

ANÁLISE DE SÉRIES TEMPORAIS DE FENÔMENOS GEOFÍSICOS

Caio Teruo Hideshima

Aluno do Instituto Tecnológico de Aeronáutica - Bolsa PIBIC/CNPq

Orientador: Dr. Daniel Jean Roger Nordemann, Pesquisador, DGE

O estudo dos registros medidos sobre os fenômenos geofísicos, que ocorreram no passado e continuam ocorrendo no presente, tem a vantagem de permitir a observação de relações entre os fenômenos e através destas poder prever, para nos precaver-mos e até tirar-mos proveitos econômicos de um possível acontecimento envolvendo estes fenômenos geofísicos. Além disso, este estudo possibilita um maior conhecimento e entrosamento com o assunto (análise matemática de séries temporais), e também aperfeiçoamento no método de análise de sinais periódicos ou não periódicos.

Os dados analisados são tirados de amostras naturais de manchas solares nas quais a medida vem sendo tomadas a 150 anos por pesquisadores astrônomos. Os dados obtidos através destes métodos de amostras naturais são todos encontrados na internet a disposição dos cientistas e estudantes, porém uma consulta maior através de publicações deve ser feita para confirmar se os dados são confiáveis.

As séries temporais obtidas foram estudadas através do método ARMA com o auxílio dos softwares *Mathematica* que possui grande vantagem sobre os recursos gráficos e matemáticos, e o *MatLab* que possui pacotes (toolbox) com funções necessárias para a análise de séries temporais, tais como densidade espectral de potência e outros.

Comparando-se os resultados, pode-se observar que:

As variações de campo magnético na Terra pode ter suas origens no Sol, mediante variação da atividade solar, e as alterações climáticas podem ter sua origem também no Sol e por fenômenos naturais como erupções vulcânicas, ou artificiais, como queima de combustível fóssil pelo homem.

Manchas escuras, algumas de largura de 50.000 milhas em diâmetro, movem sobre a superfície do Sol, contraindo e expandindo. Este estranho e poderoso fenômeno é conhecido como MANCHAS SOLARES.

Muitas civilizações já tinham idéia da importância do Sol para a Terra, e por isso, no século 17, muitos cientistas como Galileu começaram a observar o Sol e tentar entender um pouco mais sobre este corpo celeste misterioso. Hoje, com telescópios muito mais avançados daqueles usados por cientistas da época de Galileu, é possível observar esse fenômeno e entender mais qual a influência dele na Terra. No entanto existem muitas especulações a respeito dele sobre os efeitos climáticos na Terra. Sabe-se que quando ocorrem baixas atividade solar, ou seja, um número baixo de manchas solares, ocorre um resfriamento no clima da Terra. Porém os cientistas ainda não conseguiram equacionar essa relação entre manchas solares e o clima.

Outra influência das manchas solares na Terra, refere-se ao choque entre o campo magnético do Sol com o da Terra, formando a Aureola Borealis e Australis. Quando um satélite passa por esse eixo que contém o campo magnético do Sol, ocorrem estragos nos aparelhos sensíveis a campo magnético, pois a intensidade deste campo é muito alta.

Para entender melhor o processo de criação das manchas solares, é necessário aprender mais sobre o Sol. O Sol é o maior objeto no sistema solar, contendo mais de 99.8% do total de massa do sistema solar (Jupiter contém a maioria do resto). O Sol é feito de aproximadamente 75% de hidrogênio e 25% de hélio em massa, e pequenos traços de outros metais e outros compostos. Através do tempo, a reação de fusão nuclear que alimenta o sol, está convertendo hidrogênio em hélio em seu núcleo, mudando a razão entre os dois elementos.

A energia produzida na fusão nuclear no núcleo é carregado para fora por movimentos convectivos na chamada zona convectiva. Convecção é o processo pela qual gás quente vindo do centro do sol surge na superfície, e gás frio, na qual vem para a superfície e irradia seu calor,

**INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS
ESPACIAIS**



**RELATÓRIO FINAL DE
INICIAÇÃO CIENTÍFICA**

**ANÁLISE DE SÉRIE TEMPORAIS
DE FENÔMENOS GEOFÍSICOS**

**Bolsista: CAIO TERUO HIDESHIMA
Orientador: Cr. Daniel Roger Jean Nordeman**

São José dos Campos, junho de 1.999

CAPÍTULO I

1.- OBJETIVO

O objetivo desta bolsa de iniciação científica consiste em obter, analisar (através de métodos analíticos) e relacionar os dados numéricos (séries temporais) referentes a fenômenos geofísicos.

A vantagem de fazer um estudo sobre estes fenômenos é permitir a observação dos fenômenos. Além disso, este estudo possibilita um maior entrosamento com o assunto (análise matemática de séries temporais).

O estudo se baseia em análise das séries temporais, que foram medidos por várias décadas, através de análise espectral dinâmica com a utilização do software Mathematica e MatLab e da transmissão e obtenção dos dados através da rede

CAPÍTULO II

2- INTRODUÇÃO

2.1- Manchas Solares

Culturas ancestrais que viviam mais ligadas à natureza reconheciam que o Sol era crucial para a vida na Terra, além disso, o Sol tinha seus mitos e lendas vindas de toda a parte do mundo. Por isso, inicialmente será dado um histórico sobre o Sol e sua importância para as diversas culturas e depois uma abordagem da importância do Sol para o mundo atual.

O Sol e as manchas solares, em culturas ancestrais e para os gregos, era a carruagem para o deus Hélios, guiado através do paraíso por seus cavalos. No Peru, para os Incas e os Mayas, o Sol era um Deus, e eles cuidadosamente observavam e anotavam as mudanças que ocorriam através dos anos, formando calendários detalhados. De acordo com arqueoastrônomo e físico estelar David Dearborn, existem razões para acreditar que alguns Meso-Americanos sabiam reconhecer manchas solares. Embora não haja clara evidência que os Incas ou os Mayas noticiavam manchas solares.

Quem primeiro noticiou manchas solares é difícil de dizer. Mas depois do ano 28 A.C., astrônomos na China anotavam sistematicamente observações dos ciclos que pareciam ser pequenos, mudando de tonalidades escuras na superfície do sol. Existem algumas referências das manchas solares escritas por filósofos gregos do século quarto A.C. Galileu com advento do telescópio, foi um dos primeiros astrônomos a observar o Sol. Astrônomos europeus podiam observar atentamente, visualizando objetos inimagináveis, como estrelas, luas, o Sol e descobrindo planetas nunca vistos anteriormente. Foi com o telescópio que pode ser comprovada a existência das manchas solares. Existem algumas questões sobre quem primeiro viu as manchas solares. Os créditos são divididos normalmente entre Johan Goldsmid da Holanda, Galileu Galilei da Itália, Christopher Scheiner da Alemanha, e Thomas Herriot da Inglaterra, todos eles viram as manchas solares no ano 1611. Todos os cientistas viram as manchas solares através de telescópios, e fizeram desenhos à mão que serviram para ter os primeiros entendimentos sobre manchas solares.



fig. 2.1.1- Desenhos a mão sobre o Sol

Mas esse cientistas não podiam entender o que estava ocorrendo e eles acreditavam que as manchas solares faziam parte do Sol.

Hoje em dia os cientistas utilizam câmeras montadas em poderosos telescópios para tirar fotos da superfície do Sol aumentado em centenas de vezes, revelando detalhes que cientistas do tempo de Galileu poderiam ter se maravilhados. Mas os cientistas estão ainda tentando encontrar maneiras melhores de estudar o Sol, equipando telescópios com vários filtros que capturam partes não visíveis de emissões solares, tais como raios-x e campos magnéticos.

Os modernos desenvolvimentos dos telescópios tem, grandemente, estendido o que os astrônomos podem ver. No tempo de Galileu, os cientistas tinham instrumentos com menos resolução, e menos habilidades para ver detalhes. Eles podiam ver claramente que haviam regiões escuras no Sol, mas eles não podiam ver nada da estrutura fina. Os telescópios de hoje operam em diferentes tipos de lentes. Hoje as pessoas estão usando instrumentos para medir a luz mais precisamente do que os olhos podem.



fig.2.1.2- Visão do Sol com diversos tipo de ondas

Uma mancha solar é uma parte escura da superfície do sol que é mais fria do que ao seu redor. O campo magnético inibe o transporte de calor via movimento convectivo no

Sol. O campo magnético é formado sobre a superfície do Sol , e estende até a coroa do Sol.

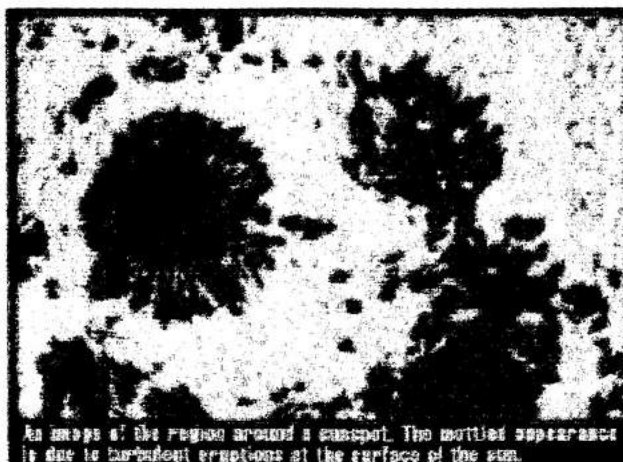


fig. 2.1.3- Região ao redor das manchas solares.

Uma mancha solar pode ser analisada como uma bolha de pressão magnética, rodeada , por pressão de gás da fotosfera. Para a mancha solar existir a pressão total deve estar em balanço entre o lado de dentro e a região de fora. Fora do campo magnético, você tem apenas gás de pressão, o qual depende da temperatura. Na mancha solar você tem tanto a pressão do gás como a pressão magnética combinada. Desde que a pressão deve estar balanceada, a pressão magnética dentro da mancha permite que a pressão do gás volte mais para baixo do que as áreas fora das manchas solares.

