.11) pode ser escrita na forma de matricial

$$\begin{bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

ou, na forma mais compacta

$$\mathbf{L}_0 = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}, \quad (3.15)$$

onde \mathbf{I} é a *matriz de inércias*. Por definição os eixos do corpo são fixos no corpo e os elementos da matriz de inércia são constantes.

3.2 - ENERGIA CINÉTICA ROTACIONAL

A energia do movimento de um corpo rígido em torno de seu centro de massa é conhecida como *energia cinética rotacional* e pode-se mostrar estar relacionada com o momento angular. Sabe-se que a energia cinética de um elemento de massa dm , que dista \mathbf{r} do centro de massa, é

$$dT = \frac{1}{2}v^2 dm, \quad (3.16)$$

onde v é o módulo da velocidade absoluta \mathbf{v} de dm . A expressão para \mathbf{v} já foi obtida na Equação (3.2). Tomando o produto escalar de \mathbf{v} por ele mesmo tem-se

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v^2 = v_0^2 + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + 2\mathbf{v}_0 \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}). \quad (3.17)$$

Substituindo a Equação (3.17) na (3.16) e integrando tem-se

$$T = \frac{1}{2} \int v^2 dm = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} \int (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) dm + \mathbf{v}_0 \cdot \boldsymbol{\omega} \int \mathbf{r} dm, \quad (3.18)$$

onde $\int \mathbf{r} dm = 0$ porque o sistema está referenciado ao centro de massa. O primeiro termo do lado direito representa a energia cinética de translação, considerando toda massa concentrada no centro de massa, e o segundo termo representa a energia cinética de rotação em torno do centro de massa. Então, definindo

$$\begin{aligned} T_{\text{rot}} &\equiv \frac{1}{2} \int (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) dm \\ &= \frac{1}{2} \int [(\omega_y z - \omega_z y)^2 + (\omega_z x - \omega_x y)^2 + (\omega_x y - \omega_y x)^2] dm \end{aligned} \quad (3.19)$$

Expandindo a Equação (3.19) tem-se

$$\begin{aligned} T_{\text{rot}} &= \frac{1}{2} \int [\omega_x^2 (y^2 + z^2) + \omega_y^2 (x^2 + z^2) + \omega_z^2 (x^2 + y^2) \\ &\quad - 2\omega_x \omega_z xz - 2\omega_y \omega_z yz - 2\omega_x \omega_y xy] dm. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Aplicando as definições dadas nas Equações (3.12) e (3.13) tem-se uma forma que consiste de constantes do corpo e velocidades angulares

$$2T_{\text{rot}} = \omega_x^2 I_x + \omega_y^2 I_y + \omega_z^2 I_z - 2\omega_x \omega_z I_{xz} - 2\omega_y \omega_z I_{yz} - 2\omega_x \omega_y I_{xy}. \quad (3.21-A)$$

Note que os componentes de ω podem ser extraídos obtendo-se a forma

$$\begin{aligned} 2T_{\text{rot}} = & \omega_x (\omega_x I_x - \omega_y I_{xy} - \omega_z I_{xz}) \\ & + \omega_y (-\omega_x I_{xy} + \omega_y I_y - \omega_z I_{yz}) \\ & + \omega_z (\omega_x I_{xz} - \omega_y I_{yz} + \omega_z I_z) \end{aligned}$$

Simplificando

$$2T_{\text{rot}} = \omega \bullet \mathbf{h} = \omega \bullet \mathbf{h} \bullet \omega \quad (3.21-B)$$

3.1 - EQUAÇÕES DE EULER DO MOVIMENTO

Após uma discussão a respeito de momentos linear e angular de um corpo rígido forçosamente segue-se uma discussão a respeito das equações gerais do movimento de atitude. Para isso, retoma-se a Equação (2.16) da reação de um torque em torno de um ponto como sendo a taxa do momento angular em torno daquele ponto. Esse resultado é válido para o corpo rígido desde que o ponto em questão seja fixo no espaço ou seja o centro de massa. Sem perda de generalidade pode-se adotar o centro de massa como o ponto de interesse e, sendo assim, pode-se ignorar os subscritos.

Dado que \mathbf{L} é expresso em termos das componentes dos eixos do corpo, que estão girando com velocidade angular ω relativamente ao espaço inercial, a Equação (2.16) fica

$$\mathbf{N} = \dot{\mathbf{L}}' + \omega \times \mathbf{L}, \quad (3.25)$$

onde a aspa denota a taxa de mudança do vetor \mathbf{L} em relação ao referencial móvel e $\omega \times$ denota a taxa de mudança resultante da rotação do sistema de referência. Dessa forma, a Equação (3.25) fica

$$\mathbf{N} = (\dot{L}_x + \omega_y L_z - \omega_z L_y) \hat{\mathbf{i}} + (\dot{L}_y + \omega_z L_x - \omega_x L_z) \hat{\mathbf{j}} + (\dot{L}_z + \omega_x L_y - \omega_y L_x) \hat{\mathbf{k}}, \quad (3.26)$$

que representa três equações diferenciais relacionando as componentes de torque aplicado com as trocas de momento angular, ou seja,

$$N_x = \dot{L}_x + \omega_y L_z - \omega_z L_y, \quad (3.27a)$$

$$N_y = \dot{L}_y + \omega_z L_x - \omega_x L_z, \quad (3.27b)$$

$$N_z = \dot{L}_z + \omega_x L_y - \omega_y L_x, \quad (3.27c)$$

que são conhecidas como *equações de Euler do movimento*. O movimento geral de atitude de um corpo rígido pode ser modelado por estas três equações, embora não haja uma solução geral devido ao fato dos torques, em torno do centro de massa, não serem especificados. Mas, muitas situações de interesse permitem uma especialização dessas expressões de forma que soluções significantes são obtidas de forma fechada (analítica). Note-se que as Equações (3.27) são equações diferenciais de primeira ordem em L . Elas podem ser convertidas em equações diferenciais de primeira ordem em ω através da Equação (3.11), ou mesmo em equações de segunda ordem, considerando as velocidades angulares $\dot{\phi}$, $\dot{\theta}$ e $\dot{\psi}$, que são conhecidas como *precessão*, *nutação* e *spin*, respectivamente - ver ítem 4.8, *Ângulos de Euler*, no livro do Meirovitch (1970).

