



MINISTÉRIO DA  
CIÊNCIA, TECNOLOGIA  
E INOVAÇÕES



sid.inpe.br/mtc-m21c/2021/02.17.18.06-TDI

## ANÁLISE NUMÉRICA DE TRAJETÓRIAS ESPACIAIS DE BAIXO CUSTO USANDO AUXÍLIOS DE FORÇAS NATURAIS

Rebeca de Souza Ribeiro

Dissertação de Mestrado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle, orientada pelos Drs. Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado, e Cristiano Fiorilo de Melo, aprovada em 29 de março de 2021.

URL do documento original:

<<http://urlib.net/8JMKD3MGP3W34R/4479Q7B>>

INPE  
São José dos Campos  
2021

**PUBLICADO POR:**

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE  
Coordenação de Ensino, Pesquisa e Extensão (COEPE)  
Divisão de Biblioteca (DIBIB)  
CEP 12.227-010  
São José dos Campos - SP - Brasil  
Tel.:(012) 3208-6923/7348  
E-mail: pubtc@inpe.br

**CONSELHO DE EDITORAÇÃO E PRESERVAÇÃO DA PRODUÇÃO INTELLECTUAL DO INPE - CEPPII (PORTARIA Nº 176/2018/SEI-INPE):**

**Presidente:**

Dra. Marley Cavalcante de Lima Moscati - Coordenação-Geral de Ciências da Terra (CGCT)

**Membros:**

Dra. Ieda Del Arco Sanches - Conselho de Pós-Graduação (CPG)  
Dr. Evandro Marconi Rocco - Coordenação-Geral de Engenharia, Tecnologia e Ciência Espaciais (CGCE)  
Dr. Rafael Duarte Coelho dos Santos - Coordenação-Geral de Infraestrutura e Pesquisas Aplicadas (CGIP)  
Simone Angélica Del Ducca Barbedo - Divisão de Biblioteca (DIBIB)

**BIBLIOTECA DIGITAL:**

Dr. Gerald Jean Francis Banon  
Clayton Martins Pereira - Divisão de Biblioteca (DIBIB)

**REVISÃO E NORMALIZAÇÃO DOCUMENTÁRIA:**

Simone Angélica Del Ducca Barbedo - Divisão de Biblioteca (DIBIB)  
André Luis Dias Fernandes - Divisão de Biblioteca (DIBIB)

**EDITORAÇÃO ELETRÔNICA:**

Ivone Martins - Divisão de Biblioteca (DIBIB)  
André Luis Dias Fernandes - Divisão de Biblioteca (DIBIB)



MINISTÉRIO DA  
CIÊNCIA, TECNOLOGIA  
E INOVAÇÕES



sid.inpe.br/mtc-m21c/2021/02.17.18.06-TDI

## ANÁLISE NUMÉRICA DE TRAJETÓRIAS ESPACIAIS DE BAIXO CUSTO USANDO AUXÍLIOS DE FORÇAS NATURAIS

Rebeca de Souza Ribeiro

Dissertação de Mestrado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle, orientada pelos Drs. Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado, e Cristiano Fiorilo de Melo, aprovada em 29 de março de 2021.

URL do documento original:

<<http://urlib.net/8JMKD3MGP3W34R/4479Q7B>>

INPE  
São José dos Campos  
2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

---

Ribeiro, Rebeca de Souza.

R354a Análise numérica de trajetórias espaciais de baixo custo usando auxílios de forças naturais / Rebeca de Souza Ribeiro. – São José dos Campos : INPE, 2021.

xxii + 84 p. ; (sid.inpe.br/mtc-m21c/2021/02.17.18.06-TDI)

Dissertação (Mestrado em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle) – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2021.

Orientadores : Drs. Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado, e Cristiano Fiorilo de Melo.

1. Análise de trajetórias. 2. Trajetórias Terra-Lua. 3. Manobras de swing-by. 4. Objetos próximos à Terra. I.Título.

CDU 629.7.01:521.3

---



Esta obra foi licenciada sob uma Licença [Creative Commons Atribuição-NãoComercial 3.0 Não Adaptada](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/).

This work is licensed under a [Creative Commons Attribution-NonCommercial 3.0 Unported License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/).



## INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

### DEFESA FINAL DE DISSERTAÇÃO DE REBECA DE SOUZA RIBEIRO BANCA Nº 055/2021, REG 46323/2019

No dia 29 de março de 2021, às 09h, por teleconferência, o(a) aluno(a) mencionado(a) acima defendeu seu trabalho final (apresentação oral seguida de arguição) perante uma Banca Examinadora, cujos membros estão listados abaixo. O(A) aluno(a) foi APROVADO(A) pela Banca Examinadora, por unanimidade, em cumprimento ao requisito exigido para obtenção do Título de Mestre em Engenharia e Tecnologias Espaciais / Mecânica Espacial e Controle. O trabalho precisa da incorporação das correções sugeridas pela Banca Examinadora e revisão final pelo(s) orientador(es).

**Título: "Análise numérica de trajetórias espaciais de baixo custo usando auxílios de forças naturais."**

Eu, Silvio Manea, como Coordenador e Presidente do Conselho do Curso de Engenharia e Tecnologia Espaciais, em conformidade com o Presidente da Banca Examinadora Dr. Rodolpho Vilhena de Moraes, assino esta ATA em nome de todos os membros, com o consentimento dos mesmos.

Dr. Rodolpho Vilhena de Moraes - Presidente - UNIFESP  
Dr. Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado - Orientador - INPE  
Dr. Cristiano Fiorilo de Melo - Orientador - UFMG  
Dra. Maria Cecília Pereira de Faria - Membro Externo - UFMG  
Dr. Marcelo Domingos Marchesin - Membro Externo - UFMG  
Dr. Geraldo Magela Couto Oliveira - Membro Externo - CEFET



Documento assinado eletronicamente por **Silvio Manea, Tecnologista**, em 05/04/2021, às 16:20 (horário oficial de Brasília), com fundamento no art. 6º do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site <http://sei.mctic.gov.br/verifica.html>, informando o código verificador **6887632** e o código CRC **857BE858**.



## **AGRADECIMENTOS**

A todos que direta ou indiretamente contribuíram para a construção deste trabalho. Em especial, aos colegas de curso que foram grandes companheiros ao longo desta jornada; à minha família, que nunca falhou em me dar todo o apoio que precisei; aos professores que contribuíram imensamente na continuação da minha formação no INPE; ao INPE, que me forneceu a oportunidade de trabalhar neste projeto; aos meus orientadores Cristiano Fiorilo de Melo e Antônio Bertachini pela instrução e incentivos constantes e; ao CNPq, pelo apoio financeiro, sem o qual este trabalho não seria possível.





## RESUMO

Neste trabalho, propôs-se a investigação de um conjunto de trajetórias espaciais derivadas de órbitas periódicas retrógradas ao redor do ponto de equilíbrio lagrangiano  $L_1$ , tomadas como ponto de partida para a realização de uma manobra de *swing-by* com a Lua, dentro do problema de quatro corpos tridimensional. Este *swing-by* tem como objetivo aumentar a energia do veículo espacial em relação à Terra e ao Sol, reduzindo o incremento de velocidade ( $\Delta V$ ) necessário para gerar trajetórias que escapem do sistema Terra-Lua, de 2,6% - 4,8%. Estas trajetórias são capazes de alcançar asteroides com órbitas próximas a da Terra, entre Vênus e Marte. Dessa forma, a principal meta é a investigação numérica destas trajetórias alternativas de escape no ambiente de programação FORTRAN e dos parâmetros que as definem, e a fomentação de uma estratégia para análise de missões espaciais para asteroides que as utilizem.

Palavras-chave: Análise de trajetórias; Trajetórias Terra-Lua; Manobras de *swing-by*. Objetos próximos à Terra.



# NUMERICAL ANALYSIS OF LOW-COST SPACE TRAJECTORIES USING NATURAL FORCES AID

## ABSTRACT

In this work, a set of space trajectories derived from periodic retrograde orbits around the Lagrangian equilibrium point  $L_1$  is taken as a starting point for swing-by maneuvers with the Moon, within the three-dimensional four-body problem. This swing-by maneuvers aims to increase the energy of the space vehicle in respect to the Earth and the Sun, reducing the speed increase ( $\Delta V$ ) necessary to generate trajectories that escape from the Earth-Moon system, by 2,6% – 4,8%. These trajectories can reach asteroids with orbits close to Earth, between Venus and Mars. Thus, the main goal is the numerical investigation of these alternative escape paths in the FORTRAN programming environment and considering the parameters that define them, as well as the development of a strategy for analyzing space missions for asteroids that use them.

Keywords: Trajectory analysis; Earth-moon trajectories; Swingby technique; near Earth objects.



## LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
Figura 1.1 – Descrição das classes de NEAs.....	3
Figura 2.1 – Configuração dos corpos envolvidos em uma manobra assistida por gravidade. ....	13
Figura 2.2 – Trajetória de $M3$ em relação ao sistema centrado no corpo $M2$ . .	13
Figura 2.3 – Sistema sinódico. ....	15
Figura 2.4 – Localização dos pontos de equilíbrio de Lagrange e curvas de velocidade zero para $\mu_2 = 0.01$ .....	16
Figura 2.5 – Representação de órbitas periódicas da família G.....	18
Figura 3.1 – Configuração dos quatro corpos no instante $t_0$ . ....	22
Figura 3.2 – Representação das trajetórias derivadas de órbitas periódicas da família G.....	24
Figura 3.3 – Esquematisação da identificação das janelas de lançamento. ....	27
Figura 3.4 – Esquematisação da identificação da região de lançamento.....	28
Figura 3.5 – Esquematisação da manobra de correção de meio de caminho..	29
Figura 4.1. Magnitude da velocidade de inserção em uma trajetória G ( $V_{SC}$ ) em km/s em função da altitude da órbita terrestre inicial. ....	32
Figura 4.2. Detalhe do gráfico da magnitude da velocidade de inserção em uma trajetória G ( $V_{SC}$ ) em km/s em função da altitude da órbita terrestre inicial.....	32
Figura 4.3. Variação da magnitude da velocidade de inserção em uma trajetória G ( $V_{SC}$ ) em km/s em função da anomalia verdadeira da Lua. ....	34
Figura 4.4. Variação da magnitude da velocidade de inserção em uma trajetória G ( $V_{SC}$ ) em km/s em função da anomalia verdadeira da Lua e da Terra. ....	35
Figura 4.5. Exemplos de diferentes tipos de TGs, para o sistema centrado na Terra.....	36
Figura 4.6. Evolução do semieixo maior das TGs no intervalo $t_0 - t_1$ . ....	38
Figura 4.7. Evolução da excentricidade das TGs no intervalo $t_0 - t_1$ . ....	38
Figura 4.8. Evolução da energia específica das TGs no intervalo $t_0 - t_1$ .....	39
Figura 4.9. Detalhes da evolução da excentricidade das TGs no intervalo $t_0 - t_1$ .....	39

Figura 4.10. Evolução do semieixo maior no intervalo $t_1 - t_2$ .....	40
Figura 4.11. Evolução da excentricidade no intervalo $t_1 - t_2$ .....	41
Figura 4.12. Evolução do argumento do periselenium no intervalo $t_1 - t_2$ .....	41
Figura 4.13. Evolução da ascensão reta do nodo ascendente no intervalo $t_1 - t_2$ . .....	42
Figura 4.14. Evolução da inclinação no intervalo $t_1 - t_2$ . .....	42
Figura 4.15. Evolução da energia específica no intervalo $t_1 - t_2$ . .....	43
Figura 4.16. Variação da energia específica, em relação à Terra, para TGEs, em função do ângulo de aproximação ( $\psi$ ). .....	44
Figura 4.17. Variação da energia específica, em relação à Terra, para TGEs, em função da velocidade de inserção $VSC$ .....	44
Figura 4.18. Variação da energia específica, em relação ao Sol, para TGEs, em função do ângulo de aproximação ( $\psi$ ). .....	45
Para as condições iniciais $h = 200$ km, $f_{Terra} = f_{Lua} = \Omega_{Lua} = 0$ . .....	45
Fonte: Produção da autora.....	45
Figura 4.19. Variação do semieixo maior, em relação ao Sol, em função tempo. .....	46
Figura 4.20. Variação do raio do afélio, em função tempo. .....	47
Figura 4.21. Variação do raio do periélio, em função tempo. .....	48
Figura 4.22. Variação da energia específica, em relação ao Sol, em função do tempo. .....	49
Figura 4.23. Variação da excentricidade, em relação ao Sol, em função do tempo. .....	49
Figura 4.24. Variação da inclinação, em relação ao Sol, em função do tempo.50	
Figura 4.25. Variação do argumento do periélio, em função do tempo. ....	50
Figura 4.26. Variação da ascensão reta do nodo ascendente, em relação ao Sol, em função do tempo. ....	51
Figura 4.27. Trajetórias de escape com diferentes velocidades de inserção. ...	52
Figura 4.28. Variação do alcance das TGEs em função da anomalia verdadeira da Lua. ....	53
Figura 4.29. Variação do alcance das TGEs em função da anomalia verdadeira da Lua e da Terra.....	54

. Figura 4.30. Diagramas das órbitas da Terra, do NEA 65803 Didymos e dos limites interno e externo das TGEs .....	56
Figura 4.31. Variação da magnitude da velocidade de inserção em uma trajetória G ( $V_{sc}$ ) em km/s para o período de 06 de março de 2026 a 29 de abril de 2026. ....	56
Figura 4.32. Distância mínima Sonda-Didymos para lançamento no período de 06 de março de 2026 a 29 de abril de 2026.....	58
Figura 4.33. Distância mínima Sonda-Didymos para lançamento no período de 04 de abril de 2026 a 06 de abril de 2026. ....	58
Figura 4.34. Distância Sonda-Didymos para lançamento no período de 04 de abril de 2026 a 07 de abril de 2026, em função do tempo de voo.....	59
Figura 4.35. Diagrama da aproximação da sonda ao NEA 65803 Didymos em 07/03/2029 .....	59
. Figura 4.36. Diagramas das órbitas da Terra, do NEA 138971 (2001 CB21) e dos limites interno e exteno das TGEs.....	61
Figura 4.37. Variação da magnitude da velocidade de inserção em uma trajetória G ( $V_{sc}$ ) em km/s para o período de 31 de janeiro de 2026 a 26 de março de 2026. ....	61
Figura 4.38. Distância mínima Sonda-2001 CB21 para lançamento no período de 31 de janeiro de 2026 a 26 de março de 2026.....	62
Figura 4.39. Distância Sonda-2001 CB21 para lançamento no período de 31 de janeiro de 2026 a 26 de março de 2026, em função do tempo de voo.....	63
Figura 4.40. Diagrama da aproximação da sonda ao NEA 138971 (2001 CB21) em 20/10/2026 .....	64
Figura 4.41. Variação da magnitude da velocidade de inserção em uma trajetória G ( $V_{sc}$ ) em km/s para os períodos considerados para o NEA 3361 Orpheus.....	65
Figura 4.42. Distância Sonda-NEA para os períodos considerados para o NEA 3361 Orpheus.....	66
Figura 4.43. Diagrama da aproximação da sonda ao NEA 3361 Orpheus.....	68

Figura 4.44. Variação da magnitude da velocidade de inserção em uma trajetória G ( $V_{SC}$ ) em km/s para os períodos considerados para o NEA 99942 Apophis. ....	70
Figura 4.45. Distância Sonda-NEA para os períodos considerados para o 99942 Apophis. ....	71
Figura 4.46. Distância Sonda-NEA para os períodos considerados para o 99942 Apophis em função do tempo de transferência e distância sonda-NEA.	71
Figura 4.47. Diagrama da aproximação da sonda ao NEA 99942 Apophis .....	72
Figura 4.48. Diagrama do primeiro impulso para a manobra de Hohmann interplanetária.....	74
Figura 4.49. Diagrama do método de Lambert. ....	75



## LISTA DE TABELAS

	<u>Pág.</u>
Tabela 2.1 – Posições dos pontos Lagrangianos para o sistema sinódico Terra-Lua. ....	16
Tabela 4.1. Magnitude da velocidade de inserção em uma trajetória G ( $V_{SC}$ ) em km/s em função da altitude da órbita terrestre inicial. ....	31
Tabela 4.2. Magnitude da variação de velocidade de inserção entre trajetórias G ( $\delta V$ ) em km/s em função da altitude da órbita terrestre inicial. ....	33
Tabela 4.3. Elementos orbitais do NEA 65803 Didymos .....	55
Tabela 4.4. Propriedades da transferência para o NEA 65803 Didymos .....	60
Tabela 4.5. Elementos orbitais do NEA 138971 (2001 CB21) .....	60
Tabela 4.6. Propriedades da transferência para o NEA 138971 (2001 CB21). ....	63
Tabela 4.7. Elementos orbitais do NEA 3361 Orpheus .....	64
Tabela 4.8. Propriedades da 1ª transferência para o NEA 3361 Orpheus. ....	67
Tabela 4.9. Propriedades da 2ª transferência para o NEA 3361 Orpheus. ....	67
Tabela 4.10. Propriedades da 3ª transferência para o NEA 3361 Orpheus. ....	69
Tabela 4.11. Elementos orbitais do NEA 99942 Apophis .....	69
Tabela 4.12. Propriedades da transferência para o NEA 99942 Apophis. ....	72
Tabela 4.13. Comparação de $\Delta V$ s entre TGEs e trajetórias hiperbólicas. ....	73
Tabela A.1. Transferência para o NEA 65803 Didymos via método de Lambert .....	83
Tabela A.2. Transferência para o NEA 99942 Apophis via método de Lambert .....	83
Tabela A.3. Transferência para o NEA 2001 CB21 via método de Lambert ....	83
Tabela A.4. Transferência para o NEA 3361 Orpheus via método de Lambert	84



## LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

INPE	Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais
ESA	European Space Agency
JAXA	Japan Aerospace Exploration Agency
JPL	Jet Propulsion Laboratory
MPC	Minor Planet Center
MSFC	Marshall Space Flight Center
NASA	National Aeronautics and Space Administration
NEA	Near-Earth Asteroid (Asteroide próximo à Terra)
NEO	Near-Earth Objects (Objeto próximo à Terra)
P3C	Problema Circular Restrito de Três Corpos
P4C	Problema Circular Restrito de Quatro Corpos
P4C3D	Problema Circular Restrito de Quatro Corpos Tridimensional
PHA	Potentially Hazardous Asteroids (Asteroide potencialmente perigoso)
TG	Trajatória G
TGC	Trajatória G de Colisão
TGE	Trajatória G de Escape
TGI	Trajatória G de Inversão



## LISTA DE SÍMBOLOS

$a$	Semieixo maior
$C_3$	Energia característica
$\delta$	Metade do ângulo de curvatura
$\Delta E$	Varição de energia
$\Delta \epsilon_{ij}$	Varição da energia específica do corpo $j$ em relação ao corpo $i$
$\Delta V, \delta V$	Incremento de velocidade
$e$	Excentricidade
$f_i$	Anomalia verdadeira do corpo $i$
$G$	Constante de gravitação universal
$h$	Altitude da órbita circular inicial terrestre
$i$	Inclinação
$L_i$	Ponto de equilíbrio de Lagrange $i$
$M$	Anomalia média
$M_i$	Massa do corpo $i$
$\mu_i$	Parâmetro de massa gravitacional em relação ao corpo $i$
$n$	Velocidade angular
$\Omega_i$	Ascensão reta do nodo ascendente do corpo $i$
$\omega_i$	Argumento do periapse do corpo $i$
$\psi$	Ângulo de aproximação
$Q$	Raio do afélio
$q$	Raio do periélio
$\vec{R}_i$	Vetor posição do $i$ -ésimo corpo
$\ddot{\vec{R}}_i$	Vetor aceleração do $i$ -ésimo corpo
$R_{ij}$	Distância entre corpos $i$ e $j$
$R_{max}$	Máximo alcance, interno ou externo
$r_p$	Raio do periapse
$R_{Terra}$	Raio médio da órbita da Terra em torno do Sol
$t_i$	Tempo
$V_C$	Velocidade da órbita circular
$V_{esc}$	Velocidade de escape
$\vec{V}_i$	Vetor velocidade do corpo $i$

- $V_{sc}$  Velocidade de inserção do veículo espacial
- $(x, y, z)$  Componentes cartesianas do vetor posição
- $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$  Componentes cartesianas do vetor velocidade
- $(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$  Componentes cartesianas do vetor aceleração

## SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
1 INTRODUÇÃO.....	1
1.1 Objetivos.....	4
1.2 Justificativa .....	5
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....	11
2.1 Swing-by .....	11
2.2 Problema Circular Restrito de Três Corpos (P3C).....	14
2.2.1 Pontos de equilíbrio de Lagrange .....	16
2.2.2 Órbitas periódicas da família G .....	17
2.3 Problema Circular Restrito de Quatro Corpos (P4C) .....	20
3 METODOLOGIA .....	21
3.1 Para a caracterização das trajetórias .....	21
3.2 Para a determinação do alcance das trajetórias.....	25
3.3 Para aplicação de transferências Terra-NEA utilizando TGEs .....	25
4 RESULTADOS .....	31
4.1 Caracterização das curvas de velocidade para o P4C3D.....	31
4.2 Evolução dos elementos orbitais das TGs.....	36
4.2.1 Entre o lançamento e a entrada na esfera de influência gravitacional da Lua 37	
4.2.2 Entre a entrada e saída da esfera de influência gravitacional da Lua .	40
4.2.3 Após a saída da esfera de influência gravitacional da Lua .....	45
4.3 Alcance das TGs .....	51
4.4 Aplicações .....	55
4.4.1 65803 Didymos .....	55
4.4.2 138971 (2001 CB21).....	60
4.4.3 3361 Orpheus .....	64
4.4.4 99942 Apophis .....	69
4.5 Análise de custos.....	73
5 CONCLUSÃO .....	77
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	79

ANEXO A – TRANSFERÊNCIAS VIA LAMBERT .....	83
--	----



## 1 INTRODUÇÃO

No início de 1801, Giuseppi Piazzi (1746-1826) realizou a observação de um corpo celeste que intrigou a comunidade científica da época. Poucas observações do corpo de baixa luminosidade puderam ser realizadas, pelo período aproximado de um mês, até que sua passagem próxima ao Sol começasse a inviabilizar sua visualização e determinação de sua órbita. Felizmente, poucos anos antes, Carl Friederich Gauss (1777-1855) havia desenvolvido um método para determinação de órbitas, utilizando poucas observações e a suposição de uma trajetória cônica, que possibilitou uma nova localização do corpo ainda no mesmo ano (MCCALL; BOWDEN; HOWARTH, 2006).

Em uma homenagem à deusa da agricultura e de seu patrono, o rei da Sicília, Piazzi nomeia inicialmente o corpo de “Ceres Ferdinandea”, categorizado-o como o planeta previsto pela Lei de Bode, que deveria estar entre Marte e Júpiter. Entretanto, em 1802, Heinrich Olbers (1758 - 1840), ao fazer observações procurando por Ceres, encontrou um novo “planeta” na mesma região, Pallas, contrariando a lei dada por Bode, que a considerava como “sacrossanta” (MCCALL; BOWDEN; HOWARTH, 2006). Em vista do conflito criado por estas novas descobertas, uma nova classe de corpos celestes foi então criada, a dos asteroides, para designar estes “pequenos planetas”. (MCCALL; BOWDEN; HOWARTH, 2006)

Ceres, como é conhecido atualmente, passou por várias categorizações, passando de planeta à asteroide, até chegar à recente denominação de planeta anão. Mas, ainda que Ceres não seja mais considerado um asteroide, sua descoberta foi o pontapé inicial para o estudo desses corpos menores do Sistema Solar.

Desde sua descoberta, os métodos para observação de asteroides passaram por diversas evoluções tecnológicas, saindo das observações diretas por telescópio, para observações fotográficas entre meados de 1890 a 1980, quando foram substituídas pelas observações modernas com CCD (*Charge-Coupled Device*) e processamento com sistemas computacionais (STOKES; EVANS;

LARSON, 2002), ocasionando o aumento exponencial de descobertas de asteroides.

Ao todo, segundo o Minor Planet Center (MPC)<sup>1</sup>, até julho de 2020, cerca de 960 milhões de corpos menores, entre asteroides, cometas e outros, haviam sido descobertos. O empenho para descobrir e catalogar esses corpos, apesar de ser inicialmente incentivado pela curiosidade científica, ganhou força com as metas propostas pela NASA (*National Aeronautics and Space Administration*) de descobrir 90% dos corpos com mais de 1 km de diâmetro que possuíam possibilidade de impacto com a Terra (STOKES; EVANS; LARSON, 2002).

Dentre esses, destacam-se os asteroides com órbitas próximas à Terra (NEA, do inglês, *Near-Earth Asteroid*). Fazendo parte de uma classe ainda maior, dos NEOs (do inglês, *Near-Earth Objects*), de maneira geral, são considerados NEAs todos os asteroides que têm raio de periélio menor do que 1,3 au e de afélio maior do que 0,983 au, estando divididos em quatro classes: Atenas, Apolo, Amor e Atira.

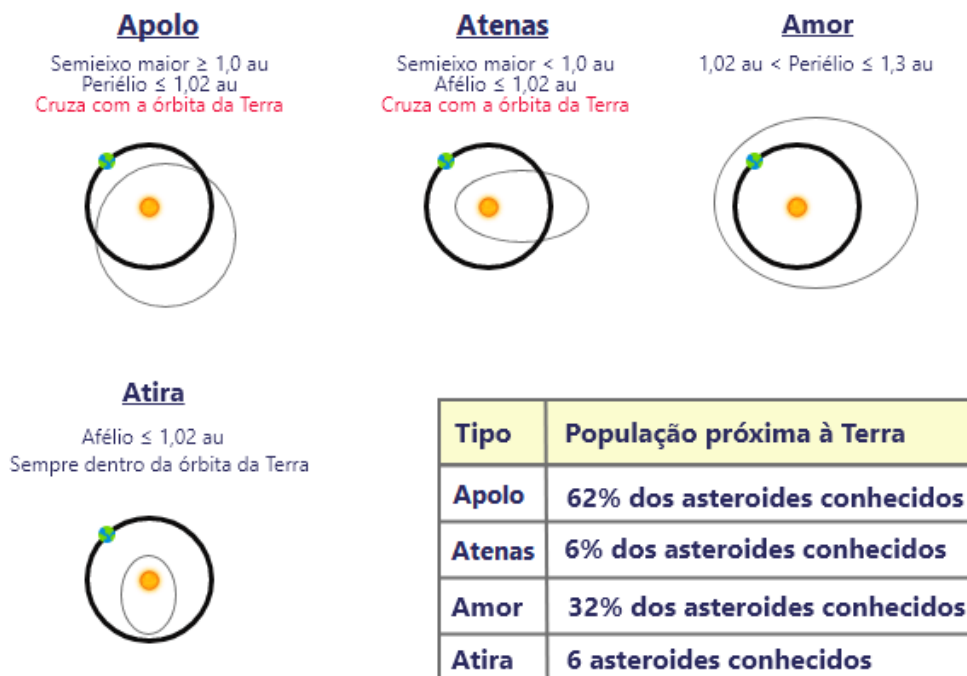
Shoemaker et al. (1979) definem três dessas classes: a classe Atenas é definida como aquela que contém todos os asteroides com  $a < 1,0$  au e  $Q \geq 0,983$  au, em que  $a$  é o semieixo maior da órbita e  $Q$  é o raio do afélio; a classe Apolo engloba os corpos que possuem  $a \geq 1,0$  au e  $q \leq 1,017$  au, em que  $q$  é o raio do periélio; os asteroides da classe Amor são definidos pelo seu raio do periélio, tal que  $1,017$  au  $< q \leq 1,3$  au; por fim, a classe Atira teve seu primeiro elemento confirmado em 2003, o asteroide (163693) Atira (BURBINE, 2016). Ela compreende os objetos cujas órbitas estão totalmente confinadas dentro da órbita terrestre, com  $a < 1,0$  au e  $Q < 0,983$  au. Desta forma, os asteroides da classe Amor têm órbitas externas a da Terra, Atiras, internas, e Atenas e Apolos são objetos cruzantes. Um esquema com o resumo das características destas classes pode ser visto na Figura 1.1.

---

<sup>1</sup> O Minor Planet Center (MPC) é uma divisão da International Astronomical Union (IAU) responsável pela catalogação dos corpos pequenos (cometas, asteroides, satélites naturais, entre outros). Mais detalhes podem ser acessados em: <https://www.minorplanetcenter.net/>.

A origem destes corpos ainda não está completamente entendida, mas o ciclo de vida de curto período deles indica que devem provir de fontes que possibilitem o reabastecimento de sua população. Assim, Morbidelli (1999) apresenta um panorama com diversos trabalhos sobre as origens dos NEAs, que indicam que ressonâncias dentro do Cinturão Principal de Asteroides (região entre Marte e Júpiter onde um grande número de asteroides está concentrado) seriam o mecanismo principal de difusão dos NEAs, ao alterar a excentricidade da órbita dos asteroides, forçando o cruzamento destes com as órbitas de planetas.

Figura 1.1 – Descrição das classes de NEAs.



Fonte: Traduzido de McFadden e Binzel (2007).

Muitas questões sobre as origens e propriedades físicas e químicas destes corpos continuam a ser levantadas, estimulando a investigação científica e o lançamento de missões que os tenham como alvo (vide Seção 1.2). Assim, este trabalho apresenta trajetórias alternativas, que combinam trajetórias derivadas de órbitas periódicas ao redor do ponto de equilíbrio Lagrangiano  $L_1$  do binário Terra-Lua, previstas pelo problema restrito de três corpos, e manobras de *swing-by* com a Lua, como propostas para missões para NEAs, de forma a fomentar missões espaciais que os tenham como objetivo.

As trajetórias espaciais aqui analisadas são derivadas de um conjunto de órbitas periódicas retrógradas ao redor do ponto de equilíbrio de Lagrange  $L_1$ , entre a Terra e a Lua, descritas por Broucke (1968) e detalhadas na Seção 2.2.2. Essas trajetórias são utilizadas como base para manobras de *swing-by* de um veículo espacial com a Lua, para que o aumento de energia provido por esta manobra aumente o alcance do veículo espacial, aproximando-o das órbitas de NEAs com um mínimo gasto de combustível, medido pelos incrementos de velocidade ( $\Delta V$ ) realizados ao longo de sua trajetória até o encontro com o NEA. O estudo dessas trajetórias é descrito com mais detalhes no Capítulo 4.

Este trabalho propõe ainda a análise de missões para quatro NEAs, os asteroides 99942 Apophis, 138971 (2001 CB21), 65803 Didymos e 3361 Orpheus utilizando estas trajetórias alternativas, comparando os resultados obtidos com aqueles encontrados na literatura, de missões que utilizam manobras convencionais para estes corpos, como a manobra de Hohmann interplanetária.

## 1.1 Objetivos

Utilizando simulações numéricas programadas na linguagem de programação FORTRAN, os esforços deste trabalho estão concentrados na análise e caracterização de trajetórias derivadas de órbitas periódicas retrógradas ao redor do ponto de equilíbrio Lagrangiano  $L_1$  do binário Terra-Lua em conjunto com manobras de *swing-by* com a Lua, e no potencial destas como alternativas para a realização de missões para NEAs. Desta forma, seis objetivos foram definidos:

- a) Simular numericamente trajetórias espaciais a fim de investigar o comportamento do movimento de um veículo espacial, inicialmente em uma órbita periódica da família G (Seção 2.2.2), quando nele são aplicados pequenos impulsos que provocam *swing-bys* com a Lua, dentro do Problema Circular Restrito de Quatro Corpos Tridimensional (P4C3D);

- b) Categorizar os diferentes tipos de trajetórias decorrentes da aplicação destes impulsos, analisando os parâmetros (energia e velocidade de lançamento) que os definem, dentro do contexto do P4C3D;
- c) Para os tipos de trajetórias em que o encontro com a Lua provoca ganho suficiente de energia para que o veículo escape do sistema Terra-Lua, determinar o alcance máximo atingido por este veículo espacial, ou seja, seu máximo afastamento da Terra, na direção de Vênus ou Marte, ainda considerando o P4C3D;
- d) Considerando estes máximos alcances teóricos das trajetórias de escape, determinar os pontos em que há interceptação com as órbitas dos asteroides alvos e investigar possíveis janelas de lançamento em um período pré-determinado;
- e) Para as janelas de lançamento encontradas, verificar a viabilidade das trajetórias alternativas estudadas em missões de interceptação ou acompanhamento, considerando, agora, um cenário mais realístico, utilizando as efemérides dos corpos envolvidos e os  $\Delta V$ s envolvidos na transferência e aproximação da sonda aos asteroides;
- f) Por fim, comparar o custo (medido pelos  $\Delta V$ s) dessa manobra com manobras de referência, como transferências via Lambert e manobras Hohmann, tendo em vista missões para os asteroides de interesse.

É importante frisar que este trabalho usa como modelo o P4C3D, ampliando a validade de seus resultados em comparação a trabalhos anteriores (Seção 2.2.2) que se referiam somente ao modelo planar. Ainda, como será detalhado no Capítulo 3, neste trabalho, faz-se uma análise mais detalhada e abrangente em relação às condições iniciais das trajetórias de escape e dos parâmetros que as caracterizam.

## **1.2 Justificativa**

De um ponto de vista científico, asteroides são potenciais fontes de informação sobre o estado primordial do Sistema Solar. Segundo Chapman (2004),

asteroides são remanescentes de “planetesimais”, que no período de acreção planetária, no início da formação do Sistema Solar, deram origem aos planetas. Assim, parte do interesse em se estudar asteroides é obter conhecimento sobre este período inicial, além de que o estudo e registro de suas características físicas e químicas é um passo importante para avaliar os riscos e consequências de uma possível colisão.

Desta forma, ao longo das últimas décadas, diversas missões que visavam a coleta de amostras destes corpos foram lançadas. Dentre elas, destacam-se:

- a) NEAR-Shoemaker (ano do lançamento: 1996). Foi a primeira missão a orbitar e realizar observações acerca da composição da superfície, estrutura interna, propriedades físicas e geológicas de um NEA, o asteroide 433 Eros (NEA da classe Amor). A sonda passou cerca de um ano orbitando o asteroide até seu pouso em 12 de fevereiro de 2001, passando ainda duas semanas em operação na superfície do asteroide, coletando dados de espectrometria gama (PROCKTER, *et al.*, 2002).
- b) Hayabusa (ano do lançamento: 2003). De responsabilidade da JAXA (do inglês, *Japan Aerospace Exploration Agency*), a missão Hayabusa teve como alvo o asteroide 25143 Itokawa (Apolo), com o objetivo de coletar amostras de sua superfície, tendo realizado múltiplos *touch-downs*, para observações *in situ*, antes de retornar à Terra. Tendo sido lançada em maio de 2003, aproximou-se do asteroide em setembro de 2005 e fez seu primeiro *touch-down* em 20 de novembro desse ano e o segundo em 25 de novembro, tendo realizado nesse encontro a coleta de material e seguido seu retorno à Terra que, por sua vez, aconteceu em 2010 (KAWAGUCHI; FUJIWARA; UESUGI, 2008);
- c) Hayabusa2 (ano do lançamento: 2014). Sucessora da Hayabusa, a missão Hayabusa2 teve o asteroide 162173 Ryugu (Apolo) como alvo, a fim de investigar a origem e evolução do Sistema Solar e os materiais que compõem a vida (SARLI; TSUDA, 2017). Completando sua

missão, obteve sucesso em coletar as amostras do asteroide e retornou à Terra, de forma que a cápsula fez sua aterrissagem em 6 dezembro de 2020 (JAXA, 2021);

- d) OSIRIS-REx (ano do lançamento: 2016). Como parte do programa New Frontiers da NASA, foi lançada em setembro de 2016, com o objetivo de coletar amostras do NEA 101955 Bennu, tendo alcançado o asteroide em dezembro de 2018 e tem retorno para a Terra previsto para 2023 (LAURETTA, *et al.*, 2017).

