

APLICAÇÃO DE MÉTODOS ESTATÍSTICOS E DE OTIMIZAÇÃO NO DESENVOLVIMENTO DE METODOLOGIA PARA A ANÁLISE DA ARQUITETURA MECÂNICA DE SATÉLITES ARTIFICIAIS SOB O PONTO DE VISTA DE SUAS PROPRIEDADES DE MASSA

Michele Marson
Universidade de Taubaté - UNTAU
Orientador: Petrónio Noronha de Souza
Divisão de Mecânica Espacial e Controle
Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE

As atividades de arquitetura mecânica desenvolvidas nos projetos de satélites normalmente contam com ferramentas computacionais que não consideram as dispersões presentes nos dados das propriedades de massa dos equipamentos que constituem o satélite, fornecendo resultados para as propriedades de inércia que não retratavam as incertezas existentes.

Neste trabalho foi feita uma revisão de uma das ferramentas utilizadas para o cálculo das propriedades de inércia. Esta ferramenta (programa) fazia apenas cálculos nominais das propriedades. As alterações introduzidas tiveram como objetivo:

1. A incorporação das incertezas presentes na massa de cada um dos elementos constituintes do satélite. Os resultados passaram a ser apresentados também na forma gráfica com o intuito de dar ao arquiteto mecânico uma visão estatística das quantidades sendo calculadas. Para isto, foi utilizado o método de Monte Carlo;
2. A inclusão da massa da cablagem do satélite como dado de entrada do programa. A cablagem possui massa significativa em relação à estrutura em questão e, normalmente, não faz parte das listas iniciais dos equipamentos.

Com o intuito de também auxiliar nas tarefas de análise, foi estudada a incorporação de um módulo que permitisse ao arquiteto mecânico reposicionar alguns equipamentos com o objetivo de alterar as propriedades de inércia da estrutura. Para tanto foi pesquisada uma técnica de otimização que permitisse criar novas posições para os elementos que constituem o satélite, satisfazendo, por exemplo, às restrições na variação da posição do centro de massa dos mesmos. O método estudado foi de ordem zero que adaptou-se bem às condições impostas pelo problema.

O resultado final proporciona não apenas uma ferramenta capaz de cálculos mais realistas, mas também uma espécie de “ambiente” cuja interatividade dá ao arquiteto mecânico flexibilidade, rapidez e precisão em qualquer etapa do projeto.

**INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS
ESPACIAIS**

Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica - CNPq

Relatório Final

*Aplicação de métodos estatísticos e de otimização
para a análise da arquitetura mecânica de satélites artificiais
sob o ponto de vista de suas propriedades de massa.*

**Bolsista: Michele Marson
Orientador: Petrônio Noronha de Souza
Local: Divisão de Mecânica Espacial e Controle - D.M.C.**

São José dos Campos

Junho/1998

SUMÁRIO

Lista de Símbolos	iii
Lista de Subscritos	iii
1- <u>INTRODUÇÃO</u>	1
2- <u>TEORIA DAS PROPRIEDADES DE MASSA DE CORPOS SÓLIDOS</u>	2
2.1- Propriedades de Massa de um Corpo	2
2.2- Translação de Momentos e Produtos de Inércia	4
2.3- Determinação dos Momentos e Produtos de Inércia com Rotação de Eixos	5
2.4- Tensor de Inércia	6
3- <u>TEORIA BÁSICA DE ESTATÍSTICA</u>	7
3.1- Probabilidade	7
3.2- Variância	7
3.3- Desvio Padrão	8
3.4- Distribuição Normal ou de Gauss	8
4- <u>MÉTODO DE MONTE CARLO</u>	9
4.1- Histórico	9
4.2- Definição	9
4.3- Formulação e Precisão do Método.....	9
5- <u>“MÉTODO DE ORDEM ZERO” PARA OTIMIZAÇÃO</u>	11
5.1- Considerações Gerais.....	11
6- <u>PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS</u>	12
7- <u>RESULTADOS E DISCUSSÕES</u>	14
8- <u>CONCLUSÃO</u>	15
9- <u>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</u>	16
10- <u>BIBLIOGRAFIA</u>	17

Apêndice A - Listagem do Programa PR_INER

Apêndice B - Listagem do Programa TESTOTI

LISTA DE SÍMBOLOS

A	evento	
a	probabilidade do evento A ocorrer	
I	matriz identidade	
I_{xx}	momento de inércia em relação ao eixo x	[kg.m ²]
I_{xy}	produto de inércia em relação aos eixos x e y	[kg.m ²]
I_{xz}	produto de inércia em relação aos eixos x e z	[kg.m ²]
I_{yy}	momento de inércia em relação ao eixo y	[kg.m ²]
I_{yz}	produto de inércia em relação aos eixos y e z	[kg.m ²]
I_{zz}	momento de inércia em relação ao eixo z	[kg.m ²]
M	massa	[kg]
m	massa	[kg]
N	número de testes	
n	número de elementos de um conjunto	
P(A)	probabilidade do evento A	
r_a	estimativa do erro do Método de Monte Carlo	
S	espaço amostral	
T	tensor de inércia	
x	posição do elemento em relação ao eixo x	[m]
y	posição do elemento em relação ao eixo y	[m]
z	posição do elemento em relação ao eixo z	[m]
α	ângulo de rotação em torno do eixo z	[graus]
β	ângulo de rotação em torno do eixo y	[graus]
δ	erro do Método de Monte Carlo	
ϵ	variável aleatória	
γ	ângulo de rotação em torno do eixo x	[graus]
λ	variável	
σ	desvio padrão	
σ^2	variância	
σ_0	desvio padrão da média	

LISTA DE SUBSCRITOS

g	referente ao centro de gravidade
i	índice de um elemento do corpo
j	índice de um elemento do conjunto de amostras
m	referente à média
'	referente a um eixo rotacionado

RESUMO

Para a realização da pesquisa foram estudados a teoria de determinação das propriedades de massa de corpos rígidos, a teoria básica de estatística o Método de Monte Carlo e o método de otimização chamado Método de Ordem Zero. Foram analisados, também, os programas Inércia 262 e Inércia 1 elaborados e utilizados no INPE. Ainda neste período, foi desenvolvido o programa PR_INER, o qual realiza os cálculos das propriedades de massa de um corpo utilizando o Método de Monte Carlo e, ainda, calcula as incertezas associadas a estes valores.

1- INTRODUÇÃO

As atividades de arquitetura mecânica desenvolvidas nos projetos de satélites no INPE sempre contaram com ferramentas computacionais desenvolvidas no próprio Instituto. Até o momento, a metodologia para análise não considerou as dispersões presentes nos dados das propriedades de massa dos equipamentos que constituem o satélite. É objetivo deste trabalho incorporar estas incertezas aos cálculos hoje realizados na atividade de arquitetura mecânica com o intuito de dar ao arquiteto mecânico uma visão estatística das quantidades sendo calculadas.

Para tanto, foi feito um estudo da teoria de determinação das propriedades de massa de corpos (cálculo da posição do centro de gravidade, dos momentos de inércia, dos produtos de inércia e diagonalização do tensor de inércia), a fim de conhecer os procedimentos executados pelos programas disponíveis e possibilitar a realização de testes e verificação dos mesmos.

Em seguida foi analisada a teoria básica de estatística, para posteriormente estudar o Método de Monte Carlo. Esse método, bem como o cálculo das incertezas da massa e das propriedades de massa do satélite, foram incorporados à metodologia utilizada no INPE, referida acima.

Após a implantação do Método de Monte Carlo no programa PR_INER, foi pesquisado um método de otimização para os dados obtidos, que melhor se adaptasse às condições do problema. O método escolhido foi o “Método de Ordem Zero”.

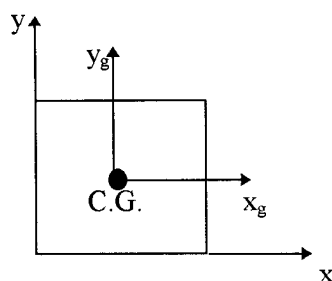
2- TEORIA DAS PROPRIEDADES DE MASSA DE CORPOS SÓLIDOS

Como sabemos, a massa é a propriedade de um corpo que mede sua resistência à variações do movimento de translação, [1]. Além deste atributo, os corpos sólidos possuem outros, chamados propriedades de massa, que são: momento de inércia, produto de inércia e centro de gravidade. Estas são utilizadas, em engenharia, para projetar toda e qualquer estrutura que venha a ser submetida a esforços e movimentos.

Nesta seção, são apresentadas as fórmulas para o cálculo dessas propriedades, bem como as fórmulas para o cálculo de translações de momentos e produtos de inércia, o cálculo de momentos e produtos de inércia com rotação de eixos, a montagem e diagonalização do tensor de inércia e cálculo dos momentos principais de inércia.

2.1- Propriedades de massa de um corpo

A figura abaixo mostra os eixos de referência de um corpo de forma simplificada (somente eixos x e y):



2.1.1- Posição do Centro de Gravidade

Centro de gravidade é o ponto em que atua o peso total de um corpo de modo que o torque que ele provoca, em relação a qualquer ponto seja igual ao torque provocado pelos pesos das partículas individuais que constituem o corpo, [1].

Fórmulas para o cálculo do centro de gravidade, [2]:

$$x_g = \frac{\sum m_i x_i}{M} \quad (2.1)$$

$$y_g = \frac{\sum m_i y_i}{M} \quad (2.2)$$

$$z_g = \frac{\sum m_i z_i}{M} \quad (2.3)$$

Onde:

m_i - massa de um elemento do corpo;

x_i, y_i e z_i - posição do C.G. do elemento em relação aos eixos x,y e z;

M - massa total do corpo.

2.1.2- Momento de Inércia, [3]

Momento de inércia é uma medida da resistência de um corpo alterar seu movimento de rotação, [1].

Fórmulas para o cálculo do momento de inércia:

$$I_{xx} = \int (y^2 + z^2) dm \quad (2.4)$$

$$I_{yy} = \int (x^2 + z^2) dm \quad (2.5)$$

$$I_{zz} = \int (x^2 + y^2) dm \quad (2.6)$$

Onde:

x,y e z - distâncias de um elemento do corpo ao eixo considerado;

dm - elemento diferencial de massa.

2.1.3- Produto de Inércia, [3]

Fórmulas para o cálculo do produto de inércia:

$$I_{xy} = - \int xy \, dm \quad (2.7)$$

$$I_{xz} = - \int xz \, dm \quad (2.8)$$

$$I_{yz} = - \int yz \, dm \quad (2.9)$$

Onde:

x, y e z - distâncias de um elemento do corpo ao eixo considerado;
 dm - elemento diferencial de massa.

2.2- Translação de Momentos e Produtos de Inércia, [4]

2.2.1- Momentos de Inércia

$$I_{xx} = I_{xxg} + m.(y_g^2 + z_g^2) \quad (2.10)$$

$$I_{yy} = I_{yyg} + m.(x_g^2 + z_g^2) \quad (2.11)$$

$$I_{zz} = I_{zzg} + m.(x_g^2 + y_g^2) \quad (2.12)$$

Onde:

I_{xx}, I_{yy} e I_{zz} - momento de inércia em relação a um eixo qualquer;

I_{xxg}, I_{yyg} e I_{zzg} - momento de inércia em relação ao eixo que passa pelo centro de gravidade do corpo;

x_g, y_g e z_g - posição do centro de gravidade.

2.2.2- Produtos de inércia

$$I_{xy} = I_{xyg} - m.x_g.y_g \quad (2.13)$$

$$I_{xz} = I_{xzg} - m.x_g.z_g \quad (2.14)$$

$$I_{yz} = I_{yzg} - m.y_g.z_g \quad (2.15)$$

Onde:

I_{xy}, I_{xz} e I_{yz} - produto de inércia em relação a um eixo qualquer;

I_{xyg}, I_{xzg} e I_{ygz} - produto de inércia em relação ao eixo que passa pelo centro de gravidade do corpo;

x_g, y_g e z_g - posição do centro de gravidade.

2.3- Determinação dos Momentos e Produtos de Inércia com Rotação de Eixos, [2]

2.3.1- Rotação em z :

$$I_{zz}' = I_{zz} \quad (2.16)$$

$$I_{xx}' = I_{xx} \cos^2 \alpha + I_{yy} \sin^2 \alpha \quad (2.17)$$

$$I_{yy}' = I_{xx} \sin^2 \alpha + I_{yy} \cos^2 \alpha \quad (2.18)$$

$$I_{xz}' = 0 \quad (2.19)$$

$$I_{yz}' = 0 \quad (2.20)$$

$$I_{xy}' = -\frac{1}{2} (I_{yy} - I_{xx}) \sin 2\alpha \quad (2.21)$$

2.3.2- Rotação em y :

$$I_{yy}' = I_{yy} \quad (2.22)$$

$$I_{xx}' = I_{xx} \cos^2 \beta + I_{zz} \sin^2 \beta \quad (2.23)$$

$$I_{zz}' = I_{zz} \cos^2 \beta + I_{xx} \sin^2 \beta \quad (2.24)$$

$$I_{xy}' = 0 \quad (2.25)$$

$$I_{yz}' = 0 \quad (2.26)$$

$$I_{xz}' = -\frac{1}{2} (I_{xx} - I_{zz}) \sin 2\beta \quad (2.27)$$

2.3.3- Rotação em x:

$$I_{xx}' = I_{xx} \quad (2.28)$$

$$I_{yy'} = I_{yy}\cos^2\gamma + I_{zz}\sin^2\gamma \quad (2.29)$$

$$I_{zz'} = I_{yy}\sin^2\gamma + I_{zz}\cos^2\gamma \quad (2.30)$$

$$I_{xy'} = 0 \quad (2.31)$$

$$I_{xz'} = 0 \quad (2.32)$$

$$I_{yz'} = -1 (I_{zz} - I_{yy})\sin 2\gamma \quad (2.33)$$

2.4- Tensor de Inércia

Tendo calculado os momentos e produtos de inércia, obtemos o tensor de inércia do corpo, [3].

$$T = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

À partir do tensor de inércia são calculados os momentos principais de inércia e os produtos principais de inércia do corpo.