Para entender melhor o processo de criação das manchas solares, é necessário aprender mais sobre o Sol. O Sol é o maior objeto no sistema solar, contendo mais de 99.8% do total de massa do sistema solar (Jupiter contém a maioria do resto). O Sol é feito de aproximadamente 75% de hidrogênio e 25% de hélio em massa, e pequenos traços de outros metais e outros compostos. Através do tempo, a reação de fusão nuclear que alimenta o sol, está convertendo hidrogênio em hélio em seu núcleo, mudando a razão entre os dois elementos.



fig. 2.1.4- Visão do Sol a partir de um Telescópio

A energia produzida na fusão nuclear no núcleo é carregado para fora por movimentos convectivos na chamada zona convectiva. Convecção é o processo pela qual gás quente vindo do centro do sol surge na superfície, e gás frio, na qual vem para a superfície e irradia seu calor, retorna para o centro. O sol tem emitido energia por volta de 5 bilhões de anos. As manchas solares aparecem como pequenas manchas no sol, mas com um tamanho equivalente ao da Terra.

O Sol como a Terra, gera campo magnético que penetra na superfície e estende por todo o espaço. O campo magnético do Sol move e muda com o tempo, flutuando a intensidade em diferentes áreas na superfície do Sol. O campo magnético do Sol é produzido por fluidos magnéticos sobre a zona convectiva. Toda a energia que é produzida no Sol, advém de seu núcleo, e essa energia é transportada para a superfície e acaba aquecendo-a. A maior parte da energia é transportada pela difusão da radiação, como uma molécula que transmite a energia para uma e esta para outra. Mas até certo ponto a energia é transporta, nos primeiros 20% do raio do sol, por convecção, que contém bolhas de gás com excessiva energia. As partes mais frias do gás que vieram para a superfíciéis voltam para o centro do sol. Logo ocorre um movimento mecânico que gera um campo magnético que causa as manchas solares.

A mancha solar é uma área escura na superfície do sol e que contém temporariamente uma concentração de campo magnético. Essas forças magnéticas inibem a convectividade, logo a área da mancha é mais fria que ao redor dela que contém plasma e gases. Mesmo sendo apenas um terço mais frio que o resto do plasma, as manchas solares são muito escuras. Isso pode ser comparado com um ferro. Se você tem um pedaço de ferro e aquece ele e pergunta quanto de luz ele emite, você consegue medir. Se você dobrar a temperatura, a quantidade de luz emitida é aproximadamente oito vezes maior. A quantidade de luz emitida é uma função que cresce muito com o aumento de temperatura. Portanto, manchas solares mais frias são mais escuras. O brilho da mancha solar é equivalente ao brilho de uma lua cheia.



Both parts of the sunspot, the darker umbra and the somewhat lighter penumbra, are visible in this image from Big Bear Observatory (1989).

fig. 2.1.5- Mancha solar- Penumbra e Úmbra

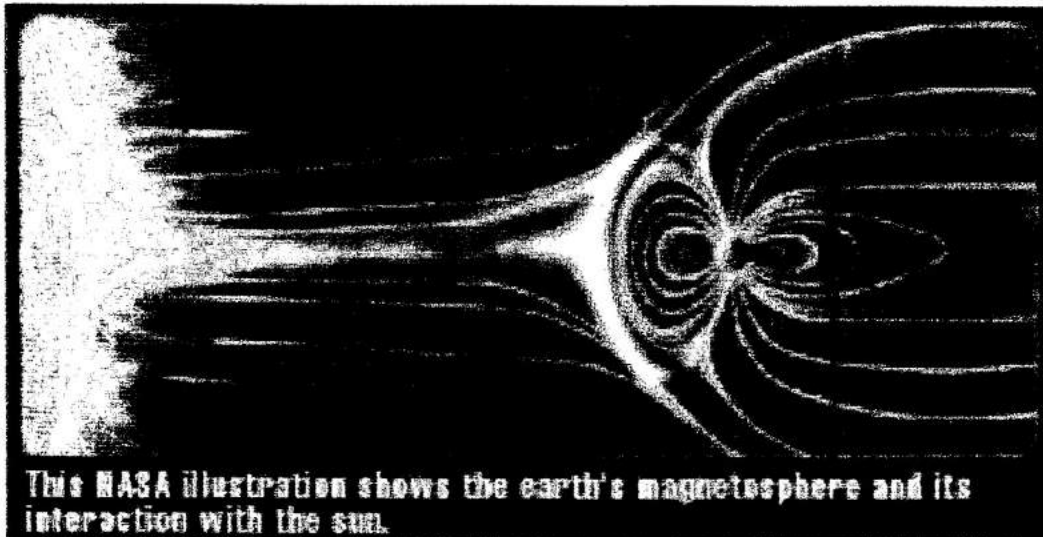
As manchas solares são compostas por duas partes: uma parte central circular mais escura chamada de umbra, e uma parte mais externa mais clara chamada de penumbra. O termo umbra significa sombra no Latin, e o termo penumbra significa quase sombra. A aparência granular na área externa da mancha solar é resultado da convecção. O centro de cada parte granular é um material quente emergindo do interior do Sol.

Nas últimas décadas, o assunto de manchas solares tornaram-se mais entendidas, e foi possível observar nos últimos 150 anos que as manchas solares aparecem em ciclos. O número médio de manchas solares varia com o tempo, aumentando e diminuindo em ciclos regulares entre 9.5 e 11 anos e em média 10.8 anos.

Um astrônomo amador chamado Heinrich Schwabe, foi o primeiro a notar este ciclo, em 1843. A parte do ciclo com baixa atividade de manchas solares é referido como “mínimo solar” enquanto a porção do ciclo com alta atividade é conhecido como “solar máximo”.

Através de estudos de campo magnético de manchas solares, astrônomos descobriram que o ciclo cobre 22 anos, com um ciclo de 11 anos de mancha solares sobre o equador seguido por um ciclo igual abaixo do equador. As manchas solares freqüentemente aparecem em baixas latitudes próximas ao equador solar, e eles quase nunca aparecem abaixo de 5 ou acima de 40 graus norte ou sul na latitude. Conforme o ciclo de mancha prossegue, as manchas visíveis movem gradualmente em direção ao equador. De 1645 a 1715, houve uma drástica redução no número de manchas solares. Este período de redução de atividade solar, foi noticiado por G. Sporer e foi depois investigado por E.W.Maunder. Este período de tempo foi também uma época de frio na Terra, e é referido como a “Pequena Idade do Gelo”. Isto gerou uma especulação que as manchas solares pudessem afetar o clima da Terra. Períodos similares de baixa atividade solar também ocorreram em Sporer Minimum(1420-1530), o Wolf Minimum (1280-1340), e o Oort Minimum (1010-1050).

A energia do Sol tem grande efeito na Terra. Sua luz prove energia para fotossíntese em plantas e algas, que são bases para a cadeia alimentar. Manchas solares também tem uma indireta mas significativa impacto aqui na Terra. No início do século 19, cientistas observaram que altos níveis de atividade na Terra, como explosões e manchas solares, foram seguidos de fortes flutuações em instrumentos magnéticos na Terra. Hoje cientistas descobriram muitas coisas sobre como a atividade atinge a Terra. As manchas solares por si só não afeta a Terra, porém elas são produzidas por campo magnético que ultrapassam a superfície e expande para fora. O material quente chamado plasma próximo a mancha, interage com o campo magnético, e o plasma pode estourar fora do Sol. Partículas energéticas, raio-x, e campo magnético vindos destas chamas de fogo bombardeiam a Terra no qual é chamado de tormento geomagnético. Quando esses tormentos chegam a Terra, eles afetam de várias maneiras.



This NASA illustration shows the earth's magnetosphere and its interaction with the sun.

fig. 2.1.6- Campo magnético emitido pelo Sol

O campo magnético da Terra protege a Terra da maioria das emissões da Terra. Mas durante períodos de intensa atividade de manchas solares, que coincide com explosões solares e emissões de massas de coroa, o fluxo geomagnético vindo do Sol é muito forte. Esses tormentos magnéticos produzem espetaculares Aurora Borealis e Aurora Australis.



An aurora viewed from space. This image was taken by the crew of the Space Shuttle Endeavor in April of 1984.

fig. 2.1.7- Imagem da Aureola vista no espaço

A Terra tem uma camada protetora chamada de magnetosfera, e isto normalmente nos protege de partículas de ventos solares, e outras partículas energéticas dos ventos solares. Mas durante a ejeção de massa da coroa ocorre o choque na camada da magnetosfera da terra, provocando a Aurora.

Este bombardeamento eletromagnético pode também alterar a potência e a razão de transmissão na Terra. Tanto o fluxo de corrente elétrica num fio como a transmissão de ondas de radio através do ar pode interferir com a energia magnética radiada do sol.

Desde que satélites estão fora da proteção do campo magnético da Terra, eles estão particularmente vulneráveis a vários tormentos geomagnéticos que podem ser resultados das atividades solares. Como as partículas energizadas com aceleração vindas do sol interagem com o campo magnético da Terra, e como eles deslizam ao redor da Terra eles formam uma camada de corrente que os satélites tem que lidar com isto. Satélites movem de região do espaço que tem uma carga para outra que tem outra carga, e quando eles atravessam aquelas fronteiras, a superfície do satélite pode de repente mudar a polaridade como isto move de uma região onde há um diferente campo elétrico.

Essa mudança de polaridade pode danificar o satélite. Além disso, essa mudança de polaridade que pode danificar partes eletrônicas sensíveis em satélites, o aumento da emissão solar também pode causar na atmosfera um descontrole do satélite. Esse descontrole pode causar um decaimento na vida do satélite e ele entrar na orbita da Terra muito antes do planejado. O satélite de mais de 100 ton Skylab é um exemplo. Lançado em 1973, a estação era suposta retornar na terra em 1980. O propósito do satélite era entre outras coisas, estudar o Sol. Ironicamente, através da atividade solar, O Skylab reentrou na atmosfera da Terra em 1979 caindo no oceano Índico e partes no oeste da Austrália.

Períodos de alta atividade solar são associados com um aumento na energia emitida do Sol. Manchas solares escuras são rodeadas por áreas de aumento de brilho, conhecido como "plage". Algumas partes do espectro solar, especialmente radiação ultravioleta agrega apenas uma pequena contribuição para a energia total que vem do sol, mudanças neste tipo de radiação pode ter um grande efeito na atmosfera da Terra, especialmente o balanço de energia química fora da atmosfera. As relações entre as manchas solares e o clima na Terra esta ainda sendo debatida, porém é sabido que o período Maunder Minimum, onde se teve um número baixo de manchas solares, coincide com o período de invernos rigorosos no oeste europeu chamado de "Little Ice Age".