CAPÍTULO 4

FUNDAMENTOS DA MECÂNICA ANALÍTICA

4.1-PRINCIPIO DO TRABALHO VIRTUAL

Seja um deslocamento virtual, $\delta x, \delta \theta, \delta q$, etc, que consiste em uma mudança infinitesimal na coordenada que pode ser concebida de qualquer maneira independente do tempo t . Isto pode ou não coincidir com o deslocamento atual, $dx, d\theta, dq$. No caso do movimento de sistemas com vínculos, o deslocamento virtual deve ser compatível. Por exemplo, se uma partícula possui um vínculo e seu movimento for limitado a uma superfície, o deslocamento virtual deve também ser limitado à superfície. Para este caso podemos obter uma equação relacionada ao vínculo, que restringe o movimento.

$$f(x, y, z, t) = 0 \quad (4.1)$$

O deslocamento virtual tem que satisfazer a equação relacionada ao vínculo,

$$\frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z = 0 \quad (4.2)$$

Para um vínculo Não-Holônomo, a restrição fica

$$a_1 \delta x + a_2 \delta y + a_3 \delta z = 0 \quad (4.3)$$

Como os deslocamentos virtuais ocorrem independente do tempo, as expressões anteriores também devem ser independente do tempo t .

Agora considere uma partícula que está sobre ação de várias forças. Se a partícula se encontra em equilíbrio, a resultante \mathbf{R} das forças é nula, e portanto o trabalho feito por elas em um deslocamento virtual $\delta \mathbf{r}$ é zero.

$$\mathbf{R} \cdot \delta \mathbf{r} = 0 \quad (4.4)$$

Se a partícula tem um vínculo, a força \mathbf{R} pode ser separada em uma força de ação ou externas \mathbf{F} e uma força de reação \mathbf{f} . Para o equilíbrio,

$$\mathbf{R} = \mathbf{F} + \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (4.5)$$

O trabalho virtual é então,

$$\mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{r} + \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{r} = 0 \quad (4.6)$$

Para que o deslocamento virtual $\delta \mathbf{r}$ seja compatível a um sistema com vínculos requer $\mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{r} = 0$. Assim a força de reação não pode contribuir ao trabalho realizado pela partícula, logo

$$\mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{r} = 0 \quad (4.7)$$

Portanto se a partícula estiver em equilíbrio, o trabalho realizado pelas forças aplicadas devido a um deslocamento virtual é zero.

Para um sistema de partículas estar em equilíbrio, a soma das forças que agem em cada partícula é nula. Como o trabalho virtual de um sistema de partículas é igual a soma do trabalho virtual realizado em cada partícula, então o valor encontrado é zero.

$$\sum_i \mathbf{R}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (4.8)$$

A força que \mathbf{R}_i pode ser separado novamente na força ação ou externas, \mathbf{F}_i e a força de reação \mathbf{f}_i , e como $\sum_i \mathbf{f}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$, obtemos o trabalho virtual para o sistema de partículas

$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (4.9)$$

Onde \mathbf{F}_i e $\delta \mathbf{r}_i$ são respectivamente a força externas e o deslocamento virtual associado a partícula. Assim o princípio do trabalho virtual como foi apresentado por Jean Bernoulli (1717) que pode ser declarado como segue: Se um sistema de forças está em equilíbrio, o trabalho feito pelas forças aplicadas em um deslocamento virtual compatível com os vínculos é zero.

Para um corpo rígido ou um sistema de corpos rígidos interconectados, forças internas que sempre aparecem em pares iguais e opostos não realizam trabalho. Assim, com o princípio de trabalho virtual, nós podemos ignorar todas as forças internas e suas reação, considerando apenas as forças de ação ou externas.

4.2- PRINCIPIO DE D'ALAMBERT

O princípio de trabalho virtual, foi estabelecido para o caso de equilíbrio estático, mas pode ser facilmente estendido para um equilíbrio dinâmico, que foi desenvolvido por D'Alembert (1743). Denominamos de \mathbf{p} o impulso de uma partícula do sistema, e novamente separamos as forças que agem na partícula em uma força ação ou externas \mathbf{F} e força de reação \mathbf{f} . A equação do movimento da partícula pode ser escrita então como

$$\mathbf{F} + \mathbf{f} - \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{0} \quad (4.10)$$

Neste estados as forças efetivas estão em equilíbrio com a “força cinética” $-\dot{\mathbf{p}}$. A quantidade $-\dot{\mathbf{p}}$ as vezes é chamada de “força inversa efetiva” porque as

força efetiva ou de ação (\mathbf{F} e \mathbf{f}) produz um movimento é igual a $\dot{\mathbf{p}}$, desta forma podemos afirmar que o sistema esta num estado de equilíbrio cinemático. Como já visto anteriormente, o trabalho virtual do das forças de reação é nulo, porque \mathbf{f} e $\delta\mathbf{r}$ são mutuamente perpendiculares. Logo o trabalho virtual das forças que agem na partícula é,

$$(\mathbf{F} - \dot{\mathbf{p}}) \bullet \delta\mathbf{r} = 0 \quad (4.11)$$

Para um sistema de N partículas

$$\sum_{i=1}^n (\mathbf{F} - \dot{\mathbf{p}})_i \bullet \delta\mathbf{r}_i = 0 \quad (4.12)$$

4.3- O PRINCÍPIO DE HAMILTON

O princípio do trabalho virtual junto com o princípio de D'Alembert foi estudado por W. R. Hamilton (1805-1865) e como seu conhecimento em cálculo variacional conseguiu uma generalização da mecânica clássica que ficou conhecida como o Princípio de Hamilton. Este princípio facilita a resolução de problemas de dinâmica da variação, independente das coordenadas, e do sistema ser conservativo ou não.

Considere agora um sistema Holônomo ou Não-Holônomo de N partículas de massa discretas, escrevendo a equação de trabalho virtual ,

$$\sum_{i=1}^n (m_i \ddot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{F}_i) \bullet \delta\mathbf{r}_i = 0 \quad (4.13)$$

Fica evidente que na equação $\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \bullet \delta\mathbf{r}_i$ é o trabalho realizado pelas forças externas em um deslocamento virtual, podemos também incluir as forças não conservativas.