Quando o sistema de eixos é escolhido de tal forma a produzir produtos de inércia nulos, diz-se que seu tensor de inércia está diagonalizado. Neste caso o referencial utilizado está alinhado com os eixos principais de inércia do corpo.

Os momentos principais de inércia do corpo são calculados através da equação:

$$\det (T - \lambda I) = 0 \quad (2.35)$$

Onde:

I - matriz identidade .

Os momentos principais de inércia são as raízes (λ) da equação, que também são chamadas autovalores do tensor de inércia. Uma vez conhecidos os autovalores, podemos determinar os autovetores do tensor. A estes autovetores estão associados ângulos, os quais definem as direções principais de inércia do corpo com relação ao referencial inicial.

3- TEORIA BÁSICA DE ESTATÍSTICA

A metodologia utilizada anteriormente não considerava as dispersões presentes na massa dos equipamentos que constituem o satélite, adotava apenas os valores nominais e realizava os cálculos fornecendo valores únicos para a massa do satélite e suas propriedades.

Para solucionar este problema resolveu-se incorporar a essa metodologia o Método de Monte Carlo e os gráficos das distribuições. Esse método apresenta o valor calculado como uma média, obtida à partir dos N testes realizados, e seu erro é obtido a partir do desvio padrão. A teoria básica de estatística, necessária para a aplicação deste método é apresentada a seguir.

3.1- Probabilidade

Chamamos de probabilidade de um evento A (o conjunto A está contido no conjunto S) o número real $P(A)$, tal que, [5]:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} \quad (3.1)$$

Onde:

$n(A)$ - número de elementos do evento A;
 $n(S)$ - número de elementos do espaço amostral.

3.2- Variância

Índice de variabilidade que baseia-se nos desvios em torno da média aritmética, porém determinando a média aritmética dos quadrados dos desvios, [5].

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_j - x_m)^2}{n} \quad (3.2)$$

Onde:

n - número total de amostras;

x_m - média dos valores;
 x_i - valores.

3.3- Desvio Padrão

O desvio padrão é a raiz quadrada da variância, [5].

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_j - x_m)^2}{n}} \quad (3.3)$$

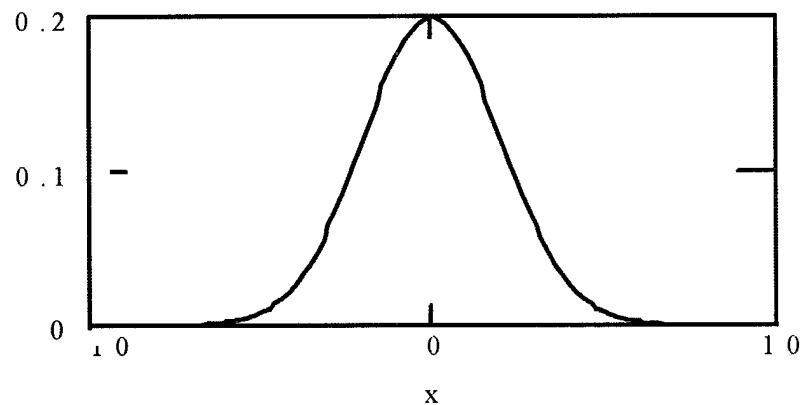
Onde:

n - número total de amostras;
 x_m - média dos valores;
 x_i - valores.

3.4- Distribuição Normal ou de Gauss

É uma curva que representa a distribuição de uma variável aleatória. Essa curva é simétrica em torno de um valor médio x e assintótica em relação ao eixo das abscissas.

A área sob a curva é igual a 1, e corresponde a probabilidade de a variável aleatória x assumir qualquer valor real. Portanto, a probabilidade de um valor maior que a média ocorrer é igual a probabilidade de um valor menor que a média ocorrer, isto é, ambas são iguais a 0,5, [5].



4- MÉTODO DE MONTE CARLO

4.1- Histórico

Considera-se que o Método de Monte Carlo foi desenvolvido no ano de 1949, no qual apareceu no artigo “The Monte Carlo Method”. A criação deste método está ligada aos nomes dos matemáticos norte-americanos J. von Neumann e S. Ulam, [6].

4.2- Definição

É um método estatístico de verificação, o qual envolve um esquema de produção de eventos aleatórios, onde cada verificação é independente do resto, [7].

A Simulação de Monte Carlo é feita em três passos :

- 1) Aplicação de números aleatórios para simular exemplos representativos de variáveis aleatórias com distribuições;
- 2) Solução de problemas na base de grandes realizações ;
- 3) Análise estatística dos resultados.

4.3- Formulação e Precisão do Método

Supondo que $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N$, são observações independentes de uma mesma distribuição. Então um estimador da média desta distribuição é, [6] :

$$\varepsilon_m = \frac{\sum_{i=1}^N \varepsilon_i}{N} \quad (4.1)$$

Este é , então, o resultado do problema pelo Método de Monte Carlo. O desvio deste valor é o erro do método, [8]. A distribuição de ε_m pode ser obtida pelo teorema de limite da probabilidade, sendo o valor r_a o qual, com a probabilidade, temos :

$$|\varepsilon_m - a| \leq r_a \quad (4.2)$$

O valor r_a pode servir como uma estimativa do erro.

Considerando um caso onde ϵ_m tem distribuição próxima da normal (Gaussiana), no qual o erro é conhecido com probabilidade a , temos $r_a = 3\sigma_0$, onde σ_0 é o desvio padrão da média (Lei Três-Sigma).

A variância σ_0^2 da média é relacionada com a variância σ^2 de ϵ_n pela fórmula:

$$\sigma_0 = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \quad (4.3)$$

e, portanto, o erro do Método de Monte Carlo pode ser estimado por:

$$\delta = |\epsilon_m - a| \leq \frac{3 \cdot \sigma}{\sqrt{N}} \quad (4.4)$$

O fato mais importante é que a estimativa é da ordem de $N^{-1/2}$, isto é, o erro δ envolvido no valor calculado pelo Método de Monte Carlo, é dado por:

$$\delta = \frac{3 \cdot \sigma}{\sqrt{N}} \quad (4.5)$$

ou seja, o erro diminui quando N aumenta.

Onde:

ϵ_m - média das observações

σ - desvio padrão da média

δ - erro estimado

N - número de tentativas

a - probabilidade de um evento

5- ALTERAÇÃO DA POSIÇÃO DO CENTRO DE MASSA POR MEIO DE UM MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO

5.1- Considerações Gerais

Um método de otimização de ordem zero é utilizado com o propósito de reposicionar uma série de corpos com o intuito de fazer o centro de massa final ficar o mais próximo possível de um ponto previamente estabelecido pelo usuário.

Para isto são determinados os corpos que devem ser deslocados de sua posição original e a cada um é atribuída uma faixa de tolerância (com valores máximos e mínimos).

Em seguida é gerada uma distribuição randômica do tipo uniforme à partir da qual são escolhidas, automaticamente, as novas posições para o centro de gravidade dos corpos movimentados. Com estes valores é calculado o novo centro de massa do satélite e processa-se a minimização da diferença deste em relação ao valor fornecido pelo usuário.

Este processo é efetuado até um número limite de vezes, para evitar que o processo não possa ser interrompido, ou até que se obtenha um resultado suficientemente próximo ao desejado.

Algoritmo:

- . Estabelecer os corpos que devem ser movimentados;
- . Estabelecer, para cada corpo, uma faixa de tolerância dentro da qual ele pode ser movimentado;
- . Fornecer a posição desejada para o novo centro de gravidade do satélite;
- . Estabelecer a precisão desejada no processo de otimização;
- . Fornecer estes dados à rotina de otimização, para que seja calculada a nova posição do centro de gravidade. Esta rotina minimiza o valor calculado com a posição fornecida pelo usuário;
- . Executar a rotina N vezes, até que seja obtido o novo centro de gravidade com precisão previamente estabelecida.

Exemplo: No apêndice B, é apresentada uma listagem do programa TESTOTI em que aparece a realização de um teste de otimização, no qual foram movidos três corpos, desejando-se na minimização as seguintes precisões: $\epsilon_x=0.5$ mm, $\epsilon_y=0.5$ mm e $\epsilon_z=0.4$ mm. O resultado esperado foi obtido com oito iterações do programa.

6- PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

O programa PR_INER foi desenvolvido utilizando o aplicativo Mathcad 6.0 e realiza os cálculos das propriedades de massa de um satélite, partindo da inclusão de uma matriz (digitada no ambiente EXCEL) que contém os dados necessários para estes cálculos (massa, posição do centro de gravidade, incerteza da massa, etc.) no mesmo.

A matriz proveniente do EXCEL inclui, também, a massa da cablagem do satélite. Essa matriz é utilizada em um procedimento pertencente ao PR_INER, o qual calcula a posição do centro de massa da cablagem partindo de um rastreamento das posições dos centros de massa máximo e mínimo entre os elementos que constituem o satélite (nos eixos X, Y e Z). As posições obtidas são utilizadas para definir um sólido retangular, o qual é assumido como sendo a forma da cablagem. Esse procedimento gera uma nova matriz, sendo esta utilizada pelo PR_INER para os cálculos dos momentos e produtos de inércia do satélite.

Nos cálculos, são consideradas as dispersões presentes nas massas dos equipamentos que constituem o satélite. A magnitude da incerteza da massa incluída na matriz dos dados de entrada é assumido como sendo de 3σ de uma distribuição normal, onde σ é o desvio padrão da massa (a incerteza é dada em porcentagem). O desvio padrão é utilizado para obter um número aleatório de uma distribuição normal com média 0. Esse número aleatório é empregado no cálculo da massa acrescida da respectiva incerteza. O processo é feito para cada um dos equipamentos do satélite.

Após o cálculo da massa é estabelecido o referencial $O_2x_2y_2z_2$ no centro de gravidade de cada um dos equipamentos do satélite e são calculados os momentos de inércia em relação a este referencial. É colocado, então, o referencial $O_3x_3y_3z_3$ no centro de gravidade de cada uma das partes do satélite e alinhado com o sistema de eixos $O_1x_1y_1z_1$ (referencial colocado em um centro geométrico conveniente do satélite). Calcula-se os momentos e produtos de inércia com relação ao sistema de eixos $O_3x_3y_3z_3$.

Os momentos e produtos de inércia calculados no referencial $O_3x_3y_3z_3$ são trasladados para o referencial $O_1x_1y_1z_1$ e deste para o referencial $O_4x_4y_4z_4$, localizado no centro de gravidade do satélite. O tensor de inércia é montado e os momentos principais de inércia são calculados à partir do mesmo.

Todos os cálculos incluídos no programa são feitos para N testes, de acordo com a necessidade de cada caso. Após a realização dos testes é calculada a média (que é o resultado pelo Método de Monte Carlo) da massa e de cada uma das propriedades de massa, com seus respectivos erros.

Os resultados são apresentados de duas maneiras:

- 1) Resultados numéricos: onde são expostos os valores médios, as porcentagens referentes aos erros de cada um deles e os valores nominais dos dados calculados pelo programa;
- 2) Resultados gráficos: onde estão os gráficos das distribuições referentes a massa e a cada uma das propriedades de massa do satélite. Também é apresentado um gráfico que informa se o número de testes realizados foi suficiente, ou seja, o número de testes deve ser tal que a diferença entre a média final e o valor nominal da quantidade em questão seja inferior ao erro máximo do método, calculado “a priori” com base na teoria, [8] .

O programa TESTOTI foi desenvolvido também no Mathcad 6.0, sendo que este realiza a otimização da posição do centro de gravidade do satélite, calculando novas posições e comparando-as com as fornecidas pelo usuário, até que se obtenha um valor que atenda a precisão desejada .

Como o PR_INER, este programa também recebe uma matriz proveniente do EXCEL como dado de entrada, a qual informa quais corpos devem ser deslocados de sua posição original e a faixa dentro da qual estes podem ser movidos. Também recebe como dado de entrada a posição do centro de gravidade desejada pelo usuário e a precisão desejada no processo de minimização.

Depois, é executado o programa N vezes até que ,através da minimização, seja obtido o novo centro de gravidade, de acordo com as modificações realizadas na disposição dos corpos que constituem o satélite.

7- RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste estudo o Método de Monte Carlo foi incorporado à metodologia utilizada no INPE para o cálculo das propriedades de massa de satélites. Isto resultou no aperfeiçoamento do método utilizado até o momento.