Porém existem muitas controvérsias a respeito do efeito do ciclo solar sobre o clima da terra. Uma coisa que é sabida é que a atividade solar muda a luminosidade do Sol, e é preciso saber quantos porcentos de energia esta vindo do Sol. A controvérsia é baseada na complexidade do clima da terra. É difícil distinguir os vários fatores que contribuem para a mudança climática. Como se pode separar os efeitos globais de aquecimento com os possíveis efeitos devidos as manchas solares?

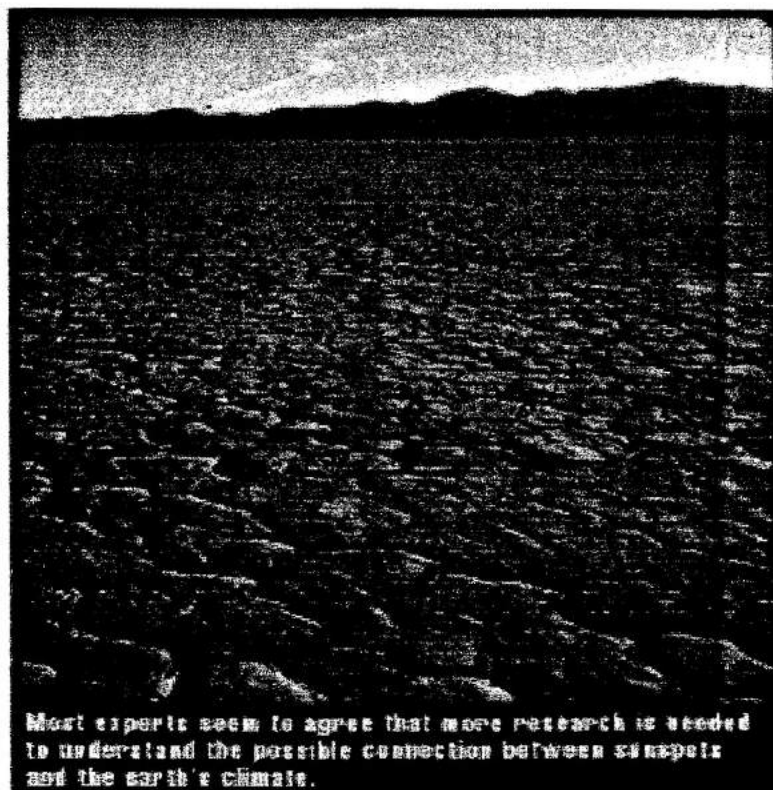


fig-2.1.8- Dúvidas entre a relação das manchas solares com o clima na Terra

Alguns cientistas dizem que algumas pessoas especulam , mas esta é uma área muito difícil, onde se requer muito mais pesquisas antes de estarmos certos dos efeitos climáticos. Conforme o tempo vai passando, menos sabemos sobre o impacto das manchas no clima da Terra pois esta vai sendo cada vez mais relacionado com as ações humanas, tais como queimadas de fósseis, combustíveis e desmatamento. No entanto, mais pesquisas em manchas solares precisam ser feitas. Existem muitos mistérios sobre manchas solares para serem resolvidas. Cientistas estão tentando aprender mais sobre manchas solares. Um método que os cientistas usam são comparar imagens de diferentes tipos de luz ou radiação, é examinar a relação entre as figuras. Nesta atividade, é possível comparar visivelmente imagens de luz de manchas solares entra as figuras. Nesta atividade, deve-se comparar luz visíveis de imagens que mostram raios-x emitidos do mesmo tempo e período.

No exemplo a seguir fica muito bem visível esta comparação. Existem dois tipos de imagens. Na imagem de white-light você pode ver o tamanho da mancha solar, suas posições no disco solar. Quando você olha para o raio-x, basicamente o que você vê é a quantidade de energia que esta sendo emitida naquela região.

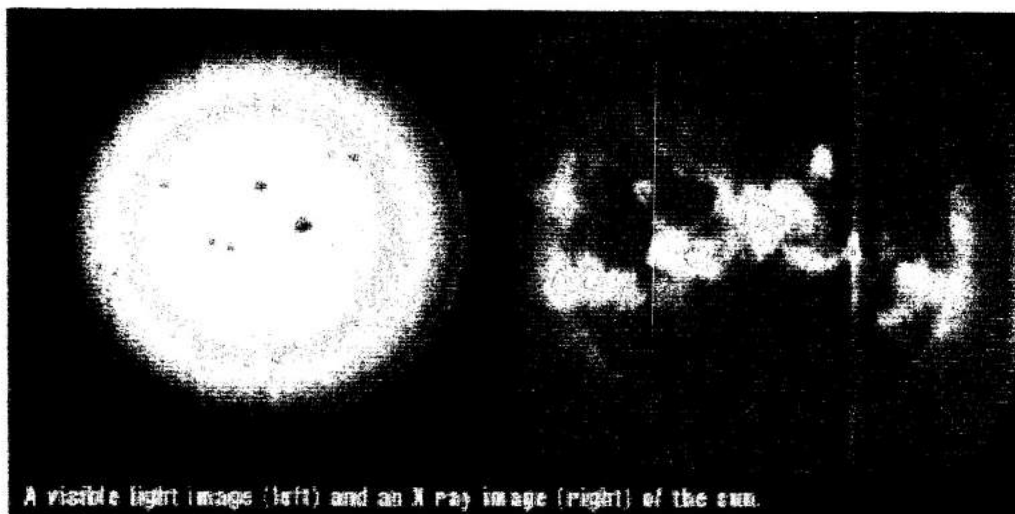


fig. 2.1.9- Diferentes tipos de imagens possuem diferentes tipos de aplicação

2.2- Séries Temporais

2.2.1- Sinais determinísticos e sinais aleatórios

Uma série temporal pode ser basicamente de dois tipos: determinísticos e não-determinísticos. Uma série temporal determinística de um fenômeno físico são aquelas que podem ser descritas explicitamente por uma relação matemática. Na prática, existem vários fenômenos que produzem dados que podem ser representados com uma precisão razoável através de uma relação matemática explícita. Por exemplo, um movimento de satélite ao redor da Terra, a resposta de vibração de um eixo desbalanceado em rotação, etc. Contudo, existem vários outros fenômenos que produzem séries temporais de características não-determinísticas. Por exemplo, alturas de ondas do mar em ressaca, a pressão acústica gerada pelo ar correndo através de uma flauta, etc. Não existe um meio para prever um valor exato no instante futuro no tempo. Esses dados possuem características aleatórias e, ao invés de serem descritos através de equações, devem ser descritos em termos de probabilidades e médias estatísticas. Na prática, nenhuma série de um fenômeno físico pode ser totalmente determinístico pois sempre haverá a possibilidade de um evento imprevisto influenciar no fenômeno produzindo uma série que não foi originalmente considerada. Por outro lado deve-se concordar que nenhum fenômeno físico é totalmente aleatório, pois uma descrição matemática pode ser suficiente para o conhecimento dos mecanismos básicos envolvidos no fenômeno.

Se um experimento produz uma série temporal específica e esses dados podem ser repetidos muitas vezes (com limite de erros experimentais), então esses dados podem ser considerados determinísticos. Se um experimento não pode produzir resultados idênticos quando repetidos nas mesmas condições, então os dados da série devem ser considerados de natureza aleatória.

2.2.2- Classificação de Séries Temporais Determinísticas

A representação de uma série de um fenômeno pode ser categorizada em periódica e não-periódica. Uma série periódica pode ser classificada em senoidal ou complexo periódica. Uma série não periódica pode ser classificada em quasi-periódica ou transiente.

2.2.2.1- Série Periódica Senoidal

Uma série senoidal são os tipos de séries periódicas que podem ser definidos matematicamente com uma função variante no tempo da forma:

$$x(t) = X\sin(2f_0t\pi + \theta) \quad (2.2.2.1.1)$$

Onde:

X = amplitude

F = frequência cíclica em Hz

θ = ângulo de fase inicial com respeito a origem do tempo em radianos

x(t) = valor instantâneo no tempo t

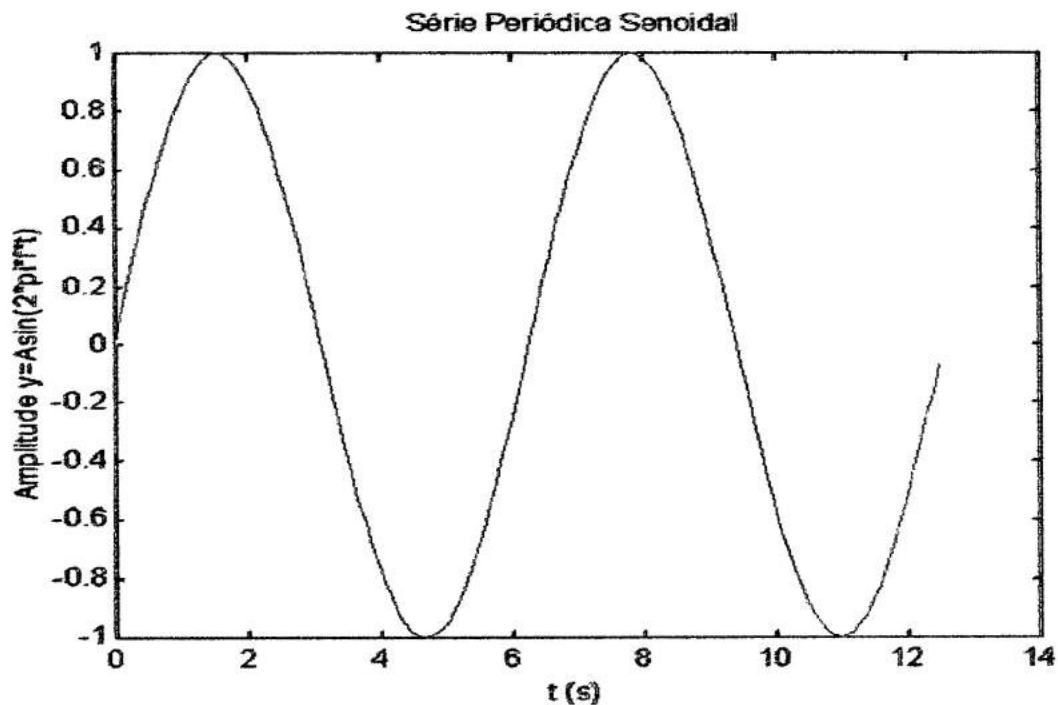


fig. 2.2.2.1.1- Série temporal periódica

Existem muitos exemplos de fenômenos físicos que podem ser representados matematicamente por uma série temporal senoidal. A voltagem de saída de um alternador elétrico é um exemplo.