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \bullet \delta\mathbf{r}_i = \delta W \quad (4.14)$$

Com relação ao primeiro termo da equação (13), existe a seguinte relação diferencial,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{r}}_i \bullet \delta\mathbf{r}_i) &= \dot{\mathbf{r}}_i \bullet \frac{d}{dt} \delta\mathbf{r}_i + \ddot{\mathbf{r}}_i \bullet \delta\mathbf{r}_i \\ &= \dot{\mathbf{r}}_i \bullet \delta\dot{\mathbf{r}}_i + \ddot{\mathbf{r}}_i \bullet \delta\mathbf{r}_i \\ &= \delta \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 \right) + \ddot{\mathbf{r}}_i \bullet \delta\mathbf{r}_i \end{aligned} \quad (4.15)$$

O primeiro termo de equação (13) pode ser escrito então como

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i &= \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} (m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i) - \sum_{i=1}^n \delta \left(\frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} (m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i) - \delta T\end{aligned}\quad (4.16)$$

Substituindo na equação (4.13) temos

$$\sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} (m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i) = \delta T + \delta W \quad (4.17)$$

Integrando a equação (4.17)

$$\int_0^{t_1} \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} (m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i) dt = \int_0^{t_1} (\delta T + \delta W) dt \quad (4.18)$$

No lado esquerdo desta equação podemos substituir os seus limites de integração.

$$\sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i \Big|_0^{t_1} = \int_0^{t_1} (\delta T + \delta W) dt \quad (4.19)$$

Mas como $\delta \mathbf{r}_i = 0$ quando $t = 0$ e $t = t_1$, logo o lado esquerdo da equação (4.19) é nulo, portanto temos como resultado final

$$\int_0^{t_1} (\delta T + \delta W) dt = \int_0^{t_1} \delta T \cdot dt + \int_0^{t_1} \delta W \cdot dt = 0 \quad (4.20)$$

Quando o sistema é conservativo trabalho pode ser expresso em termos da energia potencial então a equação (4.20) se reduz

$$\delta \int_0^{t_1} (T + W) dt = 0 \quad (4.21)$$

O princípio de Hamilton não prevê a solução para os problemas dinâmicos, mas a formulação das equações do movimento de maneira mais geral e independente do sistema de coordenada, possibilita a obtenção das equações de Lagrange e o teorema de conservação de energia.

4.4- EQUAÇÃO DE LAGRANGE

Para um sistema holônimo, com variável-dependente \mathbf{r}_i , que pode ser expressada completamente em termos das n – coordenadas generalizadas q_k , (correspondente aos n graus liberdade do sistema), e também do tempo t temos:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n, t) \quad (4.22)$$

onde q_k , na equação (22) é independente.

Derivando a equação (22) em função do tempo obtemos a equação da velocidade

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \quad (4.23)$$

Determinando a *Energia Cinética* (T) do sistema de partículas temos

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left[\sum_k \sum_l \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_l} \dot{q}_k \dot{q}_l + 2 \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \sum_k \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right)^2 \right] \quad (4.24)$$

Fica evidente que a *Energia Cinética* (T) é uma função de q_k, \dot{q}_k e t , podemos escrever

$$T = T(q_1, q_2, \dots, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, t) \quad (4.25)$$

Se considerarmos um variação da energia cinética δT em um determinado instante t e aplicando temos:

$$\delta T = \sum_{i=1}^n \frac{\partial T}{\partial q_i} \delta q_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \quad (4.26)$$

e

$$\int_0^t \delta T \cdot dt = \sum_{i=1}^n \int_0^t \frac{\partial T}{\partial q_i} \delta q_i \cdot dt + \sum_{i=1}^n \int_0^t \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \cdot dt \quad (4.27)$$

Reescrevendo o último termo da integral (4.27),

$$\int_0^t \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \cdot dt = \int_0^t \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \delta q_i \cdot dt \quad (4.28)$$

E aplicando Integral por Partes em (4.28) temos

$$u = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \qquad dv = \frac{d}{dt} \delta q_i \cdot dt$$

Então

$$du = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \cdot dt \qquad v = \delta q_i$$

A integral (4.7) pode ser escrita na forma

$$\int_0^{t_1} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \delta q_i \cdot dt = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \Big|_0^{t_1} - \int_0^{t_1} \delta q_i \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \cdot dt$$

Temos que $\delta q_i = 0$ quando $t = 0$ e $t = t_1$, portanto o primeiro termo do lado direito é zero, e substituindo (4.28) novamente na equação (4.27)

$$\delta \int_0^{t_1} T \cdot dt = - \sum_{i=1}^n \int_0^{t_1} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right) \delta q_i \cdot dt \qquad (4.29)$$

Considere agora a variação do trabalho δW devido às m forças de que agem no sistema

$$\delta W = \sum_{j=1}^m \mathbf{F}_j \cdot \delta \mathbf{r}_j \qquad (4.30)$$

O deslocamento virtual $\delta \mathbf{r}_j$ é

$$\delta \mathbf{r}_j = \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_n} \delta q_n \qquad (4.31)$$

Logo o variação do trabalho δW se torna

$$\delta W = \sum_{j=1}^m \left(\mathbf{F}_j \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_1} \delta q_1 + \mathbf{F}_j \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \mathbf{F}_j \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_n} \delta q_n \right) \qquad (4.32)$$

Agora podemos definir a força generalizada Q_i , associada a q_i

$$Q_i = \sum_{j=1}^m \mathbf{F}_j \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_i} \quad (4.33)$$

Substituindo na equação (32) temos:

$$\delta W = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_n \delta q_n = \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i \quad (4.34)$$

Substituindo as equações (29) e (34) na equação de Hamilton,

$$\delta \int_0^t (T + W) dt = - \sum_{i=1}^n \int_0^t \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i \right) \delta q_i dt = 0 \quad (4.35)$$

Como os δq_i , são independente e arbitrário, podemos considerar todos igual a zero com exceção do δq_k . Então para satisfazer a acima de equação, o coeficiente de δq_k , deve ser zero, desta forma chegamos à equação de Lagrange para um sistema holônimo.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k \quad (4.36)$$