O programa desenvolvido pode ser dividido em três blocos. O primeiro bloco apresenta uma introdução a respeito do mesmo, a definição dos eixos de referência utilizados e a matriz dos dados de entrada. O segundo é constituído por um procedimento que calcula a posição do centro de massa da cablagem do satélite e monta a nova matriz de entrada, pela rotina que faz os cálculos das propriedades e por outra pequena rotina que faz a montagem da matriz dos resultados obtidos para os N testes realizados. Podemos incluir aqui a determinação das médias e dos erros. No terceiro bloco são mostrados os resultados obtidos pelo Método de Monte Carlo e os gráficos das distribuições da massa e das propriedades de massa. Também é apresentado um gráfico que indica se o número de testes realizados foi suficiente.

O usuário faz uso do Método de Monte Carlo, através da realização dos N testes e observando esse último gráfico citado, ou seja, observando se todos os erros apresentados são inferiores a um, e também através dos gráficos das distribuições.

A inclusão da cablagem como elemento significativo na estrutura do satélite traz como vantagem uma maior precisão nos cálculos dos momentos e produtos de inércia realizados pelo programa.

Para a incorporação do método de otimização ao programa, faz-se necessária a realização de mais testes, pois os resultados obtidos até o momento não são satisfatórios. Portanto, o método pesquisado não foi incorporado ao PR_INER.

Uma listagem do programa PR_INER é apresentada no Apêndice A.

Os itens abaixo listam os objetivos atingidos:

- 1- O prévio estudo da teoria de determinação das propriedades de massa de corpos possibilitou uma melhor compreensão do fenômeno físico envolvido e dos procedimentos executados pelo programa Inércia 1 e também facilitou a análise dos testes realizados.
- 2- A incorporação do Método de Monte Carlo ao programa PR_INER, desenvolvido durante esta fase da pesquisa proporcionou a obtenção de valores mais confiáveis para a massa e para as propriedades de massa de um satélite qualquer.

- 3- A consideração da massa da cablagem do satélite traz maior precisão aos cálculos realizados pelo programa.
- 4- O programa apresenta os resultados de forma clara e resumida para, assim, facilitar a análise dos dados pelo usuário.
- 5- A método de otimização estudado, mas ainda não incorporado ao programa principal, proporciona ao usuário a possibilidade de manipular a disposição dos elementos que constituem o satélite, podendo transferir o centro de gravidade do mesmo para a melhor posição possível (de acordo com o projeto), não submetendo-se apenas à posição calculada pelo Método de Monte Carlo.

8- CONCLUSÃO

Os estudos realizados permitiram uma substancial melhoria na metodologia utilizada nas atividades de arquitetura mecânica desenvolvidas no INPE. O módulo aqui desenvolvido para a inclusão do método de Monte Carlo foi utilizado para a determinação final das propriedades de inércia do satélite SACI-1 e do painel solar do satélite CBERS. A mesma metodologia vem sendo aplicada na análise das configurações do satélite Franco-Brasileiro.

O módulo que incorpora a cablagem abriu ao analista a possibilidade de estimar com maior precisão o impacto desta parte que é de difícil consideração nas fases iniciais do projeto.

Os estudos preliminares aqui realizados com o intuito de incorporar um método de otimização para o reposicionamento do centro de massa irão, quando incorporados ao programa principal, fornecer uma nova ferramenta de trabalho ao analista. Esta permitirá que o reposicionamento dos corpos seja feita de forma sistemática e não por tentativa e erro como vem sendo feito até o momento.

9- REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Tipler, Paul A. *Física, Mecânica*, Volume 1, Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 3ª edição, Rio de Janeiro, 1995.
- [2] Araújo, E.F.R. Rios Filho, L.G. Souza, P.N. Inércia 262 Programa para o cálculo dos momentos e direções principais de inércia do satélite de coleta de dados da MECB. São José dos Campos, INPE, Outubro de 1984.
- [3] Greenwood, D.T. *Principles of Dynamics*. Englewood Clippis, N.J., Pretice-Hall, 1965.
- [4] Meriam, J.L. *Dinâmica*, Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro, 1976.
- [5] Crespo, Antônio A. *Estatística Fácil*, Saraiva, 11ª edição, São Paulo, 1994.
- [6] Hammersley, J.M. & Handscomb, D.C. *Monte Carlo Methods*. Fletcher & Son Ltd., London, 1967.
- [7] Ertas, Atila & Jones, Jesse C. *The Engineering Design Process*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1993.
- [8] Shreider, A. Yu *Method of Statistical Testing Monte Carlo Method*. Elsevier Publishing Company, Amsterdam, 1964.

10- BIBLIOGRAFIA

- [1] Beer, F.P.; Johnston Jr., E.R. *Mecânica Vetorial para Engenheiros, Cinemática e Dinâmica*, MaKron Books, 5a edição, São Paulo, 1991.
- [2] Beer, F.P. & Johnston Jr., E.R. *Mecânica Vetorial para Engenheiros, Estática*, MaKron Books, 5a edição, São Paulo, 1990.
- [3] Fonseca, Jairo S. & Martins, Gilberto A. *Curso de Estatística*. Editora Atlas, 3a edição, São Paulo, 1990.
- [4] Souza, P.N. & Varotto, S.E.C. Inércia 1. Programa para a determinação de propriedades de massa. Não Publicado.
- [5] Demidovich, B.P. & Maron, L.A. *Computacional Mathematics*. Mir Publishers, Moscow, 1976.
- [6] Sobol, I. M. *The Monte Carlo Method*. Mir Publishers, Moscow, 1975.

APÊNDICE A
LISTAGEM DO PROGRAMA
PR_INER

PR_INER: PROGRAMA PARA O CÁLCULO DA POSIÇÃO DO CENTRO DE MASSA E DOS MOMENTOS E DIREÇÕES PRINCIPAIS DE INÉRCIA DE UM ARRANJO MECÂNICO GENÉRICO DE SÓLIDOS HOMOGÊNEOS

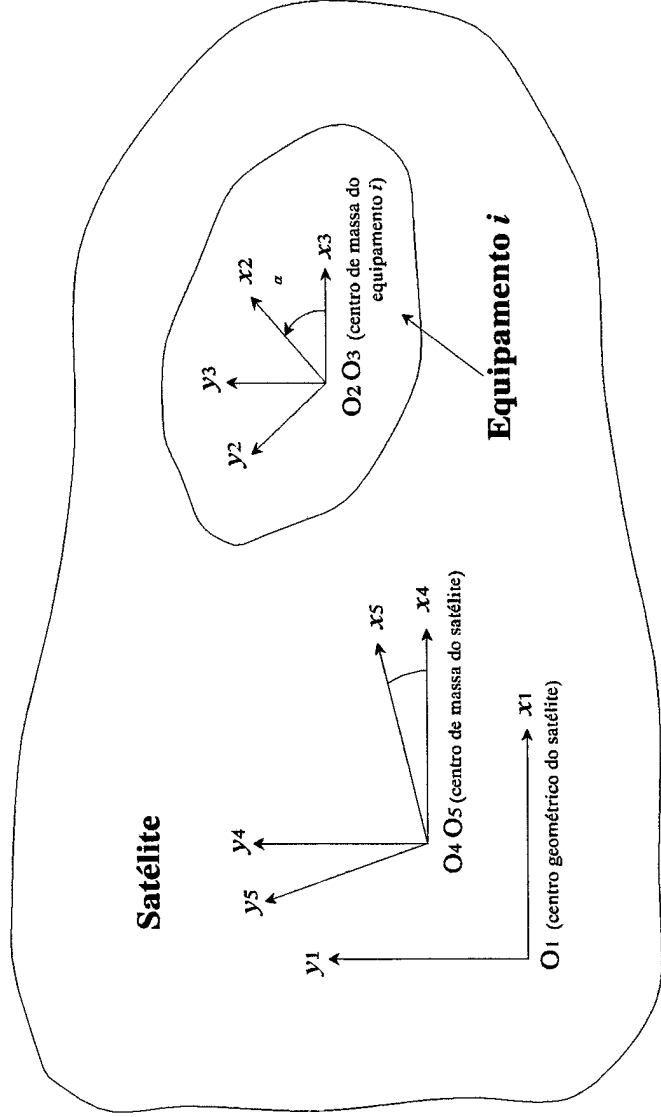
PR_INER.mcd Este programa foi desenvolvido com base no programa **INÉRCIA1** A teoria foi extraída da publicação **INPE-3328-RPI/117** de outubro de 1984. O mesmo deve ser executado no ambiente **Windows** pelo programa **Mathcad 6.0** ou outra versão mais recente. Acompanha o diretório **Sólidos** contendo as equações que fornecem as propriedades de inércia de uma série de sólidos homogêneos. A lista contém não apenas os sólidos aqui considerados mas também uma série de outros. Este programa realiza os cálculos finais utilizando o Método de Monte Carlo, que consiste em realizar um número k de testes e calcular a média dos valores obtidos nos testes e seu respectivo erro. Os cálculos são baseados nas incertezas das massas de cada um dos corpos considerados.

Data: 10/05/1998 Data da última atualização:

Autoria: Michele Marson - DMC/ETE/INPE; Petrónio Noronha de Souza - DMC/ETE/INPE

1.0 Definição dos eixos de referência

A figura abaixo mostra de forma simplificada (apenas no plano xy) os diversos sistemas de referência a serem utilizados na determinação dos momentos e produtos de inércia do satélite.



O₁x₁y₁z₁: Referencial colocado em um centro geométrico do satélite (canto, centro de um painel, etc).

O₂x₂y₂z₂: Referencial colocado no centro de massa de cada uma dos equipamentos ou partes da estrutura do satélite, alinhado com os eixos principais de inércia do equipamento ou da parte.

O₃x₃y₃z₃: Referencial colocado no centro de massa de cada uma dos equipamentos ou partes da estrutura do satélite, alinhado com o sistema **O₁x₁y₁z₁**.

O₄x₄y₄z₄: Referencial colocado no centro de massa do satélite, alinhado com o sistema **O₁x₁y₁z₁**.

O₅x₅y₅z₅: Referencial colocado no centro de massa do satélite, alinhado com os seus eixos principais de inércia.

α : ângulo medido a partir do referencial **O₃x₃y₃z₃** até o referencial

O₂x₂y₂z₂, de acordo com a regra da mão direita.

2.0 Dados de entrada

Número total de equipamentos ou partes da estrutura a serem consideradas no cálculo: N = 28 ... deve ser mudado sempre que houver uma alteração no número de linhas ativas da matriz M.

Número de Testes: k = 200 ... o número de testes deve ser tal que a diferença entre a média final e o valor nominal da quantidade em questão seja inferior ao erro máximo do método.

- 0 - Número do equipamento
- 1 - forma do corpo
- 2 - massa [kg]
- 3 - dimensão no eixo X [mm]
- 4 - tolerância na massa [%], esta tolerância deve corresponder a uma incerteza de 3σ
- 5 - dimensão no eixo Y [mm]
- 6 - eixo 2
- 7 - dimensão no eixo Z [mm]
- 8 - eixo 3
- 9 - rotação α [graus]
- 10 - eixo de rotação
- 11 - Xcm [mm]
- 12 - Ycm [mm]
- 13 - Zcm [mm]

M :=

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	1	0.05	0	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	3	0.08	1	5	0	0	0	0	0	794	5	0	0
3	3	0.08	1	10	0	0	0	0	0	794	5	0	0
4	3	0.08	1	5	0	0	0	0	0	-5	5	250	0
5	3	0.08	1	5	0	0	0	0	0	-5	5	250	0
6	3	0.15	1	10	0	0	0	0	0	771	5	-154	0
7	3	0.15	1	5	0	0	0	0	0	771	5	154	0
8	3	0.1	1	5	0	0	0	0	0	771	5	154	0
9	3	0.1	1	5	0	0	0	0	0	771	5	-154	0
10	3	0.1	1	5	0	0	0	0	0	29	8	267	0
11	3	0.1	1	5	0	0	0	0	0	29	8	-267	0
12	3	0.1	1	5	0	0	0	0	0	29	8	-267	0
13	3	0.1	1	5	0	0	0	0	0	29	8	267	0
14	3	0.14	1	5	0	0	0	0	0	29	8	0	0
15	3	0.14	1	5	0	0	0	0	0	29	8	0	0
16	3	0.45	1	5	0	0	0	0	0	20	-151	7	0
17	3	0.45	1	5	0	0	0	0	0	20	151	7	0
18	3	0.45	1	5	0	0	0	0	0	20	151	7	0
19	3	0.45	1	5	0	0	0	0	0	20	-151	7	0
20	3	0.272	1	5	0	0	0	0	0	57	5	-180	0
21	3	0.21	1	5	0	0	0	0	0	30	-201	-90	0
22	3	0.18	1	5	0	0	0	0	0	27	-270	46	0
23	3	0.2	1	5	0	0	0	0	0	27	7	70	0
24	3	3.69	1	5	0	0	0	0	0	238	0	0	0
25	3	0.15	1	5	0	0	0	0	0	558	10	83	0
26	3	0.15	1	5	0	0	0	0	0	492	35	83	0
27	3	0.15	1	5	0	0	0	0	0	471	35	188	0
28	3	0.227	1	5	0	0	0	0	0	641	18	86	0

Matriz completa dos dados de entrada. A primeira linha traz a numeração das colunas e a primeira coluna traz a numeração dos equipamentos considerados.