2.2.3 – Série Periódica Complexa

Uma série temporal periódica complexa pode ser representada matematicamente como uma função variante no tempo cuja fórmula da onda repete-se exatamente em intervalos regulares de tempo, tal como:

$$x(t) = x(t \pm nT_p) \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.2.3.1)$$

Uma série temporal periódica complexa pode ser expandida em uma série de Fourier de acordo com a seguinte fórmula:

$$x(t) = X_0 + \sum_{n=1}^{\infty} X_n \cos(2\pi n f_1 t - \theta) \quad (2.2.3.2)$$

Uma série periódica complexa consiste de uma componente estatística X_0 e um número infinito de componentes senoidais chamados harmônicas o qual tem amplitudes X_n e fase θ_n .

Quando analisado na prática o ângulo de fase θ_n são freqüentemente ignorados, e pode ser caracterizado através de seu espectro discreto, como na figura seguinte:

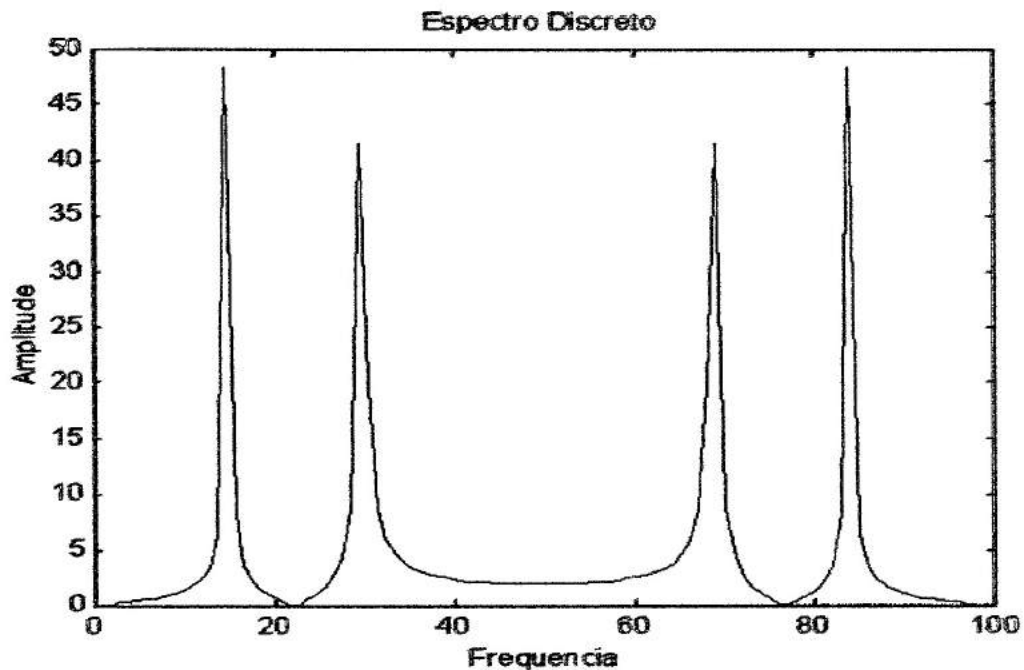


fig. 2.2.3.1- Espectro de uma função periódica

2.2.4 – Série Quasi-Periódica

Uma série formada pela soma de duas ou mais componentes senoidais com freqüências arbitrárias geralmente não são periódicas. Especificamente, a soma de duas ou mais ondas senoidais serão periódicas somente quando a razão das freqüências formam número racional.

$$x(t) = X_1 \sin(2t + \theta_1) + X_2 \sin(3t + \theta_2) + X_3 \sin(7t + \theta_3) \quad (2.2.4.1)$$

São periódicas desde que $2/3$, $2/7$ e $3/7$ são números racionais. Séries quasi- periódicas são definidos matematicamente como função variante no tempo da forma:

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n \sin(2\pi f_n t + \theta) \quad (2.2.4.2)$$

Onde f_n/f_m não são números racionais.

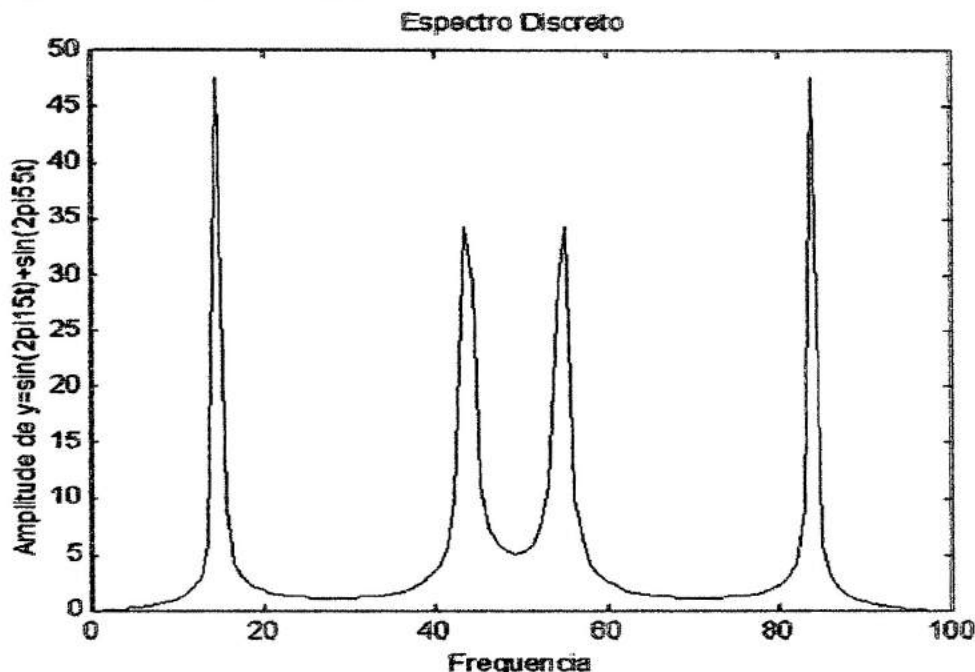


fig. 2.2.4.1-Espectro de uma função quasi-periódica

2.2.5 – Série não-periódica transiente.

Uma série não-periódica transiente são aquelas que não foram discutidas anteriormente e que podem ser descritas como uma função variante no tempo. Uma característica importante de uma série transiente e que sua representação espectral discreta não é possível. Uma representação espectral contínua de uma série transiente pode ser obtida, na maioria dos casos, através de uma transformada de Fourier. Uma transformada de Fourier é geralmente um número complexo expressa por uma notação polar complexa da forma

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\theta(f)} \quad (2.2.5.1)$$

2.2.6– Classificação de uma Série Aleatória

Uma série temporal aleatória de um fenômeno físico não pode ser representada através de uma relação matemática explícita, pois cada observação do fenômeno é única. Por exemplo, a saída de voltagem de um ruído térmico gerado como função do tempo. Uma específica série temporal histórica da voltagem será obtida como na figura abaixo. Se o

segundo ruído térmico for gerado através de uma construção idêntica e gerado simultaneamente terá uma série temporal diferente da primeira.

Uma série temporal representando um fenômeno aleatório é chamado de função amostral (ou registro amostral quando observado num intervalo finito de tempo). Um processo aleatório pode ser caracterizado como estacionário e não-estacionário. Um processo estacionário pode ser caracterizado como ergódica e não-ergódica. Um processo aleatório não-estacionário pode ser caracterizado em termos de tipos específicos de propriedades não-estacionárias.

2.2.7– Série Aleatória Estacionária

Quando um fenômeno físico é considerado através de um processo aleatório as propriedades de um fenômeno podem hipoteticamente ser descritas em qualquer instante do tempo através dos valores médios de uma coleta de dados de uma função amostral que descreve o processo aleatório. Por exemplo considere a coleção de funções amostras (também chamada de ensemble) que formam um processo aleatório ilustrado na figura seguinte. Os valores básicos de um processo aleatório em algum tempo t_1 pode ser computado obtendo os valores instantâneos de cada função amostra do ensemble no tempo t_1 , somando os valores, e dividindo pelo número de funções amostrais. De maneira similar, a correlação entre os valores de um processo aleatório em dois tempos diferentes (chamado de função autocorrelação) pode ser computada obtendo os valores ensemble médios de um produto de valores instantâneos de dois tempos t_1 e $t_1 + \tau$. Para um processo aleatório $\{x(t)\}$, onde o símbolo $\{\}$ é usado para denotar uma função amostral ensemble, o valor médio $\mu_x(t_1)$ e a função autocorrelação $R_{xx}(t_1, t_1 + \tau)$ são dados por

$$\mu_x(t_1) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k(t_1) \quad (2.2.7.1)$$

$$R_{xx}(t_1, t_1 + \tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k(t_1)x_k(t_1 + \tau) \quad (2.2.7.2)$$

Para os casos gerais onde $\mu_x(t_1)$ e $R_{xx}(t_1, t_1 + \tau)$ variam como tempo t_1 varia, o processo aleatório $\{x(t)\}$ é dito ser não estacionário. Para os casos específicos onde $\mu_x(t_1)$ e $R_{xx}(t_1, t_1 + \tau)$ não variam como t_1 varia, o processo aleatório $\{x(t)\}$ é dito ser estacionário. Para um processo estacionário fraco o valor médio é constante e a função autocorrelação depende somente do valor τ . Isso significa que $\mu_x(t_1) = \mu_x$ e $R_{xx}(t_1, t_1 + \tau) = R_{xx}(\tau)$.