No entanto não declaramos se as Forças F_j são conservativas ou não conservativas. Para um sistema conservativo, o trabalho pode ser expresso em termos da energia potencial(U)

$$W = -U(q_i) \quad (4.37)$$

e

$$\delta W = - \sum \frac{\partial U}{\partial q_i} \delta q_i \quad (4.38)$$

Então fica evidente que a equação de Lagrange para um sistema conservativo é;

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial U}{\partial q_k} = 0 \quad (4.39)$$

É conveniente definir o Lagrangiano como

$$L = T - U \quad (4.40)$$

Temos que $\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k} = 0$, logo a equação (30) pode ser reescrita em termos do lagrangiano.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad (4.41)$$

Quando o sistema for não conservativo temos, a equação de Lagrange como:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_k \quad (4.42)$$

CAPÍTULO 5

A EQUAÇÃO DE LAGRANGE PARA QUASE-COORDENADAS

No capítulo 4 se definiu a equação de lagrange do movimentos para n coordenadas generalizadas q_k onde $(k=1,2,3,\dots,n)$. Estas coordenadas podem ser consideradas como a integração da velocidades \dot{q}_k em função do tempo.

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right\} - \left\{ \frac{\partial L}{\partial q} \right\} = \{ Q_k \} \quad (5.1)$$

É interessante que se reescreva a equação diferencial (5.1) do movimento em função da velocidade angular ω_s de forma que as coordenadas sejam uma combinação independentes ω_s ($s=1,2,3,\dots,n$) das velocidades \dot{q}_k . Estas variáveis podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} \omega_s &= \alpha_{1s} \dot{q}_1 + \alpha_{2s} \dot{q}_2 + \alpha_{3s} \dot{q}_3 + \dots + \alpha_{ns} \dot{q}_n \\ &= \sum_{r=1}^n \alpha_{rs} \dot{q}_r \quad s=1, 2, 3, \dots, n, \end{aligned} \quad (5.2)$$

Onde os coeficientes α_{rs} são conhecidos como funções das coordenadas generalizadas q_k . Considerando a equação (5.2) na forma diferencial $d\theta_s$ obtemos:

$$d\theta_s = \sum_{r=1}^n \alpha_{rs} dq_r \quad s=1, 2, 3, \dots, n, \quad (5.3)$$

O caso de interesse é $\partial \alpha_{js} / \partial q_k = \partial \alpha_{ks} / \partial q_j$, onde Eq. (5.3) não pode ser integrada obtendo a variável θ_s . A grandeza $d\theta_s$ é chamada de *QUASE COORDENADAS*. A equação (5.2) pode ser escrita na forma de matrix.

$$\{\omega\} = [\alpha]^T \{\dot{q}\}, \quad (5.4)$$

e considerando a matrix $[\alpha]$ não singular podemos reescrever a Eq(5.4) na forma

$$\{\dot{q}\} = [\beta]\{\omega\} \quad [\beta][\alpha]^T = [1] \quad (5.5)$$

Isto permite a expressar a energia cinética como função das coordenadas q_k e também da variável ω_k . Então temos $\bar{T}(q, \omega)$ ao invés de $T(q, \dot{q})$.

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{L}}{\partial \omega_i} \frac{\partial \omega_i}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{i=1}^n \alpha_{ki} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \omega_i}, \quad k=1, 2, \dots, n, \quad (5.6)$$

Pode ser escrito como uma matrix coluna

$$\left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right\} = [\alpha] \left\{ \frac{\partial \bar{L}}{\partial \omega} \right\}, \quad (5.7)$$

no qual se segue

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right\} = [\alpha] \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial \bar{L}}{\partial \omega} \right\} + [\dot{\alpha}] \left\{ \frac{\partial \bar{L}}{\partial \omega} \right\} \quad (5.8)$$

Como os coeficientes α_{ij} dependem somente das coordenadas, qualquer elemento $\dot{\alpha}_{ij}$ na forma de matrix quadrada.

$$\dot{\alpha}_{ij} = \sum_{r=1}^n \frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial q_r} \dot{q}_r = \{\dot{q}\}^T \left\{ \frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial q} \right\} = \{\omega\}^T [\beta]^T \left\{ \frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial q} \right\} \quad (5.9)$$

Deve ser acentuado aqui que o produto triplo de matrix acima não envolve um somatório em cima dos índices α_{ij} . Desta forma podemos escrever a Eq(5.9) como uma matrix quadrada correspondente.

$$[\dot{\alpha}] = \left[\{\omega\}^T [\beta]^T \left\{ \frac{\partial \alpha}{\partial q} \right\} \right] \quad (5.10)$$

Seguindo o mesmo padrão

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial q_k} &= \frac{\partial \bar{L}}{\partial q_k} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{L}}{\partial \omega_i} \frac{\partial \omega_i}{\partial q_k} = \frac{\partial \bar{L}}{\partial q_k} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{L}}{\partial \omega_i} \sum_{j=1}^n \frac{\partial \alpha_{ji}}{\partial q_k} \dot{q}_j \\ &= \frac{\partial \bar{L}}{\partial q_k} + \{\dot{q}\}^T \left[\frac{\partial \alpha}{\partial q_k} \right] \left\{ \frac{\partial \bar{L}}{\partial \omega} \right\} \end{aligned} \quad (5.11)$$

Onde o somatório que envolve α_{ij} pode ser substituído pela matrix (5.9), então temos:

$$\left\{ \frac{\partial L}{\partial q} \right\} = \left\{ \frac{\partial \bar{L}}{\partial q} \right\} + \left\{ \{\dot{q}\}^T \left[\frac{\partial \alpha}{\partial q} \right] \left\{ \frac{\partial \bar{L}}{\partial \omega} \right\} \right\} \quad (5.12)$$