6.0 Resumo dos resultados

Resultados Numéricos: Resultado para $k = 200$ testes.

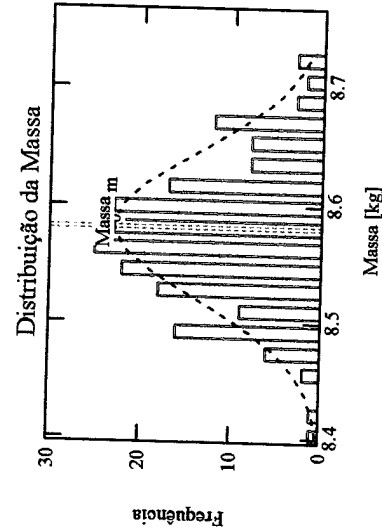
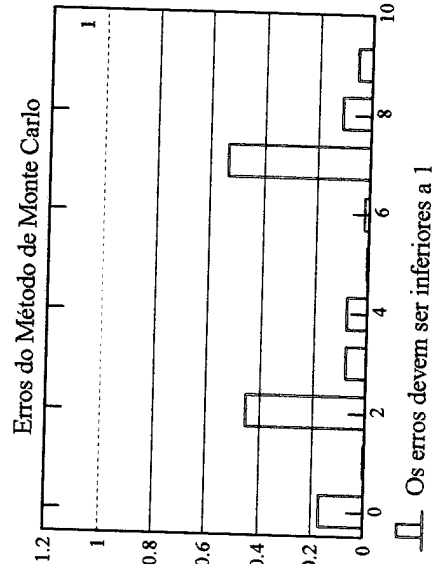
		Valores pelo método de Monte Carlo		Valores nominais		
1) Massa total:	Massa m	8.581	[kg]	+/-	$P_0 = 2.163$	$D_0 = 8.579$
2) Centro de massa ao longo do eixo X_1 :	X_{cm}	$10^3 = 215.805$	[mm]	+/-	$P_1 = 0.981$	$D_1 \cdot 10^3 = 215.806$
3) Centro de massa ao longo do eixo Y_1 :	Y_{cm}	$10^3 = -7.304$	[mm]	+/-	$P_2 = 11.979$	$D_2 \cdot 10^3 = -7.276$
4) Centro de massa ao longo do eixo Z_1 :	Z_{cm}	$10^3 = 9.287$	[mm]	+/-	$P_3 = 6.407$	$D_3 \cdot 10^3 = 9.283$
5) Momento de inércia em torno do eixo X_4 :	I_{xx4m}	0.133	[kg.m ²]	+/-	$P_4 = 1.32$	$D_4 = 0.133$
6) Momento de inércia em torno do eixo Y_4 :	I_{yy4m}	0.49	[kg.m ²]	+/-	$P_5 = 1.617$	$D_5 = 0.49$
7) Momento de inércia em torno do eixo Z_4 :	I_{zz4m}	0.483	[kg.m ²]	+/-	$P_6 = 1.609$	$D_6 = 0.483$
8) Produto de inércia em torno dos eixos X_4 e Y_4 :	I_{xy4m}	-0.022	[kg.m ²]	+/-	$P_7 = 6.556$	$D_7 = -0.022$
9) Produto de inércia em torno dos eixos X_4 e Z_4 :	I_{xz4m}	-0.019	[kg.m ²]	+/-	$P_8 = 9.823$	$D_8 = -0.019$
10) Produto de inércia em torno dos eixos Y_4 e Z_4 :	I_{yz4m}	$-4.094 \cdot 10^{-3}$	[kg.m ²]	+/-	$P_9 = 5.663$	$D_9 = -4.095 \cdot 10^{-3}$

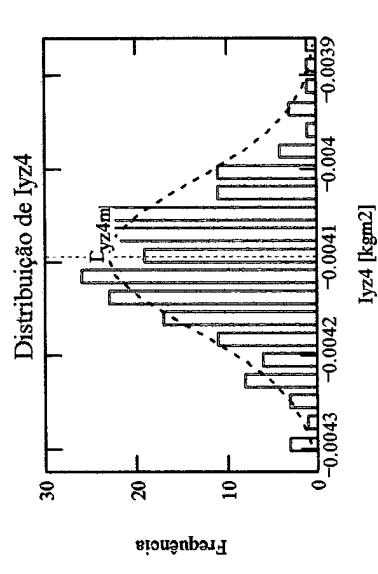
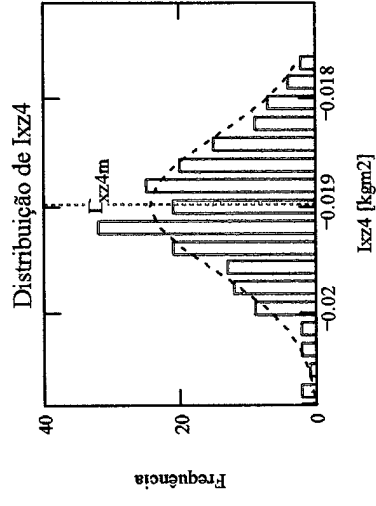
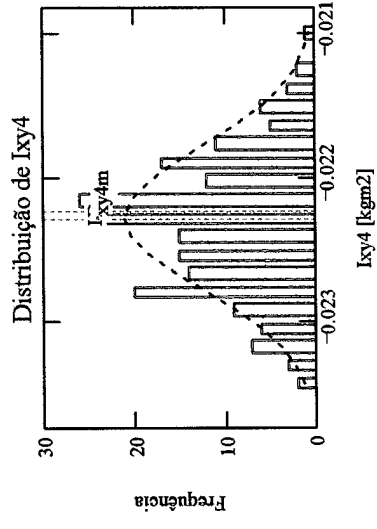
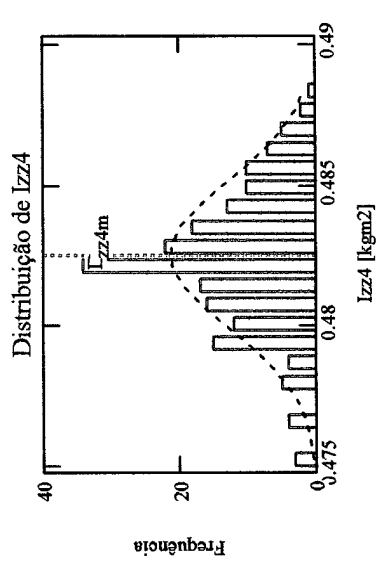
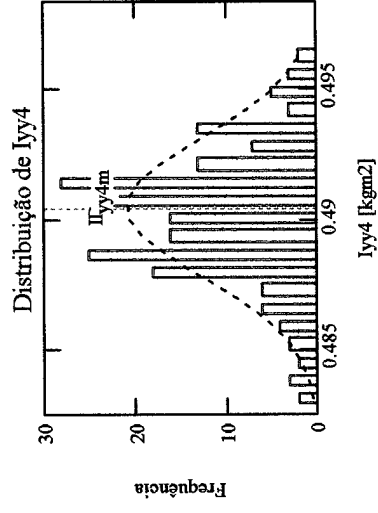
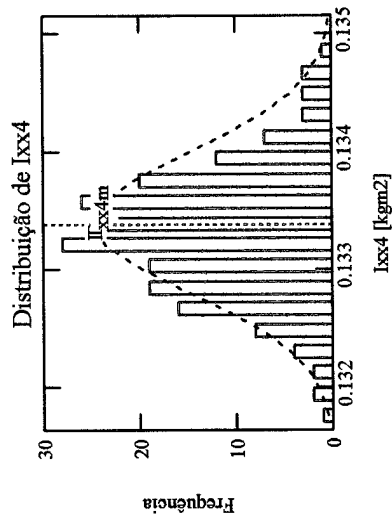
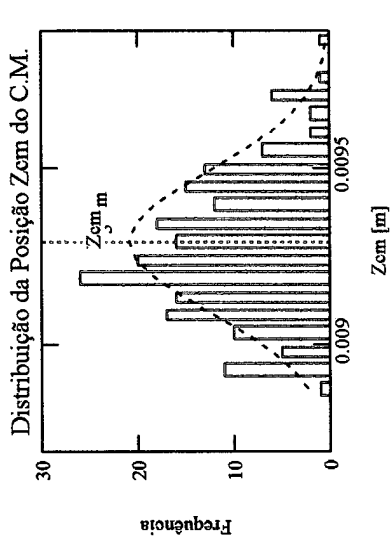
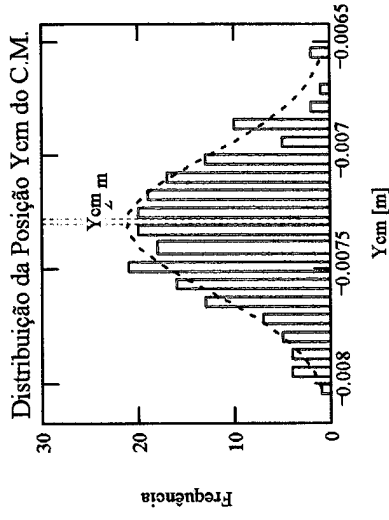
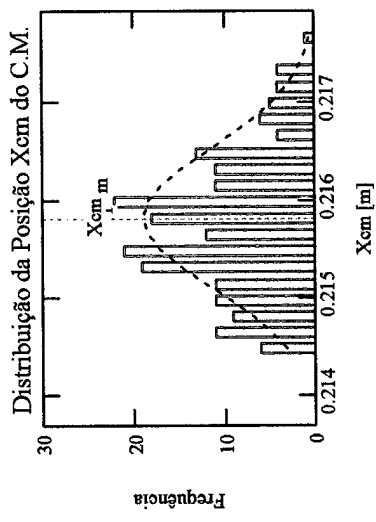
Resultados Gráficos:

$y = 0..9$

Número de Testes:

$k = 200$





PR_INER: PROGRAMA PARA O CÁLCULO DA POSIÇÃO DO CENTRO DE MASSA E DOS MOMENTOS E DIREÇÕES PRINCIPAIS DE INÉRCIA DE UM ARRANJO MECÂNICO GENÉRICO DE SÓLIDOS HOMOGÊNEOS

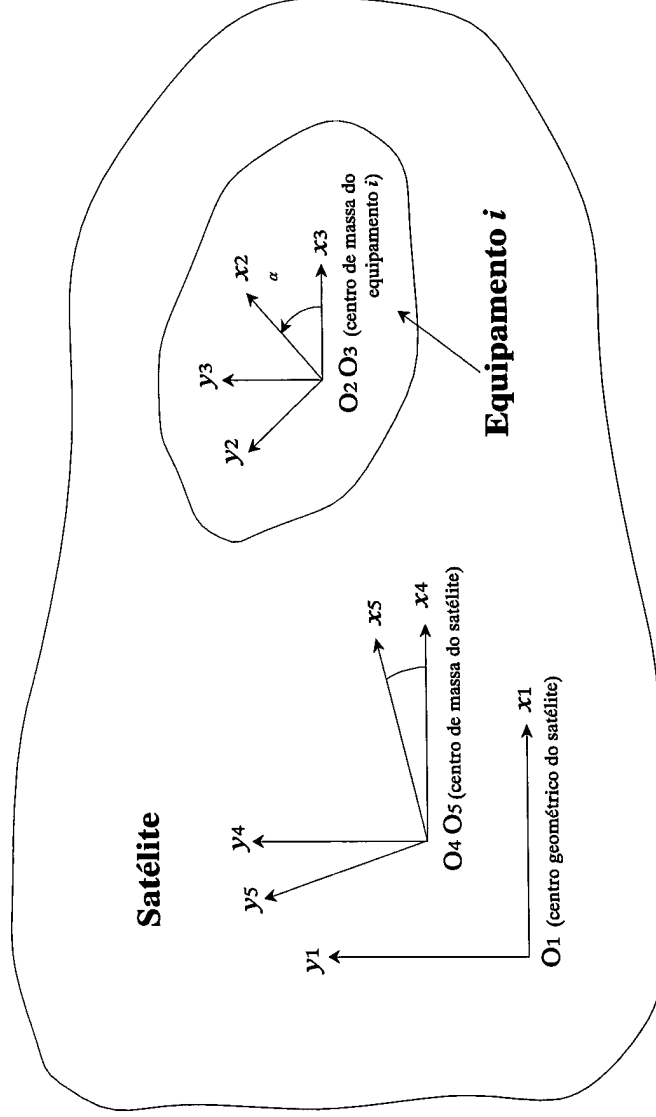
PR_INER.mcd Este programa foi desenvolvido com base no programa **INÉRCIA1** A teoria foi extraída da publicação **INPE-3328-RPI/117** de outubro de 1984. O mesmo deve ser executado no ambiente **Windows** pelo programa **Mathcad 6.0** ou outra versão mais recente. Acompanha o diretório **Sólidos** contendo as equações que fornecem as propriedades de inércia de uma série de sólidos homogêneos. A lista contém não apenas os sólidos aqui considerados mas também uma série de outros. Este programa realiza os cálculos finais utilizando o Método de Monte Carlo, que consiste em realizar um número k de testes e calcular a média dos valores obtidos nos testes e seu respectivo erro. Os cálculos são baseados nas incertezas das massas de cada um dos corpos considerados.