2.2.8– Série Aleatória Ergódica

Se um processo aleatório $\{x(t)\}$ é estacionária, e $\mu_x(k)$ e $R_{xx}(\tau, k)$ não diferem quando obtidas de diferentes funções amostrais, o processo aleatório é dito ser ergódico. Para um processo aleatório ergódico a função autocorrelação e o valor médio variante no tempo são iguais a média ensemble. Isto significa que $\mu_x(k) = \mu_x$ e $R_{xx}(\tau, k) = R_{xx}(\tau)$. Note que somente um processo aleatório estacionário pode ser ergódico.

$$\mu_x(k) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_k(t) dt \quad (2.2.8.1)$$

$$R_{xx}(\tau, k) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_k(t) x_k(t + \tau) dt \quad (2.2.8.2)$$

Um processo aleatório ergódico é uma importante classe de processos aleatórios desde que todas as propriedades do processo aleatório ergódico pode ser determinado através de médias temporais sobre uma simples função amostral.

2.2.9- Análise de um Processo Aleatório

Desde que uma equação matemática explícita pode ser escrita através de um fenômeno aleatório, procedimentos estatísticos podem ser usados para definir as propriedades dos dados.

2.2.9- Propriedades Descritivas Básicas

Propriedades estatísticas básicas são importantes para descrever registros aleatórios estacionários:

- 1- média e valor médio quadrático
- 2- função densidade probabilidade
- 3- função autocorrelação
- 4- função densidade espectral.

O valor médio μ_x e a variância σ_x^2 para um registro estacionário representa a tendência central e a dispersão, respectivamente, dos dados. O valor médio quadrático ψ_x^2 , que equivale a variância mais o quadrado da média, constitui a medida da combinação da tendência central e dispersão.

A função autocorrelação $R_{xx}(\tau)$ para registro estacionário é a medida das propriedades estacionárias do tempo dos dados que são separados por um valor fixo de tempo. A função densidade autoespectral (também chamado espectro de potência) $G_{xx}(f)$ para um registro estacionário representa a taxa de mudança do valor quadrático da média com a frequência. A área total sobre a função de densidade autoespectral sobre todas as frequências será o valor quadrático médio total dos registros.

Para pares de registros aleatórios de dois diferentes processos aleatórios, as propriedades estatísticas são:

- 1- função densidade probabilidade junta
- 2- função correlação cruzada
- 3- função densidade espectral cruzada
- 4- função resposta frequência

5- função coerência

Aplicações comuns de densidade probabilidades e função distribuição além de descrição probabilística básica de valores de dados incluem

- 1- estimação de normalidade
- 2- indicação de efeitos não-lineares
- 3- análises de valores extremos

Aplicação primária de medidas de correlação incluem

- 1- detecção de periodicidades
- 2- previsão de sinais em ruídos
- 3- medidas de atraso no tempo
- 4- localização de fontes de distúrbios
- 5- identificação de propagação de caminho e velocidade

Aplicação típica de densidade espectral inclui

- 1- determinação de propriedades do sistema de entradas de dados e saídas de dados
- 2- previsão de saída de dados através de saídas de dados e propriedades do sistema
- 3- identificação de entrada de dados através de saída de dados e propriedades do sistema
- 4- especificação de dados dinâmicos para programas de teste
- 5- identificação da energia e origem de ruídos
- 6- previsão linear ótima e filtragem

2.3- Análise Espectral

A estimação da densidade espectral de potência ou simplesmente espectro, de uma amostra discretamente determinística e de um processo estocástico é usualmente baseada em procedimentos aplicando transformada rápida de Fourier (FFT). Esta aproximação para análise é computacionalmente eficiente e produz resultados razoáveis para uma larga classe de sinais. Apesar dessas vantagens, existem várias limitações de performance inerentes a aproximação de FFT. A mais notória limitação se refere a resolução de frequência, isto é, habilidade de distinguir respostas espectrais de dois ou mais sinais. A segunda limitação se refere ao janelamento implícito que ocorre quando se processa com o FFT.

Na tentativa de superar as limitações inerentes ao FFT, muitas alternativas de processos de estimação espectral foram propostas nas últimas décadas. A história da transformada de Fourier pode ser traçada através dos últimos duzentos anos. O advento da análise espectral baseada em análise de Fourier pode se dizer que é de autoria de Schuster, que foi o primeiro a introduzir o tema periodograma. O maior benefício foi a introdução da função autocorrelação de um processo aleatório e sua relação de transformada de Fourier com a densidade espectral de potência, feitos por Khinchin e também independentemente por Wiener. Blackman e Tukey (BT) introduziram uma implementação prática para aproximação da autocorrelação de Wiener para estimação espectral de potência de registros amostrais. Aproximação BT foi a técnica de estimação espectral mais popular até a introdução do algoritmo de FFT em 1965. A estimação espectral convencional de FFT baseada em dados da série de Fourier na qual o processo é assumido ser composta por harmônicas senoidais. O uso de estimativas espectrais não tradicionais iniciou-se em 1960. Parzen em 1968 propôs a estimação espectral auto regressiva (AR). Independentemente em

1967 Burg introduziu o método de máxima entropia. Um modelo mais generalizado do modelo AR foi originado chamado de ARMA.

2.3.1- Revisão da Técnicas de Estimações Espectrais

2.3.1.1 - Densidade Espectral

A estimação espectral é caracterizada por diversos fatores na tentativa de produzir a mais real estimativa espectral. Existem vários fatores em janelamento, domínio no tempo e domínio na frequência. Considere o caso de uma função determinística contínua no tempo $x(t)$. Se $x(t)$ é absolutamente integrável o sinal de energia será dado por

$$\varepsilon = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty \quad (2.3.1.1.1)$$

Sua transformada de Fourier será dado por

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j2\pi ft) dt \quad (2.3.1.1.2)$$

O teorema de Parseval é dado por

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df \quad (2.3.1.1.3)$$

O módulo da transformada de Fourier é dado por

$$\zeta(f) = |X(f)|^2$$

Assim $\zeta(f)$ é densidade espectral da energia (ESD), na qual representa a distribuição da energia em função da frequência. Se o sinal $x(t)$ é uma amostra equiespaçada em intervalos Δt para produzir uma seqüência discreta, então a seqüência amostral pode ser representada como um produto da função originada no tempo e funções delta de Dirac $\delta(t)$. Logo a transformada de Fourier do produto é dado por:

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - n\Delta t) \Delta t \right] \exp(-j2\pi ft) dt \\ &= \Delta t \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \exp(-j2\pi fn\Delta t) \quad (2.3.1.1.4) \end{aligned}$$

Se a seqüência de dados são obtidas somente de um número finito de tempo e sobre $n = 0$ até $n = N-1$ e a transformada é discretizada também para N valores através de frequências $f = m \Delta f$ para $m = 0, 1, \dots, N-1$ então

$$\begin{aligned}
 X_m &= \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} x_n \exp(-j2\pi m \Delta f n \Delta t) \\
 &= \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} x_n \exp(-j2\pi mn / N) \\
 &\text{para } m=0, \dots, N-1 \quad (2.3.1.1.5)
 \end{aligned}$$

O EDS discreto pode ser definido como

$$S_m = |X_m|^2 \quad (2.3.1.1.6)$$

O EDS tanto discreto como contínuo está relacionado como estimativa espectral periodograma. No entanto um ponto de vista diferente pode ser obtido quando o processo $x(t)$ é um processo estocástico estacionário. Nesse tipo de processo a energia é usualmente infinita então a quantidade de interesse é a potência na distribuição da frequência. Para o caso de processo aleatório estacionário a função autocorrelação fornece os elementos para análise espectral. O teorema Wiener - Khinchin relaciona $R_{xx}(\tau)$ com o $p(f)$ (PSD)

$$P(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) \exp(-j2\pi f \tau) d\tau \quad (2.3.1.1.7)$$

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t+\tau)x^*(t) dt \quad (2.3.1.1.8)$$

$$P(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} E \left\{ \frac{1}{2T} \left| \int_{-T}^T x(t) \exp(-j2\pi f t) dt \right|^2 \right\} \quad (2.3.1.1.9)$$

2.3.2- Métodos Tradicionais

Duas técnicas de estimação espectral baseada na transformada de Fourier foram estudadas. O PSD estimado é baseado por aproximação indireta via autocorrelação. O outro PSD estimado é baseado por aproximação direta via FFT.

O método direto de análise espectral é dado por

$$\hat{P}_{per}(f) = \frac{1}{N\Delta t} \left| \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} x_n \exp(-j2\pi f n \Delta t) \right|^2 \quad (2.3.2.1)$$

Também definido para o intervalo de frequência - $1 / (2\Delta t) \leq f \leq 1 / (2\Delta t)$.

A potência total do processo é dado por

$$Power = \sum_{m=0}^{N-1} \hat{P}_m \Delta f \quad (2.3.2.2)$$

Onde

$$\hat{P}_m = \hat{P}_{per}(f_m) = \frac{1}{N\Delta t} |X_m|^2 \quad (2.3.2.3)$$

2.4- Métodos Modernos de Modelamento

Como comentado anteriormente, em um largo número de problemas envolvendo ambiente, sociedade e sistemas de engenharia, é possível se observar os efeitos, ou seja, as saídas, porém não é possível observar ou medir as causas das entradas. Em alguns destes casos há um grande número de entradas não observáveis independentes, enquanto que em alguns casos não existe uma teoria suficiente para relacionar as saídas das várias entradas. Alguns exemplos são o fluxo anual de um rio, a população anual de um país em particular, média diária de temperatura em uma certa cidade, a produto per capito de um específico país, etc. Em todos esses casos, é possível ter observações de dados do passado e é desejável desenvolver um modelo o qual pode ser usado para previsão, planejamento e controle. É sempre desejável fazer um modelo que tenha poucos parâmetros, consistente com a devida precisão.

Dois tipos básicos de aproximações pode ser usado para obter um modelo estocástico para uma dada série, y_k , $k = 1, 2, \dots, N$. Na primeira aproximação, tenta-se determinar os parâmetros da seguinte forma

$$Y_k = f(k) + w_k \quad (2.4.1)$$

Onde $f(k)$ é uma função dada, e w_k representa uma seqüência de um ruído randômico. O objetivo é selecionar os parâmetros da função $f(k)$ da mesma maneira que w_k é um ruído branco de média zero e variância menor possível. Os parâmetros dos modelos são determinados através de análise de regressão.