Substituindo as Equações (5.8), (5.10) e (5.12) na equação (5.1) temos:

$$[\alpha] \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial \bar{L}}{\partial \omega} \right\} + \left[\{\omega\}^T [\beta]^T \left\{ \frac{\partial \alpha}{\partial q} \right\} \right] \left\{ \frac{\partial \bar{L}}{\partial \omega} \right\} - \left\{ \frac{\partial \bar{L}}{\partial q} \right\} - \left[\{\omega\}^T [\beta]^T \left\{ \frac{\partial \alpha}{\partial q} \right\} \right] \left\{ \frac{\partial \bar{L}}{\partial \omega} \right\} = \{Q_k\} \quad (5.13)$$

Pré multiplicando a equação (5.13) por $[\beta]^T$ e segundo a Eq(5.5) temos

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial \bar{L}}{\partial \omega} \right\} + [\beta]^T [\gamma] \left\{ \frac{\partial \bar{L}}{\partial \omega} \right\} - [\beta]^T \left\{ \frac{\partial \bar{L}}{\partial q} \right\} = \{N\} \quad (5.14)$$

esta é a *Equação de Lagrange para Quase Coordenada*, onde:

$$[\gamma] = \left[\{\omega\}^T [\beta]^T \left\{ \frac{\partial \alpha}{\partial q} \right\} \right] - \left[\{\omega\}^T [\beta]^T \left[\frac{\partial \alpha}{\partial q} \right] \right] \quad (5.15)$$

e

$$\{N\} = [\beta]^T \{Q_k\} \quad (5.16)$$

Podemos aplicar esta formulação da *equação de lagrange* para o movimento de um corpo rígido, mas neste caso as variáveis ω_s são identificadas como as componentes da velocidade angular, logo a energia cinética e dada por:

$$\bar{L} = \frac{1}{2} \{\omega\}^T [I] \{\omega\}, \quad (5.17)$$

Como na equação da energia cinética não está explicito as coordenadas generalizadas q_k então temos.

$$\left\{ \frac{\partial \bar{L}}{\partial q} \right\} = \{0\} \quad (5.18)$$

alem disto,

$$[\beta]^T [\gamma] = [\omega] \quad (5.19)$$

onde $[\omega]$ é a matriz simétrica dos componentes de velocidade angulares, introduzindo Eqs. (5.18) e (5.19) em (5.14), nós obtemos a forma compacta

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial \bar{L}}{\partial \omega} \right\} + [\omega] \left\{ \frac{\partial \bar{L}}{\partial \omega} \right\} = \{N\}, \quad (5.20)$$

onde $\{N\}$ representa uma matriz de coluna de componentes do torque.

A vantagem de Eqs. (5.20) em cima das equações de Lagrange comumente usadas, Eqs. (5.1), é a primeira está expressa em termos de componentes ortogonais dos eixos, enquanto que a segunda Eq (5.20) esta em termos dos ângulos de Euler.

CAPÍTULO 6

EQUAÇÕES DO MOVIMENTO

O sistema sob investigação consiste em um satélite *dual-spin* com uma plataforma assimétrica e um rotor balanceado. Foi adotado um dissipador do tipo massa-mola-amortecedor por ser mais eficiente, que aquele toroidal à fluído, para pequenos ângulos de nutação. Contudo, resultados sobre a estabilidade independem do tipo de amortecedor quando há amortecimento para qualquer movimento de nutação, embora ocorra mudança nas constantes de tempo.

Desprezando o movimento de translação o sistema possui cinco graus de liberdade que são $z, \theta_x, \theta_y, \theta_z$ e θ_r , onde z representa a posição da massa do dissipador em relação ao sistema de referência x, y, z , centrado no ponto A , fixo no corpo; θ_x, θ_y e θ_z representam as rotações em torno dos eixos do sistema de referência e θ_r representa a rotação do rotor em relação à plataforma. A massa m do dissipador está centrada no eixo x e se move paralelamente ao eixo z à uma distância b do eixo y . O dissipador é composto por uma mola de constante elástica k e amortecedor com constante c . O rotor é centrado no eixo z e a rotação do mesmo é permitida apenas em relação àquele eixo. O sistema rotaciona em torno do centro de massa G , que coincide com A quando $z=0$, tem massa total m_r (incluindo o rotor) e os momentos principais de inércia são I_x, I_y, I_z , quando $z=0$.

A energia cinética total, considerando o sistema formado por partículas de massa m_i , é dada por

$$T = \frac{1}{2} m_r v_G^2 - \frac{1}{2} m_r v_{A/G}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_{i/A}^2, \quad (6.1)$$

onde T representa a energia cinética total; $v_G, v_{A/G}$ e $v_{i/A}$ são, respectivamente, a velocidade do centro de gravidade, a velocidade do ponto A em relação ao centro de gravidade e a velocidade da partícula i em relação ao ponto A . O primeiro termo da Equação (1) representa a energia cinética considerando como se toda a massa estivesse concentrada no centro de massa G . O segundo termo refere-se a correção associada ao movimento do sistema de referência x, y, z em relação centro de massa G . O terceiro termo refere-se a energia cinética do sistema em relação ao ponto A (Meehan e Asokanthan, 1996).

O deslocamento de A em relação a G é proporcional ao deslocamento da massa m do dissipador na forma

$$\mathbf{r}_{A/G} = -\mu z \mathbf{k}, \quad (6.2)$$

com $\mu \equiv m / m_r$.

A velocidade do ponto A em relação a G , supondo que a plataforma gire com uma velocidade angular $\boldsymbol{\omega} = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T$ em torno de A , fica

$$\dot{\mathbf{r}}_{A/G} = -\mu(z\dot{\mathbf{k}} + \dot{z}\mathbf{k}) \quad (6.3a)$$

$$= -\mu(z\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k} + \dot{z}\mathbf{k}) \quad (6.3b)$$

$$= -\mu(z\omega_y \mathbf{i} - z\omega_x \mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}). \quad (6.3c)$$

O segundo termo da Equação (1) pode ser reescrito usando as Equações (2) e (3):

$$\frac{1}{2} m_i v_{A/G}^2 = \frac{1}{2} m \mu \dot{z}^2 + \frac{1}{2} m \mu z^2 \omega_y^2 + \frac{1}{2} m \mu z^2 \omega_x^2. \quad (6.4)$$