Data: 10/05/1998 Data da última atualização:

Autoria: Michele Marson - DMC/ETE/INPE; Petrónio Noronha de Souza - DMC/ETE/INPE

1.0 Definição dos eixos de referência

A figura abaixo mostra de forma simplificada (apenas no plano xy) os diversos sistemas de referência a serem utilizados na determinação dos momentos e produtos de inércia do satélite.



O₁x₁y₁z₁: Referencial colocado em um centro geométrico do satélite (canto, centro de um painel, etc).

ⁱO₂ⁱx₂ⁱy₂ⁱz₂: Referencial colocado no centro de massa de cada uma dos equipamentos ou partes da estrutura do satélite, alinhado com os eixos principais de inércia do equipamento ou da parte.

ⁱO₃ⁱx₃ⁱy₃ⁱz₃: Referencial colocado no centro de massa de cada uma dos equipamentos ou partes da estrutura do satélite, alinhado com o sistema **O₁x₁y₁z₁**.

O₄x₄y₄z₄: Referencial colocado no centro de massa do satélite, alinhado com o sistema **O₁x₁y₁z₁**.

O₅x₅y₅z₅: Referencial colocado no centro de massa do satélite, alinhado com os seus eixos principais de inércia.

α : ângulo medido a partir do referencial **ⁱO₃ⁱx₃ⁱy₃ⁱz₃** até o referencial **ⁱO₂ⁱx₂ⁱy₂ⁱz₂**, de acordo com a regra da mão direita.

2.0 Dados de entrada

Número total de equipamentos ou partes da estrutura a serem consideradas no cálculo:

N := 28 ...deve ser mudado sempre que houver uma alteração no número de linhas ativas da matriz M.

Número de Testes:

k = 200

...o número de testes deve ser tal que a diferença entre a média final e o valor nominal da quantidade em questão seja inferior ao erro máximo do método.

0 - Número do equipamento

1 - forma do corpo

2 - massa [kg]

3 - dimensão no eixo X [mm]

4 - tolerância na massa [%], esta tolerância deve corresponder a uma incerteza de $\pm\sigma$

5 - dimensão no eixo Y [mm]

6 - eixo 2

7 - dimensão no eixo Z [mm]

8 - eixo 3

9 - rotação α [graus]

10 - eixo de rotação

11 - Xcm [mm]

12 - Ycm [mm]

13 - Zcm [mm]

Matriz completa dos dados de entrada. A primeira linha traz a numeração das colunas e a primeira coluna traz a numeração dos equipamentos considerados.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	1	0.05	0	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	3	0.08	1	5	0	0	0	0	0	794	5	0	0
3	3	0.08	1	10	0	0	0	0	0	794	5	0	0
4	3	0.08	1	5	0	0	0	0	0	-5	5	250	250
5	3	0.08	1	5	0	0	0	0	0	-5	5	250	-154
6	3	0.15	1	10	0	0	0	0	0	771	5	154	154
7	3	0.15	1	5	0	0	0	0	0	771	5	154	-154
8	3	0.1	1	5	0	0	0	0	0	771	5	154	-154
9	3	0.1	1	5	0	0	0	0	0	771	5	267	-267
10	3	0.1	1	5	0	0	0	0	0	29	8	267	-267
11	3	0.1	1	5	0	0	0	0	0	29	8	267	-267
12	3	0.1	1	5	0	0	0	0	0	29	8	267	-267
13	3	0.1	1	5	0	0	0	0	0	29	8	267	0
14	3	0.14	1	5	0	0	0	0	0	29	8	0	0
15	3	0.14	1	5	0	0	0	0	0	29	8	0	0
16	3	0.45	1	5	0	0	0	0	0	20	-151	7	7
17	3	0.45	1	5	0	0	0	0	0	20	151	7	7
18	3	0.45	1	5	0	0	0	0	0	20	151	7	7
19	3	0.45	1	5	0	0	0	0	0	20	-151	7	7
20	3	0.272	1	5	0	0	0	0	0	57	5	-180	-180
21	3	0.21	1	5	0	0	0	0	0	30	-201	-90	-90
22	3	0.18	1	5	0	0	0	0	0	27	-270	46	46
23	3	0.2	1	5	0	0	0	0	0	27	7	70	70
24	3	3.69	1	5	0	0	0	0	0	238	0	0	0
25	3	0.15	1	5	0	0	0	0	0	558	10	83	83
26	3	0.15	1	5	0	0	0	0	0	492	35	83	83
27	3	0.15	1	5	0	0	0	0	0	471	35	188	188
28	3	0.227	1	5	0	0	0	0	0	641	18	86	86

M :=

3.0 Cálculo das propriedades

$$\text{Massa nom} := \sum_{i=1}^N M_{i,2} \quad \text{Massa nom} = 8.579$$

Inercia(N,M) := for i ∈ 1..N

$$M_{i,3} \leftarrow \text{if } (M_{i,1} = 4, M_{i,3}, M_{i,3} \cdot 10^{-3})$$

$$M_{i,5} \leftarrow \text{if } (M_{i,1} = 4, M_{i,5}, M_{i,5} \cdot 10^{-3})$$

$$M_{i,7} \leftarrow \text{if } (M_{i,1} = 4, M_{i,7}, M_{i,7} \cdot 10^{-3})$$

$$M_{i,11} \leftarrow M_{i,11} \cdot 10^{-3}$$

$$M_{i,12} \leftarrow M_{i,12} \cdot 10^{-3}$$

$$M_{i,13} \leftarrow M_{i,13} \cdot 10^{-3}$$

$$\sigma \leftarrow \frac{M_{i,4}}{3}$$

$$v \leftarrow \text{norm}(1, 0, \sigma)$$

$$\text{var}_i \leftarrow v_0$$

$$M_{i,2} \leftarrow M_{i,2} \cdot \left(1 + \frac{\text{var}_i}{100} \right)$$

$$\left[\frac{M_{i,2} \cdot \left[\begin{array}{l} (M_{i,5})^2 \dots \\ + (M_{i,7})^2 \end{array} \right]}{12} \right], \text{if } M_{i,1} = 1,$$

$$\left[\frac{M_{i,2}}{8}, \text{if } M_{i,1} = 21, \frac{M_{i,2}}{8} \cdot \left[\begin{array}{l} 4 \cdot (M_{i,7})^2 \dots \\ + (M_{i,5})^2 \end{array} \right] \right], \text{if } M_{i,1} = 22, \frac{M_{i,2}}{48} \cdot \left[\begin{array}{l} 4 \cdot (M_{i,7})^2 \dots \\ + 3 \cdot \left[\begin{array}{l} (M_{i,3})^2 \dots \\ + (M_{i,5})^2 \end{array} \right] \end{array} \right]$$

$$\left[\frac{M_{i,2}}{48}, \text{if } M_{i,1} = 23, \frac{M_{i,2}}{48} \cdot \left[\begin{array}{l} 4 \cdot (M_{i,7})^2 \dots \\ + 3 \cdot \left[\begin{array}{l} (M_{i,3})^2 \dots \\ + (M_{i,5})^2 \end{array} \right] \end{array} \right] \right], \text{if } M_{i,1} = 3, \frac{2}{5} \cdot M_{i,2} \cdot \left[\begin{array}{l} \frac{M_{i,3}}{2} \\ + \frac{1}{3} \cdot \left[\begin{array}{l} 2 \cdot \left[\begin{array}{l} (M_{i,3})^2 \dots \\ + (M_{i,5})^2 \end{array} \right] \end{array} \right] \end{array} \right]$$

$$\left[\frac{M_{i,2} \cdot \left[\begin{array}{l} (M_{i,3})^2 \dots \\ + (M_{i,7})^2 \end{array} \right]}{12} \right], \text{if } M_{i,1} = 1,$$

$$\left[\frac{M_{i,2}}{48}, \text{if } M_{i,1} = 21, \frac{M_{i,2}}{48} \cdot \left[\begin{array}{l} 4 \cdot (M_{i,7})^2 \dots \\ + 3 \cdot \left[\begin{array}{l} (M_{i,3})^2 \dots \\ + (M_{i,5})^2 \end{array} \right] \end{array} \right] \right], \text{if } M_{i,1} = 22, \frac{M_{i,2}}{8} \cdot \left[\begin{array}{l} (M_{i,3})^2 \dots \\ + (M_{i,5})^2 \end{array} \right]$$

$$\left[\frac{M_{i,2}}{48}, \text{if } M_{i,1} = 23, \frac{M_{i,2}}{48} \cdot \left[\begin{array}{l} 4 \cdot (M_{i,7})^2 \dots \\ + 3 \cdot \left[\begin{array}{l} (M_{i,3})^2 \dots \\ + (M_{i,5})^2 \end{array} \right] \end{array} \right] \right], \text{if } M_{i,1} = 3, \frac{2}{5} \cdot M_{i,2} \cdot \left[\begin{array}{l} \frac{M_{i,3}}{2} \\ + \frac{1}{3} \cdot \left[\begin{array}{l} 2 \cdot \left[\begin{array}{l} (M_{i,3})^2 \dots \\ + (M_{i,5})^2 \end{array} \right] \end{array} \right] \end{array} \right]$$

$$I_{zz2_i} \leftarrow \text{if } M_{i,1} = 1, \frac{M_{i,2} \cdot (M_{i,3})^2 + (M_{i,5})^2}{12}, \text{if } M_{i,1} = 21, \frac{M_{i,2}}{48} \cdot \left[4 \cdot (M_{i,7})^2 + 3 \cdot \left[\begin{array}{l} (M_{i,3})^2 \dots \\ + (M_{i,5})^2 \end{array} \right] \right], \text{if } M_{i,1} = 22, \frac{M_{i,2}}{48} \cdot \left[4 \cdot (M_{i,7})^2 + 3 \cdot \left[\begin{array}{l} (M_{i,3})^2 \dots \\ + (M_{i,5})^2 \end{array} \right] \right], \text{if } M_{i,1} = 23, \frac{M_{i,2}}{8} \cdot \left[(M_{i,3})^2 \dots + (M_{i,5})^2 \right], \text{if } M_{i,1} = 3, \frac{2}{5} \cdot M_{i,2} \cdot \left[\frac{(M_{i,3})}{2} + \frac{1}{3} \right]$$

$$\alpha_i \leftarrow M_{i,9} \cdot \frac{\pi}{180}$$

$$I_{xx3_i} \leftarrow \text{if } (M_{i,9} = 0, I_{xx2_i}, \text{if } (M_{i,10} = 1, I_{xx2_i}, \text{if } (M_{i,10} = 2, I_{zz2_i} \cdot \sin(\alpha_i)^2 + I_{xx2_i} \cdot \cos(\alpha_i)^2 + I_{yy2_i} \cdot \sin(\alpha_i)^2)))$$

$$I_{xy3_i} \leftarrow \text{if } (M_{i,9} = 0, \text{if } (M_{i,10} = 1, 0, \text{if } (M_{i,10} = 2, 0, \frac{1}{2} \cdot (I_{xx2_i} - I_{yy2_i}) \cdot \sin(2 \cdot \alpha_i))))$$

$$I_{yy3_i} \leftarrow \text{if } (M_{i,9} = 0, I_{yy2_i}, \text{if } (M_{i,10} = 1, I_{yy2_i} \cdot \cos(\alpha_i)^2 + I_{zz2_i} \cdot \sin(\alpha_i)^2, \text{if } (M_{i,10} = 2, I_{yy2_i} \cdot \sin(\alpha_i)^2 + I_{xx2_i} \cdot \cos(\alpha_i)^2)))$$

$$I_{xz3_i} \leftarrow \text{if } (M_{i,9} = 0, \text{if } (M_{i,10} = 1, 0, \text{if } (M_{i,10} = 2, \frac{1}{2} \cdot (I_{zz2_i} - I_{xx2_i}) \cdot \sin(2 \cdot \alpha_i))))$$

$$I_{zz3_i} \leftarrow \text{if } (M_{i,9} = 0, I_{zz2_i}, \text{if } (M_{i,10} = 1, I_{yy2_i} \cdot \sin(\alpha_i)^2 + I_{zz2_i} \cdot \cos(\alpha_i)^2 + I_{zz2_i} \cdot \sin(\alpha_i)^2 + I_{xx2_i} \cdot \cos(\alpha_i)^2 + I_{zz2_i} \cdot \sin(\alpha_i)^2, I_{zz2_i})))$$

$$I_{yz3_i} \leftarrow \text{if } (M_{i,9} = 0, \text{if } (M_{i,10} = 1, \frac{1}{2} \cdot (I_{yy2_i} - I_{zz2_i}) \cdot \sin(2 \cdot \alpha_i), \text{if } (M_{i,10} = 2, 0, 0)))$$

$$I_{xx1} \leftarrow \sum_{i=1}^N \left[I_{xx3_i} + M_{i,2} \cdot \left[(M_{i,12})^2 + (M_{i,13})^2 \right] \right]$$

$$I_{xy1} \leftarrow \sum_{i=1}^N \left(I_{xy3_i} - M_{i,2} \cdot M_{i,11} \cdot M_{i,12} \right)$$

$$I_{yy1} \leftarrow \sum_{i=1}^N \left[I_{yy3_i} + M_{i,2} \cdot \left[(M_{i,11})^2 + (M_{i,13})^2 \right] \right]$$

$$I_{xz1} \leftarrow \sum_{i=1}^N \left(I_{xz3_i} - M_{i,2} \cdot M_{i,11} \cdot M_{i,13} \right)$$

$$I_{\gamma\gamma1} \leftarrow \sum_{i=1}^N \left[I_{\gamma\gamma3_i} + M_{i,2} \cdot \left[(M_{i,11})^2 + (M_{i,12})^2 \right] \right]$$

```

--- [ i=1 ... ]
I_yz1 ← [ ∑_{i=1}^N ( I_yz3_i - M_{i,2}·M_{i,12}·M_{i,13} ) ]
Massa ← ∑_{i=1}^N M_{i,2}
Xcm ← ∑_{i=1}^N M_{i,11}·M_{i,2} / Massa
Ycm ← ∑_{i=1}^N M_{i,12}·M_{i,2} / Massa
Zcm ← ∑_{i=1}^N M_{i,13}·M_{i,2} / Massa
I_xx4 ← I_xx1 - Massa·( Ycm^2 + Zcm^2 )
I_yy4 ← I_yy1 - Massa·( Xcm^2 + Zcm^2 )
I_zz4 ← I_zz1 - Massa·( Xcm^2 + Ycm^2 )
I_xy4 ← I_xy1 + Massa·Xcm·Ycm
I_xz4 ← I_xz1 + Massa·Xcm·Zcm
I_yz4 ← I_yz1 + Massa·Ycm·Zcm
T ← [ [ I_xx4 I_xy4 I_xz4 ]
      [ I_xy4 I_yy4 I_yz4 ]
      [ I_xz4 I_yz4 I_zz4 ] ]
MomPrincip ← eigenvals(T)
IP ← sort(MomPrincip)