Nos últimos anos, os asteroides começaram a despertar também interesses comerciais, por se apresentarem como fontes de recursos à medida que a humanidade estende sua exploração para além dos limites terrestres. McFadden e Binzel (2007), sugerem que os asteroides além de poderem ter seus recursos extraídos e distribuídos a partir do espaço, o que seria mais econômico do que extrair e distribuir esses mesmos materiais a partir da Terra, podem também servir como “locais de treinamento” para as missões para Marte, tendo em vista a maior proximidade destes corpos à Terra, em comparação ao planeta vermelho. Além disso, missões para demonstração tecnológica se aproveitam dessa proximidade, para avaliar a implementação de novas tecnologias na exploração espacial. Temos como exemplos:

- a) NEA Scout (prevista para 2021). A missão em conjunto do Marshall Space Flight Center (MSFC) and Jet Propulsion Laboratory (JPL) da NASA irá lançar um CubeSat 6u, com uma vela solar como sistema de propulsão primário, em uma missão de reconhecimento de um NEA, à princípio o asteroide 2019 GF1 (MCINTOSH; BAKER; MATUS, 2020);
- b) Prospector-1 (sem previsão). A empresa Deep Space Industries está desenvolvendo uma microsonda com o objetivo de fazer a prospecção de recursos, como água, em asteroides (BONIN, *et al.*, 2016).

Por outro lado, a proximidade destes corpos à Terra traz à tona preocupações sobre os riscos que eles podem oferecer ao planeta. Pelo menos um evento de

extinção em massa é aceito como consequência de um impacto de asteroide: Schulte et al. (2010) apresentam uma coleção de evidências que indicam que o impacto de um bólido na península de Iucatã foi o responsável por alterações ambientais catastróficas (como escuridão prolongada, resfriamento global e chuva ácida) que se tornaram vetores da extinção em massa dos dinossauros no período Cretáceo. Na história mais recente, outras evidências do poder destrutivo destas colisões continuaram a marcar o planeta, como a do objeto de 50m de diâmetro que explodiu na região da Tugunská (na Rússia, em 30 de junho de 1908), liberando uma energia de 10 a 15 megatons (TURCO, *et al.*, 1982; SHOEMAKER, 1983), ou do objeto com diâmetro de cerca de 20 m, que explodiu na região de Chelyabinsk, também na Rússia, em fevereiro de 2013, deixando centenas de feridos, (POPOVA, *et al.*, 2013).

Assim, o esforço para identificar asteroides potencialmente perigosos e os riscos que eles representam para a vida no planeta têm sido uma das prioridades de pesquisadores da área. Os Estados Unidos lideram as pesquisas e buscas por esses asteroides potencialmente perigosos, impulsionados pelo projeto proposto pelo congresso americano de identificar 90% dos objetos com mais de 1 km até o ano de 2008 (ATKINSON; TICKELL; WILLIAMS, 2000). Como resultado, em 2011, 93% da população de asteroides com mais de 1 km de diâmetro já haviam sido descobertos (JPL, 2011). Para dar continuidade ao projeto de descoberta de asteroides, segundo Atkinson, Tickell e Williams (2000), a NASA conta com um programa de busca orçado em 3 milhões de dólares, integrando telescópios nos estados do Novo México, Havaí e Califórnia e equipes de pesquisadores na identificação e caracterização destes corpos.

Assim, às missões puramente científicas, como as já citadas, são acrescentadas missões de reconhecimento e deflexão de asteroides. A mais recente, a missão DART da NASA, com lançamento previsto para junho de 2021, pretende realizar um impacto com o corpo secundário do NEA duplo 65803 Didymos em outubro de 2022 (CHENG, *et al.*, 2015; CHENG, *et al.*, 2018). Em conjunto, a missão Hera da ESA (European Space Agency), cujo lançamento está previsto para 2024, seguirá o mesmo asteroide a partir de 2026, para investigar os efeitos do



impacto da primeira sonda (MICHEL, *et al.*, 2016; SCHEIRICH; PRAVEC; THOMAS, 2019)

Portanto, trajetórias alternativas que barateiem os custos das missões para NEAs, como as apresentadas neste trabalho, se mostram como um tópico relevante na área de estudo, em especial para a fomentação de novos projetos que tenham estes corpos como alvos.



## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Como mencionado no Capítulo 1, este trabalho tem como um de seus objetivos o estudo de um conjunto de trajetórias derivadas de um conjunto de órbitas periódicas ao redor do ponto de equilíbrio Lagrangiano  $L_1$ , preditas pelo Problema restrito de três corpos Terra-Lua-partícula (BROUCKE, 1968), utilizadas como ponto de partida para manobras de *swing-by* com a Lua. Portanto, neste capítulo faz-se uma breve revisão teórica dos principais conceitos que norteiam esta investigação: na Seção 2.1, a manobra de *swing-by*; na Seção 2.2, o Problema Circular Restrito de Três Corpos (P3C) e as órbitas periódicas; por fim, na Seção 2.3, o Problema Circular Restrito de Quatro Corpos (P4C).

### 2.1 Swing-by

A manobra assistida por gravidade, ou *swing-by*, como é usualmente conhecida e como é referenciada neste trabalho, é um tipo de manobra que tem por objetivo a alteração da energia de uma partícula (um veículo espacial, por exemplo) em relação a um determinado sistema de coordenadas de referência, por meio do uso do campo gravitacional do corpo celeste do qual essa partícula se aproxima (LABUNSKY; PAPKOV; SUKHANOV, 1998).

Manobras de *swing-by* têm sido extensivamente utilizadas em missões espaciais nas últimas décadas em aplicações diversas, como para o ganho de energia pelo veículo espacial e conseqüente aumento de seu alcance; para bruscas mudanças de inclinação do plano orbital; para alteração da geometria da órbita, entre outros (PRADO, 2001).

Por exemplo, ambas as naves Voyager fizeram *swing-bys* antes de saírem do Sistema Solar. Aproveitando uma condição de alinhamento entre os planetas externos, a Voyager 1 fez um *fly-by* por Júpiter antes de seguir em direção a Saturno, enquanto a Voyager 2 também encontrou Júpiter e Saturno, passando ainda por Urano (KOHLHASE; PENZO, 1977). Em outro exemplo, na missão ROSETTA da ESA, fez-se quatro *swing-bys* (Terra-Marte-Terra-Terra) a caminho do asteroide 67P/Churyumov-Gerasimenko, também realizando, no

processo, observações no Cinturão Principal de Asteroides (GLASSMEIER, *et al.*, 2007).

Assim, nesta seção, conforme Prado (2001), descreve-se uma modelagem simplificada do mecanismo do *swing-by*, considerando um sistema de três corpos,  $M_1$ ,  $M_2$  e  $M_3$ , tal que o corpo de massa  $M_1$ , mais massivo, se encontra no centro do sistema de coordenadas;  $M_2$ , menos massivo que  $M_1$ , está em uma órbita kepleriana ao redor de  $M_1$ ;  $M_3$  é a partícula que se aproxima de  $M_2$ , conforme esquematizado na Figura 2.1, com massa tão pequena que pode ser desprezada.

Nesta modelagem simplificada, pode-se dividir o problema em diferentes etapas, tal que, em cada etapa, sejam considerados dois dos corpos por vez. O corpo  $M_2$  sempre descreve uma trajetória kepleriana em relação à  $M_1$ . O corpo  $M_3$  inicialmente também descreve sua própria trajetória kepleriana em relação à  $M_1$ . Ao se aproximar de  $M_2$ , o corpo  $M_3$  passa a ser dominado gravitacionalmente por  $M_2$ , a atuação de  $M_1$  é desconsiderada, e o movimento de  $M_3$  passa a ser estudado como sendo uma órbita kepleriana hiperbólica em torno de  $M_2$ , conforme ilustrado nas Figuras 2.1 e 2.2.

Na Figura 2.2, também estão representadas as principais grandezas envolvidas na manobra, conforme descrito por Prado (2001):

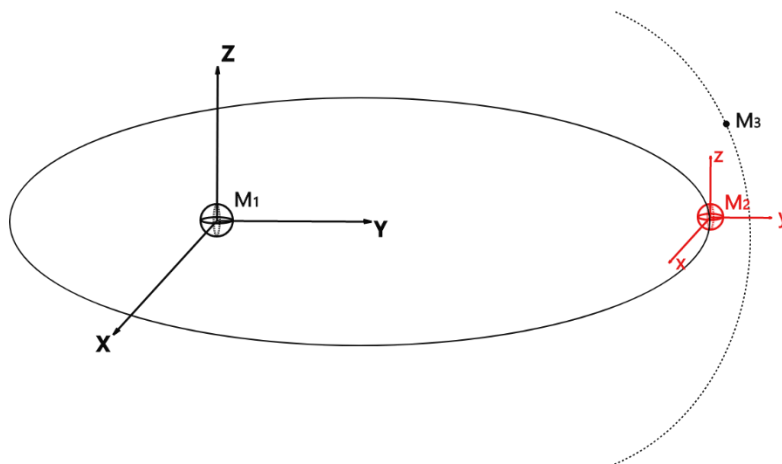
- a)  $\vec{V}_\infty^-$  e  $\vec{V}_\infty^+$  são as velocidades de  $M_3$  em relação ao sistema centrado em  $M_2$ , antes e depois da passagem por esse corpo, respectivamente;
- b)  $2\delta$  é o ângulo de curvatura, tal que  $\delta$  pode ser calculado por meio da Equação 2.1;
- c)  $\vec{V}_2$  é a velocidade de  $M_2$  em relação ao sistema centrado em  $M_1$ ;
- d)  $\psi$  é o ângulo de aproximação, medido entre a linha do periapse e o eixo  $X_{12}$ , que conecta  $M_1$  e  $M_2$ ;
- e)  $r_p$  é a distância do periapse.

Assim, para o cálculo do ângulo de deflexão, podemos usar a expressão (PRADO, 2001, citando BROUCKE, 1988):

$$\text{sen}\delta = \frac{1}{1 + \frac{r_p V_\infty^2}{\mu_2}} \quad (2.1)$$

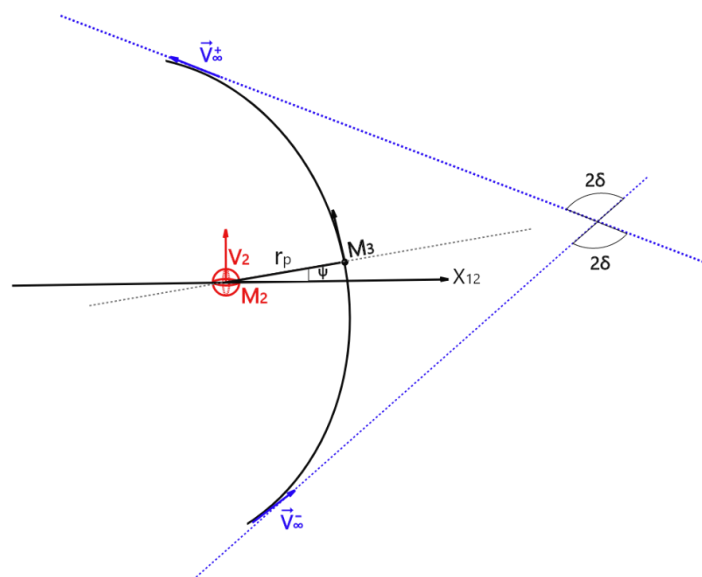
em que  $\mu_2 = GM_2$ , sendo G a constante de gravitação universal.

Figura 2.1 – Configuração dos corpos envolvidos em uma manobra assistida por gravidade.



Fonte: Produção da autora.

Figura 2.2 – Trajetória de  $M_3$  em relação ao sistema centrado no corpo  $M_2$ .



Fonte: Adaptado de Prado (2001).

As magnitudes dos vetores  $\vec{V}_\infty^+$  e  $\vec{V}_\infty^-$  são iguais, de forma que, no sistema centrado em  $M_2$ , a magnitude da velocidade da partícula, ao sair da esfera de influência de  $M_2$ , não é alterada. O vetor velocidade é alterado apenas em direção, ao ser girado de um ângulo  $2\delta$  pela força gravitacional de  $M_2$ . Porém, no sistema inercial (aquele centrado em  $M_1$ ), ocorre uma variação de velocidade ( $\Delta V$ ), tanto em direção como em magnitude, devido à mudança da direção e sentido do vetor velocidade de  $M_3$ , que pode ser determinada pela Equação 2.2.

$$\Delta V = 2V_\infty \text{sen}\delta \quad (2.2)$$

Prado (2001, citando BROUCKE, 1988), define a variação de energia, em relação ao sistema inercial, por conta dessa manobra, assim como algumas implicações decorrentes das Equações 2.2 - 2.3, apresentadas nas alíneas a seguir:

$$\Delta E = -2V_2 V_\infty \text{sen}(\delta) \text{sen}(\psi) \quad (2.3)$$

- a) Se  $0^\circ < \psi < 180^\circ$ , há um decréscimo da energia, com perda máxima em  $\psi = 90^\circ$ ;
- b) Se  $180^\circ < \psi < 360^\circ$ , há um acréscimo da energia, com ganho máximo em  $\psi = 270^\circ$ ;
- c) Quanto menor  $r_p$ , mais próximo de 1 será o valor de  $\text{sen}(\delta)$  e, portanto, maior será o valor de  $\Delta E$ .

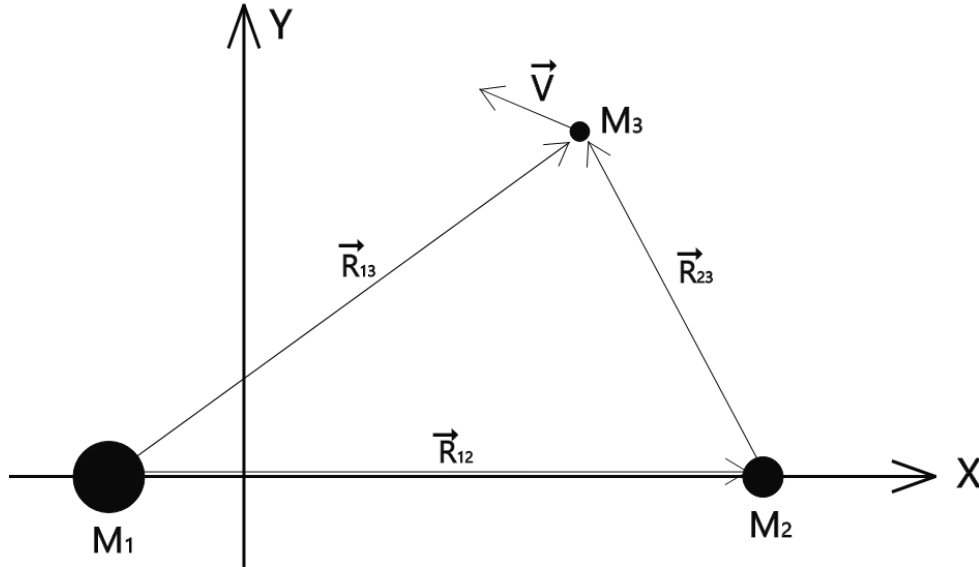
Estas grandezas, ainda que definidas para o Problema de Três Corpos, serão utilizadas para auxiliar a definir as trajetórias de escapes, com base em suas passagens pela Lua. Entretanto, como, neste trabalho, a investigação numérica é conduzida no P4C, os limites descritos nas alíneas (a) e (b) tornam-se menos bem definidos, como detalhado na Seção 4.2.2.

## 2.2 Problema Circular Restrito de Três Corpos (P3C)

Segundo Marchal (1990), para este problema, uma consideração natural a ser feita é a definição de um sistema de coordenadas rotativo, chamado sinódico

(Figura 2.3). Nele, os primários estarão fixos no eixo das abscissas e a origem do sistema estará na posição do centro de massa dos primários, nesse eixo, tal que os primários realizam um movimento circular ao redor da origem do sistema. Desta forma, as equações de movimento do corpo três serão dadas pelas Equações 2.4.

Figura 2.3 – Sistema sinódico.



Fonte: Adaptado de Marchal (1990, p. 59).

$$\ddot{x}_3 = G \left( M_1 \frac{x_1 - x_3}{r_{13}^3} + M_2 \frac{x_2 - x_3}{r_{23}^3} \right) + 2n\dot{y}_3 + n^2 x_3 \quad (2.4a)$$

$$\ddot{y}_3 = -G y_3 \left( \frac{M_1}{r_{13}^3} + \frac{M_2}{r_{23}^3} \right) - 2n\dot{x}_3 + n^2 y_3 \quad (2.4b)$$

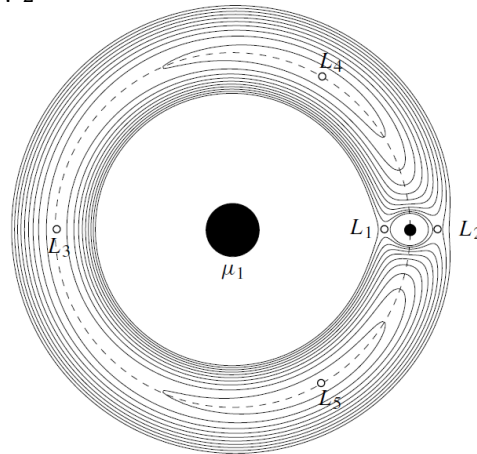
$$\ddot{z}_3 = -G z_3 \left( \frac{M_1}{r_{12}^3} + \frac{M_2}{r_{23}^3} \right) \quad (2.4c)$$

Em que  $n$  é o movimento médio comum aos primários. Outra consideração a ser feita para esse sistema é a definição de unidades de comprimento, massa e tempo. Assim, seguindo a notação adotada por Murray e Dermott (1999), temos:  $\mu_1 = M_1/(M_2 + M_3)$ ,  $\mu_2 = M_2/(M_2 + M_3)$  e  $\mu_1 + \mu_2 = 1$ , em que  $\mu_i$  são os parâmetros de massa gravitacional desses corpos; a unidade de comprimento é escolhida como a distância entre os primários ( $R_{12} = 1$ ).

### 2.2.1 Pontos de equilíbrio de Lagrange

Dentro do Problema Restrito de Três Corpos, os pontos Lagrangianos são pontos de equilíbrio, tal que se uma partícula for lá colocada, com velocidade nula, ela permanecerá em repouso indefinidamente, saindo desta condição apenas se uma força externa ao sistema agir sobre ela.

Figura 2.4 – Localização dos pontos de equilíbrio de Lagrange e curvas de velocidade zero para  $\mu_2 = 0.01$ .



Fonte: Murray e Dermott (1999).

Os pontos  $L_1, L_2$  e  $L_3$  são colineares e localizados no eixo dos primários, enquanto  $L_4$  e  $L_5$  formam triângulos equiláteros com os primários. A convenção aqui adotada, para o sistema Terra-Lua (sistema de interesse deste trabalho), será a de que o ponto  $L_1$  está entre os dois primários, o ponto  $L_2$  à direita da Lua e  $L_3$  está à esquerda da Terra, conforme mostra a Figura 2.4. As coordenadas desses pontos no sistema sinódico Terra-Lua são apresentadas na Tabela 2.1.

Tabela 2.1 – Posições dos pontos Lagrangianos para o sistema sinódico Terra-Lua.

Ponto	$x$	$y$
$L_1$	0,836915	0
$L_2$	1,155699	0
$L_3$	-1,005064	0
$L_4$	0,4878495	0,8660254
$L_5$	0,4878495	-0,8660254

Fonte: Prado (2001, p. 40).



### 2.2.2 Órbitas periódicas da família G

Em seus trabalhos, Henry Poincaré demonstra que, para um dado conjunto de condições iniciais, os três corpos do P3C executam um movimento periódico, que pode ser calculado com base nas equações diferenciais que descrevem o problema, mas uma pequena mudança nessas condições iniciais resultaria em um movimento completamente diferente, caótico até, que não poderia ser previsto pelas equações diferenciais do movimento (SZEBEHELY; MARK, 1998). Entretanto, a existência dessas órbitas periódicas se mostrou como uma abertura no “inacessível problema de três corpos” (SZEBEHELY; GREBENIKOV, 1969).

Nos 300 anos transcorridos desde a formulação do problema de três corpos, diversos trabalhos tiveram como foco a determinação de famílias de órbitas periódicas, das quais podemos destacar as famílias de Lagrange-Euler, Broucke-Hénon e a família Figure-8, tal que ainda hoje a descoberta de novas famílias de órbitas periódicas se mostra como uma investigação relevante (CARTWRIGHT, 2013). Desta forma, este trabalho tomou como base os conjuntos de órbitas periódicas estudadas por Broucke, mais especificamente a família G, apresentada em seu trabalho de 1968, como ponto de partida para a investigação numérica de trajetórias alternativas de escape do sistema Terra-Lua.

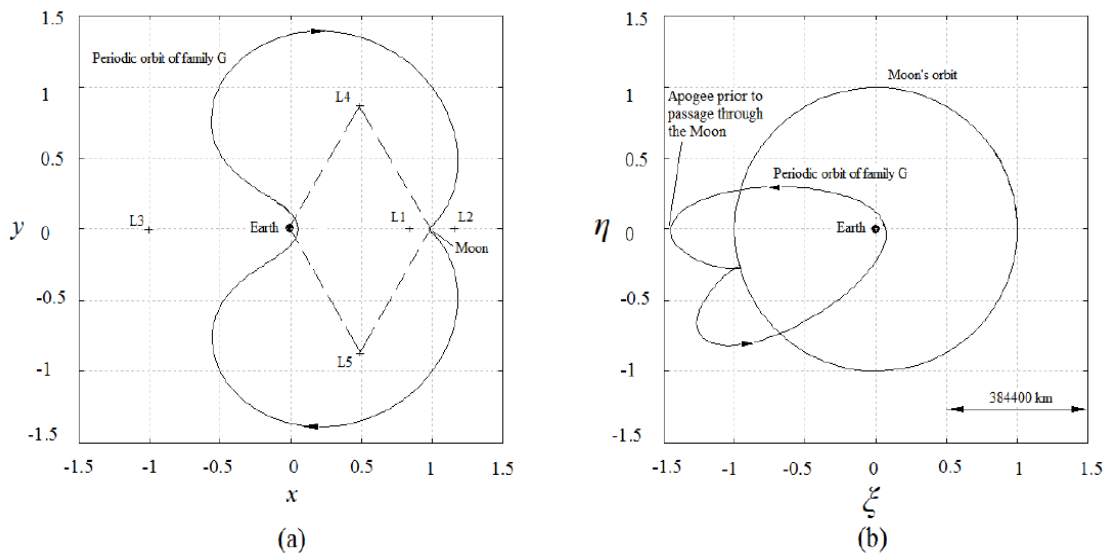
Broucke (1968) conduziu uma investigação numérica de órbitas periódicas simétricas para o problema restrito de três corpos plano, para sistemas com razões de massa equivalentes ao sistema Terra-Lua. As órbitas da família G, identificadas nesse estudo de Broucke (1968), por sua vez, são órbitas periódicas, retrógradas, em torno do ponto  $L_1$ , como a apresentada na Figura 2.5.

As órbitas da família G podem ser definidas por meio do conjunto de condições iniciais (no sistema sinódico) apresentadas na Equação 2.5, em que  $-0,012169617 < x_0 < 0,813471672$  e  $-9,389476096 < \dot{y}_0 < 601,045380978$ , segundo Broucke (1968).

$$(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0) = (x_0, 0, 0, 0, \dot{y}_0, 0) \quad (2.5)$$

Este conjunto de órbitas possuem características peculiares, tais como uma grande sensibilidade a perturbações e proximidade às superfícies da Terra e da Lua, com a formação de um elo natural entre estes dois corpos. Estas características foram exploradas a fim de promover as trajetórias alternativas de escape investigadas neste trabalho e em seus precursores (DE MELO, 2007; DE MELO, 2009; SALAZAR, 2012).

Figura 2.5 – Representação de órbitas periódicas da família G.



Representação de órbitas periódicas da família G e pontos Lagrangianos no sistema Terra-Lua. (a) No sistema sinódico. (b) No sistema geocêntrico. Fonte: Melo et al. (2009).

O caminho natural associado às órbitas periódicas da família G, foi utilizado como ponto de partida para diversas análises e empregado de diversas formas. Por exemplo, de Melo (2007) utilizou-as na investigação numérica da transferência de uma sonda em órbita circular terrestre para uma órbita de estacionamento lunar, também circular, de alta inclinação. Para isso, dentro do PCR4C, mapeou as velocidades de inserção ( $V_I$ , Equação 2.6) para que a sonda, inicialmente em uma órbita terrestre de altitude  $H_T$ , em que  $200 \text{ km} < H_T < 60000 \text{ km}$ , somente em conjunção inferior (Terra, sonda e Lua alinhados sobre o eixo x do sistema, nessa ordem), fosse transferida para uma órbita lunar de altitude  $H_L$ , em que  $0 < H_L < 20000 \text{ km}$ , via órbitas periódicas da família G.

$$V_I = V_C + \frac{V_C}{2} (-2.334 \times 10^{-6} H_T + 0,8085 \pm 0,0001) + \eta + \vartheta \quad (2.6)$$

Na Equação 2.6,  $V_C$  é a velocidade da órbita circular terrestre inicial,  $\eta$  é um incremento de velocidade, para consideração da excentricidade da órbita da Lua e posicionamento relativo do Sol, Terra e Lua, enquanto  $\vartheta$  é o elemento que determina  $H_L$  e do posicionamento do periselênio. Observou-se que apesar dos valores para  $\eta$  e  $\vartheta$  serem relativamente pequenos, quando comparados com os valores de  $V_I$ , eles podem causar diferenças significativas nos valores de  $H_L$ , especialmente  $\vartheta$ , demonstrando o quão sensível é o comportamento destas trajetórias a pequenas variações de  $V_I$ .

Em conclusão, de Melo (2007) identificou não somente reduções de custo (analisadas pela diminuição dos  $\Delta V$ s totais necessários) para transferências para órbitas lunares de alta inclinação, como também trajetórias de escape do sistema Terra-Lua para  $1,5 \times 10^{-4} \text{ km/s} < \vartheta < 5,5 \times 10^{-4} \text{ km/s}$ .

Em trabalho subsequente, de Melo (2009), agora focando nestas trajetórias de escape, utilizou-as para o planejamento de missões para os NEAs 99942 Apophis, 1994 WR12 e 2007 UW1, todos da classe Atenas. Ainda dentro do P4C, o objetivo deste trabalho foi a investigação do ganho de energia provido pelo *swing-by* com a Lua que garantiu o incremento de velocidade necessário para a saída do sistema Terra-Lua e aproximação às órbitas dos NEAs em questão. O observado foi que, ainda que estas não sejam trajetórias ótimas, as trajetórias de escape se mostraram como uma alternativa para redução do  $\Delta V$  (de 2% a 4%) para transferências para NEAs, em comparação a uma transferência via *patched-conics*.

Salazar (2012), considerando o Problema Restrito de Três Corpos, estudou outra aplicação para essas mesmas trajetórias de escape, agora para a transferência de veículos espaciais para os pontos de equilíbrio Lagrangianos  $L_4$  e  $L_5$ . Conduzindo uma investigação numérica destas trajetórias, identificou a geometria do *swing-by* que condicionava missões mais propícias à  $L_4$  ou  $L_5$ , além das variações de energia ( $\Delta E$ ) relativas a essas passagens pela Lua. Assim, como nos trabalhos supracitados, Salazar (2012) identificou reduções de custo

por conta da utilização dessas trajetórias de escape, em relação à manobra de Hohmann, além da possibilidade de alteração de destino de  $L_4$  para  $L_5$  por meio de manobras de meio caminho.

Portanto, em comparação aos anteriores, o presente trabalho apresenta uma ampliação na abordagem dedicada às trajetórias de escape. Como descrito na Seção 3.1, diferentes configurações iniciais para as órbitas terrestres foram consideradas, além de se fazer tal estudo fora do problema plano, pela consideração da inclinação do plano da órbita da Lua. Além disso, como detalhado na Seção 4.1, fez-se a identificação de diferentes parâmetros que influenciam as velocidades de inserção, além da altitude da órbita inicial. Por fim, uma extensiva investigação numérica foi conduzida para identificar os máximos alcances atingidos via trajetórias de escape para o planejamento de missões para NEAs de diferentes classes.

### 2.3 Problema Circular Restrito de Quatro Corpos (P4C)

O P4C pode ser enunciado como: conhecidas as posições e velocidades de quatro corpos que compõem um sistema, em um dado instante, tal que um deles possui massa muito menor do que os demais e que as únicas forças atuando no sistema sejam aquelas de natureza gravitacional, deseja-se calcular a posição e a velocidade destes corpos em um instante futuro.

Assim, a equação de movimento do  $i$ -ésimo corpo em um sistema de coordenadas cartesianas  $(X, Y, Z)$  com origem fixa em um ponto qualquer do espaço é dada pela Equação 2.6.

$$\ddot{\vec{R}}_i = \sum_{j=1, j \neq i}^4 \frac{\mu_j}{R_{ji}^3} (\vec{R}_j - \vec{R}_i) \quad (2.6)$$

Em que  $\vec{R}_i = (X, Y, Z)$  é a posição do  $i$ -ésimo corpo neste sistema,  $R_{ij} = |\vec{R}_j - \vec{R}_i| = \left[ (X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2 + (Z_j - Z_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$ , com  $j \neq i$ , são as distâncias entre o  $i$ -ésimo e o  $j$ -ésimo corpos e  $\ddot{\vec{R}}_i$  é a aceleração do  $i$ -ésimo corpo.

A mesma normalização adotada para o P3C, também adotada na literatura dessa teoria, será considerada para o P4C.

### 3 METODOLOGIA

Neste capítulo, são apresentados os métodos utilizados no desenvolvimento do trabalho. Na Seção 3.1, apresenta-se a metodologia para identificação e caracterização das trajetórias em estudo, na Seção 3.2, a metodologia para determinação do alcance destas trajetórias e, por fim, na Seção 3.3, a metodologia para aplicação destas trajetórias em missões para os NEAs 99942 Apophis (Atenas), 138971 (2001 CB21, Apolo), 65803 Didymos (Apolo) e 3361 Orpheus (Apolo).

Todas as simulações numéricas foram realizadas na linguagem FORTRAN.

#### 3.1 Para a caracterização das trajetórias

Para o P4C3D, adotou-se a normalização das distâncias para o sistema Terra-Lua, tal que a distância de 384400 km, entre os primários, é a unidade de comprimento e o período orbital da Lua, de 27,1366 dias, é tomado como  $2\pi$ . Na notação utilizada neste trabalho, o índice 1 corresponde ao Sol, 2 à Terra, 3 à Lua e 4 a uma espaçonave. Assim a normalização das massas dá-se por:  $\mu_1 = m_1/(m_2 + m_3)$ ,  $\mu_2 = m_2/(m_2 + m_3)$ ,  $\mu_3 = m_3/(m_2 + m_3)$  e  $\mu_4 = m_4/(m_2 + m_3)$  e  $\mu_2 + \mu_3 = 1$ , seguindo a notação adotada para o P3C, em que  $\mu_i$  são os parâmetros de massa gravitacional desses corpos.

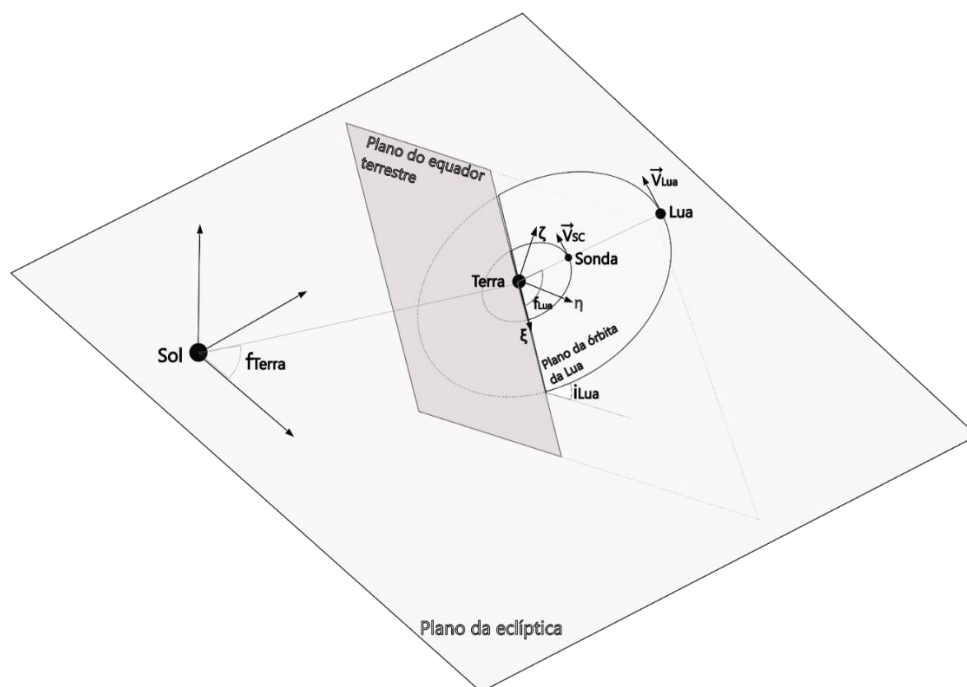
Desta forma, em uma sonda inicialmente em uma órbita baixa da Terra (com altitude  $h$  pertencente ao conjunto {200 km, 500 km, 700 km, 1000 km}), aplicou-se um impulso inicial, tal que ela fosse inserida em uma trajetória derivada das órbitas periódicas da família G, tomando como base as velocidades destas órbitas estabelecidas no P3C (DE MELO, 2007). Na Figura 3.1, representa-se um posicionamento genérico dos quatro corpos no momento da inserção da sonda nesta nova trajetória, com a indicação dos parâmetros considerados na análise.

A princípio, a configuração inicial dos corpos é aquela em que todas as variáveis consideradas - a anomalia verdadeira da Terra, em relação ao Sol, ( $f_{Terra}$ ), a ascensão reta do nodo ascendente da Lua ( $\Omega_{Lua}$ ), a anomalia verdadeira da Lua, em relação à Terra, ( $f_{Lua}$ ) - tem valores iguais a zero, de forma a adequar o

problema estudado ao descrito no trabalho de Broucke (1968). Além disso, Terra, sonda e Lua encontram-se alinhadas nesta ordem, tal que a anomalia verdadeira da sonda,  $f_{sonda}$ , seja sempre igual a  $f_{Lua}$  no momento de sua inserção. Ainda, a sonda se encontra no mesmo plano da Lua, de forma que ambas possuem uma inclinação de  $i_{Lua} = 28,56^\circ$ , correspondente ao valor máximo da inclinação do plano da órbita da Lua em relação ao equador terrestre ( $18,32^\circ \leq i_{Lua} \leq 28,56^\circ$ ).