Outra aproximação para modelamento estocástico é considerar que as séries temporais é uma transformação linear de um ruído branco de média zero. Nos casos mais simples, isto pode ser considerado como uma saída de um sistema linear invariante no tempo submetido a uma entrada de ruído branco e o objetivo do modelamento é estimar os parâmetros da função de transferência ou a equação diferença do sistema. Estes são normalmente chamados modelos de séries temporais. Em outros casos, tal como o modelo pode não ser adequado, e isto pode ser necessário realizar modelo de equação diferença para uma n -ésima sucessão de diferenças de uma dada série. Esta é chamada de série não estacionária.

2.4.1- MODELOS OBTIDOS USANDO MÉTODOS DE REGRESSÃO

A principal ideia é assumir um simples modelo e determinar seus parâmetros da mesma maneira que o método dos mínimos quadrados. Deve se considerar primeiro o caso de uma regressão linear.

1.4.1.1- Regressão Linear

Pode-se realizar o modelo para uma série temporal dada através de:

$$y_k = a + bk + w_k \quad (2.4.1.1)$$

Assumindo que $\{w_k\}$ é um ruído de média zero, o modelo estimado é dado por:

$$\hat{y} = a + b_k \quad (2.4.1.1.2)$$

e o objetivo é determinar os valores de a e b o qual pode-se minimizar os quadrados dos erros

$$J = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (y_k - \hat{y}_k)^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N w_k^2 \quad (2.4.1.1.3)$$

Isto é facilmente mostrado que J será minimizado se

$$b = \frac{\sum_{k=1}^N ky_k - N\bar{k}\bar{y}}{\sum_{k=1}^N k^2 - N\bar{k}^2} \quad (2.4.1.1.4)$$

e

$$a = \bar{y} - b\bar{k} \quad (2.4.1.1.5)$$

onde

$$\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y_k \quad (2.4.1.1.6)$$

e

$$\bar{k} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N k \quad (2.4.1.1.7)$$

Com os valores de a e b obtidos das equações acima, o mínimo valor dos quadrados dos erros pode ser obtido de um modelo linear da forma:

$$J_{\min} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y^2 - a^2 - (N+1)ab - \frac{1}{6}(N+1)(2N+1)b^2 \quad (2.4.1.1.8)$$

2.4.2- Regressão Exponencial

Neste caso, o modelo para a estimação é dado por:

$$\hat{y}_k = \alpha \times e^{\beta \times k} \quad (2.4.2.1)$$

e os valores das constantes α e β são determinados através da minimização quadrados dos erros e são determinados por:

$$\beta = \frac{\sum_{k=1}^N k \ln y_k - \bar{k} \sum_{k=1}^N \ln y_k}{\sum_{k=1}^N k^2 - N \bar{k}^2} \quad (2.4.2.2)$$

e

$$\alpha = \exp \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \ln y_k - \bar{k} \beta \right] \quad (2.4.2.3)$$

com k sendo definido na equação 6,08

Para os valores de α e β , o valor quadrático dos erros são dados por:

$$J_{\min} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y_k^2 - \frac{1}{N} \alpha^2 e^{2\beta \frac{1-e^{2(N+1)\beta}}{1-e^{2\beta}}} \quad (2.4.2.4)$$

Um modelo deste tipo é usado quando se espera que o fenômeno tenha um comportamento do tipo exponencial

2.4.3- Modelo Polinomial

Para muitas séries, um ajuste é melhor obtido usando um modelo polinomial do seguinte tipo:

$$\hat{y} = a_0 + a_1 k + a_2 k^2 + \dots + a_m k^m \quad (2.4.3.1)$$

Isto será visto que a regressão linear é um caso especial do modelamento polinomial, para a ordem 1. Os parâmetros a_i que minimizam a média quadrática dos erros para um dado valor m , são obtidos resolvendo-se o seguinte conjunto de equações lineares

$$\begin{bmatrix} 1 & \bar{k} & \bar{k}^2 & \dots & \bar{k}^m \\ \bar{k} & \bar{k}^2 & \bar{k}^3 & \dots & \bar{k}^{m+1} \\ \bar{k}^2 & \bar{k}^3 & \bar{k}^4 & \dots & \bar{k}^{m+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{k}^m & \bar{k}^{m+1} & \bar{k}^{m+2} & \dots & \bar{k}^{2m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_k \\ ky_k \\ k^2 y_k \\ \vdots \\ k^m y_k \end{bmatrix} \quad (2.4.3.2)$$

onde

$$\bar{k}^j = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N k^j \quad (2.4.3.3)$$

e

$$\overline{k^j y_k} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (k^j y_k) \quad (2.4.3.4)$$

Para estes valores de a_i , a média dos quadrados dos erros é obtido como:

$$J_{\min} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y_k^2 - \sum_{i=0}^m a_i \bar{k}^i y_k \quad (2.4.3.4)$$

Valores de m maiores que 5 são usados em problemas práticos.

2.4.4- Modelo de Séries Temporais Estacionárias

Considere a seguinte série temporal $\{y_k\}$ pela qual o valor médio y_k é zero. Neste caso, é sempre possível representar isto como uma saída de um sistema linear invariante no tempo como mostrado a seguir onde a sequência de entrada $\{w_k\}$ é um ruído branco de média zero

$$G(z) = \frac{1 - \theta_1 z^{-1} - \theta_2 z^{-2} - \dots - \theta_n z^{-n}}{1 - \phi_1 z^{-1} - \phi_2 z^{-2} - \dots - \phi_m z^{-m}} \quad (2.4.4.1)$$

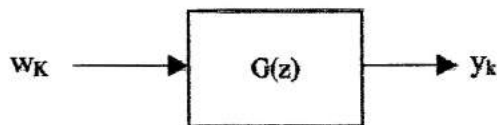


Fig. 2.4.4.1- Processo estocástico estacionário

A Equação 6,19 pode ser usado para expressar a seguinte equação diferença

$$y_k = \phi_1 y_{k-1} + \phi_2 y_{k-2} + \dots + \phi_m y_{k-m} + w_k - \theta_1 w_{k-1} - \theta_2 w_{k-2} - \dots - \theta_n w_{k-n} \quad (2.4.4.2)$$

Desde que a seqüência $\{w_k\}$ é uma não série de ruído branco não-correlacionada, isto não pode se prever através de seus valores passados. Por isso, o melhor estimador para y_k é dado através da equação

$$\hat{y}_k = \phi_1 y_{k-1} + \phi_2 y_{k-2} + \dots + \phi_m y_{k-m} - \theta_1 w_{k-1} - \theta_2 w_{k-2} - \dots - \theta_n w_{k-n} \quad (2.4.4.3)$$

Onde

$$w_i = y_i - \hat{y}_i \quad (2.4.4.4)$$

esta equação é chamada de modelo ARMA (Auto Regressive Moving Average) de ordem (m,n) . Os parâmetros ϕ_i são chamados de autoregressivos parâmetros e θ_i são parâmetros médias móveis.

Se as séries $\{y_k\}$ não tem uma média zero, deve-se subtrair o valor médio de y de cada valor da série para se obter os desvios a partir da média. Desta forma a equação toma forma:

$$\hat{y}_k = \phi_1 y_{k-1} + \phi_2 y_{k-2} + \dots + \phi_m y_{k-m} - \theta_1 w_{k-1} - \theta_2 w_{k-2} - \dots - \theta_n w_{k-n} + (1 - \phi_1 - \phi_2 - \dots - \phi_m) \bar{y} \quad (2.4.4.5)$$

O cálculo dos parâmetros θ_i e ϕ_i requerem conhecimento dos coeficientes de autocorrelação da seqüência $\{y_k\}$, definida como

$$\rho_i = \frac{\gamma_i}{\gamma_0} \quad (2.4.4.6)$$

onde

$$\gamma_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N-i} \sum_{k=1}^{N-i} y_k y_{k+i} \quad (2.4.4.7)$$

2.4.5- Modelo Autoregressivo de Primeira Ordem

Este modelo é da forma

$$\hat{y}_k = \phi_1 y_{k-1} + (1 - \phi_1) \bar{y} \quad (2.4.5.1)$$

onde

$$\phi_1 = \rho_1 \quad (2.4.5.2)$$

Neste caso o erro médio quadrático é dado por:

$$\sigma_w^2 = \sigma_y^2(1 - \phi_1^2) \quad (2.4.5.3)$$

onde σ_w^2 é a variância de y_k .

Para estacionariedade é necessário a magnitude de ϕ_1 ser menor que 1. Isto também segue que o processo satisfaz a equação diferença 1.4.5.1 exatamente, nos temos:

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} \quad (2.4.5.4)$$

1.4.6- Modelo Autoregressivo de Segunda Ordem

Este modelo é da forma

$$\hat{y}_k = \phi_1 y_{k-1} + \phi_2 y_{k-2} + (1 - \phi_1 - \phi_2) \bar{y} \quad (2.4.6.1)$$

onde

$$\phi_1 = \frac{\rho_1(1 - \rho_2)}{1 - \rho_1^2} \quad (2.4.6.2)$$

e

$$\phi_2 = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} \quad (2.4.6.3)$$

Para o modelo ser estacionário, as raízes da equação

$$z^2 - \phi_1 z - \phi_2 = 0 \quad (2.4.6.4)$$

devem estar dentro de um círculo de raio unitário no plano Z. Como mostrado por Box e Jenkins, isto implica que os parâmetros ϕ_1 e ϕ_2 devem estar dentro de uma região denotada por

$$\left. \begin{array}{l} \phi_2 + \phi_1 < 1 \\ \phi_2 - \phi_1 < 1 \\ -1 < \phi_2 < 1 \end{array} \right\} \quad (2.4.6.5)$$

Um processo satisfará a equação diferença 1.4.6.1 se a função autocorrelação satisfizer a equação diferença de segunda ordem

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} \quad (2.4.6.6)$$

O erro médio quadrático esperado é:

$$\sigma_w^2 = (1 - \rho_1\phi_1 - \rho_2\phi_2)\sigma_y^2 \quad (2.4.6.7)$$

1.4.7- Modelo Autoregressivo de Ordem N-ésima

Nos casos gerais o modelo autoregressivo de ordem n tem-se

$$\hat{y}_1 = \sum_{i=1}^n \phi_i y_{k-i} + (1 - \phi_1 - \phi_2 - \dots - \phi_n) \bar{y} \quad (2.4.7.1)$$

Os parâmetros autoregressivos são obtidos resolvendo o seguinte conjunto de equações simultâneas

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \dots & \rho_{n-1} \\ \rho_{12} & 1 & \rho_{12} & \dots & \rho_{n-2} \\ \rho_{22} & \rho_1 & 1 & \dots & \rho_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \rho_{n-12} & \rho_{n-22} & \rho_{n-3} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_{21} \\ \phi_3 \\ \vdots \\ \phi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_{21} \\ \rho_{31} \\ \vdots \\ \rho_n \end{bmatrix} \quad (2.4.7.2)$$

e o erro médio quadrático é dado por:

$$\sigma_w^2 = (1 - \rho_1\phi_1 - \rho_2\phi_{21} - \dots - \rho_n\phi_n)\sigma_y^2 \quad (2.4.7.3)$$

Modelos estacionários requerem que as raízes das equações

$$z^n - \phi_1 z^{n-1} - \dots - \phi_{n-1} z - \phi_n = 0 \quad (2.4.7.4)$$

estejam dentro do círculo no plano-z.