```


$V_0 \leftarrow \text{Massa}$
 $V_1 \leftarrow X_{cm}$
 $V_2 \leftarrow Y_{cm}$
 $V_3 \leftarrow Z_{cm}$
 $V_4 \leftarrow I_{xx4}$
 $V_5 \leftarrow I_{yy4}$
 $V_6 \leftarrow I_{zz4}$
 $V_7 \leftarrow I_{xy4}$
 $V_8 \leftarrow I_{xz4}$
 $V_9 \leftarrow I_{yz4}$
 V

4.0 Montagem da matriz de resultados

```

dados(M,k) :=
  for n ∈ 0..k-1
    Bn ← Inercia(N,M)
    for y ∈ 0..9
      Zn,y ← (Bn)y
  Z
  C := dados(M,k)

```

C =

	0	1	2	3	4	5	6
0	8.563	0.216	-7.165·10 ⁻³	9.222·10 ⁻³	0.133	0.491	0.483
1	8.555	0.215	-7.47·10 ⁻³	9.262·10 ⁻³	0.133	0.486	0.479
2	8.527	0.216	-7.644·10 ⁻³	9.455·10 ⁻³	0.133	0.488	0.48
3	8.527	0.216	-6.965·10 ⁻³	8.936·10 ⁻³	0.133	0.492	0.484
4	8.549	0.216	-7.697·10 ⁻³	9.445·10 ⁻³	0.133	0.49	0.482
5	8.593	0.216	-7.507·10 ⁻³	9.141·10 ⁻³	0.134	0.492	0.484
6	8.542	0.217	-7.105·10 ⁻³	9.209·10 ⁻³	0.134	0.496	0.487
7	8.582	0.215	-7.25·10 ⁻³	9.29·10 ⁻³	0.134	0.489	0.482
8	8.62	0.216	-7.698·10 ⁻³	8.917·10 ⁻³	0.133	0.492	0.485
9	8.495	0.216	-7.199·10 ⁻³	9.161·10 ⁻³	0.132	0.488	0.481
10	8.506	0.216	-7.221·10 ⁻³	9.418·10 ⁻³	0.133	0.488	0.48

5.0 Determinação das médias e dos erros

Massa

. Massa Média:

$$\text{Massa}_m := \frac{\sum_{i=0}^{k-1} C_{i,0}}{k}$$

$$\text{Massa}_m = 8.581$$

. Desvio Padrão da Massa:

$$\sigma_0 := \text{stdev}(C^{<0>})$$

$$\sigma_0 = 0.062$$

$$P_0 := \frac{3 \cdot \sigma_0 \cdot 100}{|\text{Massa}_m|}$$

$$P_0 = 2.2$$

. Erro do Método de Monte Carlo:

$$\delta_0 := \frac{3 \cdot \sigma_0}{\sqrt{k}} \quad \delta_0 = 0.013$$

$$n := 20$$

$$N := \text{length}(C^{<0>})$$

$$L := 0..n - 1$$

$$\text{lower} := (\min(C^{<0>}))$$

$$\text{upper} := (\max(C^{<0>}))$$

$$j := 0..n$$

$$h := \frac{\text{upper} - \text{lower}}{n}$$

$$\text{inta}_j := \text{lower} + h \cdot j$$

$$\text{inta} := \text{inta} + 0.5 \cdot h$$

$$\text{fa} := \text{hist}(\text{inta}, C^{<0>})$$

$$\text{Fa}(x) := N \cdot h \cdot \text{dnorm}(x, \text{Massa}_m, \sigma_0)$$

Posição do Centro de Massa no Referencial $O_1 X_1 Y_1 Z_1$

. Xcm Médio:

$$X_{cm} := \frac{\sum_{i=0}^{k-1} C_{i,1}}{k}$$

$$X_{cm} = 0.216$$

$$n := 20$$

$$N := \text{length}(C^{<1>})$$

$$L := 0..n-1$$

$$\text{lower} := (\min(C^{<1>}))$$

$$\text{upper} := (\max(C^{<1>}))$$

$$j := 0..n$$

$$h := \frac{\text{upper} - \text{lower}}{n}$$

$$\text{intb}_j := \text{lower} + h \cdot j$$

$$\text{intb}_j := \text{intb} + 0.5 \cdot h$$

$$P_1 := \frac{3 \cdot \sigma_1 \cdot 100}{X_{cm}}$$

$$P_1 = 1$$

$$\text{fb} := \text{hist}(\text{intb}, C^{<1>})$$

$$\text{Fb}(x) := N \cdot h \cdot \text{dnorm}(x, X_{cm}, \sigma_1)$$

$$\sigma_1 = 7.055 \cdot 10^{-4}$$

. Erro do Método de Monte Carlo:

$$\delta_1 := \frac{3 \cdot \sigma_1}{\sqrt{k}}$$

$$\delta_1 = 1.497 \cdot 10^{-4}$$

. Ycm Médio:

$$Y_{cm} := \frac{\sum_{i=0}^{k-1} C_{i,2}}{k}$$

$$Y_{cm} = -7.304 \cdot 10^{-3}$$

$$n := 20$$

$$N := \text{length}(C^{<2>})$$

$$L := 0..n-1$$

$$\text{lower} := (\min(C^{<2>}))$$

$$\text{upper} := (\max(C^{<2>}))$$

$$j := 0..n$$

$$h := \frac{\text{upper} - \text{lower}}{n}$$

$$\text{intc}_j := \text{lower} + h \cdot j$$

$$\text{intc}_j := \text{intc} + 0.5 \cdot h$$

$$\sigma_2 = 2.917 \cdot 10^{-4}$$

. Desvio Padrão de Ycm:

$$\sigma_2 := \text{stdev}(C^{<2>})$$

$$P_2 := \frac{3 \cdot \sigma_2 \cdot 100}{|Y_{cm \ m}|}$$

$$P_2 = 12$$

. Erro do Método de Monte Carlo:

$$\delta_2 := \frac{3 \cdot \sigma_2}{\sqrt{k}}$$

$$\delta_2 = 6.187 \cdot 10^{-5}$$

. Zcm Médio:

$$Z_{cm \ m} := \frac{\sum_{i=0}^{k-1} C_{i,3}}{k}$$

$$Z_{cm \ m} = 9.287 \cdot 10^{-3}$$

. Desvio Padrão de Zcm:

$$\sigma_3 := \text{stdev}(C^{<3>})$$

$$\sigma_3 = 1.983 \cdot 10^{-4}$$

$$P_3 := \frac{3 \cdot \sigma_3 \cdot 100}{|Z_{cm \ m}|}$$

$$P_3 = 6.4$$

. Erro do Método de Monte Carlo:

$$\delta_3 := \frac{3 \cdot \sigma_3}{\sqrt{k}}$$

$$\delta_3 = 4.208 \cdot 10^{-5}$$

$$fc := \text{hist}(\text{intc}, C^{<2>})$$

$$Fc(x) := N \cdot h \cdot \text{dnorm}(x, Y_{cm \ m}, \sigma_2)$$

$$n := 20$$

$$N := \text{length}(C^{<3>})$$

$$L := 0 \dots n - 1$$

$$\text{lower} := (\min(C^{<3>}))$$

$$\text{upper} := (\max(C^{<3>}))$$

$$j := 0 \dots n$$

$$h := \frac{\text{upper} - \text{lower}}{n}$$

$$\text{intd}_j := \text{lower} + h \cdot j$$

$$\text{intd} := \text{intd} + 0.5 \cdot h$$

$$fd := \text{hist}(\text{intd}, C^{<3>})$$

$$Fd(x) := N \cdot h \cdot \text{dnorm}(x, Z_{cm \ m}, \sigma_3)$$

Momentos de Inércia em Relação ao Referencial $O_4 X_4 Y_4 Z_4$

. Ixx4 Médio:

$$I_{xx4m} := \frac{\sum_{i=0}^{k-1} C_{i,4}}{k}$$

$$I_{xx4m} = 0.133$$

$$n := 20$$

$$N := \text{length}(C^{<4>})$$

$$L := 0..n - 1$$

$$\text{lower} := (\min(C^{<4>}))$$

$$\text{upper} := (\max(C^{<4>}))$$

$$j := 0..n$$

$$h := \frac{\text{upper} - \text{lower}}{n}$$

$$\text{inte}_j := \text{lower} + h \cdot j$$

$$\text{inte} := \text{inte} + 0.5 \cdot h$$

$$\sigma_4 = 5.867 \cdot 10^{-4}$$

. Desvio Padrão de Ixx4:

$$\sigma_4 := \text{stdev}(C^{<4>})$$

$$P_4 := \frac{3 \cdot \sigma_4 \cdot 100}{|I_{xx4m}|}$$

$$P_4 = 1.3$$

$$fe := \text{hist}(\text{inte}, C^{<4>})$$

$$Fe(x) := N \cdot h \cdot \text{dnorm}(x, I_{xx4m}, \sigma_4)$$

. Erro do Método de Monte Carlo:

$$\delta_4 := \frac{3 \cdot \sigma_4}{\sqrt{k}}$$

$$\delta_4 = 1.245 \cdot 10^{-4}$$

. Iyy4 Médio:

$$I_{yy4m} := \frac{\sum_{i=0}^{k-1} C_{i,5}}{k}$$

$$I_{yy4m} = 0.49$$

$$n := 20$$

$$N := \text{length}(C^{<5>})$$

$$L := 0..n - 1$$

$$\text{lower} := (\min(C^{<5>}))$$

$$\text{upper} := (\max(C^{<5>}))$$

. Desvio Padrão de Iyy4:

$$\sigma_5 := \text{stdev}(C^{<5>})$$

$$\sigma_5 = 2.643 \cdot 10^{-3}$$

$$P_5 := \frac{3 \cdot \sigma_5 \cdot 100}{|I_{yy4m}|}$$

$$P_5 = 1.6$$

. Erro do Método de Monte Carlo:

$$\delta_5 := \frac{3 \cdot \sigma_5}{\sqrt{k}}$$

$$\delta_5 = 5.607 \cdot 10^{-4}$$

. Izz4 Médio:

$$I_{zz4m} := \frac{\sum_{i=0}^{k-1} C_{i,6}}{k}$$

$$I_{zz4m} = 0.483$$

. Desvio Padrão de Izz4:

$$\sigma_6 := \text{stdev}(C^{<6>})$$

$$\sigma_6 = 2.589 \cdot 10^{-3}$$

$$P_6 := \frac{3 \cdot \sigma_6 \cdot 100}{|I_{zz4m}|}$$

$$P_6 = 1.6$$

. Erro do Método de Monte Carlo:

$$\delta_6 := \frac{3 \cdot \sigma_6}{\sqrt{k}}$$

$$\delta_6 = 5.491 \cdot 10^{-4}$$

Produtos de Inércia em Relação ao Referencial O_{4x_4, y_4, z_4}

. Ixz4 Médio:

$$I_{xy4m} := \frac{\sum_{i=0}^{k-1} C_{1,7}}{k}$$

$$I_{xy4m} = -0.022$$

. Desvio Padrão de Ixy4:

$$\sigma_7 := \text{stdev}(C^{<7>})$$

$$\sigma_7 = 4.872 \cdot 10^{-4}$$

$$P_7 := \frac{3 \cdot \sigma_7 \cdot 100}{|I_{xy4m}|}$$

$$P_7 = 6.6$$

. Erro do Método de Monte Carlo:

$$\delta_7 := \frac{3 \cdot \sigma_7}{\sqrt{k}}$$

$$\delta_7 = 1.033 \cdot 10^{-4}$$

. Ixz4 Médio:

$$I_{xz4m} := \frac{\sum_{i=0}^{k-1} C_{1,8}}{k}$$

$$I_{xz4m} = -0.019$$

. Desvio Padrão de Ixz4:

$$n := 20$$

$$N := \text{length}(C^{<7>})$$

$$L := 0..n-1$$

$$\text{lower} := (\min(C^{<7>}))$$

$$\text{upper} := (\max(C^{<7>}))$$

$$j := 0..n$$

$$h := \frac{\text{upper} - \text{lower}}{n}$$

$$\text{inth}_j := \text{lower} + h \cdot j$$

$$\text{inth} := \text{inth} + 0.5 \cdot h$$

$$fh := \text{hist}(\text{inth}, C^{<7>})$$

$$Fh(x) := N \cdot h \cdot \text{dnorm}(x, I_{xy4m}, \sigma_7)$$

$$n := 20$$

$$N := \text{length}(C^{<8>})$$

$$L := 0..n-1$$

$$\text{lower} := (\min(C^{<8>}))$$

$$\text{upper} := (\max(C^{<8>}))$$

$$j := 0..n$$

$$h := \frac{\text{upper} - \text{lower}}{n}$$

Pr_iner.mcd

$$\sigma_8 := \text{stdev}(C^{<8>})$$

$$\text{inti} := \text{inti} + 0.5 \cdot h$$

$$P_8 := \frac{3 \cdot \sigma_8 \cdot 100}{|I_{xz4m}|}$$

$$P_8 = 9.8$$

$$f_i := \text{hist}(\text{inti}, C^{<8>})$$

$$F_i(x) := N \cdot h \cdot \text{dnorm}(x, I_{xz4m}, \sigma_8)$$

. Erro do Método de Monte Carlo:

$$\delta_8 := \frac{3 \cdot \sigma_8}{\sqrt{k}}$$

$$\delta_8 = 1.319 \cdot 10^{-4}$$

.lyz4 Médio:

$$I_{yz4m} := \frac{\sum_{i=0}^{k-1} C_{i,9}}{k}$$

$$I_{yz4m} = -4.094 \cdot 10^{-3}$$

$$n := 20$$

$$N := \text{length}(C^{<9>})$$

$$L := 0 \dots n - 1$$

$$\text{lower} := (\min(C^{<9>}))$$

$$\text{upper} := (\max(C^{<9>}))$$

. Desvio Padrão de lyz4:

$$j := 0 \dots n$$

$$h := \frac{\text{upper} - \text{lower}}{n}$$

$$\sigma_9 := \text{stdev}(C^{<9>})$$

$$\sigma_9 = 7.727 \cdot 10^{-5}$$

$$\text{intj} := \text{lower} + h \cdot j$$

$$\text{intj} := \text{intj} + 0.5 \cdot h$$

$$P_9 := \frac{3 \cdot \sigma_9 \cdot 100}{|I_{yz4m}|}$$

$$P_9 = 5.7$$

$$f_j := \text{hist}(\text{intj}, C^{<9>})$$

$$F_j(x) := N \cdot h \cdot \text{dnorm}(x, I_{yz4m}, \sigma_9)$$

. Erro do Método de Monte Carlo:

$$\delta_9 := \frac{3 \cdot \sigma_9}{\sqrt{k}}$$

$$\delta_9 = 1.639 \cdot 10^{-5}$$

Análise dos erros:

$$E_0 := \frac{| \text{Massa m} - D_0 |}{\delta_0}$$

$$E_0 = 0.165$$

$$E_1 := \frac{| \text{Xcm m} - D_1 |}{\delta_1}$$

$$E_1 = 5.132 \cdot 10^{-3}$$

$$E_2 := \frac{| \text{Ycm m} - D_2 |}{\delta_2}$$

$$E_2 = 0.452$$

$$E_3 := \frac{| \text{Zcm m} - D_3 |}{\delta_3}$$

$$E_3 = 0.08$$

$$E_4 := \frac{| I_{xx4m} - D_4 |}{\delta_4}$$

$$E_4 = 0.081$$

$$E_5 := \frac{| I_{yy4m} - D_5 |}{\delta_5}$$

$$E_5 = 8.504 \cdot 10^{-3}$$

$$E_6 := \frac{| I_{zz4m} - D_6 |}{\delta_6}$$

$$E_6 = 0.019$$

$$E_7 := \frac{| I_{xy4m} - D_7 |}{\delta_7}$$

$$E_7 = 0.534$$

$$E_8 := \frac{| I_{xz4m} - D_8 |}{\delta_8}$$

$$E_8 = 0.106$$

$$E_9 := \frac{| I_{yz4m} - D_9 |}{\delta_9}$$

$$E_9 = 0.053$$

6.0 Resumo dos resultados

Resultados Numéricos: Resultado para $k = 200$ testes.

Valores pelo método de Monte Carlo

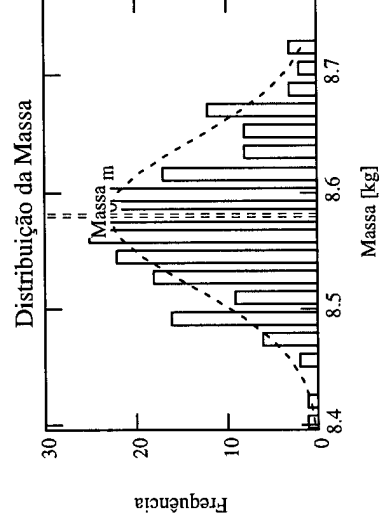
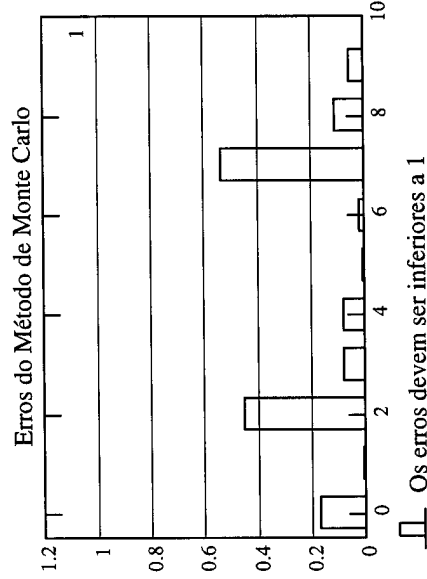
Valores nominais

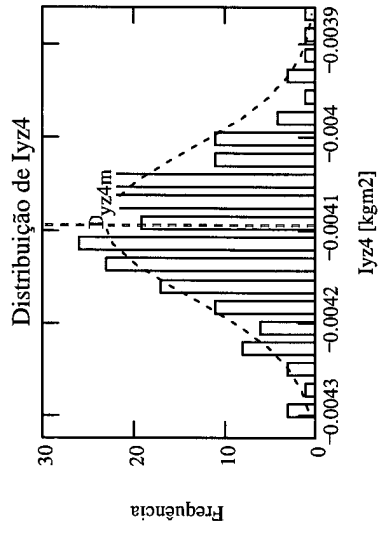
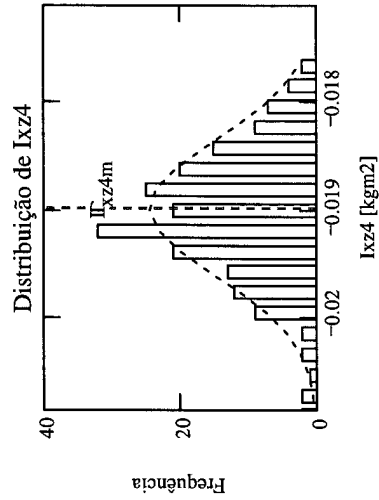
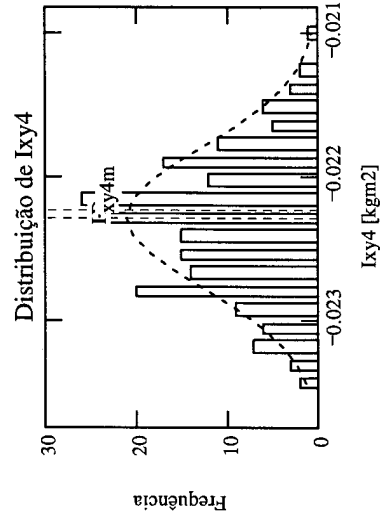
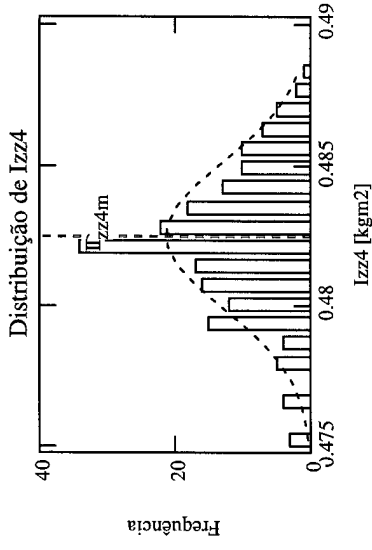
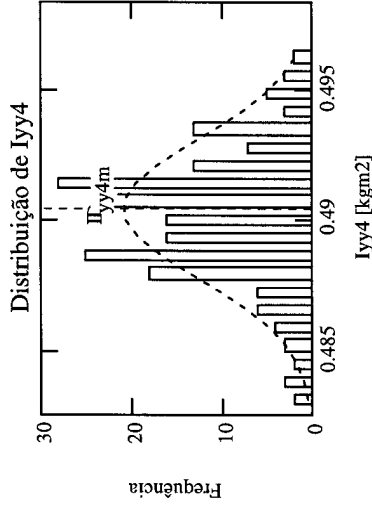
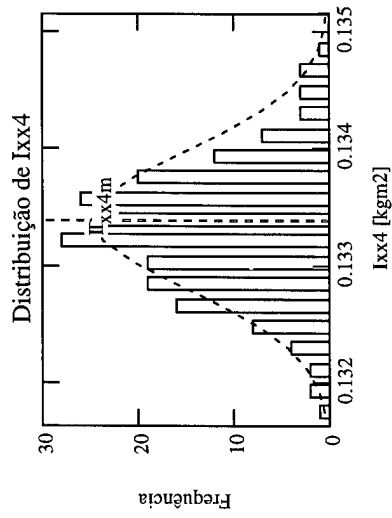
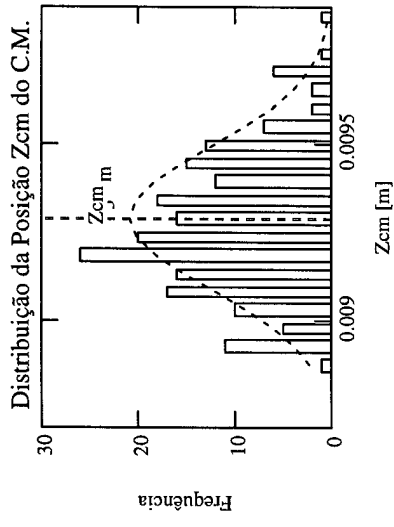
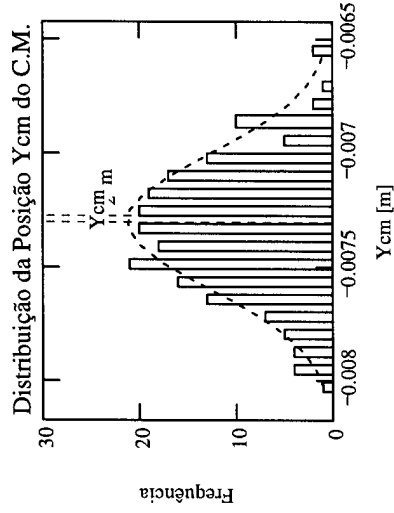
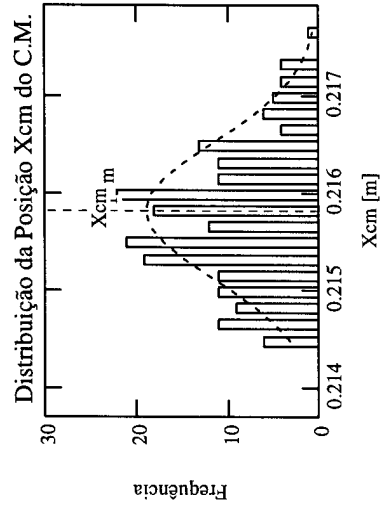
1) Massa total:	Massa _m = 8.581	[kg]	+/-	P ₀ = 2.163	[%]	D ₀ = 8.579
2) Centro de massa ao longo do eixo X ₁ :	X _{cm} · 10 ³ = 215.805	[mm]	+/-	P ₁ = 0.981	[%]	D ₁ · 10 ³ = 215.806
3) Centro de massa ao longo do eixo Y ₁ :	Y _{cm} · 10 ³ = -7.304	[mm]	+/-	P ₂ = 11.979	[%]	D ₂ · 10 ³ = -7.276
4) Centro de massa ao longo do eixo Z ₁ :	Z _{cm} · 10 ³ = 9.287	[mm]	+/-	P ₃ = 6.407	[%]	D ₃ · 10 ³ = 9.283
5) Momento de inércia em torno do eixo X ₄ :	I _{xx4m} = 0.133	[kg.m ²]	+/-	P ₄ = 1.32	[%]	D ₄ = 0.133
6) Momento de inércia em torno do eixo Y ₄ :	I _{yy4m} = 0.49	[kg.m ²]	+/-	P ₅ = 1.617	[%]	D ₅ = 0.49
7) Momento de inércia em torno do eixo Z ₄ :	I _{zz4m} = 0.483	[kg.m ²]	+/-	P ₆ = 1.609	[%]	D ₆ = 0.483
8) Produto de inércia em torno dos eixos X ₄ e Y ₄ :	I _{xy4m} = -0.022	[kg.m ²]	+/-	P ₇ = 6.556	[%]	D ₇ = -0.022
9) Produto de inércia em torno dos eixos X ₄ e Z ₄ :	I _{xz4m} = -0.019	[kg.m ²]	+/-	P ₈ = 9.823	[%]	D ₈ = -0.019
10) Produto de inércia em torno dos eixos Y ₄ e Z ₄ :	I _{yz4m} = -4.094 · 10 ⁻³	[kg.m ²]	+/-	P ₉ = 5.663	[%]	D ₉ = -4.095 · 10 ⁻³