O valor adotado para a inclinação é em decorrência das datas de lançamento escolhidas para a seção de aplicações deste trabalho (Capítulo 4), que ocorrem após o ano de 2025, período em que a inclinação atingirá seu valor máximo. Assim, em resumo, o caso básico estudado é aquele em que para  $t_0 = 0$ ,  $i_{Lua} = 28,56^\circ$ ,  $\Omega_{Terra} = f_{Terra} = \Omega_{Lua} = f_{Lua} = 0$ . Porém, os métodos e simulações empregados se estendem a quaisquer conjuntos de condições iniciais arbitrados.

Figura 3.1 – Configuração dos quatro corpos no instante  $t_0$ .



Fonte: Produção da autora.

Nesta configuração, o impulso inicial aplicado é dado de forma que a sonda seja lançada em direção à Lua com uma velocidade inicial tangencial,  $V_{sc}$ , à órbita

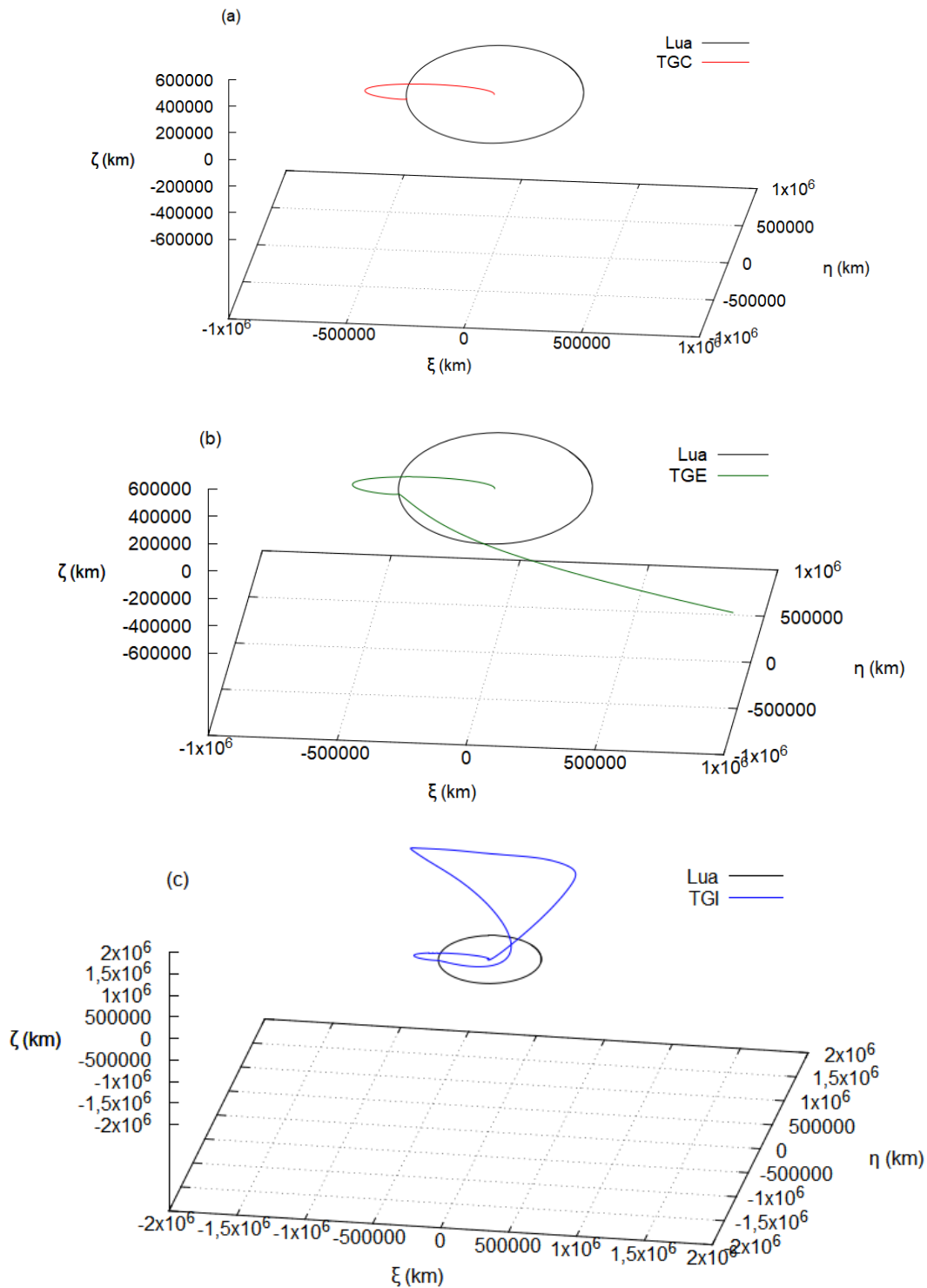
de estacionamento que, por sua vez, sofre acréscimos, ou decréscimos, gradativos, em passos de  $10^{-6}$  km/s. Com o aumento gradativo da velocidade de lançamento, observa-se a mudança de comportamento das trajetórias, tal que três tipos de trajetórias de interesse foram encontradas: as trajetórias de colisão com a Lua (TGC), as trajetórias que escapam do sistema Terra-Lua (TGE) e as trajetórias de inversão de escape (TGI) que, a princípio, não escapam desse sistema (Figura 3.2).

O objetivo desta etapa, de aumento gradual das velocidades, é a determinação de curvas para  $V_{SC}$  que sejam características para cada um dos tipos de trajetórias citadas anteriormente. Essas curvas, por sua vez, serão determinadas apenas numericamente, dada a quantidade de variáveis que as influenciam, tornando o processo de obtenção de uma equação analítica que as definam muito complexo. Desta forma, a Seção 4.1 é dedicada exclusivamente à análise da influência destas variáveis no comportamento das curvas de velocidade das trajetórias em estudo.

Para avaliar a influência destas variáveis no comportamento das TGs, repetiu-se o processo descrito até o momento, com todas as variáveis consideradas nulas, agora com a variação da anomalia verdadeira da Lua, em relação à Terra, tal que  $0^\circ \leq f_{Lua} \leq 360^\circ$ , com passo de  $5^\circ$ . Simultaneamente, fez-se a variação de  $f_{Terra}$ , uma vez que para cada variação de  $1^\circ$  de  $f_{Lua}$  há uma variação equivalente de  $f_{Terra}$  de aproximadamente  $0,074^\circ$ , tendo em vista a dinâmica do movimento destes corpos em suas respectivas órbitas. Além disso, diferentes valores iniciais para  $\Omega_{Lua}$  foram avaliados em combinação à variação das anomalias verdadeiras, como apresentado na Seção 4.1.

Ainda, do lançamento da Terra à passagem pela Lua, as três trajetórias possuem geometrias muito semelhantes, portanto, para diferenciá-las, fez-se o estudo da evolução de certas grandezas entre instantes específicos das trajetórias: do lançamento ( $t_0$ ) até a entrada na esfera de influência da Lua ( $t_1$ ); de  $t_1$  até a saída da esfera de influência da Lua ( $t_2$ ); após a saída da esfera de influência da Lua (após  $t_2$ ). Tais estudos são apresentados na forma de gráficos na Seção 4.2.

Figura 3.2 – Representação das trajetórias derivadas de órbitas periódicas da família G.



Exemplos de TGs para  $h = 200$  km,  $f_{Terra} = f_{Lúa} = \Omega_{Lúa} = 0$ . (a) TGC, para  $V_{SC} = 10,931975$  km/s. (b) TGE, para  $V_{SC} = 10,932280$  km/s. (c) TGI, para  $V_{SC} = 10,932623$  km/s.

Fonte: Produção da autora.



### 3.2 Para a determinação do alcance das trajetórias

Com as curvas de velocidade características das TGEs determinadas, conforme descrito na Seção 3.1, considerando o PC43D, fez-se a integração numérica de todas as trajetórias que tivessem  $V_{SC}$  entre a primeira e a última TGE em passos de  $10^{-6}$  km/s, por um tempo médio de 1000 dias, à princípio para a configuração inicial dos corpos em que  $h = 200$  km,  $\Omega_{Lua} = \omega_{Lua} = 0$  e  $\Omega_{Terra} = \omega_{Terra} = 0$ ,  $0 \leq f_{Lua} \leq 360^\circ$  e  $0 \leq f_{Terra} \leq 26,64^\circ$ , uma vez que enquanto  $f_{Lua}$  varia  $360^\circ$ ,  $f_{Terra}$  varia  $0,074^\circ \times 360$ . Para cada uma dessas trajetórias de escape, após a sua estabilização em uma trajetória heliocêntrica, fez-se o registro do raio de afélio e periélio da órbita. Ou seja, para cada uma das condições iniciais de posicionamento Terra-Lua-sonda, cerca de 300 a 500 trajetórias foram integradas, a fim de se determinar as máximas distâncias atingidas em função de  $f_{Lua}$ .

Assim, chamou-se de máximo alcance o maior afélio alcançado por uma TGE entre as órbitas da Terra e de Marte e o menor periélio alcançado por uma TGE entre as órbitas da Terra e Vênus. O mesmo procedimento foi repetido para diferentes combinações das condições iniciais, avaliando diferentes valores de  $\Omega_{Lua}$ ,  $f_{Lua}$  e  $f_{Terra}$ .

### 3.3 Para aplicação de transferências Terra-NEA utilizando TGEs

Um protocolo, considerando os métodos até agora descritos, foi desenvolvido para aplicar TGEs em missões para as diferentes classes de NEAs, tal que, neste trabalho, os NEAs 99942 Apophis (Atenas), 138971 (2001 CB21, Apolo), 65803 Didymos (Apolo) e 3361 Orpheus (Apolo) foram selecionados para exemplificação, conforme descrito a seguir:

- a) Considerando os máximos alcances determinados para o P4C3D, definir duas órbitas heliocêntricas circulares que possuam raio igual a estes alcances;
- b) Utilizando a plataforma HORIZONS do JPL, obter o vetor de estado dos NEAs para o período de 01/01/2025 a 31/12/2050 e identificar as datas em que o NEA cruza as órbitas definidas em (a);

- c) Fazer um estudo para definir uma região e período de lançamento considerando os resultados dos passos anteriores;
- d) Utilizando a plataforma HORIZONS do JPL, obter as efemérides dos corpos para a janela de lançamento definida em (c) e utilizá-las como condições iniciais para obter as curvas de velocidade, conforme descrito na Seção 3.1, com a diferença de que não mais considerando apenas o P4C3D, mas as condições reais de posição e velocidade dos corpos;
- e) Verificar os alcances máximos e mínimos para a janela de lançamento definida em (c), conforme descrito na Seção 3.2, também utilizando as efemérides retiradas da plataforma HORIZONS;
- f) Ainda utilizando as efemérides retiradas da plataforma HORIZONS, integrar sucessivas trajetórias que tivessem  $V_{SC}$  entre a primeira e a última TGE, de acordo com as curvas de velocidade determinadas em (d);
- g) Analisar as soluções obtidas em termos de tempo de transferência e  $\Delta V$ s, comparando-as com o método de Lambert.

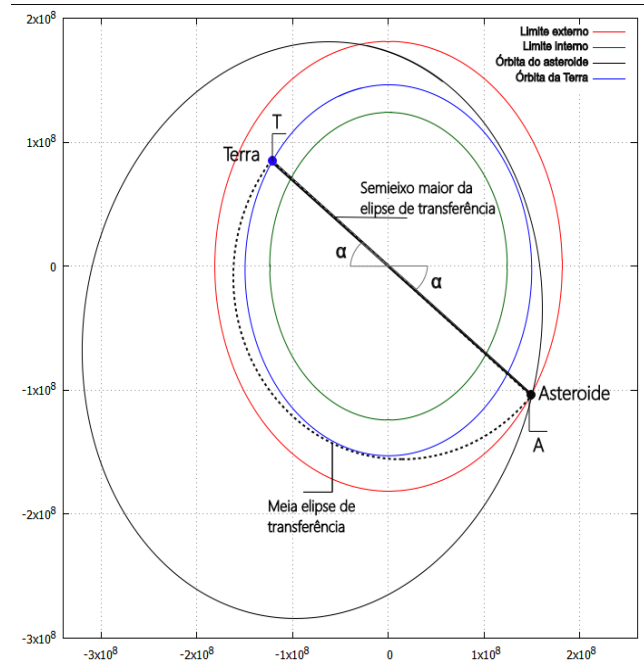
O estudo citado em (c) consiste na identificação de um período em que a Terra se encontre em uma região ideal para o lançamento da sonda, de forma a estabelecer uma elipse de transferência entre essa posição e a do asteroide, quando ele cruza o limite inferior ou superior do alcance das TGEs, conforme esquematizado na Figura 3.3.

Na Figura 3.3, a posição T seria a posição ideal da Terra no periélio (ou afélio) da elipse de transferência que tem afélio (ou periélio) na posição A, na qual o asteroide cruza o limite do alcance das TGs.

Considerando que todas as condições ideais fossem atendidas (a Terra de fato se encontra em T na data estipulada, a configuração dos corpos Terra-Lua-sonda nesse instante é a que favorece o maior alcance da sonda e o asteroide

de fato se encontra em A na data estipulada), a sonda sairia da Terra e em 214 dias interceptaria o asteroide.

Figura 3.3 – Esquemática da identificação das janelas de lançamento.



Fonte: Produção da autora.

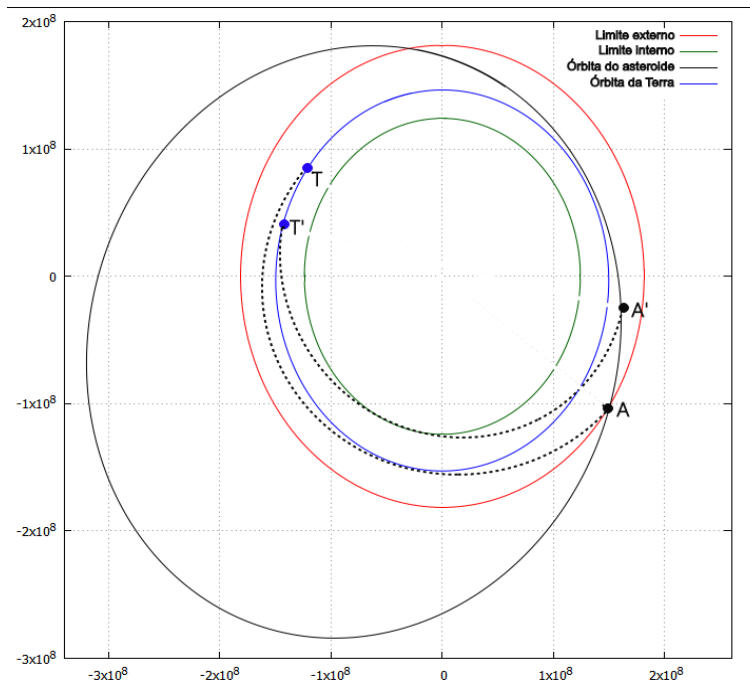
Este tempo de transferência foi calculado com base nos alcances máximos que podem ser atingidos por um veículo espacial em uma TGE, apresentados na Seção 4.3. Para isso, calculou-se o semi-eixo maior da elipse de transferência como  $a = (R_{Terra} + R_{max})/2$ , em que  $R_{Terra}$  é o raio médio da órbita da Terra e  $R_{max}$  o máximo alcance, interno ou externo, atingido pelo veículo. Para  $R_{max,ext} = 1,21$  a.u. e  $R_{max,int} = 0,83$  a.u., tem-se semi-eixos maior  $a_{ext} = 1,11$  a.u. e  $a_{int} = 0,97$  a.u., respectivamente, cujas órbitas possuem períodos de 428 dias e 316 dias, respectivamente.

Porém, como será discutido na Seção 4.3, tais condições ideais possuem dinâmicas complexas, que em condições reais possuem pouca probabilidade de ocorrerem. Assim, com os dados obtidos da plataforma HORIZONS, identificou-se em quais datas o asteroide se encontra na posição A e qual sua posição angular neste momento. Para cada uma destas datas, foi verificado se a Terra estaria na posição T, não somente 214 dias antes, para o caso de uma transferência para uma órbita externa, como a esquematizada na Figura 3.3, ou 158 dias antes, para o caso de uma transferência para uma órbita interna, mas

214 ± 27 dias e 158 ± 27 dias, respectivamente, transformando o ponto T, na verdade, em uma região ideal para o lançamento da sonda. Os 27 dias adicionais correspondem a um período lunar, acrescido para aumentar a probabilidade de se encontrar uma das condições ideais discutidas na Seção 4.3.

A Figura 3.4 ilustra o seguinte raciocínio: supondo que a condição ideal do posicionamento relativo entre Terra-Lua-sonda aconteça no tempo  $t_0$ , quando a Terra se encontra em T, a sonda terá seu alcance máximo e atingirá o asteroide em A. Caso essa configuração não seja possível, a sonda não terá um máximo alcance e, portanto não atingirá o asteroide em A, mas poderá atingi-lo em algum ponto de sua trajetória entre os limites superior e inferior das TGEs, as órbitas em vermelho e verde, respectivamente. Ainda, se adiarmos  $t_0$ , alterando a posição de T para um ponto à frente na órbita da Terra, outras possibilidades de interceptação entre sonda e asteroide surgem entre os limites superior e inferior das TGEs, ainda que a condição ideal para o máximo alcance não seja satisfeita.

Figura 3.4 – Esquemática da identificação da região de lançamento.

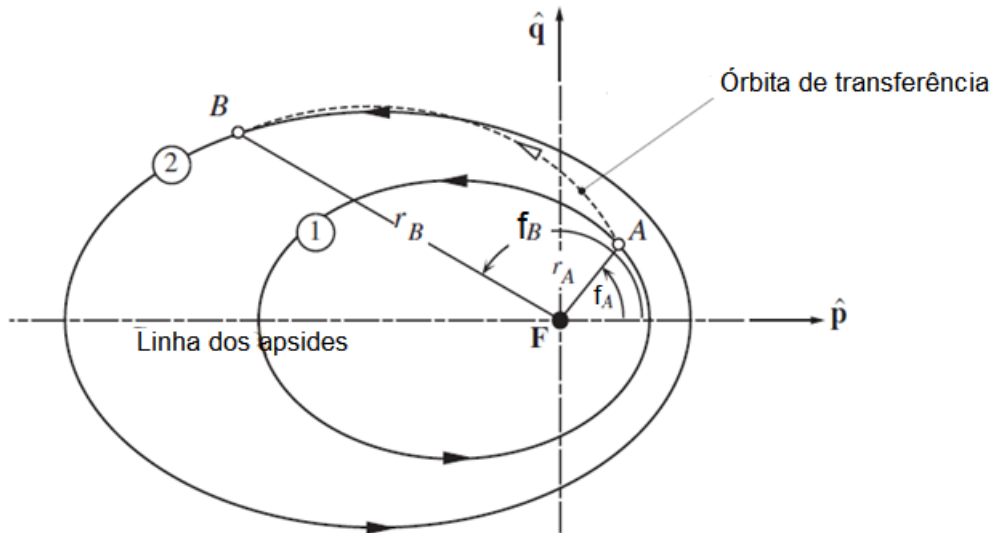


Fonte: Produção da autora.

Para concluir o estudo da transferência e completar a análise dos impulsos necessários para garantir o encontro entre o veículo espacial e o asteroide, manobras de meio de caminho foram consideradas. As correções são aplicadas

no apogeu da trajetória de transferência, seguindo os métodos de uma manobra não Hohmann com coincidência da linha dos apsides (CURTIS, 2013), conforme esquema da Figura 3.5.

Figura 3.5 – Esquematização da manobra de correção de meio de caminho.



Fonte: Traduzido de Curtis (2013).

Nela,  $f_A$  e  $f_B$  são as anomalias no ponto de partida A (apogeu da trajetória de transferência) e chegada B (ponto de colisão na órbita do asteroide), respectivamente, que são conhecidos, assim como  $r_A$  e  $r_B$ , as posições nos pontos A e B, respectivamente, e a distância a ser corrigida para impacto. Duas hipóteses foram adotadas, de forma que um intervalo de velocidades para correção seja obtido, a de que o veículo se aproxima numa órbita interior ou exterior à órbita do asteroide.



## 4 RESULTADOS

Nesta seção são apresentados os resultados obtidos neste trabalho. Na Seção 4.1, apresenta-se as curvas de velocidades características dos diferentes tipos de TGs analisados. Na Seção 4.2, a análise da variação de parâmetros orbitais para cada tipo de TG. Na Seção 4.3, os máximos alcances atingidos por veículos em TGEs e, na Seção 4.4, aplicações para NEAs.

### 4.1 Caracterização das curvas de velocidade para o P4C3D

Diferentes condições iniciais para o momento da inserção do veículo espacial nas TGs foram consideradas para a determinação de suas curvas de velocidades, conforme procedimento descrito na Seção 3.1.

Primeiramente, considerando  $\Omega_{Lua} = f_{Lua} = 0$  e  $f_{Terra} = 0$ , em  $t = 0$  determinou-se a velocidade que causava o primeiro e último impacto do veículo com a Lua, ou seja, as velocidades para primeira e última TGC, o primeiro e o último escape do sistema Terra-Lua (primeira e última TGE) e a primeira e a última das trajetórias de inversão de escape (TGI), para cada uma das altitudes iniciais consideradas. O resultado da investigação encontra-se na Tabela 4.1 e nas Figuras 4.1 e 4.2.

Tabela 4.1. Magnitude da velocidade de inserção em uma trajetória G ( $V_{sc}$ ) em km/s em função da altitude da órbita terrestre inicial.

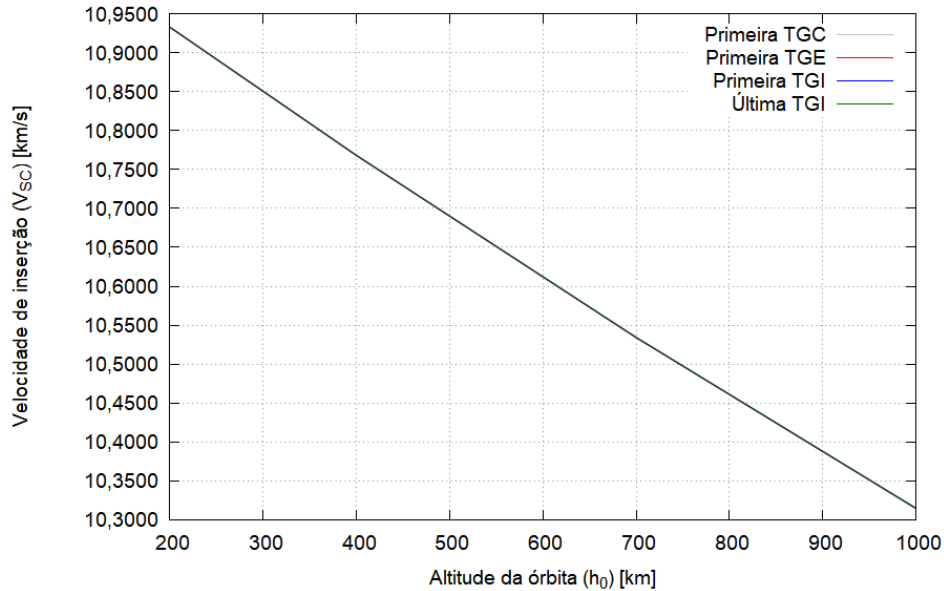
Altitude $h$ (km)	Magnitude da velocidade de inserção na trajetória G, $V_{sc}$ , em km/s					
	Primeira TGC	Última TGC	Primeira TGE	Última TGE	Primeira TGI	Última TGI
<b>200</b>	10,931975	10,932279	10,932280	10,932622	10,932623	10,932993
<b>400</b>	10,767311	10,767619	10,767620	10,767969	10,767970	10,768321
<b>700</b>	10,533489	10,533804	10,533805	10,534163	10,534164	10,534523
<b>1000</b>	10,314034	10,314355	10,314356	10,314722	10,314723	10,315091

Dados avaliados para as condições iniciais de  $\Omega_{Lua} = f_{Lua} = 0$  e  $f_{Terra} = 0$ .  
Fonte: Produção da autora.

O aumento da altitude da órbita inicial implica na diminuição aproximadamente linear de  $V_{sc}$ , observada na Figura 4.1. Porém, os intervalos de velocidades entre tipos de TGs são muito semelhantes e recorrentes para as diferentes altitudes, de forma que na Figura 4.1 apenas uma única reta é perceptível. Por exemplo, para  $h = 200$  km, entre a primeira e última TGC, tem-se um  $\delta V = 0,000304$  km/s; entre a primeira e última TGE, tem-se um  $\delta V = 0,000338$  km/s, e; entre a

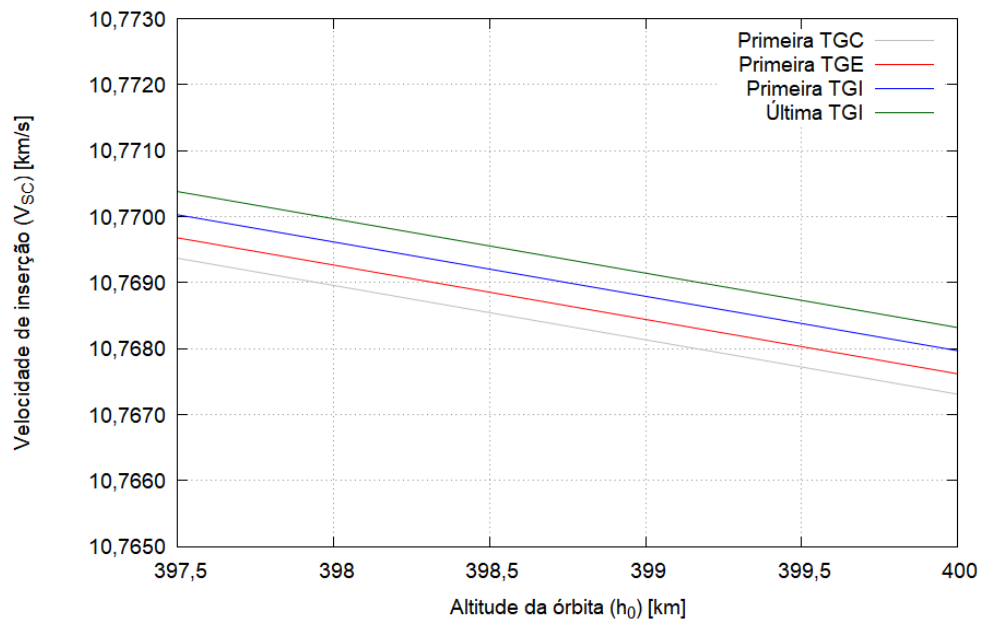
primeira e última TGI, tem-se um  $\delta V = 0,000374$  km/s. Assim, na Figura 4.2, destacou-se uma região da Figura 4.1 para evidenciar essa diferença. A mesma comparação para as demais altitudes se encontra na Tabela 4.2.

Figura 4.1. Magnitude da velocidade de inserção em uma trajetória G ( $V_{SC}$ ) em km/s em função da altitude da órbita terrestre inicial.



Fonte: Produção da autora.

Figura 4.2. Detalhe do gráfico da magnitude da velocidade de inserção em uma trajetória G ( $V_{SC}$ ) em km/s em função da altitude da órbita terrestre inicial.



Destaque do intervalo  $397 \text{ km} \leq h \leq 400 \text{ km}$  do gráfico  $V_{SC} \times h$ , para evidenciação da diferença entre as curvas.

Fonte: Produção da autora.



Tabela 4.2. Magnitude da variação de velocidade de inserção entre trajetórias G ( $\delta V$ ) em km/s em função da altitude da órbita terrestre inicial.

Altitude $h$ (km)	Magnitude da variação de velocidade de inserção entre trajetórias G ( $\delta V$ ), em km/s		
	Entre a primeira e última	Entre a primeira e última	Entre a primeira e última
	TGC	TGE	TGI
200	0,000304	0,000338	0,000374
400	0,000308	0,000349	0,000351
700	0,000315	0,000358	0,000359
1000	0,000321	0,000366	0,000368

Dados avaliados para as condições iniciais de  $\Omega_{Lua} = f_{Lua} = 0$  e  $f_{Terra} = 0$ .  
Fonte: Produção da autora.

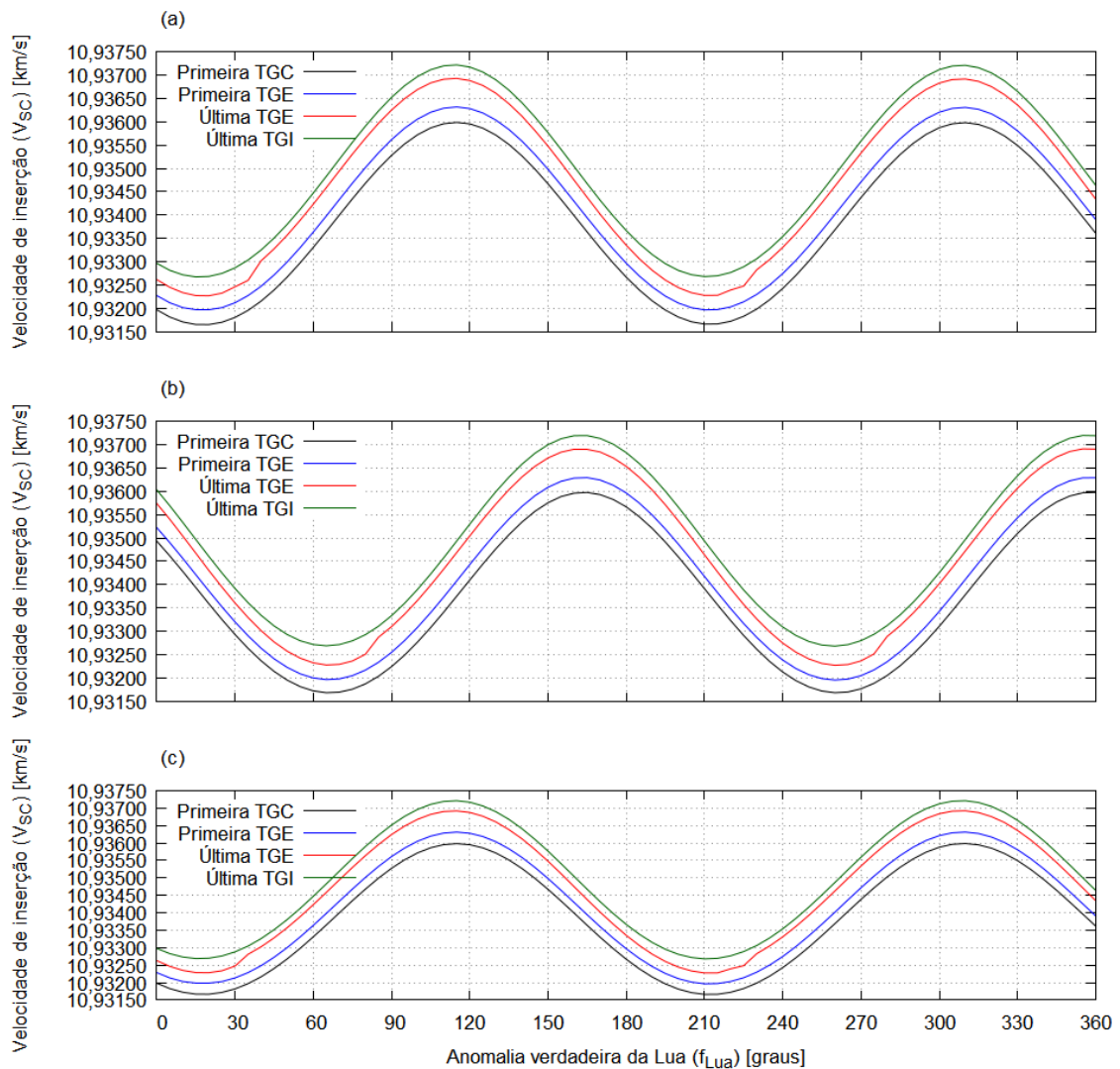
Os subsistemas de atitude e controle de órbita, assim como o de rastreamento, telemetria e comando são essenciais no projeto e ciclo de vida de missões semelhantes às propostas por este trabalho. Porém, as condições apresentadas até o momento demonstram a sensibilidade das órbitas periódicas que dão origem às TGs e a necessidade de mecanismos de controle e propulsão precisos, a fim de se manter o veículo espacial dentro da trajetória desejada, ainda que esses  $\Delta V$ s encontrados sejam da mesma ordem de grandeza de missões planejadas por outros métodos.

Em seguida, para verificar a dependência destas curvas em relação às variáveis  $\Omega_{Lua}$ ,  $f_{Lua}$  e  $f_{Terra}$ , fixou-se a altitude inicial em uma das possibilidades apresentadas na Tabela 4.1, e fez-se diversas combinações entre estas três variáveis. Desta forma, na Figura 4.3, estão representados gráficos  $V_{SC} \times f_{Lua}$  em que  $h = 200$  km,  $0 \leq f_{Lua} \leq 360^\circ$  e em  $t = 0$ ,  $f_{Terra} = 0$ . Na Figura 4.3(a), tem-se  $\Omega_{Lua} = 0$ , em 4.3(b)  $\Omega_{Lua} = 135^\circ$  e, em 4.3(c),  $\Omega_{Lua} = 180^\circ$ .

Na Figura 4.3, percebe-se que não há alteração dos limites superior e inferior de  $V_{SC}$ , tal que o limite inferior da primeira TGC é  $V_{SC} = 10,931660$  km/s, enquanto o superior, da última TGI é  $V_{SC} = 10,937213$  km/s. Porém, a variação de  $\Omega_{Lua}$  provoca uma diferença de fase entre as curvas, o que representa uma demonstração da influência desta variável na definição de inserção. Pequenas regiões de descontinuidade também podem ser observadas nas curvas da última TGE, decorrentes dos critérios estabelecidos para definir a transição entre os tipos de TG.

Uma TGI é definida como uma trajetória que não escapa, ficando presa ao sistema Terra-Lua, possuindo um segundo apogeu (o primeiro acontece durante a passagem pela Lua) com raio entre  $9 \times 10^5$  km e  $2 \times 10^6$  km em relação à Terra. Porém, esse não é um critério estrito, deixando margem para interpretação da caracterização de uma trajetória como TGI, o que leva à existência dessas regiões de descontinuidade.

Figura 4.3. Variação da magnitude da velocidade de inserção em uma trajetória G ( $V_{sc}$ ) em km/s em função da anomalia verdadeira da Lua.