Um processo satisfará a equação 2.4.7.1 se sua função autocorrelação satisfizer a equação diferença

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_{n-1} \rho_{k-2} + \dots + \phi_n \rho_{k-n} \quad (2.4.7.5)$$

1.4.8- Modelo de Médias Móveis de Primeira Ordem

Este modelo é da forma

$$\hat{y}_k = \bar{y} - \theta_1 w_{k-1} \quad (2.4.8.1)$$

ou

$$\hat{y}_k = \bar{y} - \theta_1(y_{k-1} - \hat{y}_{k-1}) \quad (2.4.8.2)$$

onde θ_1 é a raiz da equação quadrática

$$\theta_1^2 + \frac{1}{\rho_1}\theta_1 + 1 = 0 \quad (2.4.8.3)$$

Isto pode ser notado que a equação anterior terá raízes reais somente se $-0,5 \leq \rho_1 \leq 0,5$. Se esta condição é satisfeita então as raízes reais de magnitude menor que uma unidade devem ser usadas para satisfazer a condição de invertabilidade

O erro médio esperado é dado por:

$$\sigma_w^2 = \frac{\sigma_y^2}{1 + \theta_1^2} \quad (2.4.8.4)$$

Para um processo satisfazer o modelo da equação 2.4.8.1 exatamente é necessário que

$$\rho_k = 0 \quad (1.4.8.5)$$

1.4.9- Modelo de Médias Móveis de Segunda Ordem

Neste caso o modelo é representado como

$$\hat{y}_k = \bar{y} - \theta_1(y_{k-1} - \hat{y}_{k-1}) - \theta_2(y_{k-2} - \hat{y}_{k-2}) \quad (2.4.9.1)$$

onde os parâmetros θ_1 e θ_2 são obtidos da seguinte equações

$$\theta_1^2 + \left(\frac{1}{\rho_2} - 2\right)\theta_1 + \left(2 - \frac{2}{\rho_2} + \frac{\rho_1^2}{\rho_2^2}\right)\theta_2 + \left(\frac{1}{\rho_2} - 2\right)\theta_2 + 1 = 0 \quad (2.4.9.2)$$

e

$$\theta_1 = \frac{\rho_1\theta_2}{\rho_2(1-\theta_2)} \quad (2.4.9.3)$$

O erro médio quadrático é dado por

$$\sigma_w^2 = \frac{\sigma_y^2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} \quad (2.4.9.4)$$

A condição de invertabilidade das raízes requer que as raízes da equação

$$z^2 - \theta_1 z - \theta_2 = 0 \quad (1.4.9.5)$$

estejam dentro do círculo do plano-z

Isto é mostrado por Box e Jenkins que as soluções de θ_1 e θ_2 satisfazem as equações 2.4.9.5 existirá se e somente se os coeficientes de correlação ρ_1 e ρ_2 estiverem dentro da área limitada por segmentos da curva

$$\left. \begin{aligned} \rho_1 + \rho_2 &= -0.5 \\ \rho_2 - \rho_1 &= -0.5 \\ \rho_1^2 &= 4\rho_2(1 - 2\rho_2) \end{aligned} \right\} \quad (2.4.9.6)$$

Além disso, nós devemos Ter $\rho_k = 0, k > 2$ para o processo satisfazer este modelo.

1.4.10- Modelo de Médias Móveis de Ordem n

Neste caso nós temos

$$\hat{y}_k = \bar{y} - \theta_1(y_{k-1} - \hat{y}_{k-1}) - \theta_2(y_{k-2} - \hat{y}_{k-2}) - \dots - \theta_n(y_{k-n} - \hat{y}_{k-n}) \quad (2.4.10.1)$$

Os parâmetros do modelo podem ser obtidos pela resolução o seguinte conjunto de equações n não-lineares

$$\rho_i = \frac{-\theta_i + \theta_1\theta_i + \dots + \theta_{n-i+1}\theta_n}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_n^2} \quad (2.4.10.2)$$

sujeito a condição de inversibilidade que as raízes do polinômio

$$z^n - \theta_1 z^{n-1} - \theta_2 z^{n-2} - \dots - \theta_{n-1} z - \theta_n = 0 \quad (1.4.10.3)$$

estejam dentro do círculo de raio unitário de raio um no plano-z.

A variância do erro de alisamento é dado por

$$\sigma_w^2 = \frac{\sigma_y^2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_n^2} \quad (2.4.10.4)$$

2.5-MODELOS DE SÉRIES NÃO ESTACIONÁRIAS

Muitas séries não tem médias estacionárias. Para todos os casos isto deve ser assumido que algumas sutis diferenças da série é estacionária. O modelo resultante é chamado Modelo Autoregressivo Integrado Médias Móveis (ARIMA). Por exemplo, o ARIMA (1,1,1) é dado por

$$\hat{y}_k - \hat{y}_{k-1} = \phi_1(y_{k-1} - y_{k-2}) - \theta_1(y_{k-1} - \hat{y}_{k-1}) \quad (2.5.1)$$

o qual pode ser rearranjado como

$$\hat{y} = (\phi_1 - \theta_1)y_{k-1} - \phi_1 y_{k-2} + (1 + \theta_1)\hat{y}_{k-1} \quad (2.5.2)$$

Os cálculos para os parâmetros ϕ_1 e θ_1 pode ser obtido como para os modelos ARMA. Em casos gerais, uma série não estacionária pode ser obtida através de p iterações de integrações da série. O resultado é chamado modelo ARIMA(m,p,n).

CAPÍTULO III

3- TRATAMENTO DOS DADOS

Os dados da série de manchas solares está ilustrado no gráfico abaixo:

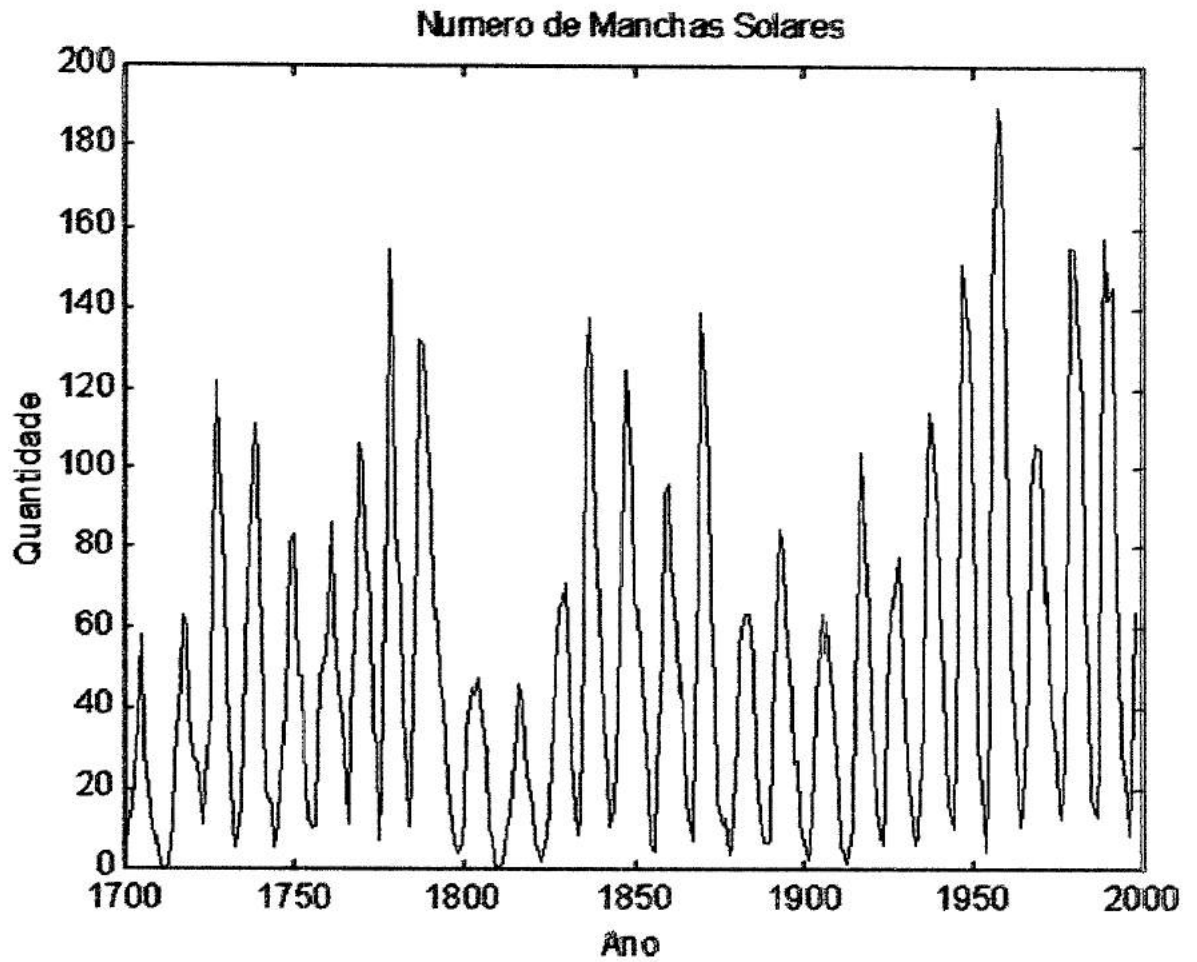


fig. 3.1- Série temporal das manchas solares

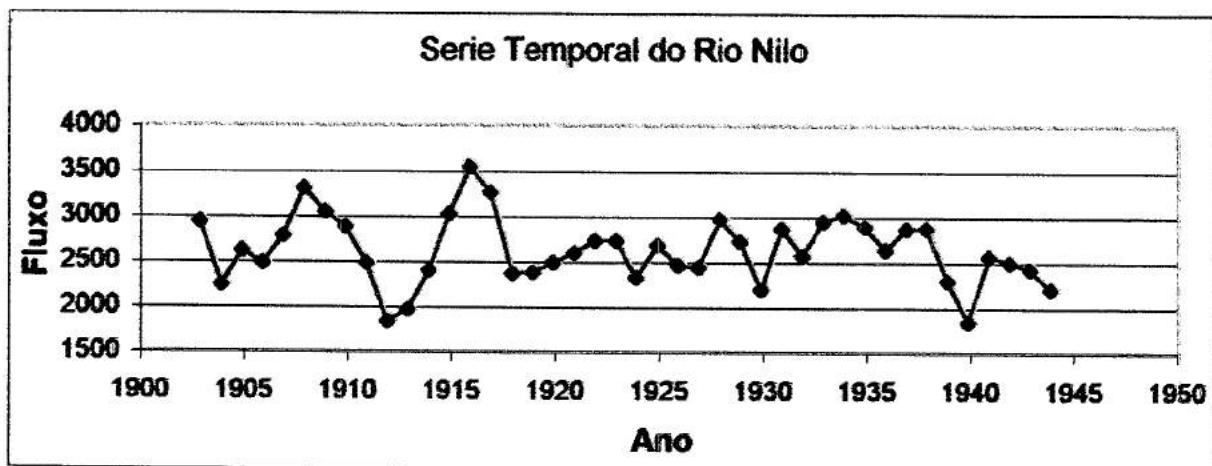


fig. 3.2- Série Temporal de Fluxo do Rio Nilo

CAPÍTULO IV

4- RESULTADOS OBTIDOS

Utilizando as teorias apresentadas no capítulo 2 de introdução, obteve-se os seguintes resultados para as séries temporais de Manchas Solares e do Rio Nilo:

4.1- Manchas Solares

O Periodograma para as manchas solares é representado por:

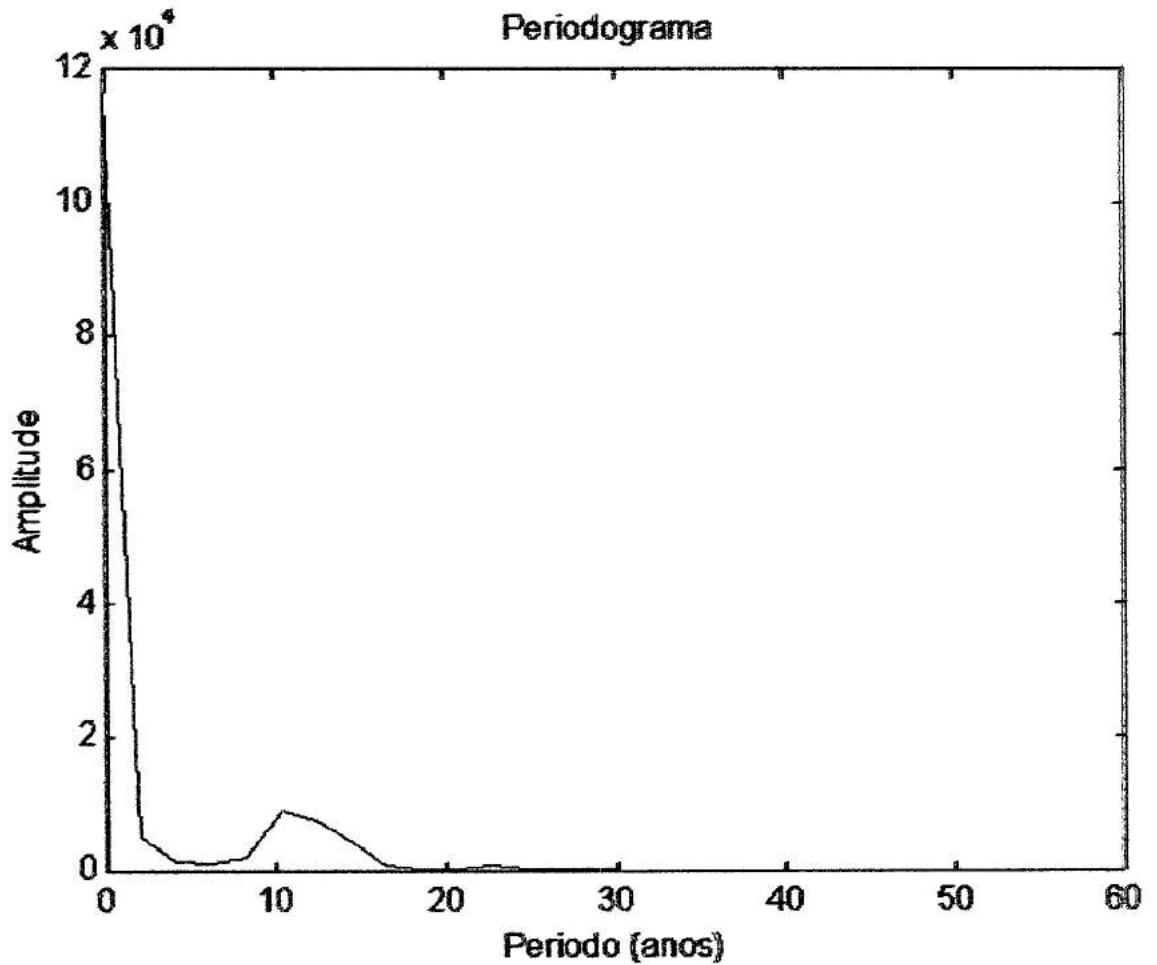


fig. 4.1.1- Periodograma de manchas solares.

Para o modelamento por métodos modernos, obteve-se:

PARAMETRO	ORDEM ARMA			
	(2,1)	(4,3)	(1,0)	(2,0)
ϕ_1	1.42±0.16	0.42±1.0	0.81±0.09	1.34±0.11
ϕ_2	-0.72±0.14	0.28±0.75		-0.65±0.11
ϕ_3		-0.08±0.49		
ϕ_4		-0.33±0.5		
θ_1	0.15±0.22	-0.89±1.0		
θ_2		-0.31±0.76		
θ_3		0.14±0.23		
μ	44.52±6.58	44.84±6.58	42.99±15.9	44.39±7.31
Resíduo da somas dos quadrados	40879.0	39015.9	71688.6	41311.8

Tab. 4.1.1- Resultados referentes aos dados de manchas solares.

4.2- Série do Rio Nilo

Para o modelamento por métodos modernos, obteve-se:

numero	Tipo de Modelamento	Equação $Y_k =$	Erro Médio	Erro Médio	Desvio
				Quadrático	Padrão
1	regressão linear	2735,142-4,649k	-0,004	132251,29	363,664
2	regressão exponencial	2701,331 exp(-0,001617k)	80,949	219799,65	461,789
3	polinômio de seg. ordem	2627,023+10,09478k-0,3428k ²	0	130224,35	360,866
4	polinômio de terc. ordem	2809,83-38,1142k+2,427k ² -0,042983k ³	0,73	126750,16	356,019
5	AR1	0,433785Y(k-1)+0,566215y	-12,187	110611,43	336,488
6	AR2	0,57337Y(k-1)+0,3217Y(k-2)+0,748415y	5,135	94200,518	306,878
7	AR3	0,563926Y(k-1)-0,331229Y(k-2)-1853Y(k-3)+0,9536y	1,007	90056,561	300,093
8	AR4	0,4237Y(k-1)-0,21724Y(k-2)-0,1343Y(k-3)-0,255Y(k-4)+1,1829y	1,051	84424,504	290,557
9	MA1	y-0,5794(Y(k-1)-y(k-1))	-8,364	99826,98	315,843
10	ARMA(2,1)	1,2958Y(k-1)-0,6351Y(k-2)+0,1641(Y(k-1)-y(k-1))	11,083	128442,51	358,217
11	ARIMA(1,1,0)	0,9745Y(k-1)-0,0255Y(k-2)	-1,215	141050,7	375,565
12	ARIMA(2,1,0)	0,9687Y(k-1)-0,193419Y(k-2)+0,2246Y(k-3)	-13,118	137526,83	370,614

CAPÍTULO V

5-CONCLUSÃO

O objetivo da bolsa foi obtido na medida em que foi possível trabalhar com as séries de manchas solares e também do Rio Nilo e delas poder fazer um estudo de regressão das séries temporais dos respectivos fenômenos.

Observando a tabela 4.1.1, pode-se concluir que o modelo ARMA(4,3) possui o melhor modelamento, pois possui o menor resíduo das somas dos quadrados dos erros. No entanto não seria necessário utilizar de uma ordem tão elevada pois o modelo ARMA (2,1) já possui um resultado razoavelmente aceitável.

No caso da série que se refere ao Rio Nilo, pode-se observar que o modelo AR(4) teve o melhor resultado. Pode-se também adicionar que o ARMA(1,1) e o MA(2) não existem desde que as condições das equações 2.4.9.6 não é satisfeita.

Neste relatório foi-se descrito vários métodos de modelos estocásticos tradicionais e não-tradicionais. O fator que deve ser levado em conta é a precisão desejada do modelo, e não a ordem do modelo de regressão. Quanto maior a ordem do modelo maior será a utilização da capacidade do computador, o que torna a regressão mais demorada e pode resultar em melhora pouco significativa em termos de erros.

CAPÍTULO 6

6.- BIBLIOGRAFIA

Nordeman, D.J.R.; **Introdução ao Mathematica for windows**. São José dos Campos, Transtec, 1994

Pandit, Sudhakar M.; **Time Séries and system analysis, with aplications**., Wiley

Morettin, Pedro A, 1942; **Previsão de séries temporais**; Atual, 1987.

Steven M. Kay, Stanley Lawrence Marple, Jr, **Spectrum Analysis**, Proceedings of IEEE, vol 69 nº11 November 1981

Tomas P. Krauss, Loren Shure, John N. Litle, **Signal Processing Toolbox**, Marth Works