O tensor de inércia do sistema em relação ao ponto A ($z \neq 0$) é

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_x + mz^2 & 0 & -mbz \\ 0 & I_y + mz^2 & 0 \\ -mbz & 0 & I_z \end{bmatrix}. \quad (6.5)$$

A energia cinética do sistema em relação ao ponto A consiste da soma de três parcelas. A primeira parcela é devido à velocidade angular da plataforma e é dada por

$$\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} (I_x + mz^2) \omega_x^2 + \frac{1}{2} (I_y + mz^2) \omega_y^2 + \frac{1}{2} I_z \omega_z^2 - mbz \omega_x \omega_z. \quad (6.6)$$

A segunda parcela é devido à velocidade angular do rotor em relação à plataforma, $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{k}$, resultando no acréscimo de dois termos devido ao termo quadrático em ω_z na Equação (6.6)

$$\frac{1}{2} I_r \Omega^2 + I_r \Omega \omega_z. \quad (6.7)$$

A terceira parcela é devido à velocidade da massa do amortecedor em relação a plataforma. Além do termo referente a velocidade em sí, deve-se acrescentar o termo devido ao momento angular em relação a A,

$$(\mathbf{b}\mathbf{i} + z\mathbf{k}) \times m\dot{z}\mathbf{k} = -mb\dot{z}\mathbf{j}. \quad (6.8)$$

Logo, a terceira parcela fica

$$\frac{1}{2} m\dot{z}^2 - mb\dot{z}\omega_y. \quad (6.9)$$

Portanto, a energia cinética do sistema em relação ao ponto A é

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_{i/A}^2 = & \frac{1}{2} (I_x + mz^2) \omega_x^2 + \frac{1}{2} (I_y + mz^2) \omega_y^2 + \frac{1}{2} I_z \omega_z^2 - mbz \omega_x \omega_z + \frac{1}{2} I_r \Omega^2 \\ & + I_r \Omega \omega_z + \frac{1}{2} m\dot{z}^2 - mb\dot{z}\omega_y. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Desconsiderando o movimento do centro de massa e substituindo as Equações (6.4) e (6.10) na Equação (6.1) tem-se que a energia cinética do sistema é dada por

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2} [I_x + m(1-\mu)z^2] \omega_x^2 - mbz \omega_x \omega_z + \frac{1}{2} [I_y + m(1-\mu)z^2] \omega_y^2 + \frac{1}{2} m(1-\mu)\dot{z}^2 \\ & + \frac{1}{2} I_z \omega_z^2 + \frac{1}{2} I_r \Omega^2 + I_r \Omega \omega_z - mb\dot{z}\omega_y. \end{aligned} \quad (6.11)$$

A energia potencial do sistema é a energia potencial da mola, dada por

$$V = \frac{1}{2}kz^2. \quad (6.12)$$

A energia dissipada no amortecedor é dada por

$$D = \frac{1}{2}c\dot{z}^2. \quad (6.13)$$

As Equações de Lagrange do movimento podem ser escritas na forma matricial

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{\omega}} \right] + [\omega] \left[\frac{\partial T}{\partial \omega} \right] = \mathbf{M}, \quad (6.14)$$

onde $\mathbf{M} = [M_x \ M_y \ M_z]^T$ é o vetor dos componentes do torque e $[\omega]$ é a matriz anti-simétrica

$$[\omega] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.15)$$

Substituindo a Equação (6.11) na Equação (6.14) tem-se

$$I_x \dot{\omega}_x - (I_y - I_z) \omega_y \omega_z + I_r \Omega \omega_y + m(1-\mu) \dot{\omega}_x z^2 - m(1-\mu) \omega_y \omega_z z^2 + 2m(1-\mu) \omega_x z \dot{z} - mb \dot{\omega}_z z - mb \omega_x \omega_y z = M_x. \quad (6.16)$$

$$I_y \dot{\omega}_y - (I_z - I_x) \omega_x \omega_z - I_r \Omega \omega_x + m(1-\mu) \dot{\omega}_y z^2 + m(1-\mu) \omega_x \omega_z z^2 + mb \omega_x^2 z 2m(1-\mu) \omega_y z \dot{z} - mb \ddot{z} - mb \omega_z^2 z = M_y. \quad (6.17)$$

$$I_z \dot{\omega}_z - (I_x - I_y) \omega_x \omega_y + I_r \dot{\Omega} + mb \omega_y \omega_z z - 2mb \omega_x \dot{z} - mb \dot{\omega}_x z = M_z. \quad (6.18)$$

As Equações (6.16) a (6.18) formam um sistema de três equações a cinco incógnitas, à saber, $\omega_x, \omega_y, \omega_z, \Omega$ e z . Duas equações adicionais são requeridas: uma associada com o torque do rotor e a outra com a força no amortecedor. Sabe-se que

$$T_r = I_r (\dot{\omega}_z + \dot{\Omega}), \quad (6.19)$$

onde T_r é o módulo do torque aplicado no eixo do rotor. A Equação (6.19) que descreve o balanço entre a aceleração e o torque que governam o movimento relativo do rotor desconsidera qualquer tipo de torque de atrito devido aos mancais. Da mesma forma, a equação que estabelece o balanço entre a aceleração e a força da massa do amortecedor pode ser obtida como sendo

$$m(1-\mu) \ddot{z} + c\dot{z} + kz - m(1-\mu) (\omega_x^2 + \omega_y^2) z + mb \omega_x \omega_z - mb \dot{\omega}_y = 0. \quad (6.20)$$

CAPÍTULO 7

ESTABILIDADE

Na situação de interesse para o estudo da estabilidade em satélites dual-spin, nos consideramos o torque externo nulo, $M_A = 0$. As equações de Euler do movimento do satélite e sua plataforma com amortecedor podem ser escritas como:

$$I_x \dot{\omega}_x - \omega_y \omega_z (I_y - I_z) + I_z^R \Omega \omega_y + m(1-\mu) \dot{\omega}_x z^2 - m(1-\mu) \omega_y \omega_z z^2 + 2m(1-\mu) \omega_x z \dot{z} - mb \dot{\omega}_x z - mb \omega_x \omega_z z = 0 \quad (7.1)$$

$$I_y \dot{\omega}_y - \omega_z \omega_x (I_z - I_x) - I_z^R \Omega \omega_x + m(1-\mu) \dot{\omega}_y z^2 + m(1-\mu) \omega_x \omega_z z^2 + 2m(1-\mu) \omega_y z \dot{z} - mb \dot{z} - mb \omega_x^2 z - mb \omega_z^2 z = 0 \quad (7.2)$$

$$I_z \dot{\omega}_z - \omega_x \omega_y (I_x - I_y) + I_z^R \dot{\Omega} + mb \omega_y \omega_z z - 2mb \omega_x \dot{z} - mb \dot{\omega}_x z = 0 \quad (7.3)$$