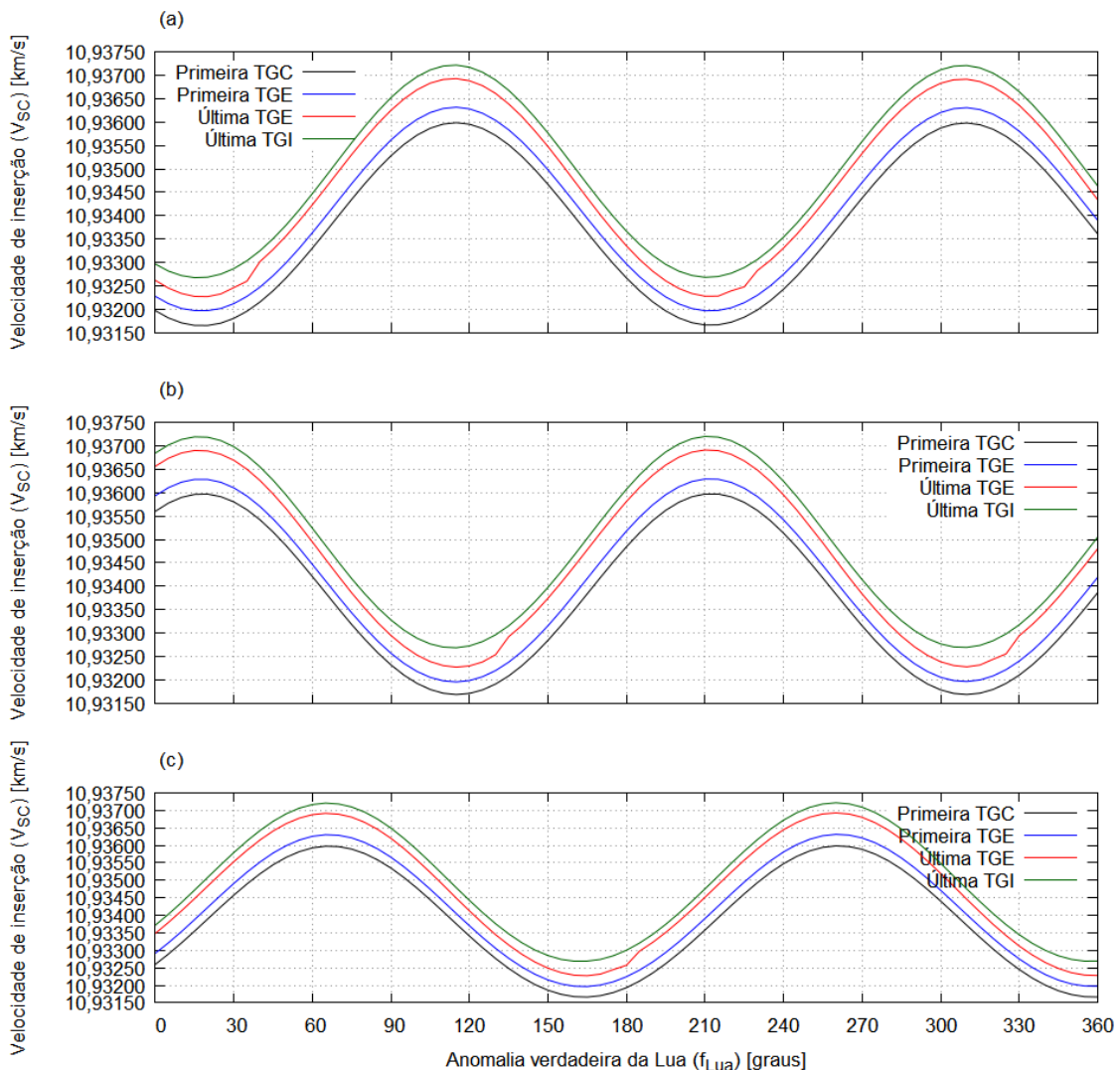
As simulações geradas para produção dos gráficos tiveram como condições iniciais  $h = 200$  km,  $0 \leq f_{Lua} \leq 360^\circ$  e  $f_{Terra} = 0$ , em  $t = 0$ . Porém, cada um possui valores de  $\Omega_{Lua}$  diferentes: (a)  $\Omega_{Lua} = 0$ , (b)  $\Omega_{Lua} = 135^\circ$  e (c)  $\Omega_{Lua} = 180^\circ$ .

Fonte: Produção da autora.

Em seguida, agora fixando  $\Omega_{Lua} = 0^\circ$ , diferentes condições iniciais para  $f_{Terra}$  foram avaliadas, tal que, em  $t = 0$ , na Figura 4.4(a),  $f_{Terra} = 0$ ; na Figura 4.4(b),  $f_{Terra} = 90^\circ$  e; na Figura 4.4(c),  $f_{Terra} = 135^\circ$ .

Novamente, não há alteração dos limites superior e inferior de  $V_{SC}$ , permanecendo em  $V_{SC} = 10,931660$  km/s e  $V_{SC} = 10,937213$  km/s, respectivamente, apenas a diferença de fase entre as curvas, desta vez demonstrando a influência da variável  $f_{Terra}$  na determinação de  $V_{SC}$ .

Figura 4.4. Variação da magnitude da velocidade de inserção em uma trajetória G ( $V_{SC}$ ) em km/s em função da anomalia verdadeira da Lua e da Terra.



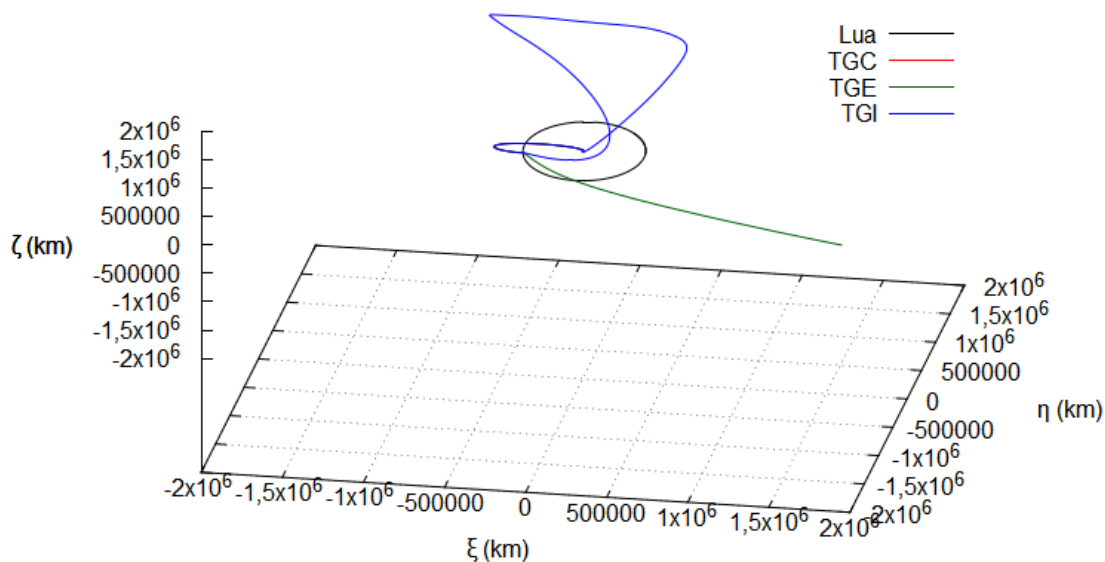
As simulações geradas para produção dos gráficos tiveram como condições iniciais  $h = 200$  km,  $0 \leq f_{Lua} \leq 360^\circ$  e  $\Omega_{Lua} = 0^\circ$ . Porém, cada um possui valores de  $f_{Terra}$  diferentes, em  $t = 0$ : (a)  $f_{Terra} = 0$ ; (b)  $f_{Terra} = 90^\circ$  e; (c)  $f_{Terra} = 135^\circ$ .

Fonte: Produção da autora.

## 4.2 Evolução dos elementos orbitais das TGs

Na Figura 4.5, encontram-se representados simultaneamente exemplos dos três tipos de TGs aqui estudados. Percebe-se que até sua passagem pela Lua, os tipos de trajetórias são muito similares entre si e, como visto na Tabela 4.2, a magnitude da variação da velocidade de inserção é muito pequena entre trajetórias, de forma que, se fosse considerada apenas a definição destas trajetórias via  $V_{SC}$ , um sistema propulsivo preciso seria necessário para colocar um veículo espacial em uma destas determinadas TGs, reforçando que essa precisão também é requerida para missões espaciais semelhantes, com  $\Delta V$ 's na mesma ordem de grandeza.

Figura 4.5. Exemplos de diferentes tipos de TGs, para o sistema centrado na Terra.



Exemplos de TGs para  $h = 200 \text{ km}$ ,  $f_{Terra} = f_{Lua} = \Omega_{Lua} = 0$ . TGC para  $V_{SC} = 10,931975 \text{ km/s}$ . TGE para  $V_{SC} = 10,932280 \text{ km/s}$ . (c) TGI, para  $V_{SC} = 10,932622 \text{ km/s}$ .  
Fonte: Produção da autora.

Visto que veículos espaciais são compostos por mecanismos de navegação, que monitoram e transmitem o vetor de estado deste veículo para estações de controle e estes vetores podem ser convertidos em elementos orbitais, esta seção é dedicada à análise da evolução temporal dos elementos orbitais das TGs em momentos distintos do percurso, de forma que parâmetros de controle, para manutenção da trajetória, sejam definidos.

O acompanhamento desta evolução temporal dos elementos orbitais pode ser feito partindo de diferentes sistemas de referência, porém como discutido nas Subseções 4.2.1 a 4.2.3, para cada intervalo de tempo, a análise, para fins de controle, torna-se mais conveniente em um determinado sistema, que será colocado em destaque.

Assim, na Subseção 4.2.1, há a análise entre o momento do lançamento ( $t_0$ ) e a entrada na esfera de influência gravitacional da Lua ( $t_1$ ), com referencial na Terra; na Subseção 4.2.2, entre a entrada e saída da esfera de influência gravitacional da Lua ( $t_2$ ), com referencial na Lua; e, por fim, na Subseção 4.2.3, após a saída da esfera de influência da Lua (após  $t_2$ ), com referencial no Sol.

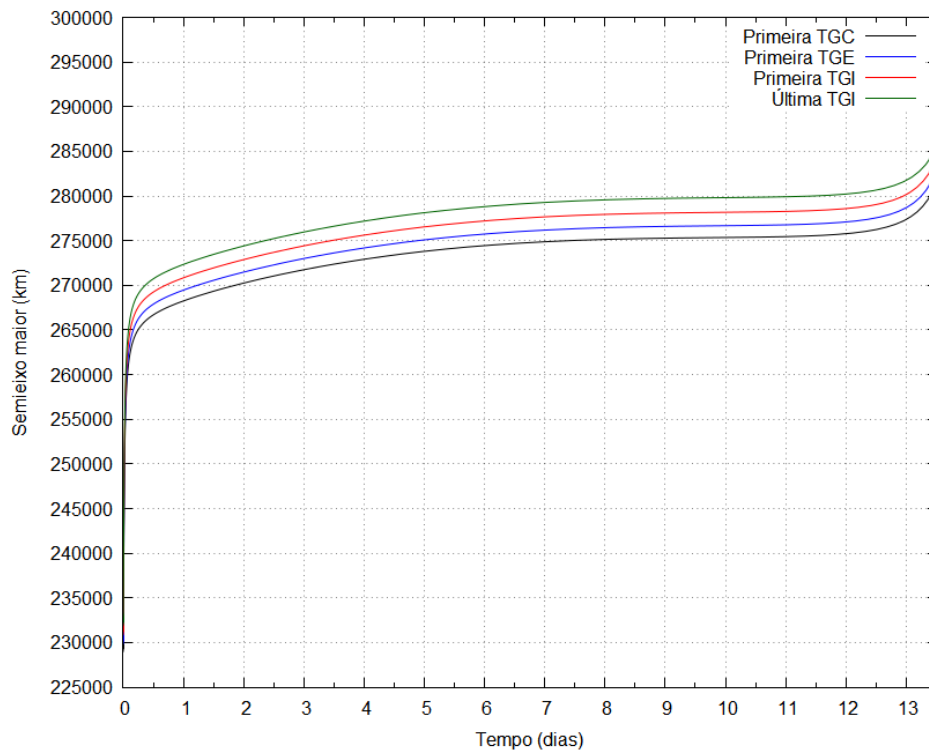
#### **4.2.1 Entre o lançamento e a entrada na esfera de influência gravitacional da Lua**

Tomando o momento do lançamento como  $t_0 = 0$  e a entrada na esfera de influência da Lua (que possui raio aproximado de 66200 km) como  $t_1 = 13,5$  dias, a evolução temporal da excentricidade, semieixo maior e da energia específica da trajetória neste intervalo de tempo, relativas ao sistema geocêntrico, de TGs com  $h = 200$  km,  $f_{Lua} = \Omega_{Lua} = 0$  e  $f_{Terra} = 0$ , são apresentadas nas Figuras 4.6, 4.7 e 4.8, respectivamente, ressaltando que o valor de  $t_1$  (e  $t_2$ , na próxima seção) foi determinado numericamente, pela análise das simulações. Em média, a sonda atingia a distância de 66200 km da Lua em 13,5 dias.

Em relação à excentricidade, percebe-se dois pontos de inflexão nas curvas. O primeiro logo após o lançamento, em  $t = 1$  dia, e o segundo em  $t = 12$  dias, próximo ao momento em que o veículo entra na região da esfera de influência gravitacional da Lua, como destacado na Figura 4.9. Neste segundo ponto, há também uma inversão da magnitude das excentricidades das TGs, de forma que as TGCs possuirão excentricidades próximas a um, conforme observado na Figura 4.9.

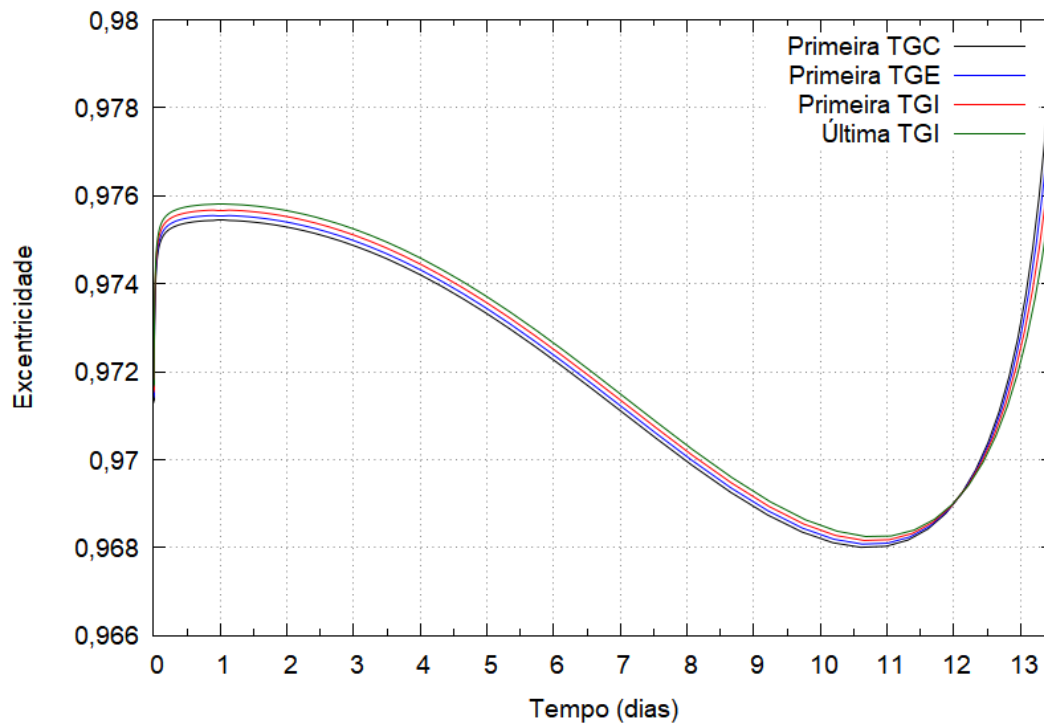
Além disso, as Figuras 4.6 – 4.8, apresentam um padrão bem definido para os parâmetros nelas representadas, com intervalos mais amplos do que os observados entre as curvas de velocidade da Seção 4.1.

Figura 4.6. Evolução do semieixo maior das TGs no intervalo  $t_0 - t_1$ .



Para as condições iniciais  $h = 200 \text{ km}$ ,  $f_{Terra} = f_{Lua} = \Omega_{Lua} = 0$ .  
 Fonte: Produção da autora.

Figura 4.7. Evolução da excentricidade das TGs no intervalo  $t_0 - t_1$ .



Para as condições iniciais  $h = 200 \text{ km}$ ,  $f_{Terra} = f_{Lua} = \Omega_{Lua} = 0$ .  
 Fonte: Produção da autora.

Figura 4.8. Evolução da energia específica das TGs no intervalo  $t_0 - t_1$ .

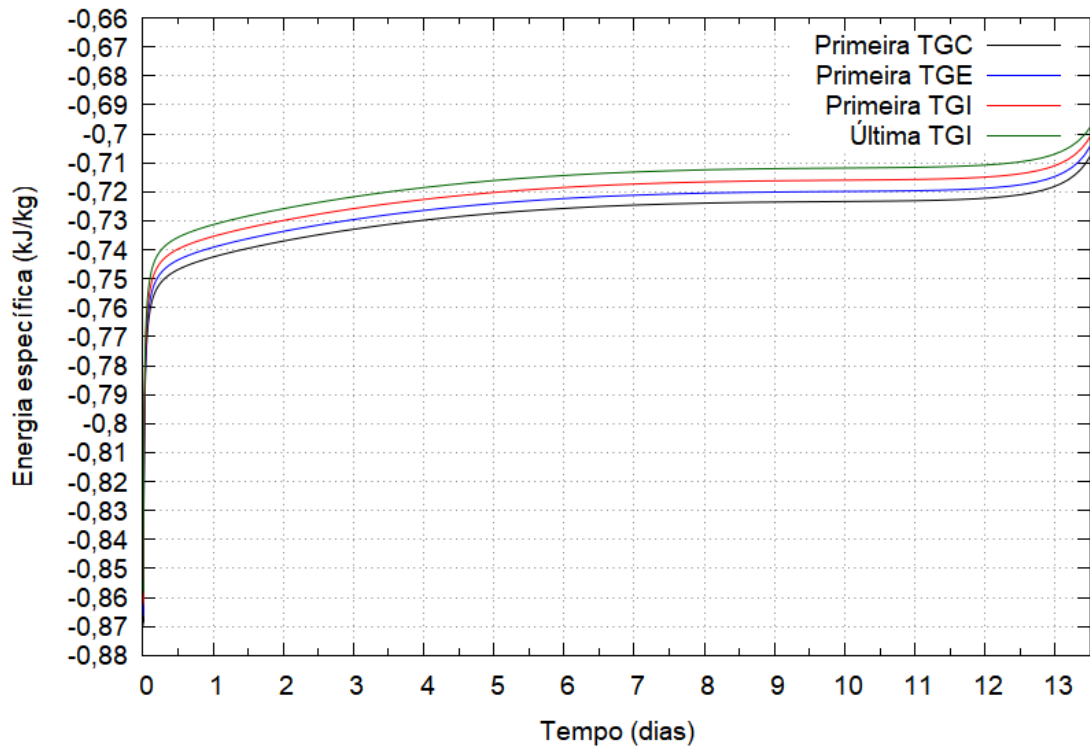
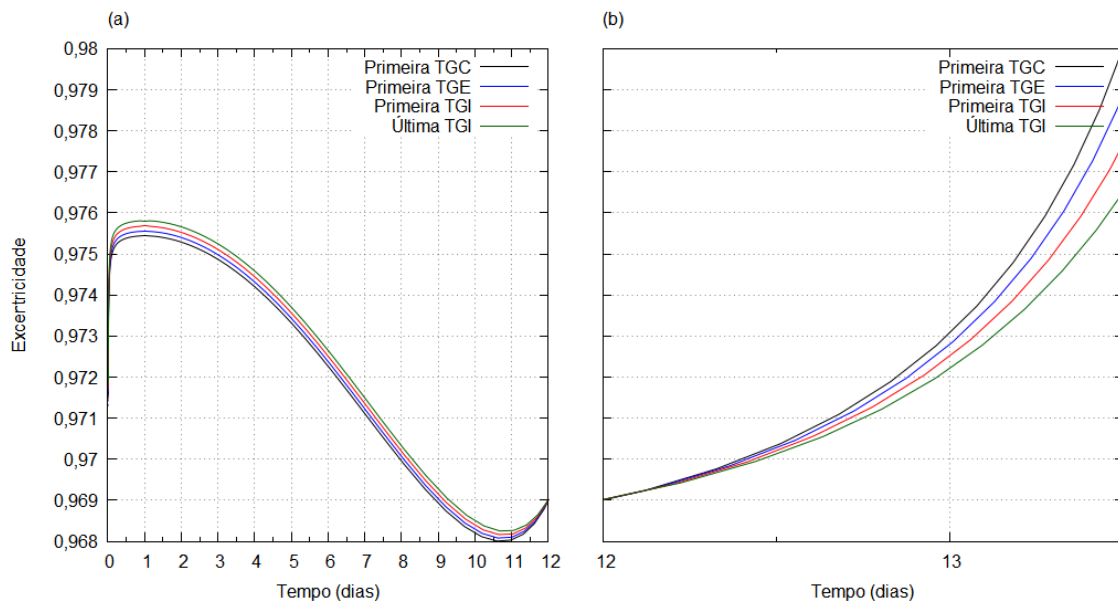


Figura 4.9. Detalhes da evolução da excentricidade das TGs no intervalo  $t_0 - t_1$ .

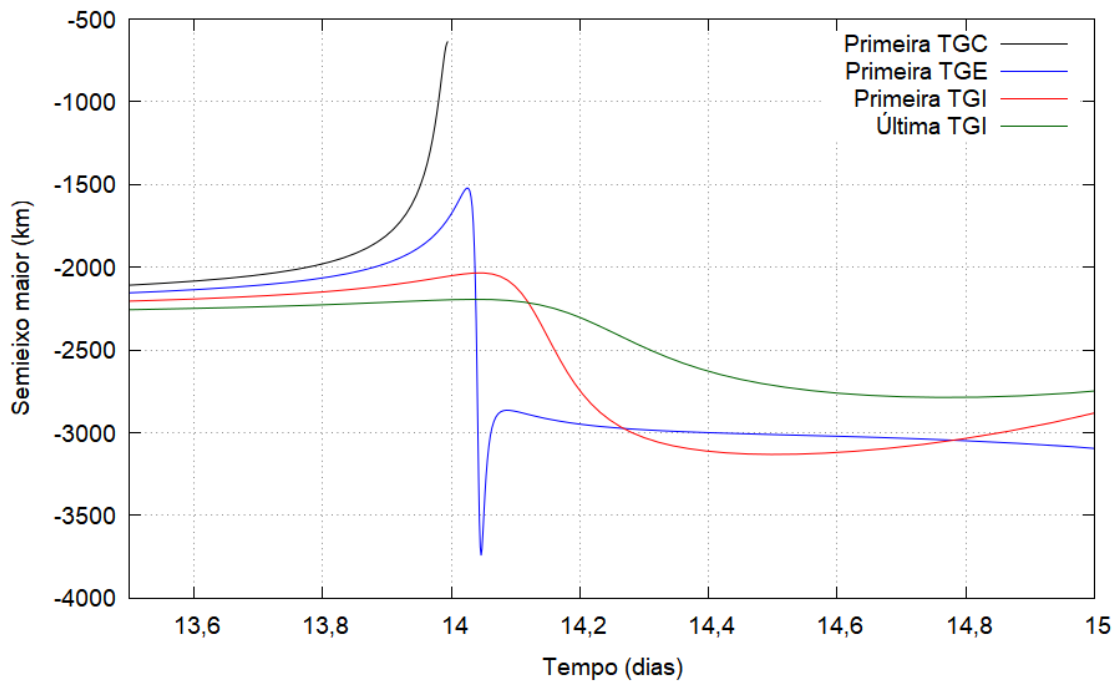


#### 4.2.2 Entre a entrada e saída da esfera de influência gravitacional da Lua

Sendo  $t_1 = 13,5$  dias o instante da entrada na esfera de influência gravitacional da Lua, definiu-se  $t_2 = 15$  dias, como o instante de saída dela. Assim, deu-se continuidade à análise da evolução dos elementos orbitais para as mesmas condições iniciais destacadas na Subseção 4.2.1, porém com uma mudança de referencial, para o selenocêntrico, cujos resultados são apresentados nas Figuras 4.10 - 4.15.

Nas Figuras 4.10 - 4.15, novamente percebe-se um padrão bem definido para a evolução dos elementos orbitais, dependendo do tipo de TG. Para TGCs, tem-se a interrupção dos gráficos em  $t \approx 14$  dias, devido ao impacto com a Lua, mas para TGEs, observam-se picos bem acentuados no instante de maior aproximação entre a sonda e Lua, por conta do swing-by em andamento, que são atenuados à medida que esta distância aumenta. Ainda, com a alteração do referencial para o centro da Lua, torna-se perceptível a variação da inclinação, ascensão reta do nodo ascendente e argumento do periselenium entre os tipos de TGs.

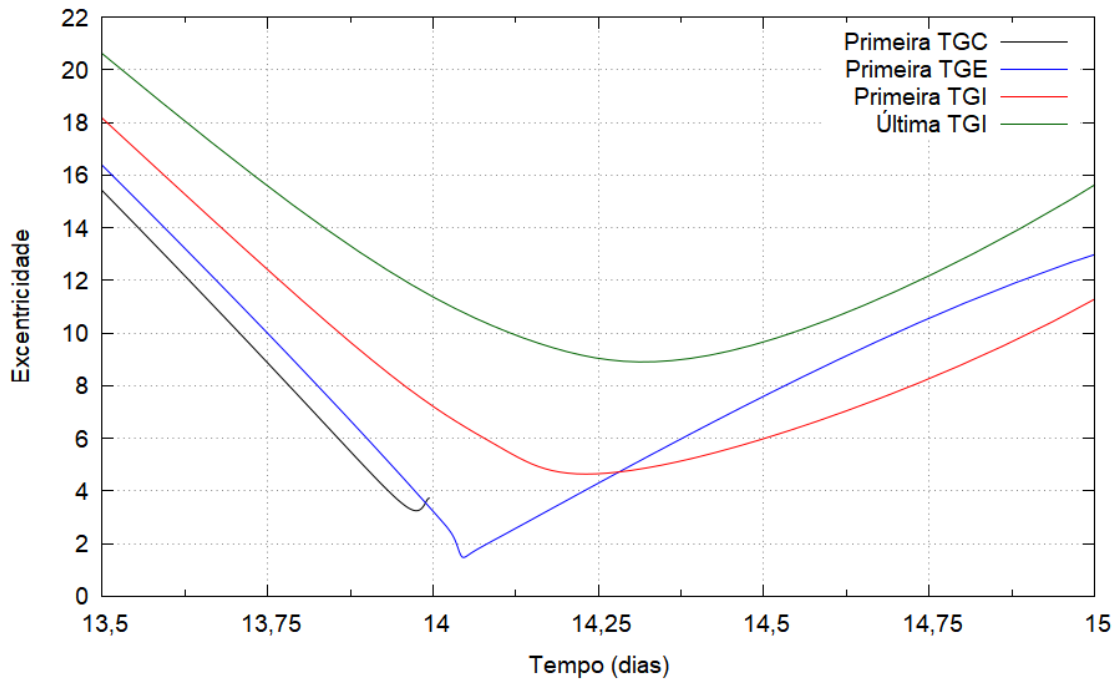
Figura 4.10. Evolução do semieixo maior no intervalo  $t_1 - t_2$ .



Para as condições iniciais  $h = 200$  km,  $f_{Terra} = f_{Lua} = \Omega_{Lua} = 0$ .  
Fonte: Produção da autora.

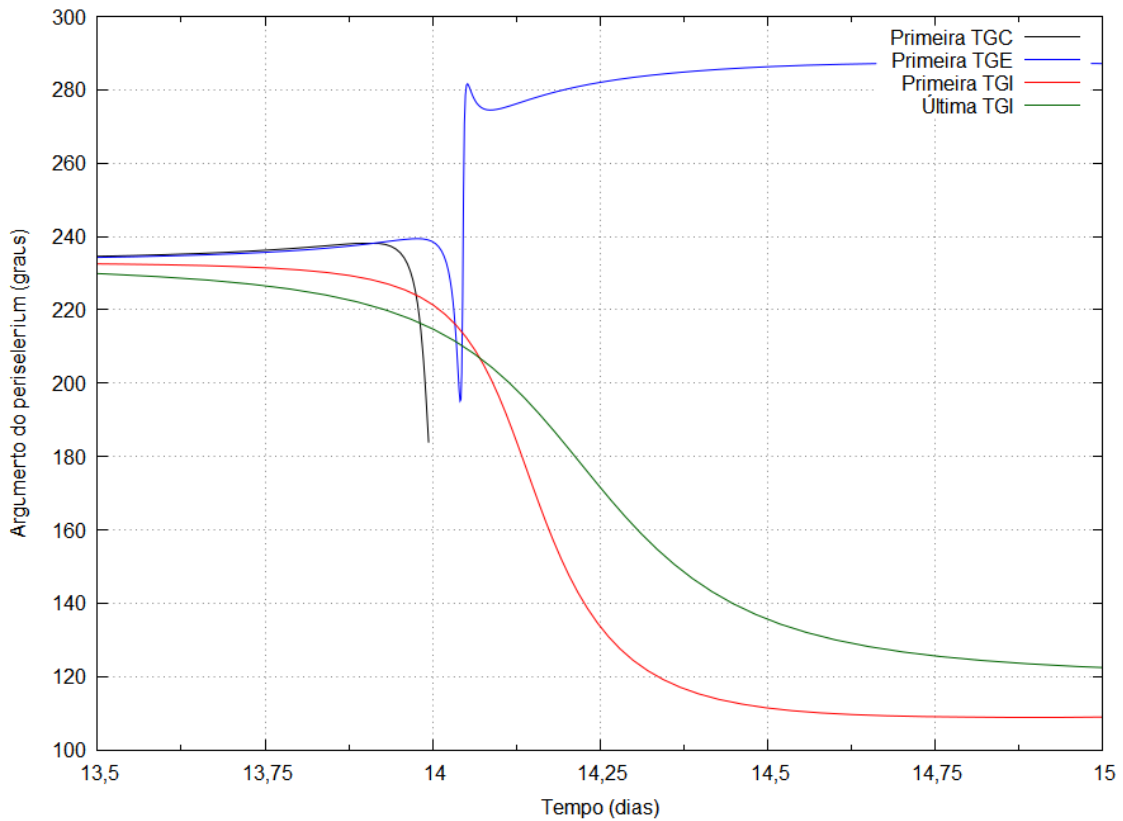


Figura 4.11. Evolução da excentricidade no intervalo  $t_1 - t_2$ .



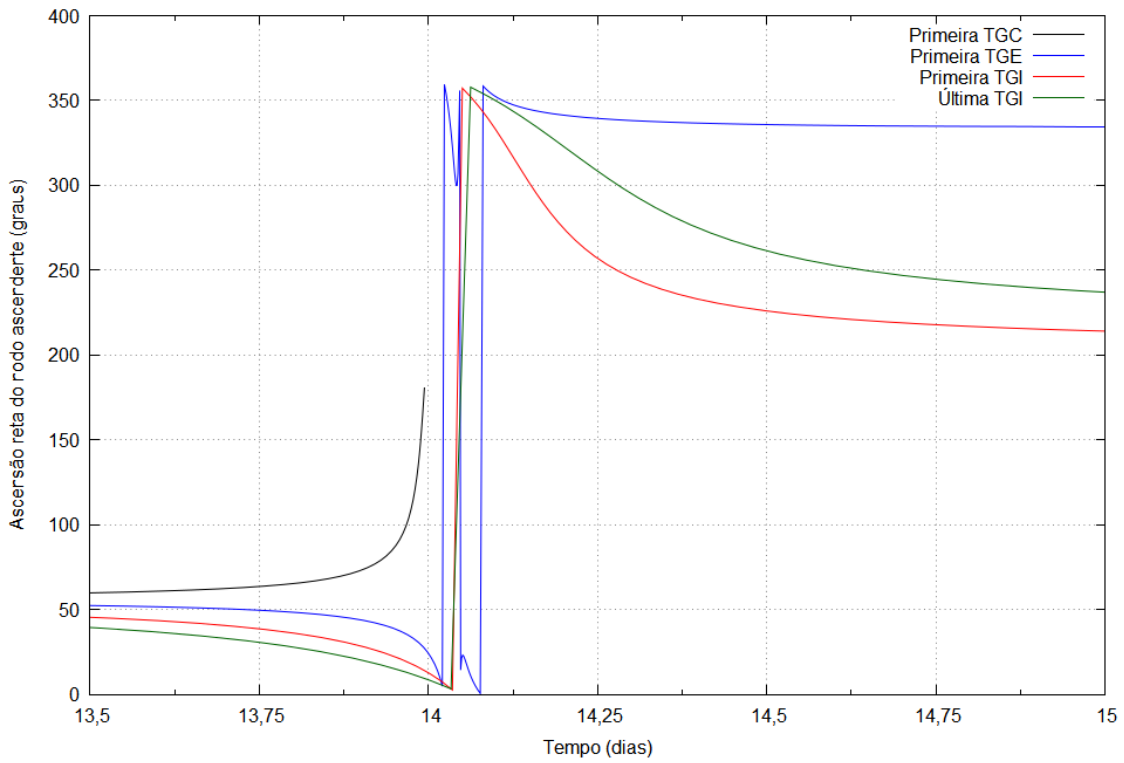
Para as condições iniciais  $h = 200 \text{ km}$ ,  $f_{Terra} = f_{Lua} = \Omega_{Lua} = 0$ .  
 Fonte: Produção da autora.

Figura 4.12. Evolução do argumento do periselenium no intervalo  $t_1 - t_2$ .



Para as condições iniciais  $h = 200 \text{ km}$ ,  $f_{Terra} = f_{Lua} = \Omega_{Lua} = 0$ .  
 Fonte: Produção da autora.

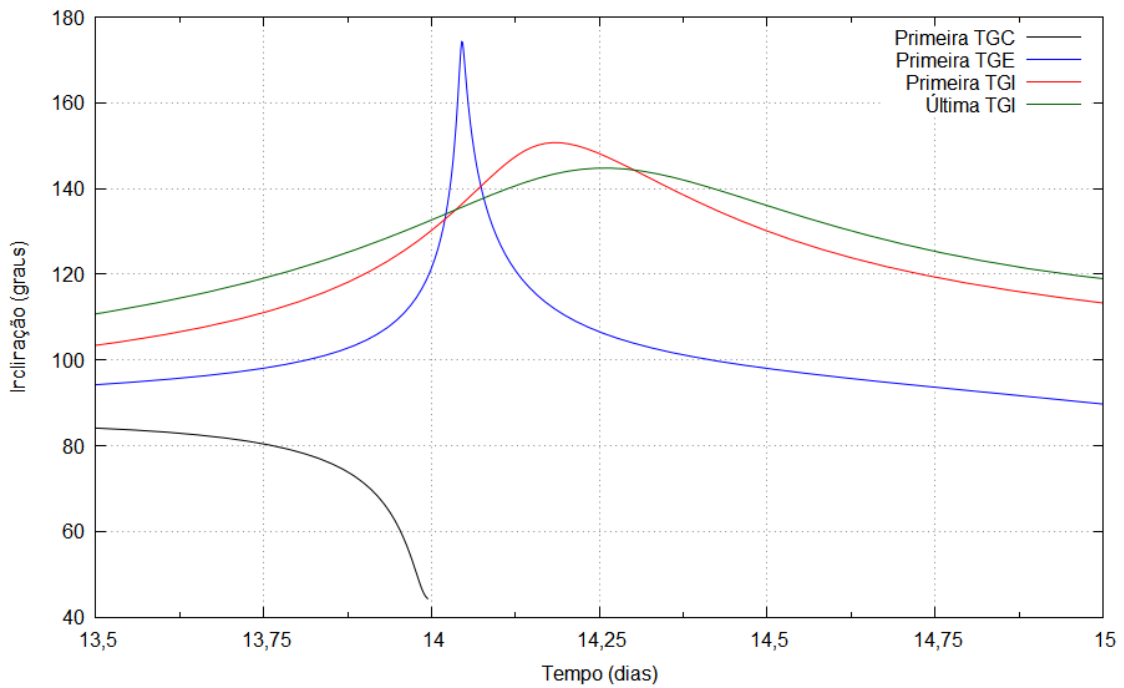
Figura 4.13. Evolução da ascensão reta do nodo ascendente no intervalo  $t_1 - t_2$ .