Resultados Gráficos:

y := 0..9

Número de Testes: k=200





Iner_nom(N,M) := for i ∈ 1..N

$$M_{i,3} \leftarrow \text{if } (M_{i,1} = 4, M_{i,3}, M_{i,3} \cdot 10^{-3})$$

$$M_{i,5} \leftarrow \text{if } (M_{i,1} = 4, M_{i,5}, M_{i,5} \cdot 10^{-3})$$

$$M_{i,7} \leftarrow \text{if } (M_{i,1} = 4, M_{i,7}, M_{i,7} \cdot 10^{-3})$$

$$M_{i,11} \leftarrow M_{i,11} \cdot 10^{-3}$$

$$M_{i,12} \leftarrow M_{i,12} \cdot 10^{-3}$$

$$M_{i,13} \leftarrow M_{i,13} \cdot 10^{-3}$$

$$I_{xx2_i} \leftarrow \text{if } M_{i,1} = 1, \frac{M_{i,2} \cdot \left[\begin{array}{l} (M_{i,5})^2 \dots \\ + (M_{i,7})^2 \end{array} \right]}{12}, \text{if } M_{i,1} = 21, \frac{M_{i,2}}{8} \cdot \left[\begin{array}{l} (M_{i,3})^2 \dots \\ + (M_{i,5})^2 \end{array} \right], \text{if } N$$

$$I_{yy2_i} \leftarrow \text{if } M_{i,1} = 1, \frac{M_{i,2} \cdot \left[\begin{array}{l} (M_{i,3})^2 \dots \\ + (M_{i,7})^2 \end{array} \right]}{12}, \text{if } M_{i,1} = 21, \frac{M_{i,2}}{48} \cdot \left[\begin{array}{l} 4 \cdot (M_{i,7})^2 \dots \\ + 3 \cdot (M_{i,3})^2 \dots \\ + (M_{i,5})^2 \end{array} \right]$$

$$I_{zz2_i} \leftarrow \text{if } M_{i,1} = 1, \frac{M_{i,2} \cdot \left[\begin{array}{l} (M_{i,3})^2 \dots \\ + (M_{i,5})^2 \end{array} \right]}{12}, \text{if } M_{i,1} = 21, \frac{M_{i,2}}{48} \cdot \left[\begin{array}{l} 4 \cdot (M_{i,7})^2 \dots \\ + 3 \cdot (M_{i,3})^2 \dots \\ + (M_{i,5})^2 \end{array} \right]$$

$$\alpha_i \leftarrow M_{i,9} \cdot \frac{\pi}{180}$$

$$\left. \begin{array}{l} \dots \\ \left. \begin{array}{l} \dots \\ M_{i,3} \end{array} \right] \end{array} \right)^2$$

$$\left. \begin{array}{l} \dots \\ \left. \begin{array}{l} \dots \\ M_{i,5} \end{array} \right] \end{array} \right)^2$$

$$\left(\begin{array}{c} \dots \\ M_{1,7} \\ \dots \\ \frac{M_{1,5}^2}{2} \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} I_{xx3} &\leftarrow \text{if} \left(M_{1,9} = 0, I_{xx2}, \text{if} \left(M_{1,10} = 1, I_{xx2_i}, \text{if} \left(M_{1,10} = 2, I_{zz2} \cdot \sin(\alpha_i)^2 + I_x \right. \right. \right. \\ I_{xy3} &\leftarrow \text{if} \left[M_{1,9} = 0, 0, \text{if} \left[M_{1,10} = 1, 0, \text{if} \left[M_{1,10} = 2, 0, \frac{1}{2} \cdot \left(I_{xx2_i} - I_{yy2_i} \right) \cdot \sin(2 \cdot \alpha_i) \right. \right. \right. \\ I_{yy3} &\leftarrow \text{if} \left(M_{1,9} = 0, I_{yy2}, \text{if} \left(M_{1,10} = 1, I_{yy2_i} \cdot \cos(\alpha_i)^2 + I_{zz2} \cdot \sin(\alpha_i)^2, \text{if} \left(M_{1,10} = 2, \right. \right. \right. \\ I_{xz3} &\leftarrow \text{if} \left[M_{1,9} = 0, 0, \text{if} \left[M_{1,10} = 1, 0, \text{if} \left[M_{1,10} = 2, \frac{1}{2} \cdot \left(I_{zz2_i} - I_{xx2_i} \right) \cdot \sin(2 \cdot \alpha_i) \right. \right. \right. \\ I_{zz3} &\leftarrow \text{if} \left(M_{1,9} = 0, I_{zz2}, \text{if} \left(M_{1,10} = 1, I_{yy2_i} \cdot \sin(\alpha_i)^2 + I_{zz2} \cdot \cos(\alpha_i)^2, \text{if} \left(M_{1,10} = 2, \right. \right. \right. \\ I_{yz3} &\leftarrow \text{if} \left[M_{1,9} = 0, 0, \text{if} \left[M_{1,10} = 1, \frac{1}{2} \cdot \left(I_{yy2_i} - I_{zz2_i} \right) \cdot \sin(2 \cdot \alpha_i), \text{if} \left(M_{1,10} = 2, 0, \right. \right. \right. \end{aligned}$$

$$I_{xx1} \leftarrow \left[\sum_{i=1}^N \left[I_{xx3_i} + M_{i,2} \cdot \left[\left(M_{i,12} \right)^2 + \left(M_{i,13} \right)^2 \right] \right] \right]$$

$$I_{xy1} \leftarrow \left[\sum_{i=1}^N \left(I_{xy3_i} - M_{i,2} \cdot M_{i,11} \cdot M_{i,12} \right) \right]$$

$$I_{yy1} \leftarrow \left[\sum_{i=1}^N \left[I_{yy3_i} + M_{i,2} \cdot \left[\left(M_{i,11} \right)^2 + \left(M_{i,13} \right)^2 \right] \right] \right]$$

$$I_{xz1} \leftarrow \left[\sum_{i=1}^N \left(I_{xz3_i} - M_{i,2} \cdot M_{i,11} \cdot M_{i,13} \right) \right]$$

$$I_{zz1} \leftarrow \left[\sum_{i=1}^N \left[I_{zz3_i} + M_{i,2} \cdot \left[\left(M_{i,11} \right)^2 + \left(M_{i,12} \right)^2 \right] \right] \right]$$

$$I_{yz1} \leftarrow \left[\sum_{i=1}^N \left(I_{yz3_i} - M_{i,2} \cdot M_{i,12} \cdot M_{i,13} \right) \right]$$

$$\text{Massa} \leftarrow \sum_{i=1}^N M_{i,2}$$

```

Xcm ←  $\frac{\sum_{i=1}^N M_{i,11} \cdot M_{i,2}}{\text{Massa}}$ 
Ycm ←  $\frac{\sum_{i=1}^N M_{i,12} \cdot M_{i,2}}{\text{Massa}}$ 
Zcm ←  $\frac{\sum_{i=1}^N M_{i,13} \cdot M_{i,2}}{\text{Massa}}$ 
I_xx4 ← I_xx1 - Massa · (Ycm2 + Zcm2)
I_yy4 ← I_yy1 - Massa · (Xcm2 + Zcm2)
I_zz4 ← I_zz1 - Massa · (Xcm2 + Ycm2)
I_xy4 ← I_xy1 + Massa · Xcm · Ycm
I_xz4 ← I_xz1 + Massa · Xcm · Zcm
I_yz4 ← I_yz1 + Massa · Ycm · Zcm
T ←  $\begin{bmatrix} I_{xx4} & I_{xy4} & I_{xz4} \\ I_{xy4} & I_{yy4} & I_{yz4} \\ I_{xz4} & I_{yz4} & I_{zz4} \end{bmatrix}$ 
MomPrincip ← eigenvals(T)
IP ← sort(MomPrincip)
V_0 ← Massa
V_1 ← Xcm
V_2 ← Ycm
V_3 ← Zcm
V_4 ← I_xx4
V_5 ← I_yy4

```

$$\begin{array}{l} V_6 \leftarrow I_{zz4} \\ V_7 \leftarrow I_{xy4} \\ V_8 \leftarrow I_{xz4} \\ V_9 \leftarrow I_{yz4} \\ \hline V \end{array}$$

$$D := \text{Iner_nom}(N, M)$$

$$x_2^2 \cdot \cos(\alpha_i)^2, I_{xx2_1} \cdot \cos(\alpha_i)^2 + I_{yy2_1} \cdot \sin(\alpha_i)^2 \Big) \Big) \Big) \Big)$$

$$I_0 = 2, I_{yy2_1}, I_{xx2_1} \cdot \sin(\alpha_i)^2 + I_{yy2_1} \cdot \cos(\alpha_i)^2 \Big) \Big) \Big) \Big)$$

$$I_0 = 2, I_{zz2_1} \cdot \cos(\alpha_i)^2 + I_{xx2_1} \cdot \sin(\alpha_i)^2, I_{zz2_1} \Big) \Big) \Big) \Big)$$

APÊNDICE B
LISTAGEM DO PROGRAMA
TESTOTI

Programa TESTOTI.mcd

m cmx alt -x +x cmx alt -y +y cmz alt -z +z

$$M := \begin{bmatrix} 0.96 & 2 & 0 & -5 & 3 & 1.2 & 0 & -3 & 2.7 & 1 & 0 & -3.9 & 2.6 \\ 1 & 3.5 & 1 & -3.6 & 4.9 & 5.6 & 1 & -6 & 6 & 3.2 & 1 & -3.5 & 4.3 \\ 0.45 & 5 & 0 & -5 & 6.3 & 7 & 0 & -9 & 7.8 & 7.1 & 0 & -7.7 & 8.1 \\ 0.27 & 5.2 & 1 & -5.2 & 6.6 & 4.3 & 1 & -0.4 & 0.5 & 9.2 & 1 & -0.3 & 0.5 \\ 1.56 & 6 & 1 & -6.5 & 7 & 9 & 1 & -9.2 & 10.1 & 8.3 & 1 & -8.4 & 9.2 \\ 0.67 & 7 & 0 & -9 & 7.7 & 6 & 0 & -6 & 6.7 & 4.5 & 0 & -4.6 & 5.4 \end{bmatrix} \quad i := 5$$

$$X_{cm} := \frac{\sum_{i=0}^5 M_{i,0} \cdot M_{i,1}}{\sum_{i=0}^5 M_{i,0}} \quad X_{cm} = 4.71$$

$$Y_{cm} := \frac{\sum_{i=0}^5 M_{i,0} \cdot M_{i,5}}{\sum_{i=0}^5 M_{i,0}} \quad Y_{cm} = 5.931$$

$$Z_{cm} := \frac{\sum_{i=0}^5 M_{i,0} \cdot M_{i,1}}{\sum_{i=0}^5 M_{i,0}} \quad Z_{cm} = 4.71$$

Distância máxima entre o novo centro de massa e o anterior:

$$\epsilon_x := 0.5$$

$$\epsilon_y := 0.5$$

$$\epsilon_z := 0.4$$

Novo CM: $NX_{cm} := 3.95$

$$NY_{cm} := 6.0$$

$$NZ_{cm} := 4.71$$

$$V := \text{teste}(M, NX_{cm}, NY_{cm}, NZ_{cm}, \varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z)$$

$$V = \begin{bmatrix} 3.829 \\ 6.406 \\ 4.921 \\ 0.121 \\ 0.406 \\ 0.211 \\ 35 \end{bmatrix}$$

O vetor ao lado retorna os seguintes resultados:

- 1- Posição do centro de gravidade no eixo X;
- 2- Posição do centro de gravidade no eixo Y;
- 3- Posição do centro de gravidade no eixo Z;
- 4- Distância da nova posição do centro de gravidade em X, em relação à posição desejada;
- 5- Distância da nova posição do centro de gravidade em Y, em relação à posição desejada;
- 6- Distância da nova posição do centro de gravidade em Z, em relação à posição desejada;
- 7- Número de iterações.