Estas três equações possuem cinco variáveis $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ e z e requer também duas variáveis a mais que esta associada ao torque e força no amortecedor. Onde $I_z^R \dot{\omega}_z^R = T$ e $\omega_z^R = \omega_z + \Omega$ logo temos:

$$I_z^R (\dot{\omega}_z + \dot{\Omega}) = T \quad (7.4)$$

Onde T é a magnitude do torque aplicado sobre o eixo do rotor as forças de atritos são desprezadas. Então a força aceleração da massa que compõem o amortecedor e dado por:

$$m(1-\mu) \ddot{z} + c \dot{z} + kz - m(1-\mu) (\omega_x^2 + \omega_y^2) z + mb \omega_x \omega_z - mb \dot{\omega}_y = 0 \quad (7.5)$$

desta forma obtemos o movimento em torno do ponto A, e as cinco equações acima descrevem complementemente o movimento de altitude do satélite dual spin. As três primeiras equações representam o estado de conservação do momento, a quarta equação representa a mudança de energia no rotor e a mudança da velocidade da plataforma e a ultima equação representa a dissipação de energia.

Existe um especial interesse em considerar as velocidades de rotações como sendo as velocidades nominais das orbitas, típicos de satélites comunicação do tipo dual-spin.

$$\omega_z = \omega_p = const$$

$$\Omega = \Omega_R = const \quad (7.6)$$

$$\omega_x = \omega_y = z = 0$$

$$T = 0$$

desta forma podemos resolver o sistema de equações diferenciais com os valores nominais. Na pratica ω_p é justamente o valor da velocidade orbital em torno da terra. Isto permite que as antenas da plataforma fiquem apontadas para terra o tempo todo.

A estabilidade no movimento descrito pela equação (7.6) pode haver perturbações na solução nominal e linearizando a equação do movimento:

$$\omega_x = \omega_x$$

$$\omega_y = \omega_y$$

$$\omega_z = \omega_p + \omega_p^R$$

$$z = z$$

$$\Omega = \Omega_R + \Omega_R^d$$

onde ω_p e Ω_R são constantes, e $\omega_x, \omega_y, \omega_p^d, z$ e Ω_R^d são pequenas variações.

Substituindo estes valores na equações (7.1) a (7.5) e linearizando novamente as equações temos:

$$I_y \dot{\omega}_x + [(I_z - I_y) \omega_p + I_z^R \Omega_R] \omega_y = 0 \quad (7.7)$$

$$I_y \dot{\omega}_y - [(I_z - I_x) \omega_p + I_z^R \Omega_R] \omega_x - mb \ddot{z} - mb \omega_p^2 z = 0 \quad (7.8)$$

$$I_z \dot{\omega}_p^d + I_z^R \dot{\Omega}_R^d = 0 \quad (7.9)$$

$$I_z^R (\dot{\omega}_p^d + \dot{\Omega}_R^d) = 0 \quad (7.10)$$

$$m(1 - \mu) \ddot{z} + c \dot{z} + kzmb \omega_p \omega_x - mb \dot{\omega}_y = 0 \quad (7.11)$$

As expressões (7.9) e (7.11) podem ser desconsiderada porque representa a perturbação em torno do eixo z. Este movimento não é interessante considerar no estudo de estabilidade. Simplificando as expressões:

$$\lambda_1 = \frac{[(I_z - I_y) \omega_p + I_z^R \Omega_R]}{I_x} = \frac{[I_z^P \omega_p + I_z^R \omega_R - I_y \omega_p]}{I_x}$$

$$\lambda_2 = \frac{[(I_z - I_x) \omega_p + I_z^R \Omega_R]}{I_y} = \frac{[I_z^P \omega_p + I_z^R \omega_R - I_x \omega_p]}{I_y}$$

Onde $\Omega_R = \omega_R - \omega_p$, ω_R é constante e I_z^R é o momento de inércia da plataforma em torno do eixo do rotor. A magnitude do momento angular é:

$$h = I_z^R \omega_p + I_z^R \omega_R$$

Aplicando a definição em λ_1 e λ_2 temos

$$\lambda_1 = \frac{h - I_y \omega_p}{I_x} \quad (7.12)$$

$$\lambda_2 = \frac{h - I_x \omega_p}{I_y}$$

É conveniente definir:

$$p = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \beta = \frac{c}{m}, \quad \xi = \frac{z}{b}, \quad \delta = \frac{mb^2}{I_y}$$

então as equações (7.7), (7.8) podem ser escritas :

$$\dot{\omega}_x + \lambda_1 \omega_y = 0$$

$$\dot{\omega}_y - \lambda_2 \omega_x - \delta \dot{\xi} - \delta \omega_p^2 \xi = 0$$

$$(1 - \mu) \ddot{\xi} + \beta \dot{\xi} + p^2 \xi + \omega_p \omega_x - \dot{\omega}_y = 0$$

Pelo método de Routh podemos testar a estabilidade deste sistema linear, mas primeiro temos que obter a equação característica do sistema, que se consegue aplicando uma transformada de Laplace.

$$s \omega_x(s) + \lambda_1 \omega_y(s) = 0$$

$$s \omega_y(s) - \lambda_2 \omega_x(s) - \delta s^2 \xi(s) - \delta \omega_p^2 \xi(s) = 0$$

$$(1 - \mu) s^2 \xi(s) + \beta s \xi(s) + \omega_p \omega_x(s) - s \omega_y(s) = 0$$