Para as condições iniciais  $h = 200$  km,  $f_{Terra} = f_{Lua} = \Omega_{Lua} = 0$ .

Fonte: Produção da autora.

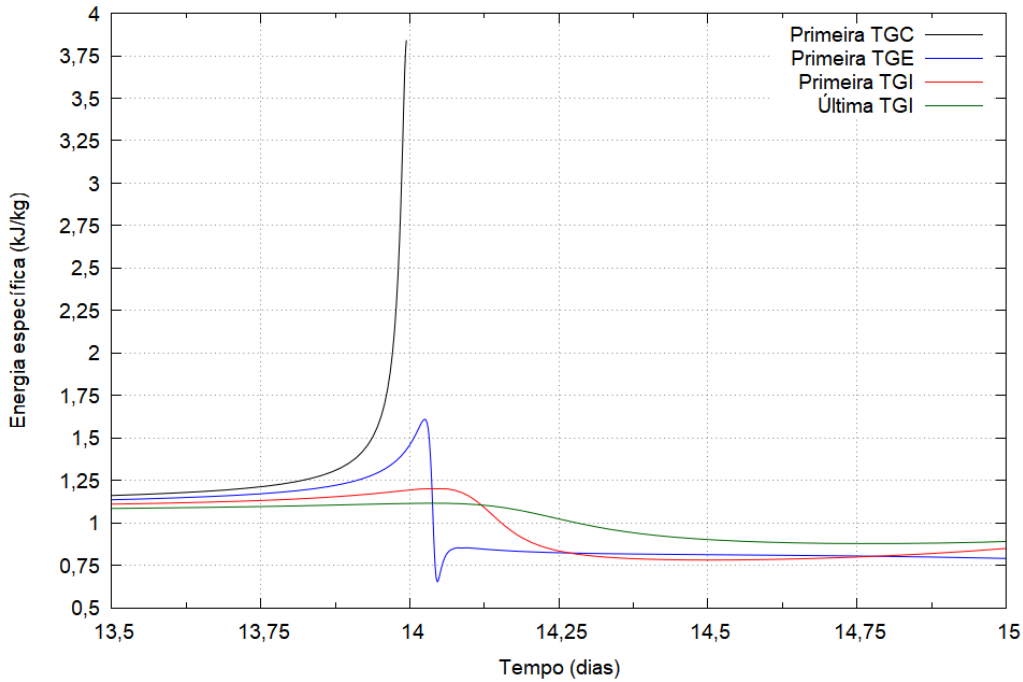
Figura 4.14. Evolução da inclinação no intervalo  $t_1 - t_2$ .



Para as condições iniciais  $h = 200$  km,  $f_{Terra} = f_{Lua} = \Omega_{Lua} = 0$ .

Fonte: Produção da autora.

Figura 4.15. Evolução da energia específica no intervalo  $t_1 - t_2$ .



Para as condições iniciais  $h = 200 \text{ km}$ ,  $f_{Terra} = f_{Lua} = \Omega_{Lua} = 0$ .  
 Fonte: Produção da autora.

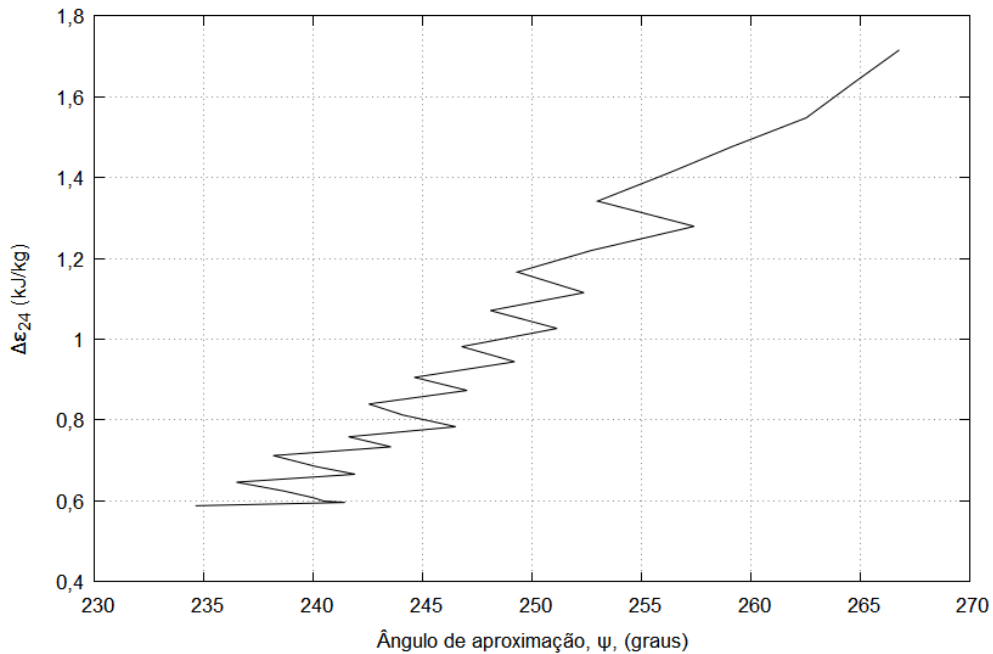
Ainda considerando a passagem pela Lua, analisou-se o ângulo de aproximação ( $\psi$ ) e a variação de energia em relação à Terra e ao Sol ( $\Delta\epsilon_{24}$  e  $\Delta\epsilon_{14}$ , respectivamente), grandezas relacionadas à manobra de *swing-by*, como descrito na Seção 2.1, para as TGEs apenas.

As Figuras 4.16 e 4.17 apresentam  $\Delta\epsilon_{24}$  em função de  $\psi$  e  $V_{SC}$ , respectivamente. Na Figura 4.16, observa-se uma concordância com a teoria desenvolvida para o P3C, uma vez que à medida que  $\psi$  se aproxima de  $270^\circ$  há um aumento em  $\Delta\epsilon_{24}$ . E, pela Figura 4.17, identifica-se que essa maior variação de energia ocorre para a primeira TGE, mostrando, novamente, uma outra concordância, uma vez que à medida que  $V_{SC}$  aumenta,  $r_p$  também se torna maior, diminuindo, portanto,  $\Delta\epsilon_{24}$ .

Porém, analisando a partir da dinâmica mais complexa do P4C, novas características puderam ser observadas. Por exemplo, nas Figura 4.18, analisando  $\Delta\epsilon_{14}$  em função de  $\psi$ , respectivamente, dois pontos de mínimos e um de máximo são observados, estando o primeiro ponto de mínimo associado à trajetória que possibilita o máximo afastamento da sonda em direção à Vênus,

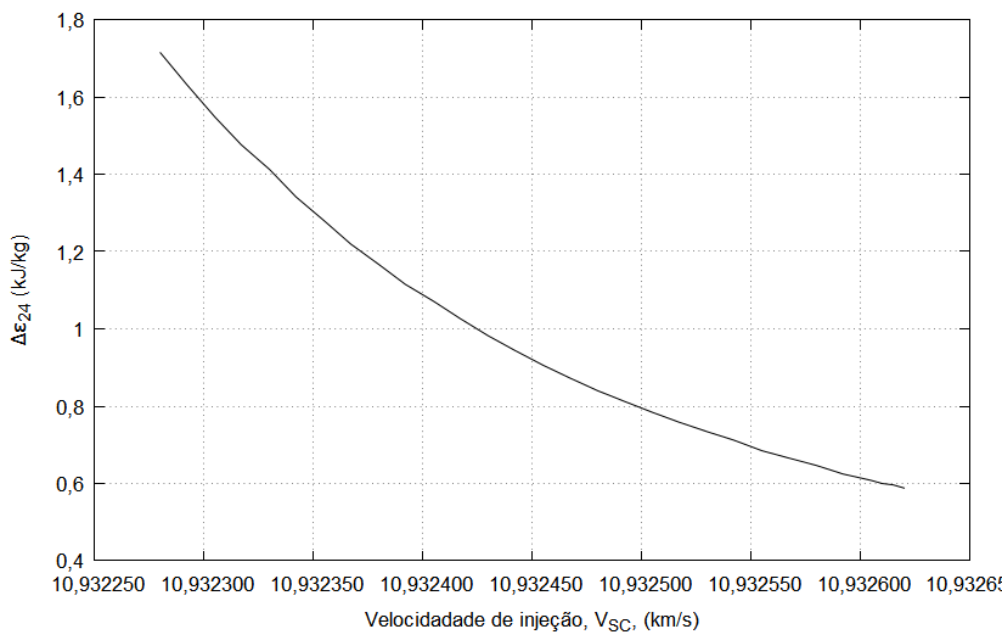
enquanto o ponto de máximo à trajetória que possibilita o máximo afastamento da sonda em direção à Marte.

Figura 4.16. Variação da energia específica, em relação à Terra, para TGEs, em função do ângulo de aproximação ( $\psi$ ).



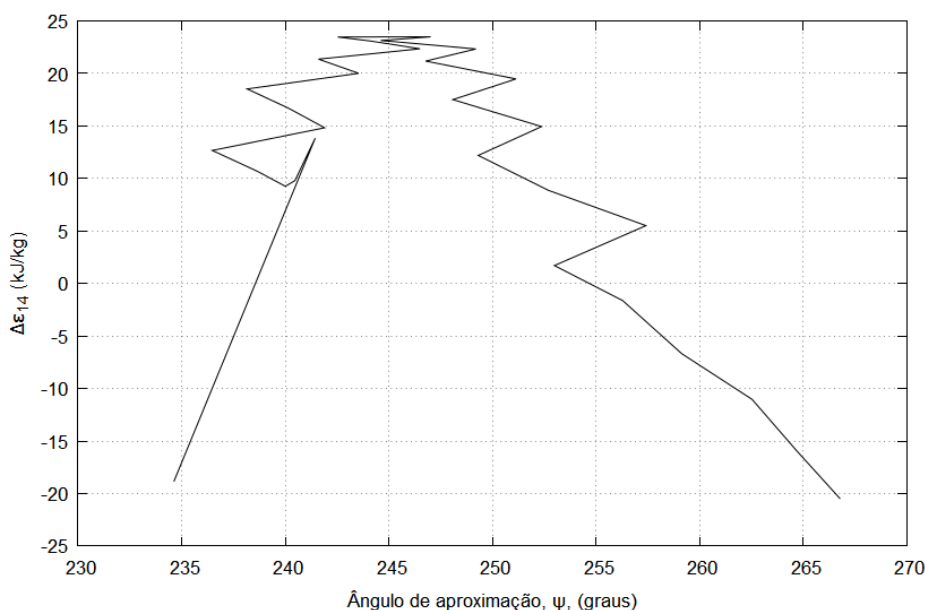
Para as condições iniciais  $h = 200$  km,  $f_{Terra} = f_{Lua} = \Omega_{Lua} = 0$ .  
 Fonte: Produção da autora.

Figura 4.17. Variação da energia específica, em relação à Terra, para TGEs, em função da velocidade de inserção  $V_{SC}$ .



Para as condições iniciais  $h = 200$  km,  $f_{Terra} = f_{Lua} = \Omega_{Lua} = 0$ .  
 Fonte: Produção da autora.

Figura 4.18. Variação da energia específica, em relação ao Sol, para TGEs, em função do ângulo de aproximação ( $\psi$ ).



Para as condições iniciais  $h = 200$  km,  $f_{Terra} = f_{Lua} = \Omega_{Lua} = 0$ .  
 Fonte: Produção da autora.

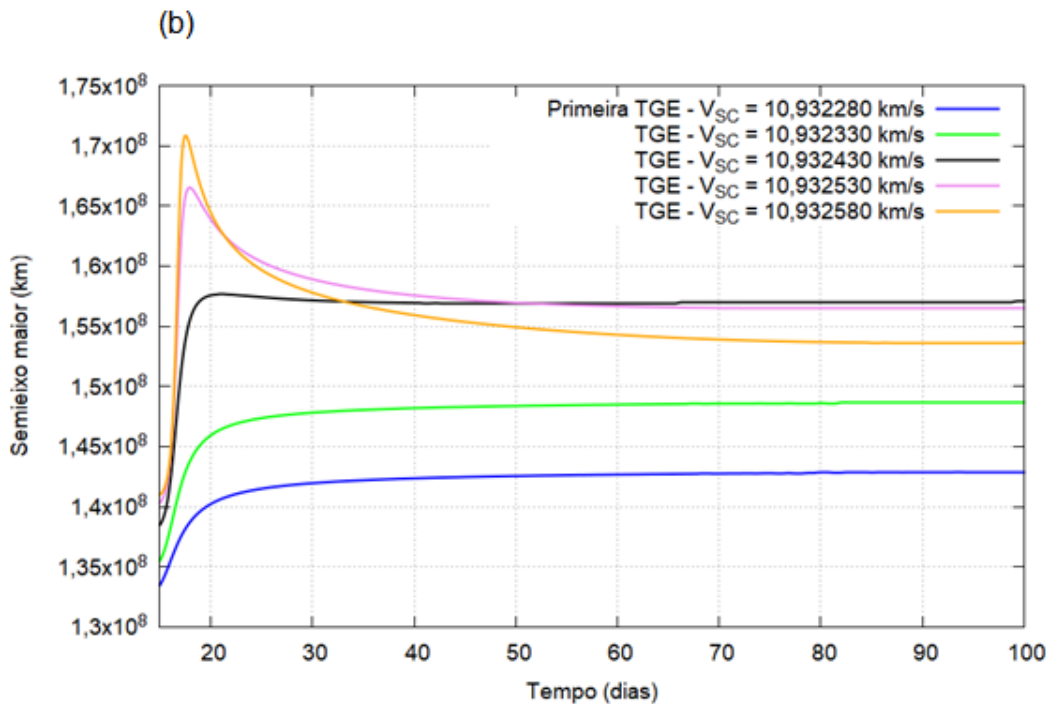
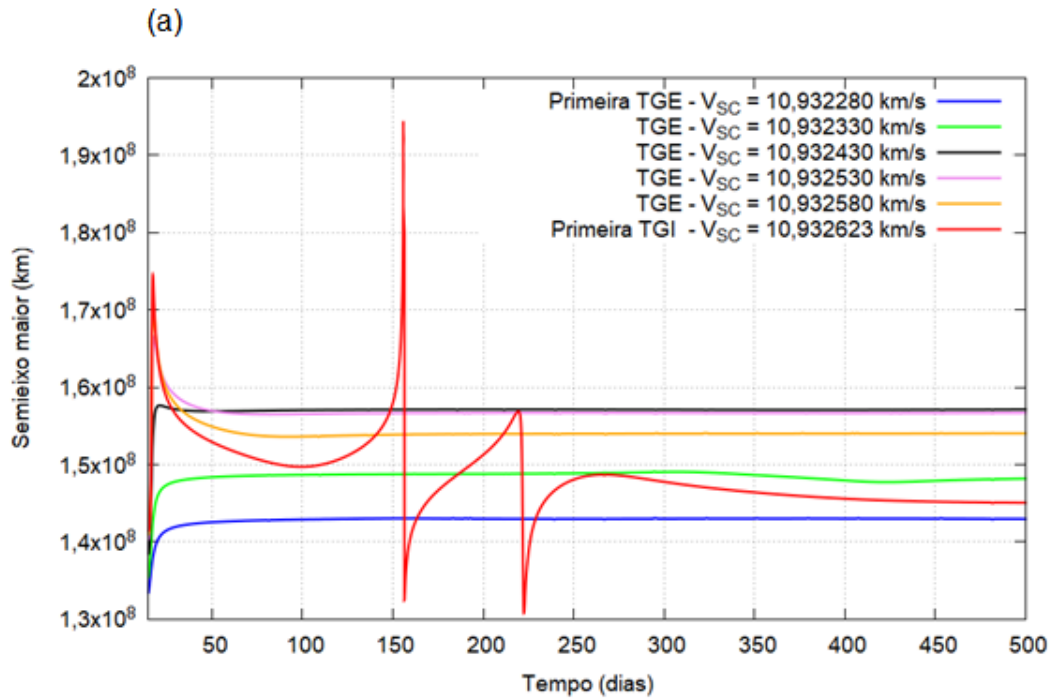
#### 4.2.3 Após a saída da esfera de influência gravitacional da Lua

A partir deste ponto, continua-se a análise apenas para TGEs e TGI, avaliando a variação de seus elementos orbitais em relação ao sistema centrado no Sol, para  $t > t_2$ . Desta forma, a sequência de gráficos das Figuras 4.19 – 4.21 apresentam a evolução temporal do semieixo maior, do raio do afélio e do raio do periélio, respectivamente.

Pela análise dos gráficos, percebe-se que as órbitas se estabilizam após 100 dias, aproximadamente. Por ficar presa no sistema Terra-Lua, o gráfico da primeira TGI apresenta grandes variações, de forma que a análise deste tipo de trajetória no sistema heliocêntrico não se torna adequado. Assim, a primeira TGI é suprimida nas demais figuras.

Em complemento ao discutido acerca da Figura 4.18, nas Figuras 4.20 e 4.21, fica notado que a primeira TGE possui o menor raio do periélio, enquanto o maior raio do afélio pertence a uma trajetória no meio do intervalo de velocidades entre TGEs e TGIs.

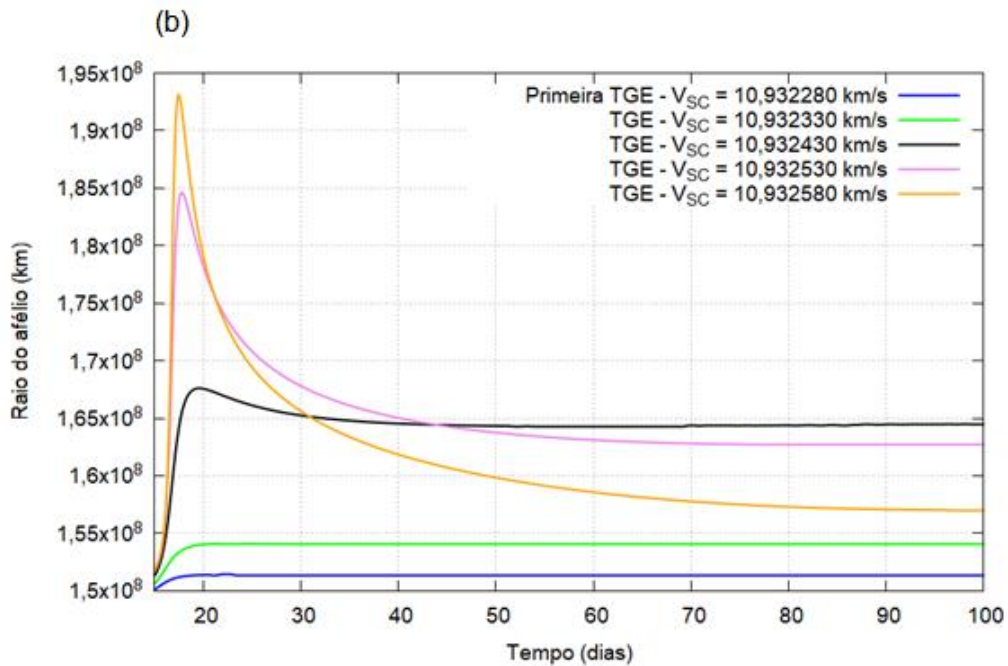
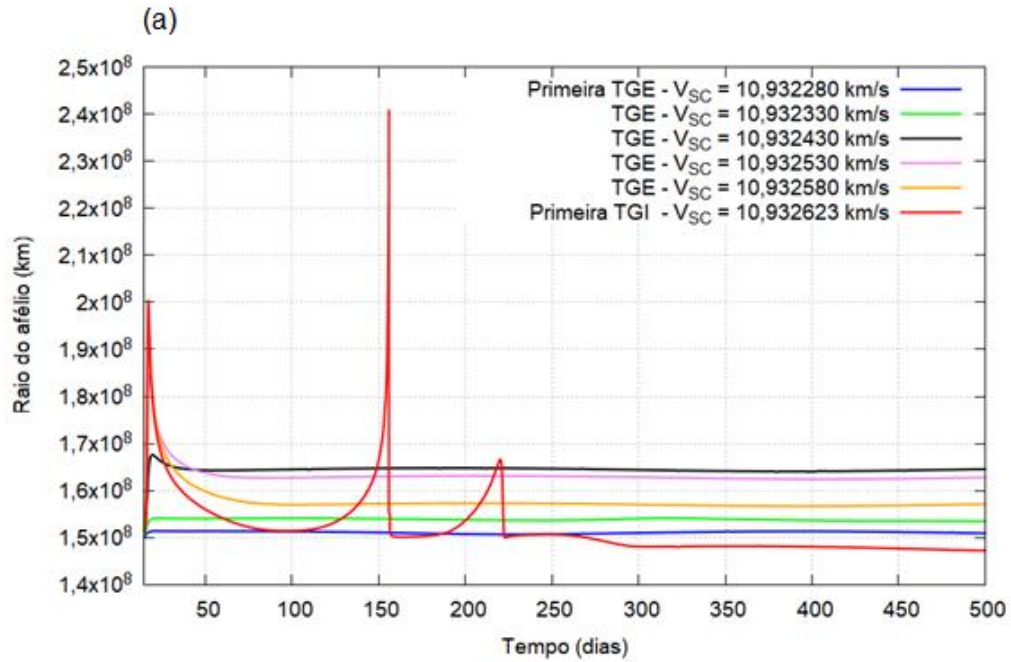
Figura 4.19. Variação do semieixo maior, em relação ao Sol, em função tempo.



Para as condições iniciais  $h = 200$  km,  $f_{Terra} = f_{Lua} = \Omega_{Lua} = 0$ . Em (b), retirou-se a última TGI, para dar mais clareza aos gráficos das TGEs.

Fonte: Produção da autora.

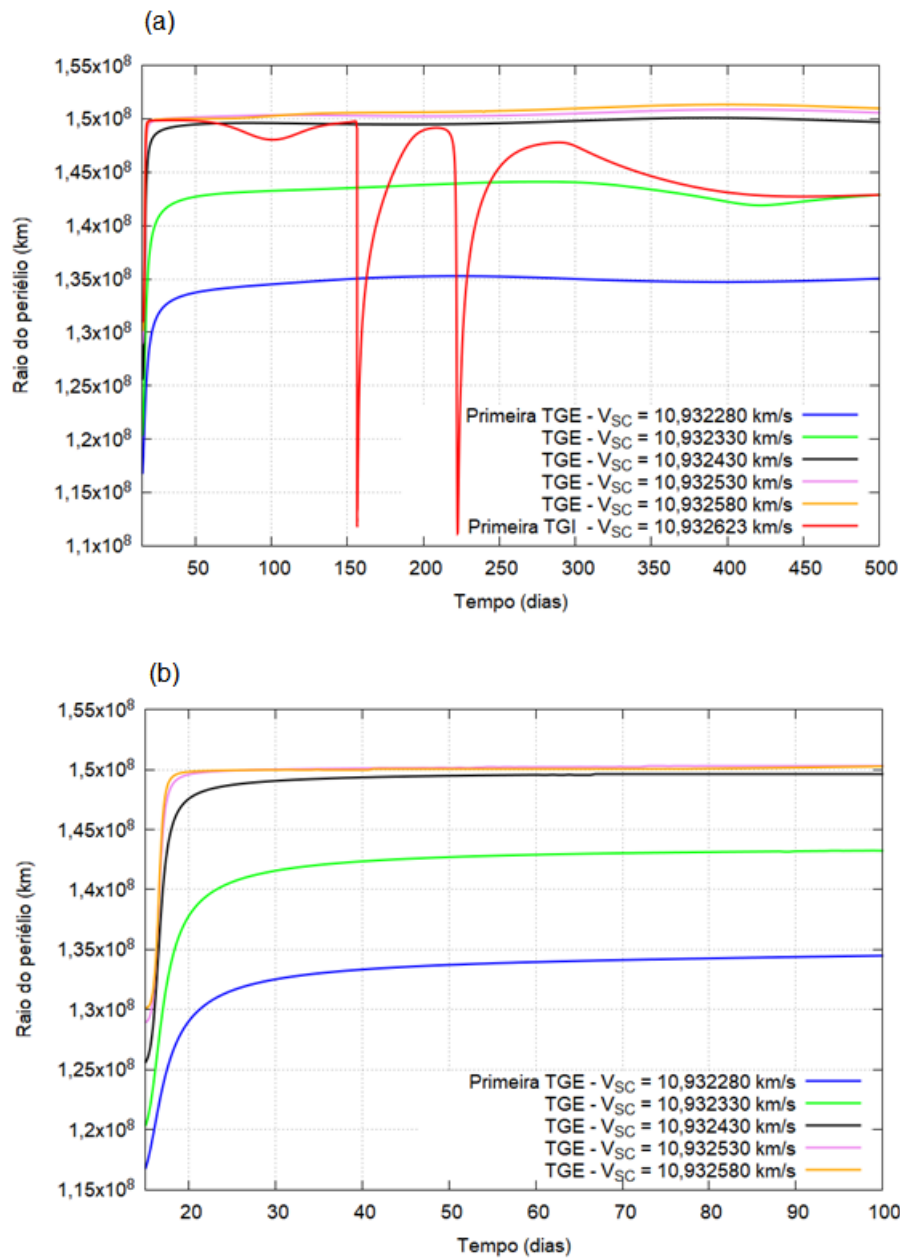
Figura 4.20. Variação do raio do afélio, em função tempo.



Para as condições iniciais  $h = 200$  km,  $f_{Terra} = f_{Lua} = \Omega_{Lua} = 0$ . Em (b), retirou-se a última TGI, para dar mais clareza aos gráficos das TGEs.

Fonte: Produção da autora.

Figura 4.21. Variação do raio do periélio, em função tempo.



Para as condições iniciais  $h = 200$  km,  $f_{Terra} = f_{Lua} = \Omega_{Lua} = 0$ . Em (b), retirou-se a última TGI, para dar mais clareza aos gráficos das TGEs.

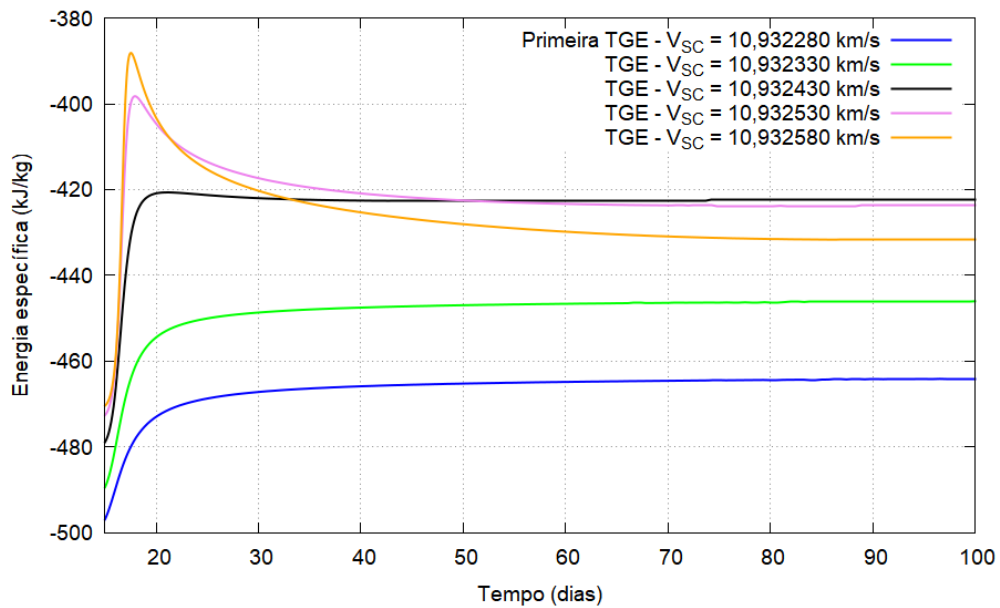
Fonte: Produção da autora.

Destaca-se que apesar de os resultados apresentados até o momento referirem-se a um determinado conjunto de condições iniciais ( $h = 200$  km,  $f_{Terra} = f_{Lua} = \Omega_{Lua} = 0$ ), o mesmo comportamento para a evolução temporal dos elementos orbitais foi encontrado com variações dos elementos desse conjunto. Ainda, não é nesta configuração básica que são encontradas as trajetórias que acarretam o maior distanciamento da sonda em direção à Vênus ou Marte.



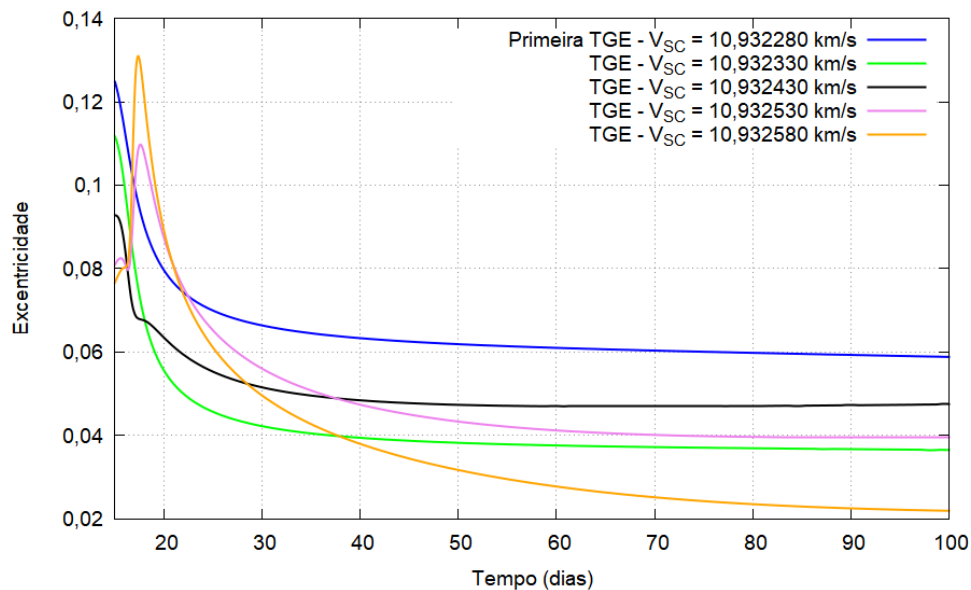
Continuando o estudo, na Figura 4.22, encontra-se a variação da energia específica das trajetórias, em relação ao Sol, com um comportamento similar ao visto para o semieixo maior. Enquanto isso, na Figura 4.23, observa-se apenas a diminuição da excentricidade da órbita entre as primeiras TGEs. E, por fim, as variações temporais da inclinação, argumento do periélio e ascensão reta do nodo ascendente são apresentadas nas Figuras 4.24 - 4.26.

Figura 4.22. Variação da energia específica, em relação ao Sol, em função do tempo.



Para as condições iniciais  $h = 200$  km,  $f_{Terra} = f_{Lua} = \Omega_{Lua} = 0$ .  
 Fonte: Produção da autora.

Figura 4.23. Variação da excentricidade, em relação ao Sol, em função do tempo.



Para as condições iniciais  $h = 200$  km,  $f_{Terra} = f_{Lua} = \Omega_{Lua} = 0$ .  
 Fonte: Produção da autora.

Figura 4.24. Variação da inclinação, em relação ao Sol, em função do tempo.

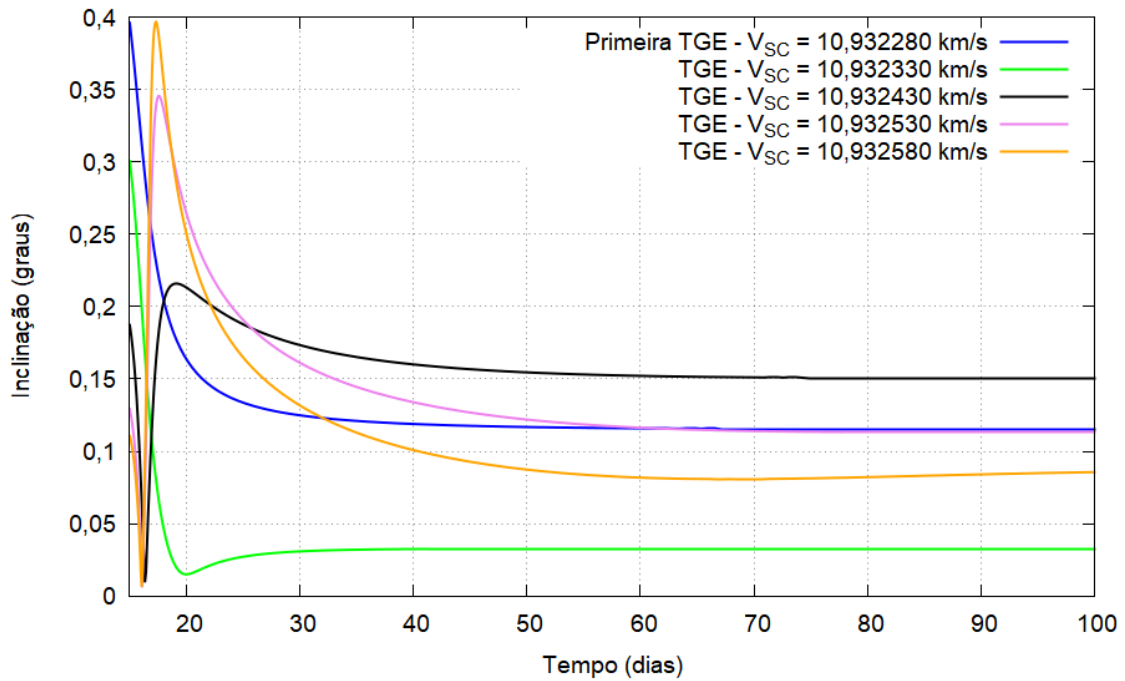


Figura 4.25. Variação do argumento do periélio, em função do tempo.

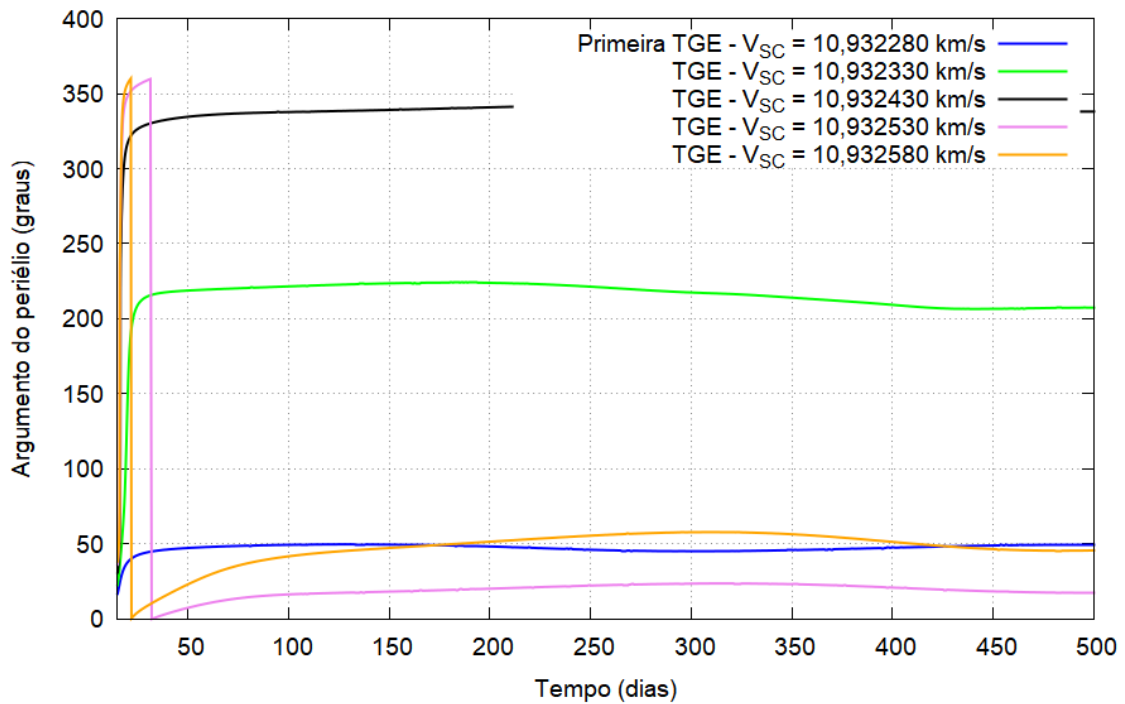
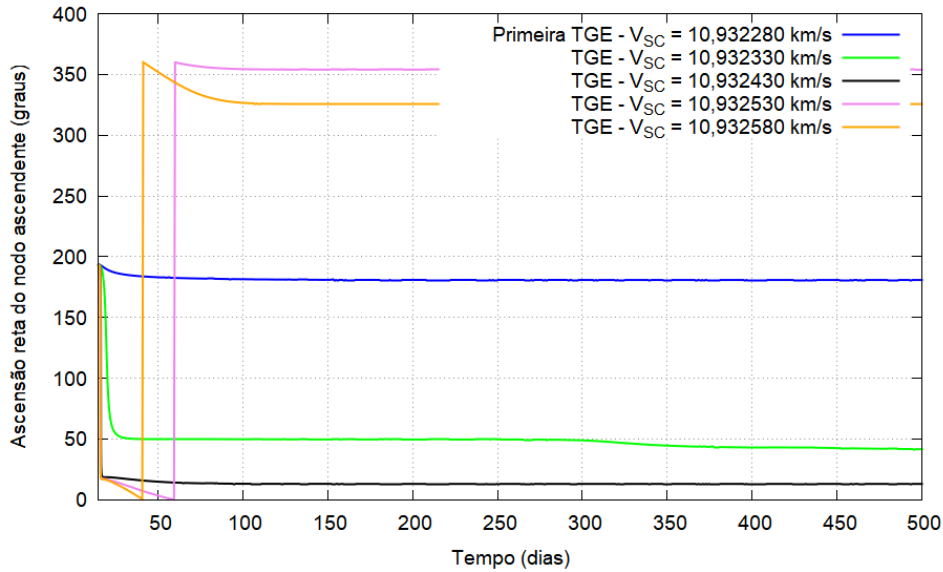


Figura 4.26. Variação da ascensão reta do nodo ascendente, em relação ao Sol, em função do tempo.



Para as condições iniciais  $h = 200$  km,  $f_{Terra} = f_{Lua} = \Omega_{Lua} = 0$ .  
 Fonte: Produção da autora.

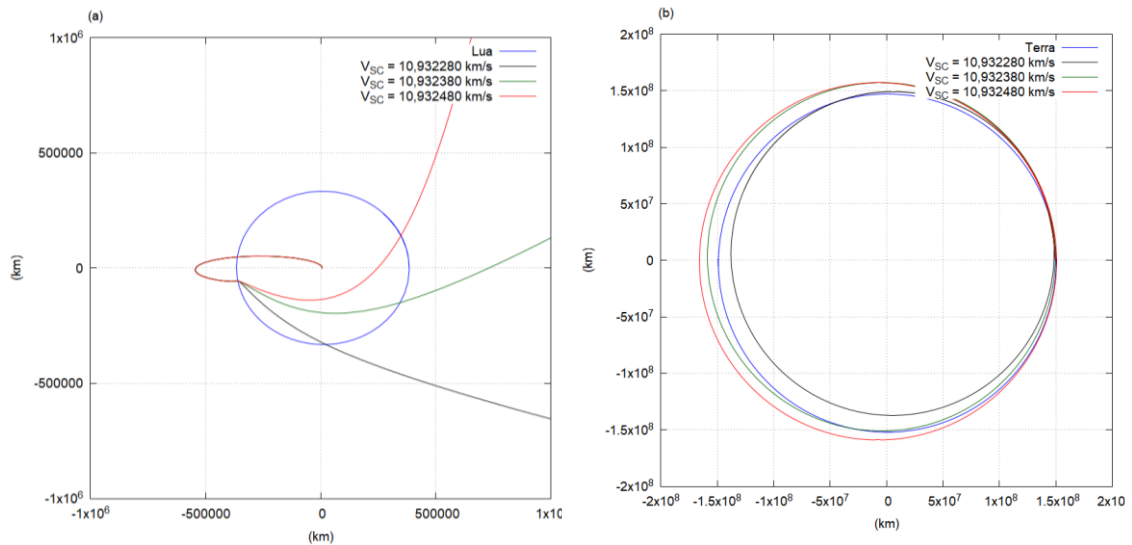
### 4.3 Alcance das TGEs

Como apresentado na Seção 3.1, as diferentes TGEs possuem diferentes comportamentos e, portanto, diferentes alcances. Desta forma, TGEs ficam contidas no sistema Terra-Lua, assim como, à princípio, as TGEs e, por definição, são apenas as TGEs que, a princípio, escapam do sistema Terra-Lua, definindo órbitas com possibilidades de interceptação de NEAs, por exemplo. Logo, o foco desta seção serão as TGEs e as máximas distâncias que um veículo espacial neste tipo de trajetória pode atingir.

Conforme procedimento descrito na Seção 3.2, para a condição inicial de  $h = 200$  km,  $\Omega_{Lua} = \omega_{Lua} = 0$  e  $\Omega_{Terra} = \omega_{Terra} = 0$ ,  $0 \leq f_{Lua} \leq 360^\circ$  e  $f_{Terra} = 0^\circ$ , em  $t = 0$ , para todas as TGEs com  $V_{SC}$  entre os limites apresentados nas curvas da Figura 4.3(a), fez-se a integração da trajetória, até sua estabilização em um órbita heliocêntrica, conforme sequência de imagens das Figuras 4.27.

O mesmo procedimento foi repetido para diferentes combinações das condições iniciais, para avaliação da influência destes nos alcances da sonda, de forma semelhante ao que foi feito na Seção 4.1, para as curvas de velocidade. Assim, para toda a Figura 4.28, tem-se  $0 \leq f_{Lua} \leq 360^\circ$ , e em  $t = 0$ ,  $f_{Terra} = 0$ . Em 4.28 (a),  $\Omega_{Lua} = 0$ ; em 4.28(b),  $\Omega_{Lua} = 90^\circ$  e; em 4.28(c)  $\Omega_{Lua} = 135^\circ$ .

Figura 4.27. Trajetórias de escape com diferentes velocidades de inserção.



Diferentes trajetórias simuladas, em (a) no sistema geocêntrico e em (b) no sistema heliocêntrico.

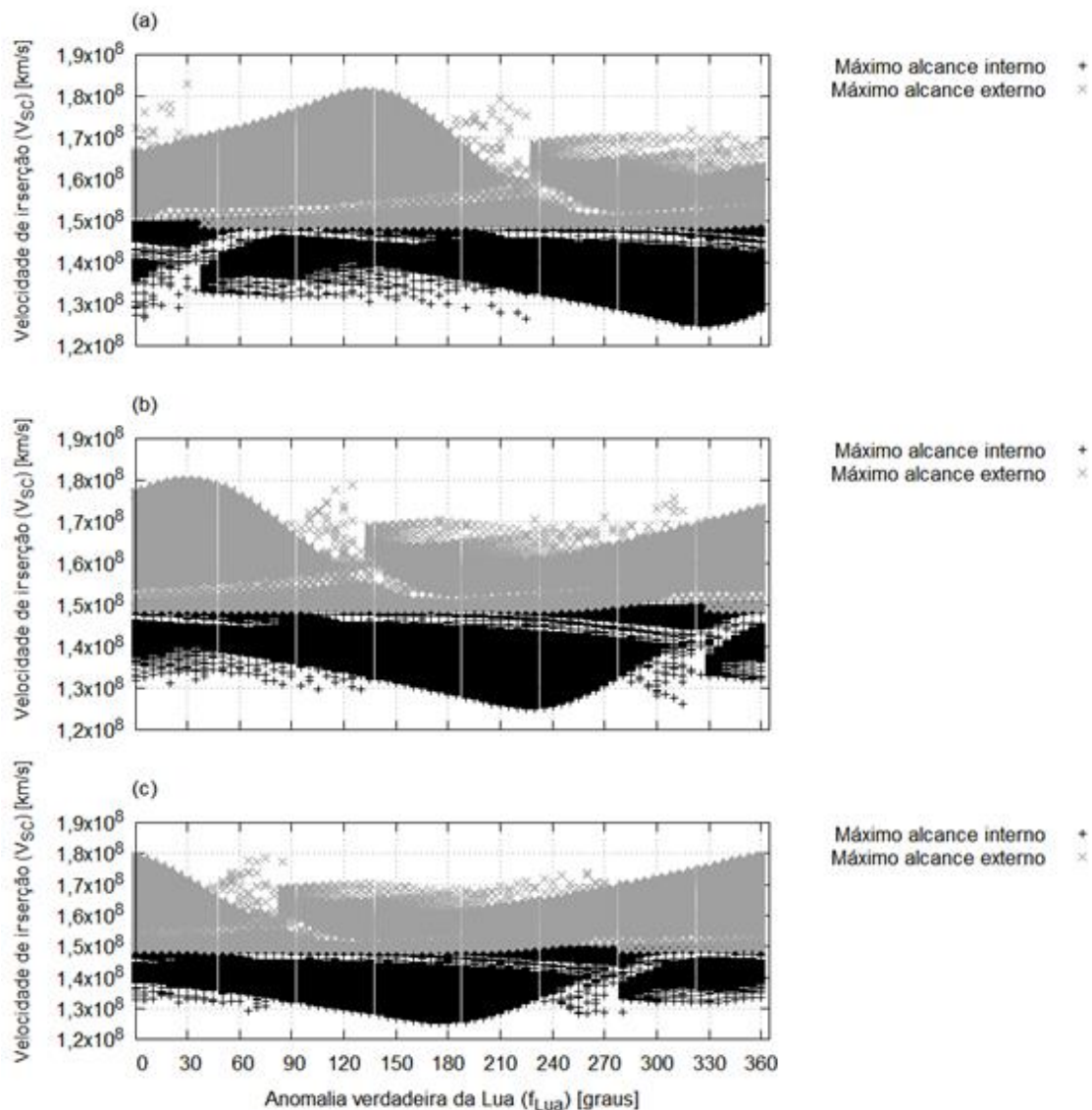
Fonte: Produção da autora.

De forma semelhante ao ocorrido para as curvas de velocidade, a alteração de  $\Omega_{Lua}$  não alterou a magnitude dos alcances, uma vez que em todos os casos o máximo alcance externo é de 181 milhões de km e o máximo alcance interno é de 125 milhões de km. Novamente, a principal diferença entre os gráficos são as fases.

Ainda sobre estas distâncias, por meio da Figura 4.28, observa-se que o posicionamento relativo entre os corpos é de extrema relevância, de forma que há um posicionamento ideal no momento do lançamento para que se encontre o máximo alcance interno ou externo. Por exemplo, em 4.28(a), em que  $\Omega_{Lua} = 0$ , um veículo espacial que seja colocado em uma TGE atingirá seu máximo distanciamento da Terra, na direção de Marte, quando, no momento da inserção,  $f_{Lua} = 135^\circ$  e, portanto,  $f_{Terra} \approx 10^\circ$ . Da mesma forma, seu máximo distanciamento da Terra, na direção de Vênus, ocorre quando  $f_{Lua} = 325^\circ$  e, portanto,  $f_{Terra} = 24,05^\circ$ . Estes máximos distanciamentos, em direção à Marte e Vênus, correspondem a raios de afélio e periélio, respectivamente de 181272593 km (1,2117 a.u.) e 124814014 km (0,8343 a.u.), conforme observado na Figura 4.28(a).

Chama-se atenção para estas considerações por dois motivos, para frisar a complexidade de se obter uma solução analítica para a definição das TGs de forma geral e da existência de condições muito específicas e complexas que devem ser atendidas para que as TGEs atinjam os maiores alcances possíveis, sem que sejam necessárias correções de meio de caminho.

Figura 4.28. Variação do alcance das TGEs em função da anomalia verdadeira da Lua.



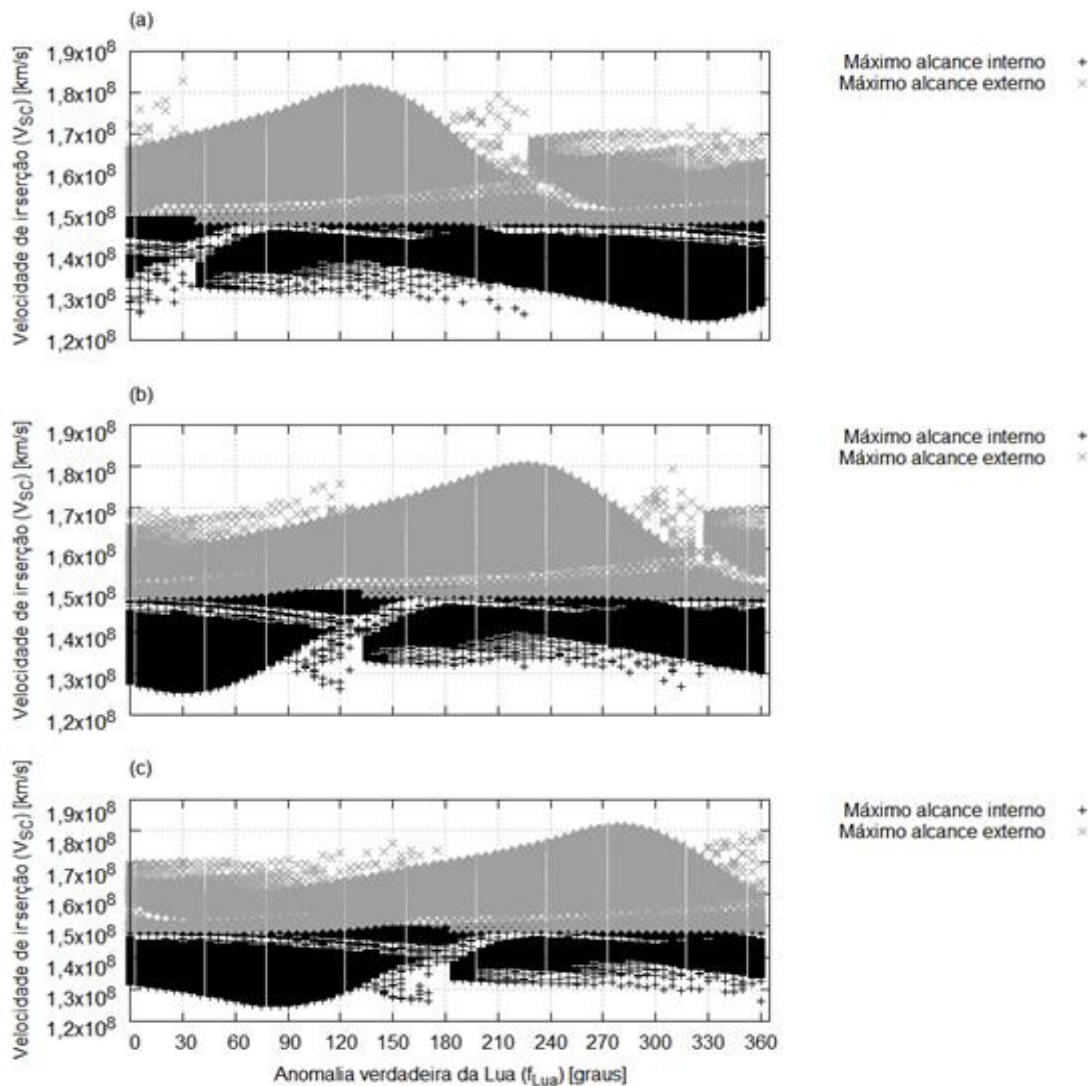
As simulações geradas para produção dos gráficos tiveram como condições iniciais  $h = 200$  km,  $0 \leq f_{Lua} \leq 360^\circ$  e em  $t = 0$ ,  $f_{Terra} = 0^\circ$ . Porém, cada um possui valores de  $\Omega_{Lua}$  diferentes: (a)  $\Omega_{Lua} = 0$ , (b)  $\Omega_{Lua} = 90^\circ$  e (c)  $\Omega_{Lua} = 135^\circ$ .

Fonte: Produção da autora.

Em seguida, repetiu-se o procedimento para a avaliação da influência de  $f_{Terra}$ . Assim, na Figura 4.29, estão apresentados todos os alcances das trajetórias para  $h = 200 \text{ km}$ ,  $\Omega_{Lua} = 0^\circ$  e  $0 \leq f_{Lua} \leq 360^\circ$ , tal que, em  $t = 0$ , 4.29(a) apresenta a curva para  $f_{Terra} = 0$ ; 4.29(b),  $f_{Terra} = 90^\circ$  e; 4.29(c),  $f_{Terra} = 135^\circ$ .

Novamente, a alteração de  $f_{Terra}$  não alterou a magnitude dos alcances, apenas a fase entre os diagramas, de forma que se observam outras condições para máximo alcance, diferentes das expostas por meio da análise da Figura 4.28(a).

Figura 4.29. Variação do alcance das TGEs em função da anomalia verdadeira da Lua e da Terra.



As simulações geradas para produção dos gráficos tiveram como condições iniciais  $h = 200 \text{ km}$ ,  $0 \leq f_{Lua} \leq 360^\circ$  e  $\Omega_{Lua} = 0^\circ$ . Porém, cada um possui valores de  $f_{Terra}$  diferentes: de cima para baixo tem-se  $0 \leq f_{Terra} \leq 26,64^\circ$ ;  $90^\circ \leq f_{Terra} \leq 117,32^\circ$ , e;  $135^\circ \leq f_{Terra} \leq 157,32^\circ$ .

Fonte: Produção da autora.

Todas as análises feitas até o momento levam em consideração um lançamento feito a partir da altitude inicial de 200 km. A mudança de altitude não altera o alcance atingido por meio das TGEs ou a geometria dos diagramas apresentados, motivo pelo qual outras curvas, com diferentes altitudes iniciais não foram expostos.

#### 4.4 Aplicações

Ainda que os métodos apresentados nas Seções 3.1 e 3.2, assim como os resultados das Seções 4.1 a 4.3, sejam referentes ao P4C3D, os procedimentos desenvolvidos podem ser aplicados não somente para este caso geral, como também para dinâmicas mais específicas. Nas subseções a seguir, faz-se a replicação dos procedimentos discutidos até o momento para a análise de missões para os NEAs 99942 Apophis (Atenas), 138971 (2001 CB21, Apolo), 65803 Didymos (Apolo) e 3361 Orpheus (Apolo), todos considerados potencialmente perigosos (PHA), utilizando como condição inicial as efemérides de todos os corpos envolvidos (Terra, Lua, NEA) retiradas do sistema HORIZONS do JPL, para um determinado período (conforme explicado na Seção 3.4).

##### 4.4.1 65803 Didymos

Na Tabela 4.3 são apresentados os elementos orbitais do asteroide 65803 Didymos, para o instante do início da integração, enquanto na Figura 4.30 está representada sua órbita em conjunto com as órbitas circulares de raio  $R_{max,ext} = 1,21$  a.u. (limite superior das TGEs) e  $R_{max,int} = 0,83$  a.u. (limite inferior das TGEs).

Tabela 4.3. Elementos orbitais do NEA 65803 Didymos.

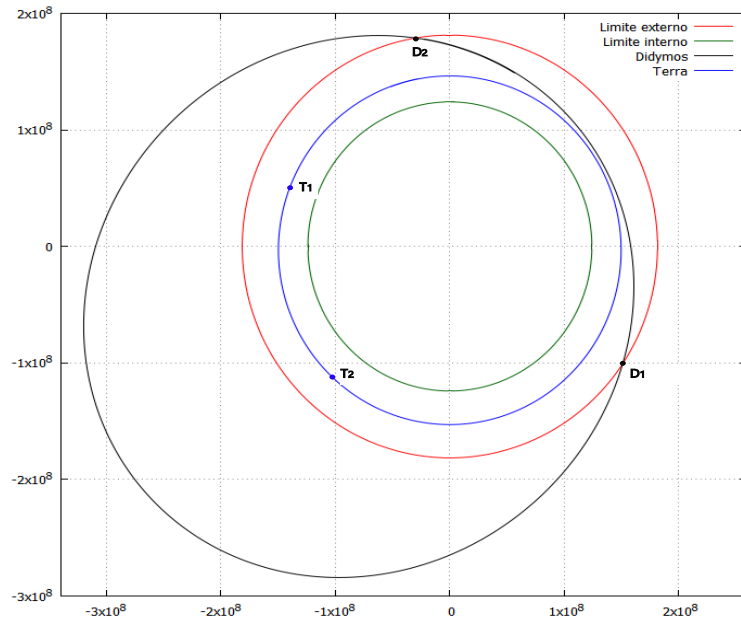
Elementos orbitais	Valores	Elementos orbitais	Valores
<b>e</b>	0,383638	<b><math>\Omega</math></b>	73,206961°
<b>a</b>	1,644577 a.u.	<b><math>\omega</math></b>	319,301868°
<b>i</b>	3,407819°	<b>M</b>	311,577830°

Elementos orbitais para época 2459200,5 (17/12/2020).  
Fonte: JPL (2021).

Na Figura 4.30, percebe-se que o asteroide está dentro do alcance das TGEs enquanto permanecer entre os pontos  $D_1$  e  $D_2$ . Feita a identificação das datas

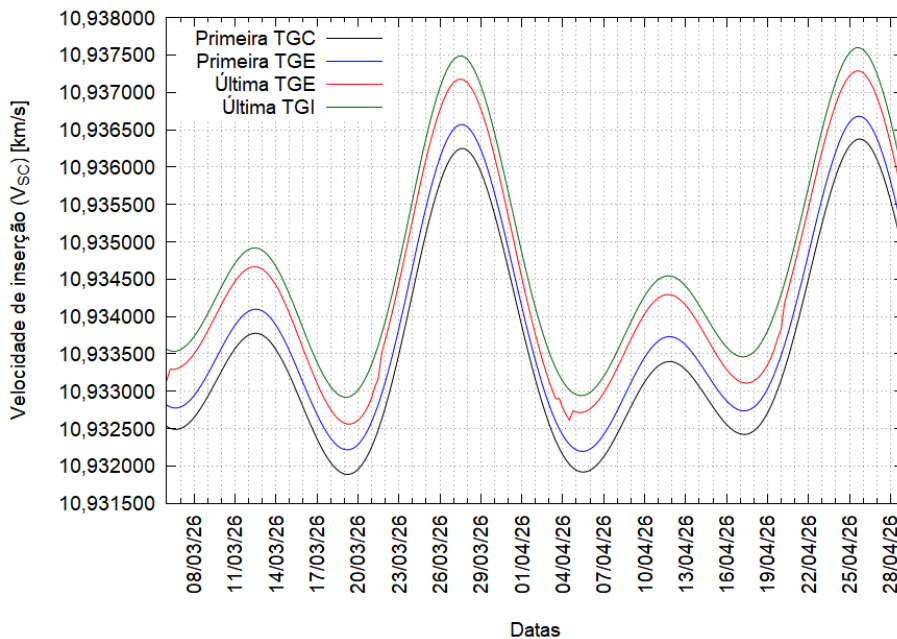
em que o asteroide cruza esses limites, a data ideal para o lançamento do veículo espacial como sendo entre 06 de março de 2026 a 29 de abril de 2026, conforme procedimento explicado na Seção 3.4, de forma que, neste intervalo, a Terra se encontra entre os pontos  $T_1$  e  $T_2$  do diagrama.

. Figura 4.30. Diagramas das órbitas da Terra, do NEA 65803 Didymos e dos limites interno e externo das TGEs.



Fonte: Produção da autora.

Figura 4.31. Variação da magnitude da velocidade de inserção em uma trajetória G ( $V_{SC}$ ) em km/s para o período de 06 de março de 2026 a 29 de abril de 2026.



Fonte: Produção da autora.



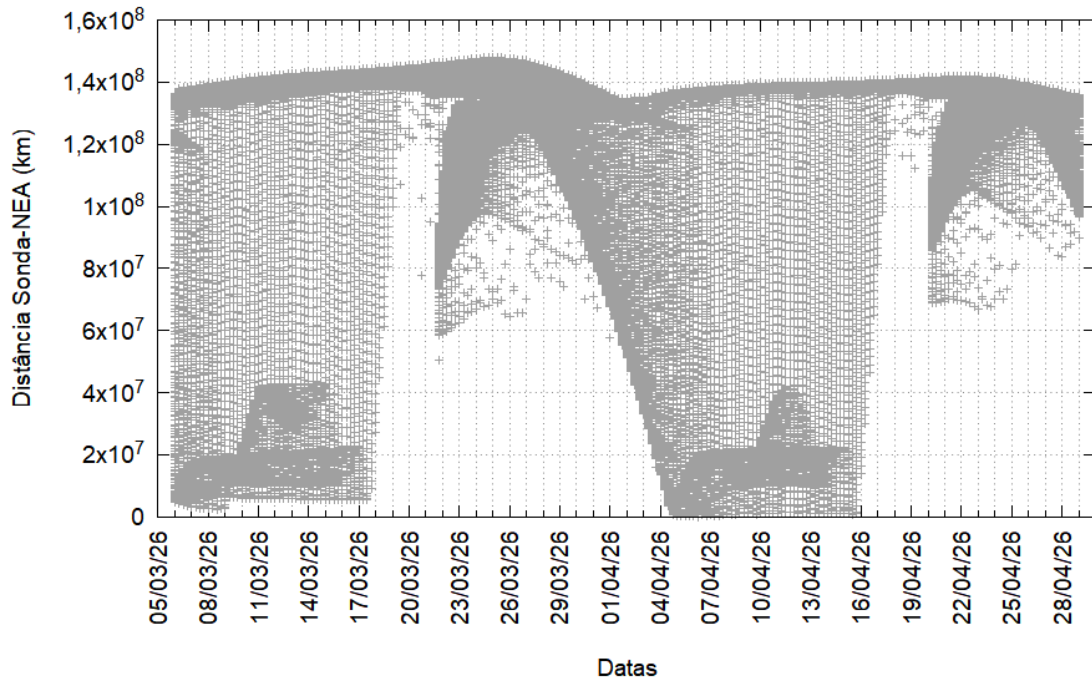
Para este intervalo de tempo, as curvas de velocidade das TGEs são apresentadas na Figura 4.31, em que há uma notável diferença no formato das curvas, em relação a sua simetria e periodicidade, quando comparadas aos resultados da Seção 4.1. A diferença ocorre, devido à consideração das excentricidades das órbitas da Terra e da Lua, tomadas como nulas na Seção 4.1. Porém, comparando as Figuras 4.31 e 4.3, observa-se que apesar da diferença no formato das curvas e posição dos picos, os valores limites, mínimos e máximos, se mantêm os mesmos.

Considerando os valores limites, mínimo e máximo, para as TGEs obtidos das curvas da Figura 4.31, para cada um dos dias do intervalo considerado, sucessivos lançamentos foram feitos e as trajetórias, tanto do veículo em uma TGE, quanto do asteroide, foram integradas por 1100 dias. Desta forma, a Figura 4.32, apresenta a máxima aproximação entre o asteroide e a sonda para cada um destes lançamentos.

Em cada um dos dias considerados, dependendo de  $V_{SC}$ , diferentes resultados foram encontrados. Os melhores, ou seja, aqueles em que a sonda mais se aproxima do NEA, ocorreram entre 04/04/2026 e 07/04/2026, com uma distância menor do que  $10^6$  km, como pode ser observado na Figura 4.33, na qual se dá destaque para essa região do diagrama. Em especial, a menor distância atingida, de 83904 km, acontece para um lançamento com  $V_{SC} = 10,932389$  km/s no dia 06/04/2026, às 6h.

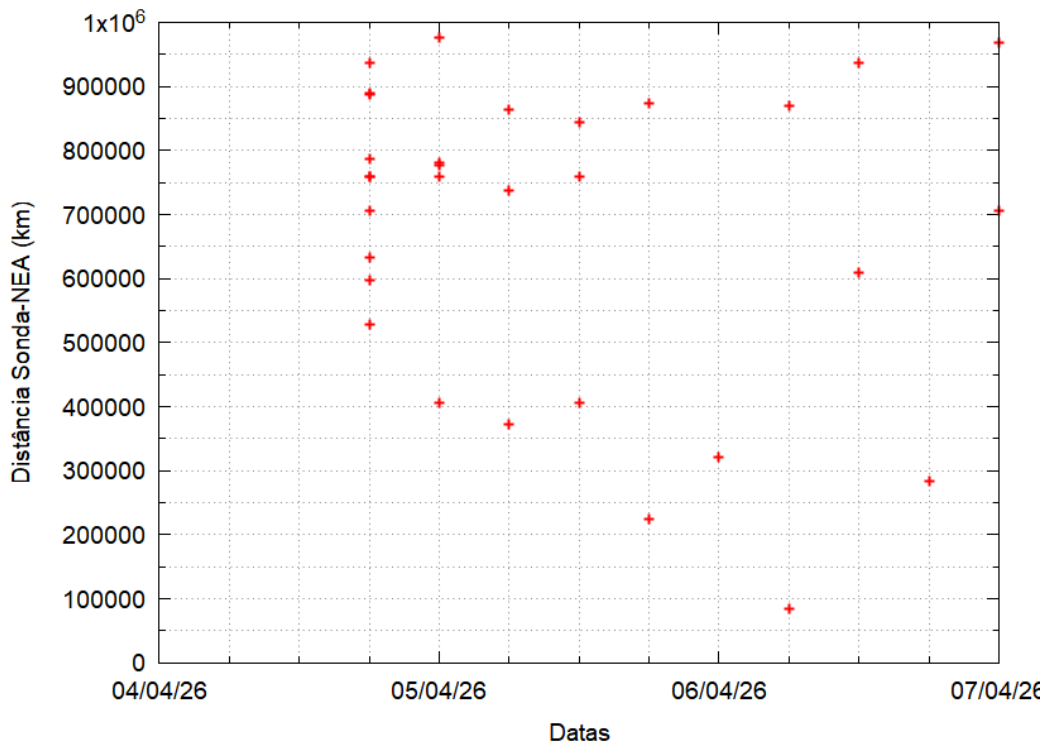
Porém, esta máxima aproximação não ocorre dentro do intervalo de um período orbital da TGE. Na Figura 4.34, as distâncias NEA-sonda são colocadas em função do tempo de voo, tal que se observa que a máxima aproximação entre os dois corpos acontece após 1050 dias, aproximadamente, sendo que o período orbital da TGE é de aproximadamente 340 dias. Assim, a aproximação ilustrada na Figura 4.35 acontece no dia 07/03/2029, após duas revoluções completas da TGE, em seu terceiro ciclo, e a Tabela 4.4 contém dados dessa aproximação. Para tempos de voo menores, dentro de um período orbital da TGE, as distâncias NEA-sonda tornam-se muito maiores, aproximadamente 30 milhões de km.

Figura 4.32. Distância mínima Sonda-Didymos para lançamento no período de 06 de março de 2026 a 29 de abril de 2026.



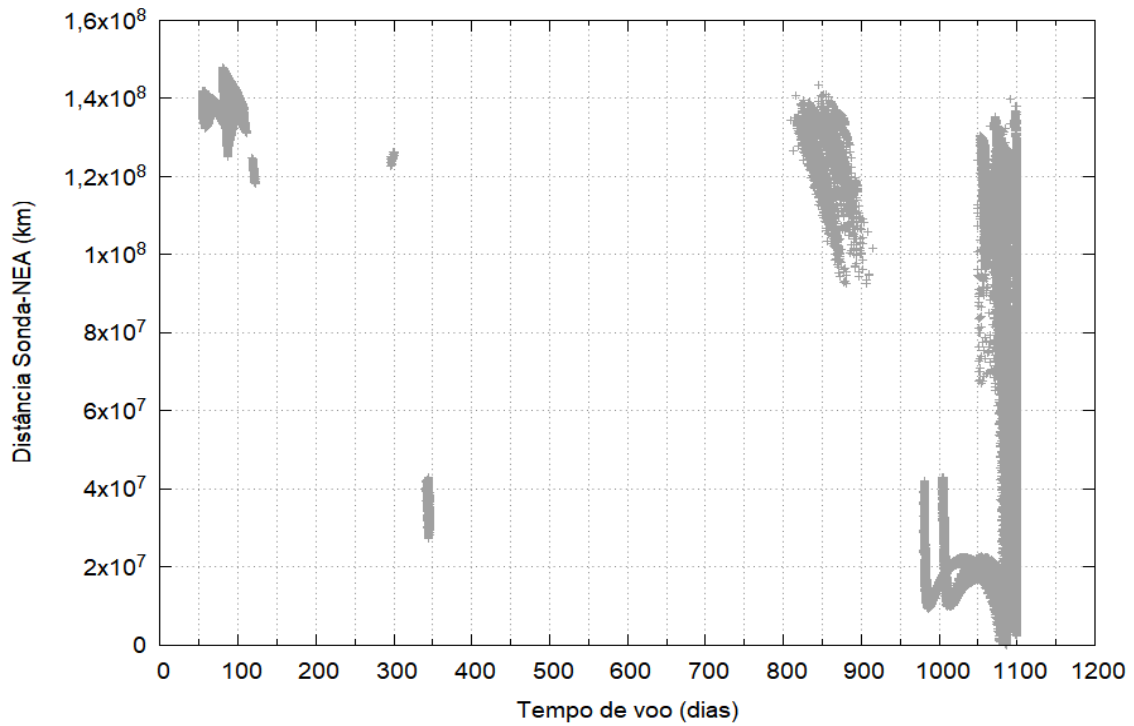
Fonte: Produção da autora.

Figura 4.33. Distância mínima Sonda-Didymos para lançamento no período de 04 de abril de 2026 a 06 de abril de 2026.