Assim obtemos a transformada de Laplace e encontramos o sistema em função de (s), para isto consideramos os valores iniciais como zero. A determinante dos coeficientes

$$\begin{vmatrix} s & \lambda_1 & 0 \\ -\lambda_2 & s & (-\delta s^2 - \delta \omega_p^2) \\ \omega_p & -s & [(1 - \mu) s^2 + \beta s + p^2] \end{vmatrix} = 0$$

temos a equação característica

$$s^4(1-\mu-\delta) + s^3\beta + s^2[p^2 - \delta\omega_p^2 + \lambda_1\lambda_2(1-\mu)] - \lambda_1\delta\omega_p + s\beta\lambda_1\lambda_2 + (\lambda_1\lambda_2p^2 - \lambda_1\delta\omega_p^3) = 0$$

Aplicando omédoto de Routh para o sistema temos:

1. Consideramos $\delta \ll 1$ e $\mu \ll 1$ então temos:

$$\lambda_1\lambda_2 > 0$$

2. Método de Routh

$(1-\mu-\delta)$	$[p^2 - \delta\omega_p^2 + \lambda_1\lambda_2(1-\mu) - \lambda_1\delta\omega_p]$	$(\lambda_1\lambda_2p^2 - \lambda_1\delta\omega_p^3)$
β	$\beta\lambda_1\lambda_2$	0
$(p^2 - \delta\omega_p^2 + \delta\lambda_1\lambda_2 - \delta\lambda_1\omega_p)$	$(\lambda_1\lambda_2p^2 - \lambda_1\delta\omega_p^3)$	0
$\left(\frac{\delta\beta\lambda_1(\omega_p - \lambda_2)(\omega_p^2 - \lambda_1\lambda_2)}{p^2 - \delta\omega_p^2 + \delta\lambda_1\lambda_2 - \delta\lambda_1\omega_p} \right)$	0	0
$[\lambda_1(\lambda_2p^2 - \delta\omega_p^3)]$	0	0
0	0	0

Desde que $\beta > 0$ todos os sinais da primeira coluna deve ser +, pois esta é a condição necessária para que o sistema esteja estável.

$$\lambda_1\lambda_2 > 0$$

$$1 - \mu - \delta > 0$$

$$\beta > 0$$

$$P^2 - \delta(\omega_p^2 + \omega_p\lambda_1 - \lambda_1\lambda_2) > 0$$

$$\lambda_1(\omega_p - \lambda_2)(\omega_p^2 - \lambda_1\lambda_2) > 0$$

$$\lambda_1(\lambda_2P^2 - \delta\omega_p^3) > 0$$

Com está análise de Routh da estabilidade podemos concluir .

CAPÍTULO 8

CONCLUSÃO

Essa denominação é dada a satélites que combinam as vantagens de uma plataforma orientada e de um rotor encarregado de manter a rigidez giroscópica. Em muitos casos, que ocorrem na prática, a plataforma gira em torno do eixo z , que é o eixo axial do rotor. Esse eixo faz parte do sistema x,y,z que é fixo na plataforma que gira com uma velocidade angular, digamos, ω_p (constante) em torno de z . Em muitos casos práticos ω_p é a taxa orbital que permite o apontamento contínuo da plataforma em relação à Terra (essa condição é a nominal e supõe-se também que $\omega_x = \omega_y = 0$). O rotor deve girar com relação à plataforma com uma velocidade constante Ω_r , de tal forma que a velocidade angular absoluta do rotor em torno do eixo z , será $\omega_r = \omega_p + \Omega_r$. Ora, o módulo do momento angular total do satélite é, então, $h = I_p \omega_p + I_r \omega_r$, onde I_p e I_r são os momentos de inércia da plataforma e do rotor em relação ao eixo do rotor (eixo z). É possível mostrar, para um satélite *dual-spin* com um amortecedor tipo massa-mola na plataforma, que para o movimento ser estável nessas condições (ver Kaplan, 1976) é necessário observar as seguintes condições de estabilidade

$$h - I_x \omega_p > 0, \quad h - I_y \omega_p > 0,$$

onde I_x e I_y são os momentos de inércia do satélite em relação aos eixos x e y .

Agora, três observações importantes serão abordadas:

- a) Em muitas aplicações a plataforma não possui giro nenhum ($\omega_x = \omega_y = \omega_z = \omega_p = 0$). Então a condição de estabilidade se torna $h > 0$. Essa condição pressupõe amortecimento somente na plataforma (um amortecedor de nutação deve ser colocado na plataforma). Observe que a condição não especifica qualquer relação de inércias. Logo, o eixo z pode ser, por exemplo, o eixo de menor momento de inércia do satélite.
- b) Suponha que o rotor não gira absolutamente ($\omega_r = 0$) e a plataforma, com amortecedor, gira com ω_p . A estabilidade requer que

$$I_p - I_x > 0, \quad I_p - I_y > 0$$

que é análoga a regra do giro em torno do eixo de maior momento de inércia (o momento de inércia da plataforma em torno do eixo de giro z deve ser maior que os momentos de inércia do satélite em torno dos eixos x e y).

- c) Se ambos, plataforma e rotor, giram com velocidades diferentes, tem-se

$$I_r \omega_r + \omega_p (I_p - I_x) > 0, \quad I_r \omega_r + \omega_p (I_p - I_y) > 0.$$

Se ω_r e ω_p têm o mesmo sinal verifica-se que é necessário uma rotação mínima no rotor para alcançar a estabilidade em torno do eixo de menor momento de inércia. Se ω_r e ω_p têm sinais opostos pode acontecer que as condições para a estabilidade não sejam atendidas mesmo que I_z seja o eixo de maior momento de inércia. Então, é possível que um satélite *dual-spin* seja instável mesmo girando em torno de seu eixo de maior momento de inércia.

CAPÍTULO 9

REFERÊNCIAS

- [1] Meehan, P.A. and Asokanathan, S.F., *Nonlinear Instabilities in a Dual-Spin Spacecraft With an Axial Nutational Damper*, Spaceflight Mechanics 1996.
- [2] Meirovitch, L., *Methods of Analytical Dynamics*, Mc-Graw-Hill 1970.
- [3] Thomson, W.T., *Introduction to Space Dynamics*, John Wiley 1961.
- [4] Kaplan, M.H., *Modern Spacecraft Dynamics & Control*, John Wiley 1976.