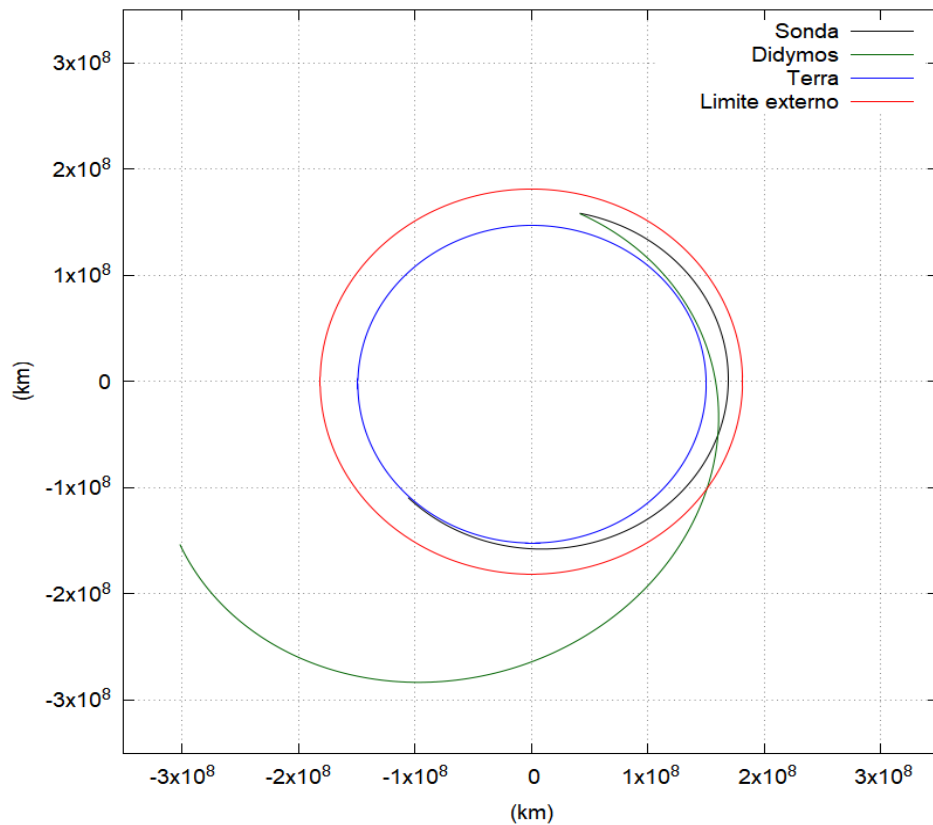
Fonte: Produção da autora.

Figura 4.34. Distância Sonda-Didymos para lançamento no período de 04 de abril de 2026 a 07 de abril de 2026, em função do tempo de voo.



Fonte: Produção da autora.

Figura 4.35. Diagrama da aproximação da sonda ao NEA 65803 Didymos em 07/03/2029.



Fonte: Produção da autora.

Tabela 4.4. Propriedades da transferência para o NEA 65803 Didymos.

Propriedades	Valores
Data do lançamento	06/04/2026, às 6h
Altitude da órbita de estacionamento terrestre	200 km
$C_3$ no lançamento – relativo à Terra	-1.796539 km <sup>2</sup> /s <sup>2</sup>
$V_{sc}$	10,932389 km/s
$\Delta V_1$ , via TGE	3,144139 km/s
Data de colisão	27/03/2029
Tempo de voo	1086 dias
$\Delta V_2$ no afélio	30 a 40 m/s
Distância à Terra, na aproximação	19 126 666 km
Velocidade relativa na aproximação	9,240300 km/s
Ângulo de impacto	15,04°

Fonte: Produção da autora.

#### 4.4.2 138971 (2001 CB21)

Na Tabela 4.5 são apresentados os elementos orbitais do asteroide 2001 CB21, enquanto na Figura 4.36 está representada sua órbita em conjunto com as órbitas circulares de raio  $R_{max,ext} = 1,21$  a.u. (limite superior das TGEs) e  $R_{max,int} = 0,83$  a.u. (limite inferior das TGEs).

Tabela 4.5. Elementos orbitais do NEA 138971 (2001 CB21).

Elementos orbitais	Valores	Elementos orbitais	Valores
<b>e</b>	0,333458	<b><math>\Omega</math></b>	353,726629°
<b>a</b>	1,03437 a.u.	<b><math>\omega</math></b>	271,798740°
<b>i</b>	7,898928°	<b>M</b>	55,936799°

Elementos orbitais para época 2459200,5 (17/12/2020).

Fonte: JPL (2021).

Na Figura 4.36, o asteroide está dentro do alcance das TGEs enquanto permanecer entre os pontos  $C_1$  e  $C'_1$  e entre  $C'_2$  e  $C_2$ , tal que a investigação conduzida foi feita para o período em que a Terra se desloca entre os pontos  $T_1$  e  $T_2$ , entre 31 de janeiro de 2026 e 26 de março de 2026, para investigar a interceptação do asteroide entre  $C'_2$  e  $C_2$ . Para este intervalo de tempo, as curvas de velocidade das TGs são apresentadas na Figura 4.37 e as distâncias NEA-Sonda na Figura 4.38.

Figura 4.36. Diagramas das órbitas da Terra, do NEA 138971 (2001 CB21) e dos limites interno e externo das TGEs.

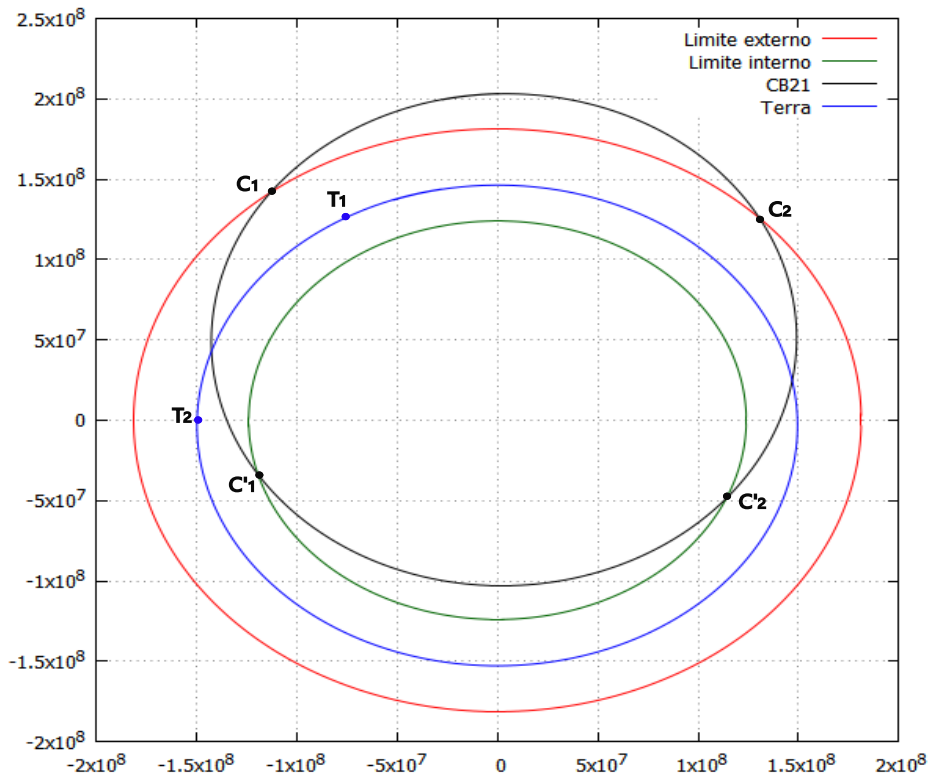


Figura 4.37. Variação da magnitude da velocidade de inserção em uma trajetória G ( $V_{SC}$ ) em km/s para o período de 31 de janeiro de 2026 a 26 de março de 2026.

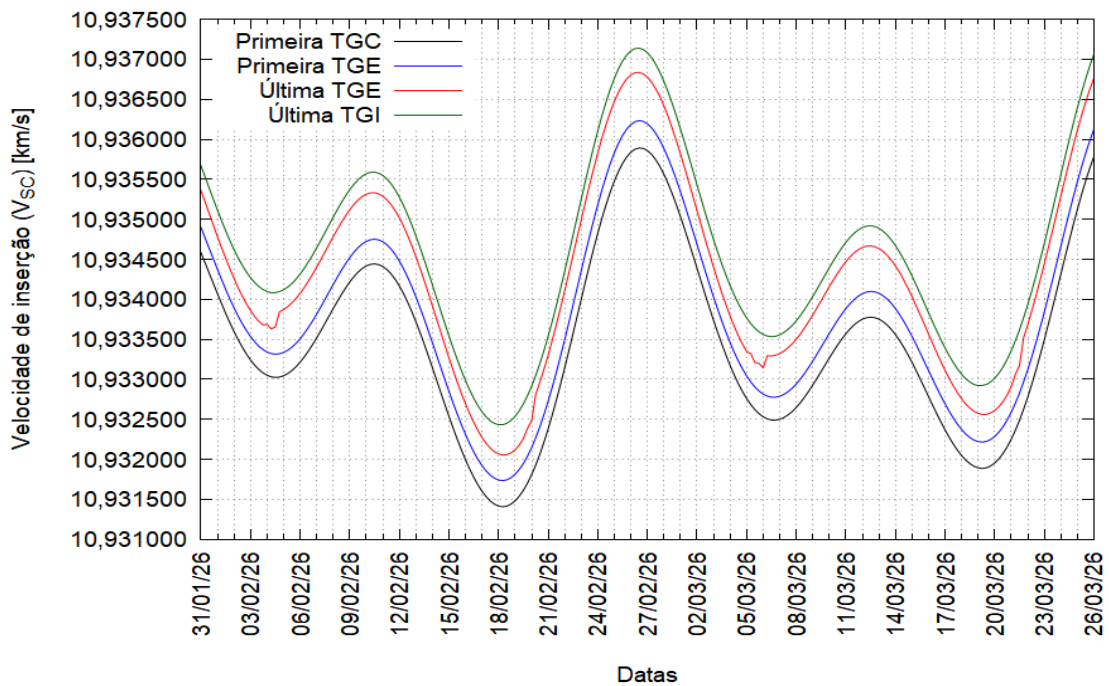
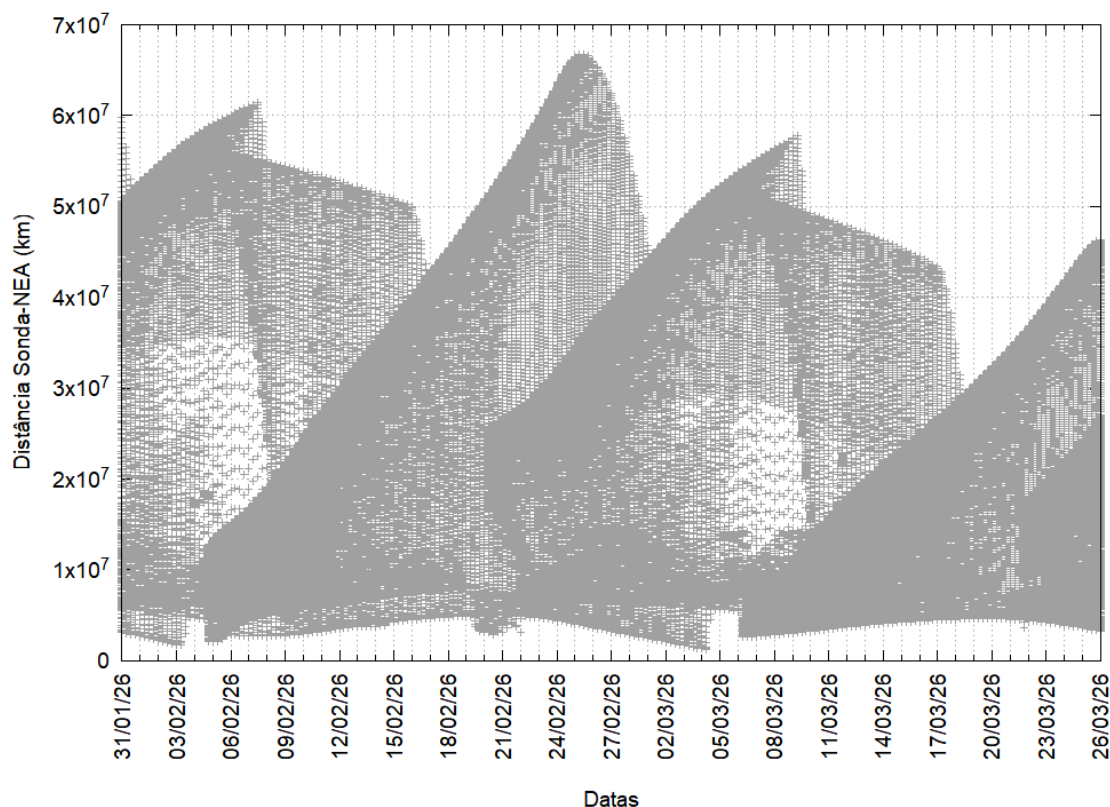


Figura 4.38. Distância mínima Sonda-2001 CB21 para lançamento no período de 31 de janeiro de 2026 a 26 de março de 2026.

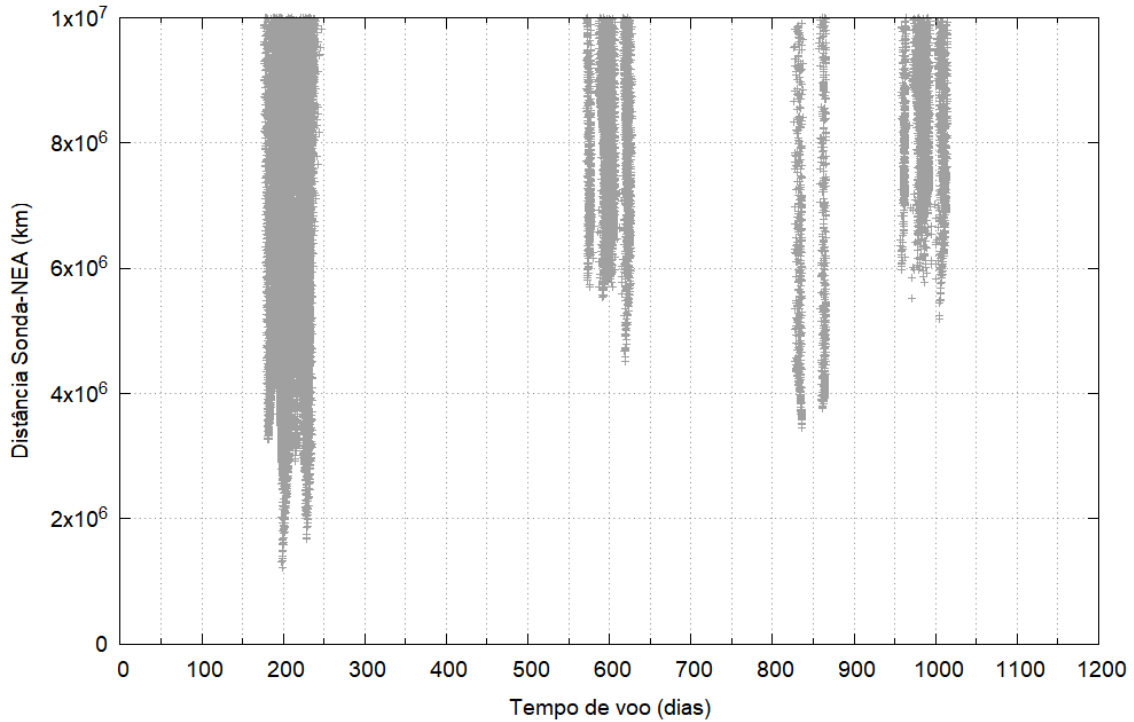


Fonte: Produção da autora.

Múltiplas soluções com distância Sonda-NEA menor do que dois milhões de km foram encontradas, sendo a distância de 1,23 milhões de km, para um lançamento em 04/03/2026, às 6:00, com  $V_{SC} = 10.9333339$  km/s a menor dentre elas. E, diferente do observado para o NEA Didymos, o tempo de voo (198 dias) para essa aproximação é de menos de um período orbital, conforme apresentado na Figura 4.39.

Diferente do que foi feito para os demais asteroides, como 2001 CB21 tem o plano de sua órbita com inclinação mais acentuada do que os dos demais, para corrigir a distância e promover uma mudança na inclinação do plano da sonda, realizou-se uma nova análise numérica para mapear o  $\Delta V$  necessário para causar o impacto entre os dois corpos. Dessa forma, um  $\Delta V$  de módulo 0,32 km/s foi aplicado no afélio da trajetória, tal que na Tabela 4.6 são apresentados dados referentes a esse encontro e na Figura 4.40 o diagrama das trajetórias de ambos os corpos antes e depois da correção.

Figura 4.39. Distância Sonda-2001 CB21 para lançamento no período de 31 de janeiro de 2026 a 26 de março de 2026, em função do tempo de voo.



Fonte: Produção da autora.

Tabela 4.6. Propriedades da transferência para o NEA 138971 (2001 CB21).

Propriedades	Valores
Data do lançamento	04/0/2026, às 6:00
Altitude da órbita de estacionamento terrestre	200 km
$C_3$ no lançamento – relativo à Terra	-1,775766 km <sup>2</sup> /s <sup>2</sup>
$V_{SC}$	10,933339 km/s
$\Delta V_1$ , via TGE	3,145089 km/s
Data de impacto	20/10/2026
Tempo de voo	198,51 dias
$\Delta V_2$ no afélio	0,32 km/s
Distância à Terra, no impacto	19 126 666 km
Velocidade relativa no impacto	12,777939 km/s
Ângulo de impacto	41,36°

Fonte: Produção da autora.

Figura 4.40. Diagrama da aproximação da sonda ao NEA 138971 (2001 CB21) em 20/10/2026.

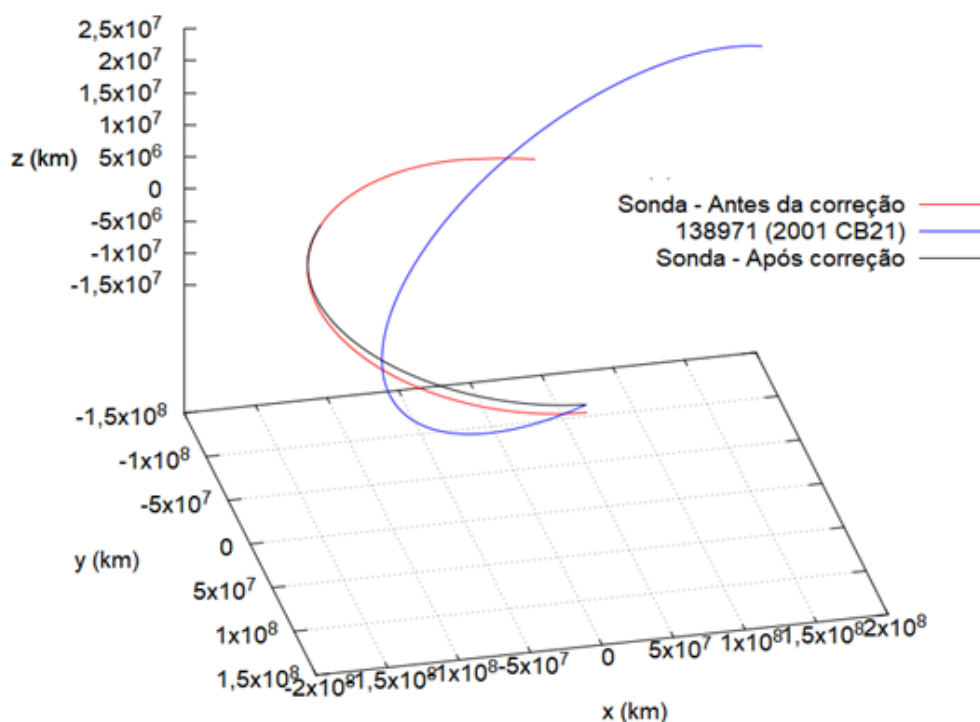


Diagrama em três dimensões, no sistema heliocêntrico demonstrando a transferência.  
 Fonte: Produção da autora.

#### 4.4.3 3361 Orpheus

Na Tabela 4.7 são apresentados os elementos orbitais do asteroide 3361 Orpheus. Para este asteroide, duas janelas de lançamento foram investigadas, a primeira de 15/02/2025 – 08/05/2025 e a segunda de 01/07/2025 – 31/07/2025. Para estes intervalos de tempo, as curvas de velocidade das TGs são apresentadas na Figura 4.41.

Tabela 4.7. Elementos orbitais do NEA 3361 Orpheus.

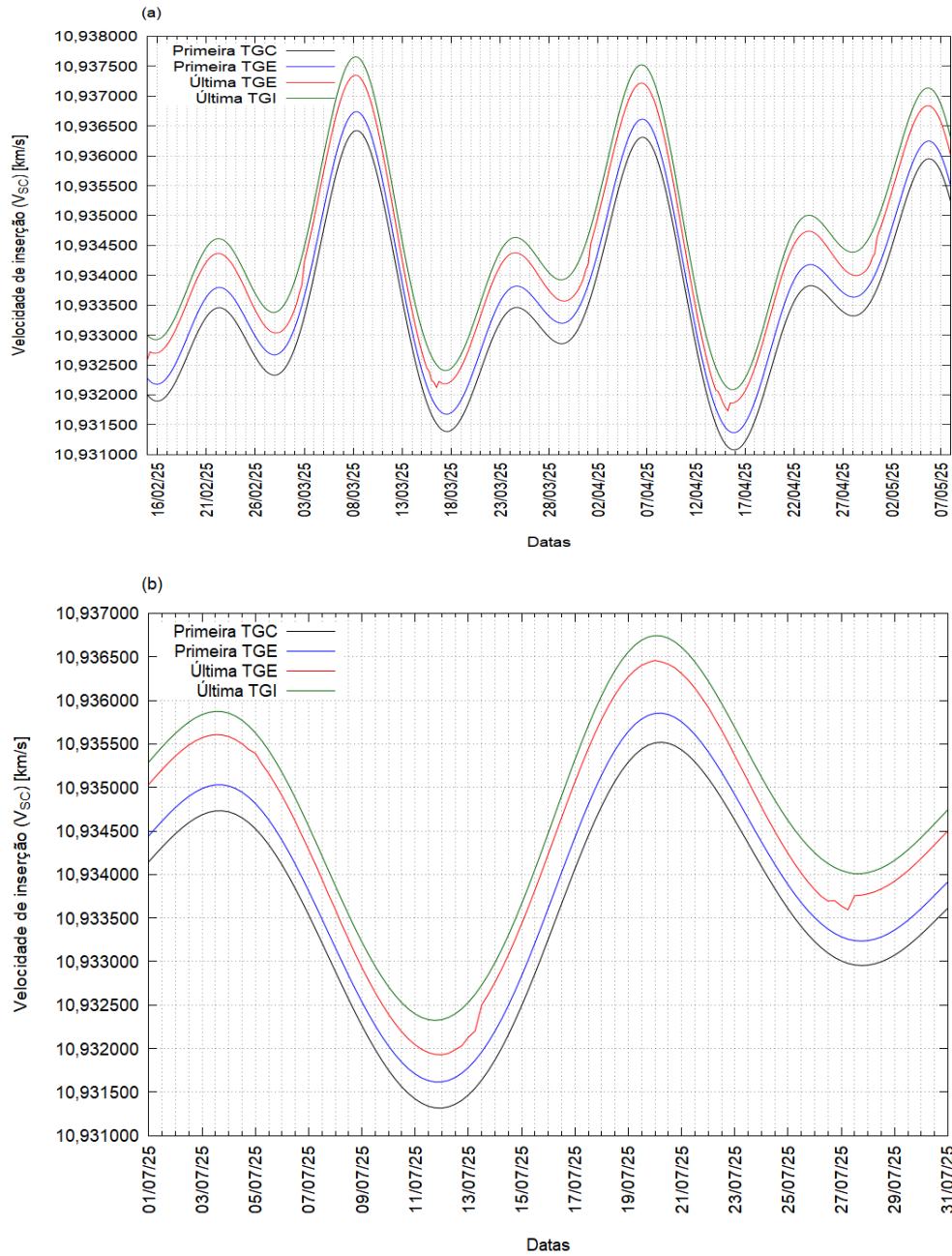
Elementos orbitais	Valores	Elementos orbitais	Valores
<b>e</b>	0,322752	<b><math>\Omega</math></b>	189,530550°
<b>a</b>	1,209662 a.u.	<b><math>\omega</math></b>	301,695207°
<b>i</b>	2,685064°	<b>M</b>	102,829902°

Elementos orbitais para época 2459200,5 (17/12/2020).

Fonte: JPL (2021).



Figura 4.41. Variação da magnitude da velocidade de inserção em uma trajetória G ( $V_{SC}$ ) em km/s para os períodos considerados para o NEA 3361 Orpheus.



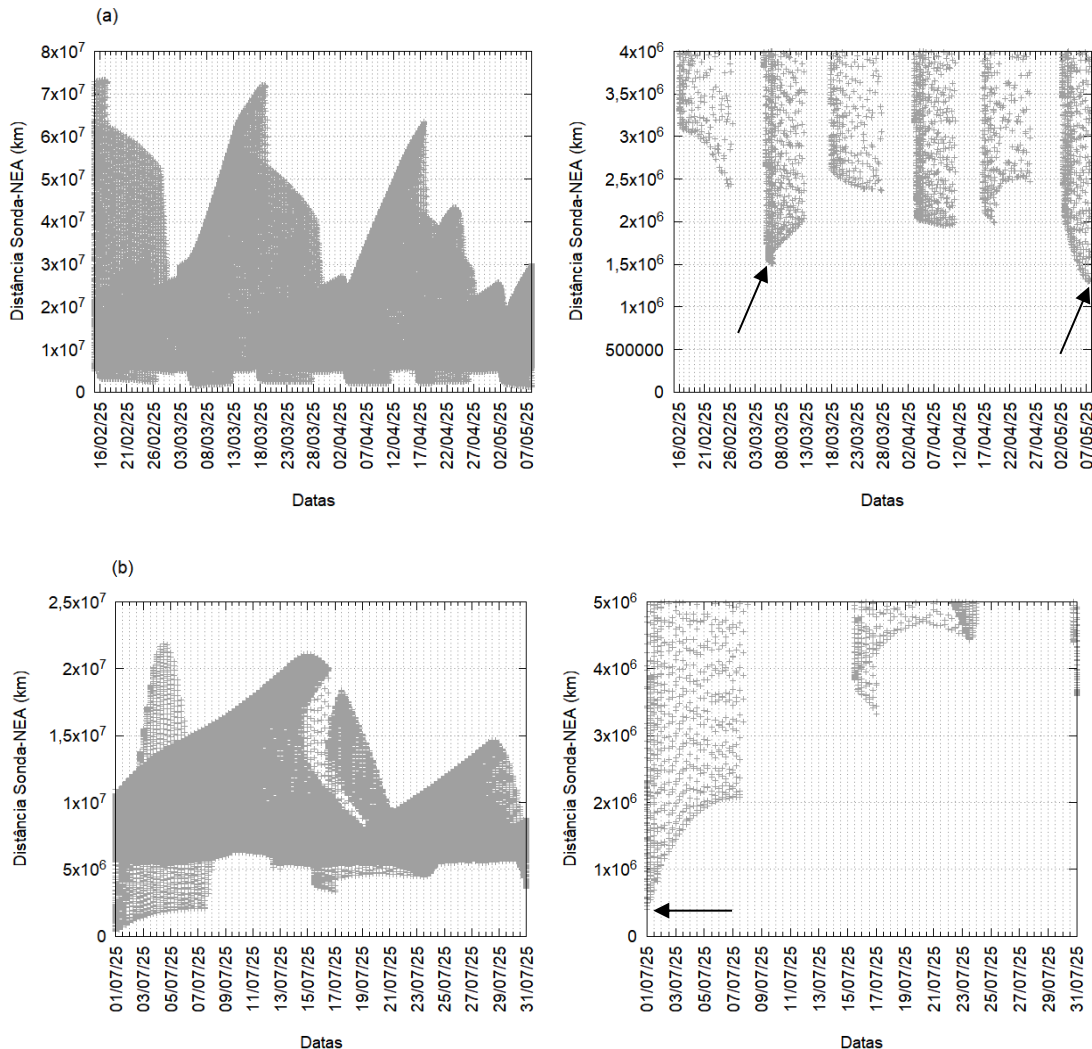
(a) Para o intervalo entre 15/02/2025 e 08/05/2025. (b) Para o intervalo entre 01/07/2025 e 31/07/2025.

Fonte: Produção da autora.

Considerando os valores limites, mínimo e máximo, para as TGEs obtidos das curvas da Figura 4.41, para cada um dos dias do intervalo considerado, sucessivos lançamentos foram feitos e as trajetórias, tanto do veículo em uma TGE, quanto do asteroide, foram integradas por 1100 dias. Desta forma, a Figura

4.42, apresenta a máxima aproximação entre o asteroide e a sonda para cada um destes lançamentos.

Figura 4.42. Distância Sonda-NEA para os períodos considerados para o NEA 3361 Orpheus.



(a) Para o intervalo entre 15/02/2025 e 08/05/2025. (b) Para o intervalo entre 01/07/2025 e 31/07/2025.

Fonte: Produção da autora.

Para o primeiro intervalo, dois lançamentos, que corresponderiam às máximas aproximações entre NEA e sonda, foram considerados, um no dia 05/03/2025 e outro no dia 08/05/2025. Em ambos, uma correção por volta do 25º dia após o lançamento foi necessária para promover a aproximação completa entre os dois corpos.

Na Tabela 4.8 são apresentados os dados para a transferência correspondente ao lançamento do dia 5, em que um  $\Delta V$  entre 48 e 60 m/s é o suficiente para

vencer os  $1,5 \times 10^6$  km de distância restantes para o encontro, enquanto na Tabela 4.9 são apresentados os dados para a transferência correspondente ao lançamento do dia 8, em que um  $\Delta V$  entre 18 e 30 m/s é o suficiente para vencer os  $1,3 \times 10^6$  km de distância restantes para o encontro

Tabela 4.8. Propriedades da 1ª transferência para o NEA 3361 Orpheus.

<b>Propriedades</b>	<b>Valores</b>
Data do lançamento	05/03/2025, às 12h
Altitude da órbita de estacionamento terrestre	200 km
$C_3$ no lançamento – relativo à Terra	-1,530003 km <sup>2</sup> /s <sup>2</sup>
$V_{sc}$	10,935561 km/s
$\Delta V_1$ , via TGE	3,153635 km/s
Data de impacto	04/03/2026
Tempo de voo	367,89 dias
$\Delta V_2$ no afélio	48 a 60 m/s
Distância à Terra no impacto	376 576 144 km
Velocidade relativa no impacto	9,886548 km/s
Ângulo de impacto	16,80°

Fonte: Produção da autora.

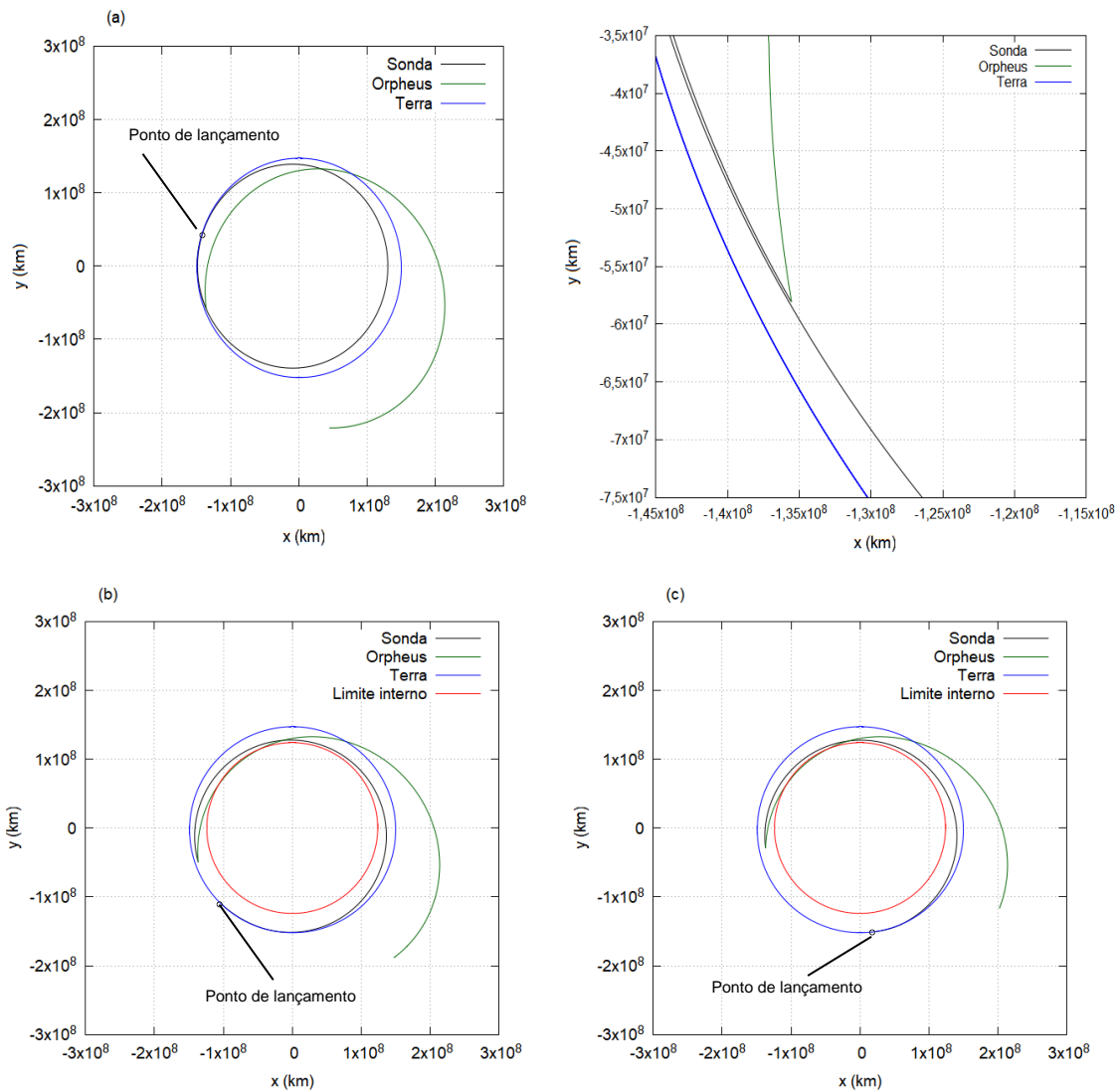
Tabela 4.9. Propriedades da 2ª transferência para o NEA 3361 Orpheus.

<b>Propriedades</b>	<b>Valores</b>
Data do lançamento	08/05/2025, às 0h
Altitude da órbita de estacionamento terrestre	200 km
$C_3$ no lançamento – relativo à Terra	-1,530506 km <sup>2</sup> /s <sup>2</sup>
$V_{sc}$	10,935550 km/s
$\Delta V_1$ , via TGE	3,153362 km/s
Data de impacto	03/05/2026
Tempo de voo	301,18 dias
$\Delta V_2$ no afélio	18 a 30 m/s
Distância à Terra no impacto	325 347 488 km
Velocidade relativa no impacto	6,383806 km/s
Ângulo de impacto	10,73°

Fonte: Produção da autora.

Para o segundo intervalo considerado, o lançamento analisado foi feito no dia 01/07/2025 (menor distância sonda-NEA, conforme Figura 4.42(b)), com a aplicação de um  $\Delta V$  entre 12 e 25 m/s, no afélio, após 24 dias do lançamento, para vencer a distância de 404000 km para o encontro. A Tabela 4.10 apresenta o resumo das informações desta transferência, enquanto a Figura 4.43 apresenta o diagrama das trajetórias das três transferências discutidas até o momento.

Figura 4.43. Diagrama da aproximação da sonda ao NEA 3361 Orpheus.



(a) Para o lançamento em 05/03/2025, com detalhe na região de impacto. (b) Para o lançamento em 08/03/2025. (c) Para o lançamento em 01/07/2025.

Fonte: Produção da autora.

Tabela 4.10. Propriedades da 3ª transferência para o NEA 3361 Orpheus.

<b>Propriedades</b>	<b>Valores</b>
Data do lançamento	01/07/2025, às 0h
Altitude da órbita de estacionamento terrestre	200 km
$C_3$ no lançamento – relativo à Terra	-1,553900 km <sup>2</sup> /s <sup>2</sup>
$V_{sc}$	10,935550 km/s
$\Delta V_1$ , via TGE	3,152553 km/s
Data de impacto	02/26/2026
Tempo de voo	240 dias
$\Delta V_2$ no afélio	12 a 25 m/s
Distância à Terra no impacto	89 997 492 km
Velocidade relativa no impacto	6,082983 km/s
Ângulo de impacto	8,89°

Fonte: Produção da autora.

#### 4.4.4 99942 Apophis

Na Tabela 4.11 são apresentados os elementos orbitais do asteroide 99942 Apophis. Para este asteroide, foram considerados lançamentos entre 03/03/2028 e 27/06/2028. Para estes intervalos de tempo, as curvas de velocidade das TGEs são apresentadas na Figura 4.44.

Tabela 4.11. Elementos orbitais do NEA 99942 Apophis.

<b>Elementos orbitais</b>	<b>Valores</b>	<b>Elementos orbitais</b>	<b>Valores</b>
<b>e</b>	0,191195	<b><math>\Omega</math></b>	204,446029°
<b>a</b>	0,922438 a.u.	<b><math>\omega</math></b>	126.401880°
<b>i</b>	3,331370°	<b>M</b>	180,429373 °

Elementos orbitais para época 2459200,5 (17/12/2020)

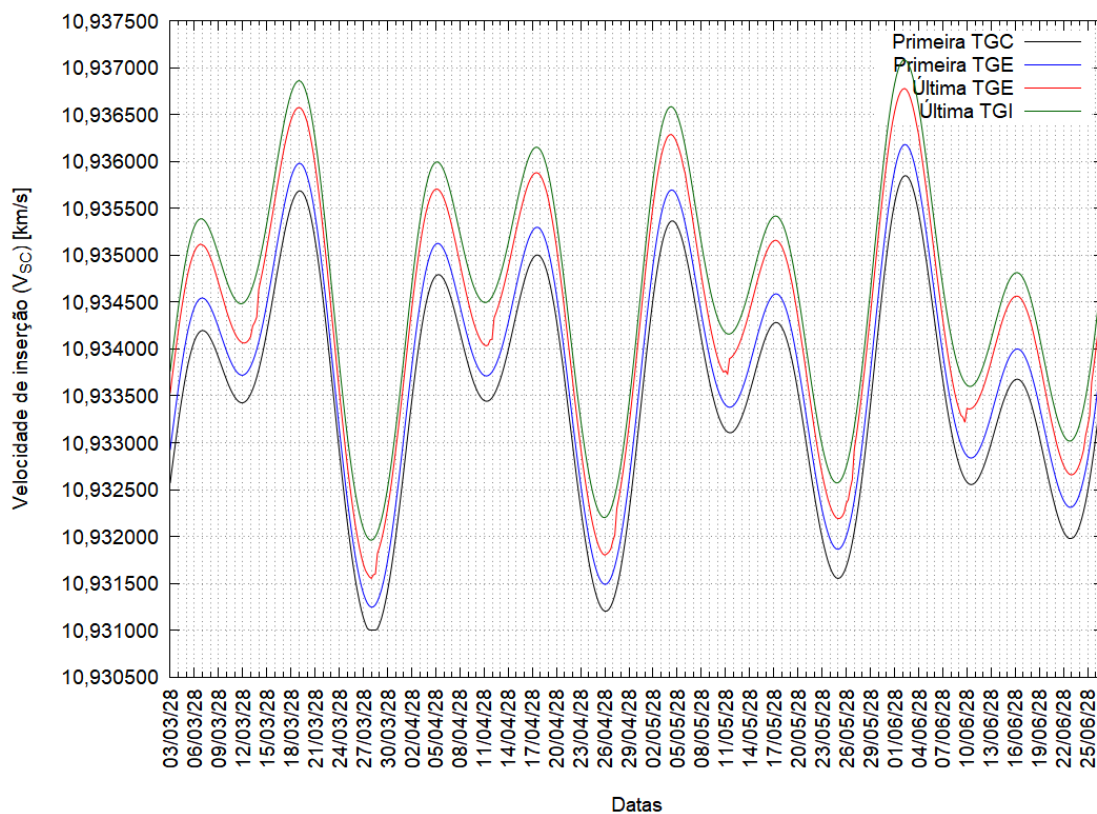
Fonte: JPL (2021).

Considerando os valores limites, mínimo e máximo, para as TGEs obtidos das curvas da Figura 4.44, para cada um dos dias do intervalo considerado, sucessivos lançamentos foram feitos e as trajetórias, tanto do veículo em uma TGE, quanto do asteroide, foram integradas por 1100 dias. Desta forma, a Figura 4.45 apresenta a máxima aproximação entre o asteroide e a sonda para cada um destes lançamentos, limitadas àquelas em que distância NEA-sonda é menor do que 100 mil km.

O lançamento considerado, diferente dos demais casos analisados, não corresponde àquele em que há maior aproximação NEA-sonda, uma vez que para esse o tempo de transferência é maior (cerca de 800 dias). Como há outras soluções com distância menor do que 100 mil km e tempos de transferência menores, essas foram escolhidas para a transferência, indicadas na Figura 4.46 por setas.

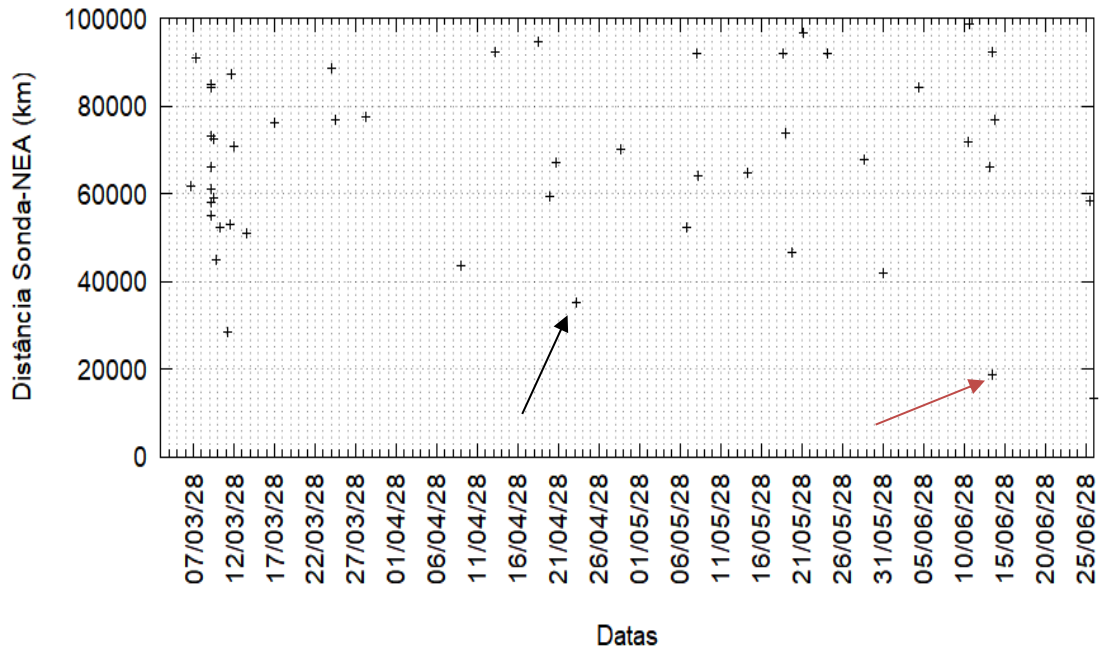
Na Tabela 4.12 são apresentados os dados para a transferência correspondente a uma destas opções, para um lançamento do dia 23/04/2028, em que um  $\Delta V$  entre 20 e 30 m/s é suficiente para vencer os 35 228 km de distância restantes para o encontro, enquanto a Figura 4.47 traz o diagrama da aproximação dos corpos.

Figura 4.44. Variação da magnitude da velocidade de inserção em uma trajetória G ( $V_{sc}$ ) em km/s para os períodos considerados para o NEA 99942 Apophis.



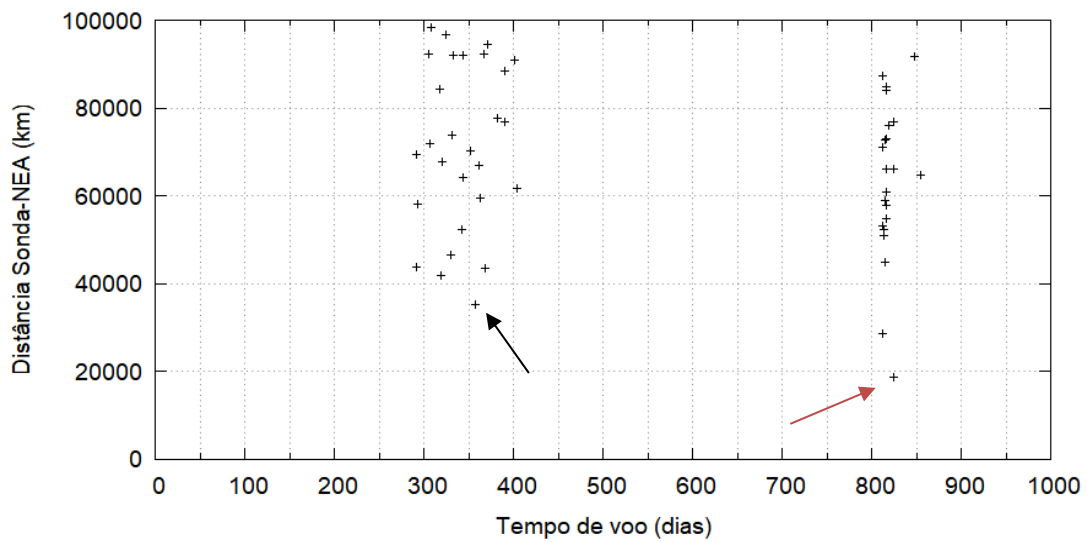
Fonte: Produção da autora.

Figura 4.45. Distância Sonda-NEA para os períodos considerados para o 99942 Apophis.



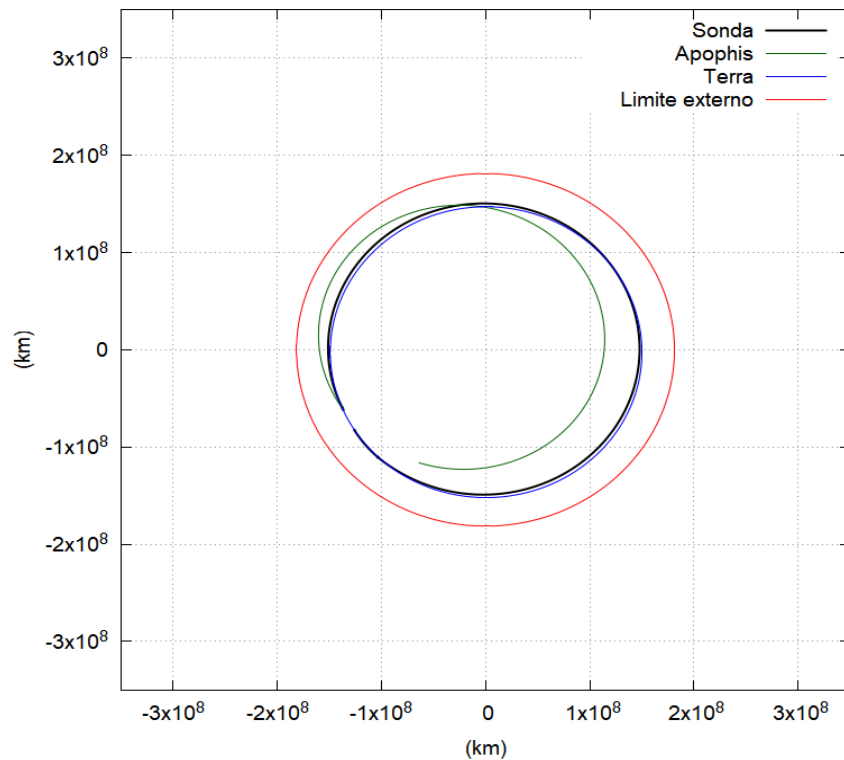
Fonte: Produção da autora.

Figura 4.46. Distância Sonda-NEA para os períodos considerados para o 99942 Apophis em função do tempo de transferência e distância sonda-NEA.



Fonte: Produção da autora.

Figura 4.47. Diagrama da aproximação da sonda ao NEA 99942 Apophis.



Fonte: Produção da autora.

Tabela 4.12. Propriedades da transferência para o NEA 99942 Apophis.

Propriedades	Valores
Data do lançamento	23/04/2028, às 6h
Altitude da órbita de estacionamento terrestre	200 km
$C_3$ no lançamento – relativo à Terra	-1,597335 km <sup>2</sup> /s <sup>2</sup>
$V_{SC}$	10,932494 km/s
$\Delta V_1$ , via TGE	3,150567 km/s
Data de impacto	13/04/2029
Tempo de voo	356,69 dias
$\Delta V_2$ no afélio	20 a 30 m/s
Distância à Terra no impacto	24 184 985 km
Velocidade relativa no impacto	5,220245 km/s
Ângulo de impacto	22,27°

Fonte: Produção da autora.



#### 4.5 Análise de custos

Para analisar a redução de custos proporcionada pela utilização das TGEs, fazem-se comparações dos  $\Delta V$ s necessários para realizar missões semelhantes, por meio de manobras de referência, como descrito a seguir.

Pelos resultados apresentados na Seção 4.1, as velocidades características de inserção das TGEs, partindo de uma órbita terrestre de 200 km de altitude, variam de 10,932280 km/s a 10,932622 km/s (Tabela 4.1). Para a mesma altitude inicial, para que uma sonda seja colocada em uma trajetória hiperbólica de escape, a velocidade necessária será de 11,015418 km/s. Desta forma, calcula-se o  $\Delta V$  necessário para estes dois tipos de transferências pela diferença entre a velocidade característica da órbita circular e os valores apresentados anteriormente, conforme as Equações 4.1 e 4.2:

$$\Delta V = V_{esc} - V_c \quad (4.1)$$

$$V_c = \sqrt{\frac{\mu}{r}} \quad (4.2)$$

Em que  $V_{esc}$  é a velocidade de escape, seja pela TGE, seja pela trajetória hiperbólica,  $r$  o raio da órbita circular inicial e  $V_c$  a velocidade da órbita circular, que para a altitude de 200 km tem valor de 7,789076 km/s. Assim, a Tabela 4.13 apresenta os  $\Delta V$ s para cada tipo de trajetória e os percentuais de redução das TGEs em relação à trajetória hiperbólica.

Tabela 4.13. Comparação de  $\Delta V$ s entre TGEs e trajetórias hiperbólicas.

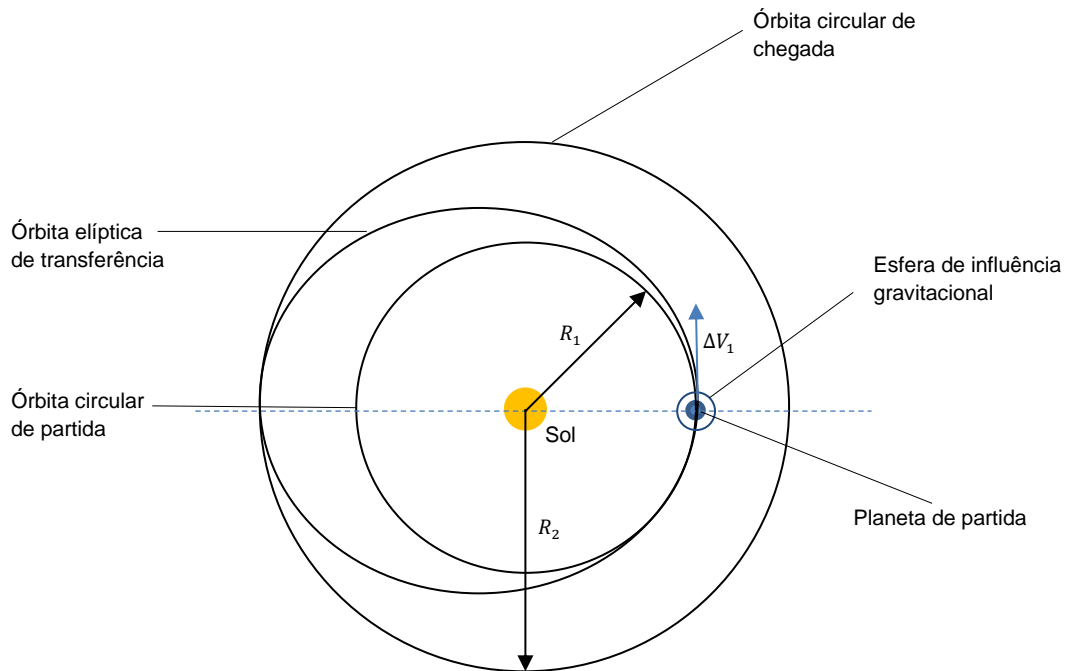
Tipo de trajetória	$V_{esc}$ (km/s)	$\Delta V$ (km/s)	Redução do $\Delta V$
Hiperbólica	11,015418	3,226342	-
Primeira TGE	10,932280	3,143204	2,612998%
Última TGE	10,932622	3,143546	2,566438%

Fonte: Produção da autora.

Portanto, conclui-se que há uma redução de 2,6% em relação à trajetória hiperbólica. Lembrando ainda que todas as TGEs possuem  $V_{sc}$  menor do que as velocidades de escape via trajetórias hiperbólicas, para todas as altitudes e configurações estudadas, como apresentado nas Tabelas 4.1 e Figuras 4.3 e 4.4.

Mas, outro ponto que também precisa ser considerado ao avaliar a redução no  $\Delta V$  é o alcance das TGEs. Conforme apresentado na Seção 4.3, as TGEs que mais se distanciam da Terra, em direção à Vênus e Marte possuem raio de periélio de 0,82 a.u. e raio de afélio de 1,21 a.u., respectivamente. Para comparação, a referência utilizada é o primeiro impulso aplicado para uma manobra de Hohmann interplanetária, para que um veículo espacial seja colocado em uma órbita circular que tenha raio igual a essas distâncias. O diagrama para esta manobra de referência é mostrado na Figura 4.48 e um método de cálculo pode ser encontrado em Curtis (2013).

Figura 4.48. Diagrama do primeiro impulso para a manobra de Hohmann interplanetária.

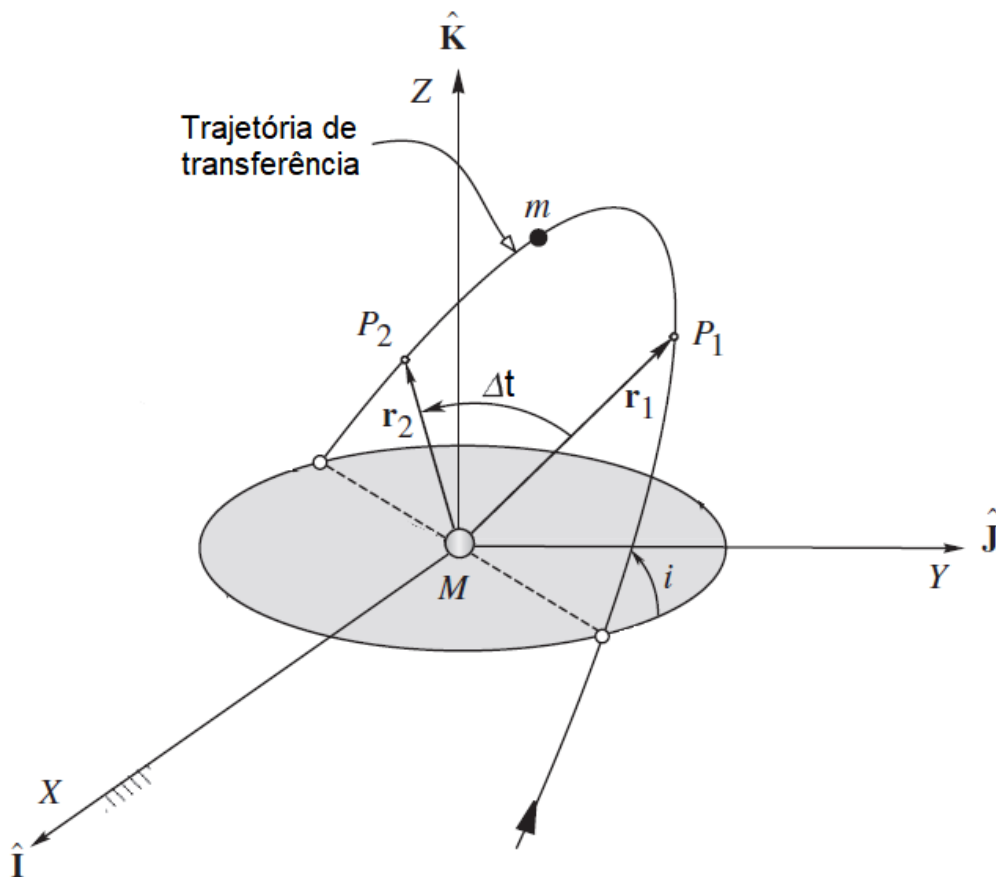


Fonte: Produzida pela autora.

Partindo da Terra ( $h = 200$  km), para uma órbita externa de raio 1,21 a.u., o primeiro  $\Delta V$  requerido para essa manobra é de 3,3055 km/s, enquanto para uma órbita interna de 0,82 a.u. é 3,3169 km/s. Retomando os  $\Delta V$ s apresentados na Tabela 4.13, em que a velocidade de 10,932280 é aquela que gera a TGE com maior alcance externo, tem-se uma redução percentual de 4,8% em relação ao  $\Delta V$  necessário para a manobra de Hohmann.

Para avaliação da redução dos  $\Delta V$ s nas missões para asteroides, transferências via método de Lambert foram tomadas como referências. O método de Lambert é definido para o Problema de Dois Corpos, tal que conhecidos os vetores posição na partida e chegada, assim como o tempo de transferência desejado, pode-se definir a órbita de transferência entre esses dois pontos, conforme esquematizado na Figura 4.49.

Figura 4.49. Diagrama do método de Lambert.



Fonte: Adaptado de Curtis (2013).

O Anexo A apresenta valores de  $\Delta V$ s para transferências via Lambert para os quatro asteroides estudados, variando de 3,270 km/s a 3,330 km/s, tal que as TGEs representam uma redução de 3,5% – 4%, em comparação. Porém, por ser definido para o Problema de Dois Corpos, o método de Lambert não é uma comparação completamente justa às TGEs, que são definidas para o P4C, de forma que se pode inferir que as TGEs podem representar uma redução ainda maior no custo de missões desse tipo.



## 5 CONCLUSÃO

Neste trabalho, conjuntos de trajetórias derivados de órbitas periódicas retrógradas em torno do ponto de equilíbrio lagrangiano  $L_1$  foram simulados numericamente, sendo identificadas e definidas três diferentes tipos de trajetórias: TGCs, que colidem com a Lua; TGEs, que escapam do sistema Terra-Lua, e; TGIs, que ficam restritas ao sistema Terra-Lua.

Estes tipos de trajetórias foram definidas a partir de suas velocidades de inserção,  $V_{SC}$ , e da evolução temporal de seus elementos orbitais, de forma que a análise destes possibilita a inserção e manutenção de um veículo espacial, inicialmente em órbita terrestre circular, em uma destas TGs. Identificou-se também, que em vista da complexa dinâmica entre os quatro corpos envolvidos, as grandezas  $h$ ,  $f_{Lua}$ ,  $\Omega_{Lua}$  e  $f_{Terra}$  influenciam a definição das curvas de  $V_{SC}$ , ainda que as últimas não alterem seus limites inferior e superior.

Sendo TGEs trajetórias que escapam do sistema Terra-Lua, identificou-se quais as distâncias máximas atingidas por um veículo espacial neste tipo de percurso (0,8343 a.u. e 1,2117 a.u) e quais as variáveis que influenciam estes alcances ( $f_{Lua}$ ,  $\Omega_{Lua}$  e  $f_{Terra}$ ), para que missões para os NEAs 99942 Apophis, 138971 (2001 CB21), 65803 Didymos e 3361 Orpheus fossem planejadas.

A análise das missões para estes quatro NEAs foi possibilitada pela definição de um procedimento fundamentado no estudo destas trajetórias para o P4C3D, mas implementado para uma dinâmica mais complexa, utilizando as efemérides reais dos corpos. Nestas missões, exemplificou-se a aproximação e impacto em relação aos asteroides com  $\Delta V$  totais menores do que 3,5 km/s e  $C_3$  menores do que zero, tal que o  $\Delta V$  no lançamento é 3,5 – 4% menor do que para transferências similares via método de Lambert (vide Anexo A).

Como sugestão de continuação para este trabalho, os resultados da etapa de caracterização das TGs podem ser utilizados para a análise de manobras de swing-by controladas, a fim de se atingir TGEs com máximo alcance com mais regularidade. Ainda dentro da análise da evolução dos elementos orbitais, uma avaliação mais cuidadosa das TGIs, considerando-as no sistema geocêntrico, pode ser conduzida, uma vez que neste trabalho, visto o enfoque no

planejamento de missões para os NEAs e consequente enfoque nas TGEs, não houve detalhamento deste último tipo de trajetória. Além disso, pode-se analisar a viabilidade de missões para outras classes de NEAs, visto que neste trabalho, os asteroides eram em maioria da classe Apolo.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ATKINSON, H.; TICKELL, C.; WILLIAMS, D. **Report of the task force on potentially hazardous near Earth objects**, 2000. Disponível em: [https://spaceguardcentre.com/wp-content/uploads/2014/04/full\\_report.pdf](https://spaceguardcentre.com/wp-content/uploads/2014/04/full_report.pdf).
- BIESBROEK, R. **Lunar and interplanetary trajectories**. [S.l.]: Springer, 2016.
- BONIN, G. et al. **Prospector-1**: the first commercial small spacecraft mission to an asteroid, 2016. Disponível em: <https://digitalcommons.usu.edu/smallsat/2016/TS6NextOnPad/2/>.
- BROUCKE, R. **Periodic orbits in the restricted three body problem with earth-moon masses**. Pasadena: Jete Propulsion Laboratory, 1968.
- BROUCKE, R. The celestial mechanics of gravity assist. In: ASTRODYNAMICS CONFERENCE, 1988. **Proceedings...** 1988. p. 4220.
- BURBINE, T. H. **Asteroids**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2016.
- CARTWRIGHT, J. Physicists discover a whopping 13 new solutions to three-body problem. **Science**, 2013. Disponível em: <https://www.sciencemag.org/news/2013/03/physicists-discover-whopping-13-new-solutions-three-body-problem>>. Acesso em: 20 set. 2020.
- CHAPMAN, C. R. The hazard of near-Earth asteroid impacts on earth. **Earth and Planetary Science Letters**, v. 222, n. 1, p. 1--15, 2004.
- CHENG, A. F. et al. Asteroid impact and deflection assessment mission. **Acta Astronautica**, v. 115, p. 262-269, 2015.
- CHENG, A. F. et al. AIDA DART asteroid deflection test: planetary defense and science objectives. **Planetary and Space Science**, v. 157, p. 104-115, 2018.
- CURTIS, Howard D. **Orbital mechanics for engineering students**. Butterworth-Heinemann, 2013.
- DE MELO, C. F. et al. Alternative paths for insertion of probes into high inclination lunar orbits. **Advances in Space Research**, v. 40, n. 1, p. 58-68, 2007.
- DE MELO, C. F.; MACAU, E. E. N.; WINTER, O. C. Alternative Transfers to the NEOs 99942 Apophis, 1994 WR12, and 2007 UW1 via Derived Trajectories from Periodic Orbits of Family G. **Mathematical Problems in Engineering**, v. 2009, 2009. GLASSMEIER, K.-H. et al. The Rosetta mission: flying towards the origin of the solar system. **Space Science Reviews**, v. 128, p. 1-21, 2007.

GURFIL, P.; SEIDELMANN, P. K. **Celestial mechanics and astrodynamics: theory and practice.** [S.I.]: Springer, v. 436, 2016.

JAPAN AEROSPACE EXPLORATOIN AGENCY - JAXA. **JAXA Hayabusa2 Project.** 2021. Disponivel em: <<https://www.hayabusa2.jaxa.jp/en/news/schedule/>>. Acesso em: 03 fev. 2021.

JET PROPULSION LABORATORY - JPL. WISE Revises numbers of asteroids near Earth. **Jet Propulsion Laboratory**, 2011. Disponivel em: <<https://www.jpl.nasa.gov/images/wise-revises-numbers-of-asteroids-near-earth>>. Acesso em: 20 abr. 2020.

JET PROPULSION LABORATORY - JPL. **Small-body database browser.** 2021. Disponivel em: <<https://ssd.jpl.nasa.gov/sbdb.cgi>>. Acesso em: 13 dez. 2020.

KAWAGUCHI, J.; FUJIWARA, A.; UESUGI, T. Hayabusa—its technology and science accomplishment summary and Hayabusa-2. **Acta Astronautica**, v. 62, n. 10-11, p. 639-647, 2008.

KOHLHASE, C.; PENZO, P. Voyager mission description. **Space Science Reviews**, v. 21, p. 77-101, 1977.

LABUNSKY, A. V.; PAPKOV, O. V.; SUKHANOV, K. G. **Multiple gravity assist interplanetary trajectories.** [S.I.]: CRC Press, 1998.

LAURETTA, D. S. et al. OSIRIS-REx: sample return from asteroid (101955) Bennu. **Space Science Reviews**, v. 212, n. 1-2, p. 925-984, 2017.

MARCHAL, C. **The three-body problem.** Amsterdam: Elsevier, 1990.

MCCALL, G. J. H.; BOWDEN, A. J.; HOWARTH, R. J. **The history of meteoritics and key meteorite collections: fireballs, falls and finds.** [S.I.]: Geological Society of London, 2006.

MCFADDEN, L. A.; BINZEL, R. P. Near-Earth objects. In: MCFADDEN, L. A.; JOHNSON, T.; WEISSMAN, P. (Ed.). **Encyclopedia of the solar system.** [S.I.]: Elsevier, 2007. p. 283-300.

MCINTOSH, D. M.; BAKER, J. D.; MATUS, J. A. The NASA Cubesat Missions Flying on Artemis-1. In: ANNUAL SMALL SATELLITE CONFERENCE, 34., 2020. **Proceedings...** 2020.

MICHEL, P. et al. Science case for the asteroid impact mission (AIM): a component of the asteroid impact \& deflection assessment (AIDA) mission. **Advances in Space Research**, v. 57, n. 12, p. 2529-2547, 2016.



- MORBIDELLI, A. Origin and evolution of near Earth asteroids. In: INTERNATIONAL ASTRONOMICAL UNION COLLOQUIUM, 1999. **Proceedings...** Cambridge University Press, 1999. p. 39-50.
- MURRAY, C. D.; DERMOTT, S. F. **Solar system dynamics**. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.
- POPOVA, O. P. et al. Chelyabinsk airburst, damage assessment, meteorite recovery, and characterization. **Science**, v. 342, n. 6162, p. 1069-1073, 2013.
- PRADO, F. A. B. A. **Traj et rias espaciais e manobras assistidas por gravidade**. São José dos Campos: INPE, 2001. 169 p. ISBN ISBN 85-17-00003-X.
- PROCKTER, L. et al. The NEAR shoemaker mission to asteroid 433 eros. **Acta Astronautica**, v. 51, n. 1/9, p. 491-500, 2002.
- SALAZAR, F. J. T. et al. Three-body problem, its Lagrangian points and how to exploit them using an alternative transfer to L4 and L5. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, v. 114, n. 1, p. 201-213, 2012.
- SARLI, B. V.; TSUDA, Y. Hayabusa 2 extension plan: asteroid selection and trajectory design. **Acta Astronautica**, v. 138, p. 225-232, 2017.
- SCHEIRICH, P.; PRAVEC, P.; THOMAS, C. A. Observations of Didymos in support of DART and Hera. **EPSC**, v. 2019, 2019.
- SCHULTE, P. et al. The Chicxulub asteroid impact and mass extinction at the Cretaceous-Paleogene boundary. **Science**, v. 327, n. 5970, p. 1214-1218, 2010.
- SHOEMAKER, E. M. Asteroid and comet bombardment of the Earth. **Annual Review of Earth and Planetary Sciences**, v. 11, n. 1, p. 461-494, 1983.
- SHOEMAKER, E. M. et al. Earth-crossing asteroids: orbital classes, collision rates with Earth, and origin. **Asteroids**, p. 253-282, 1979.
- STOKES, G. H.; EVANS, J. B.; LARSON, S. M. Near-Earth asteroid search programs. In: BOTKE, W. F. (Ed.). **Asteroids III** Tucson: University of Arizona, Tucson, 2002. p. 45-54.
- SZEBEHELY, V. G.; MARK, H. **Adventures in celestial Mechanics**. [S.l.]: **Wiley-VCH**, 1998.
- SZEBEHELY, V.; GREBENIKOV, E. Theory of orbits-the restricted problem of three bodies. **Soviet Astronomy**, v. 13, p. 364, 1969.

TURCO, R. P. et al. An analysis of the physical, chemical, optical, and historical impacts of the 1908 Tunguska meteor fall. **Icarus**, v. 50, n. 1, p. 1-52, 1982.

## ANEXO A – TRANSFERÊNCIAS VIA LAMBERT

Dados das transferências via método de Lambert para os asteroides analisados neste trabalho, para meio de comparação. É importante notar que o método de Lambert foi conduzido dentro do Problema de Três Corpos, enquanto o foco deste trabalho esteve no Problema de Quatro Corpos.

Tabela A.1. Transferência para o NEA 65803 Didymos via método de Lambert.

Propriedade	Valor
Partida	04/02/2022
Chegada	30/10/2022
Tempo de voo	268 dias
$\Delta V$	3,300 km/s

Fonte: Produção da autora.

Tabela A.2. Transferência para o NEA 99942 Apophis via método de Lambert.

Propriedade	Valor
Partida	22/06/2027
Chegada	06/05/2028
Tempo de voo	319 dias
$\Delta V$	3,280 km/s

Fonte: Produção da autora.

Tabela A.3. Transferência para o NEA 2001 CB21 via método de Lambert.

Propriedade	Valor
Partida	29/05/2026
Chegada	21/09/2026
Tempo de voo	115 dias
$\Delta V$	3,270 km/s

Fonte: Produção da autora.

Tabela A.4. Transferência para o NEA 3361 Orpheus via método de Lambert.

Propriedade	Valor
Partida	10/02/2025
Chegada	18/11/2025
Tempo de voo	319 dias
$\Delta V$	3,280 km/s

Fonte: Produção da autora.