



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA, INOVAÇÕES E COMUNICAÇÕES
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

sid.inpe.br/mtc-m21c/2018/04.17.17.02-TDI

**TRAJETÓRIAS PERTURBADAS POR FORÇAS DE
ORIGEM GRAVITACIONAL E NÃO GRAVITACIONAL
APLICADAS A UM SATÉLITE ARTIFICIAL NA
VIZINHANÇA DE MARTE, FOBOS E DEIMOS**

Liana Dias Gonçalves

Tese de Doutorado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle, orientada pelos Drs. Evandro Marconi Rocco, e Rodolpho Vilhena de Moraes, aprovada em 28 de março de 2018.

URL do documento original:

<<http://urlib.net/8JMKD3MGP3W34R/3QTLK85>>

INPE
São José dos Campos
2018

PUBLICADO POR:

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE

Gabinete do Diretor (GBDIR)

Serviço de Informação e Documentação (SESID)

Caixa Postal 515 - CEP 12.245-970

São José dos Campos - SP - Brasil

Tel.:(012) 3208-6923/6921

E-mail: pubtc@inpe.br

**COMISSÃO DO CONSELHO DE EDITORAÇÃO E PRESERVAÇÃO
DA PRODUÇÃO INTELECTUAL DO INPE (DE/DIR-544):****Presidente:**

Maria do Carmo de Andrade Nono - Conselho de Pós-Graduação (CPG)

Membros:

Dr. Plínio Carlos Alvalá - Centro de Ciência do Sistema Terrestre (COCST)

Dr. André de Castro Milone - Coordenação-Geral de Ciências Espaciais e Atmosféricas (CGCEA)

Dra. Carina de Barros Melo - Coordenação de Laboratórios Associados (COCTE)

Dr. Evandro Marconi Rocco - Coordenação-Geral de Engenharia e Tecnologia Espacial (CGETE)

Dr. Hermann Johann Heinrich Kux - Coordenação-Geral de Observação da Terra (CGOBT)

Dr. Marley Cavalcante de Lima Moscati - Centro de Previsão de Tempo e Estudos Climáticos (CGCPT)

Silvia Castro Marcelino - Serviço de Informação e Documentação (SESID)

BIBLIOTECA DIGITAL:

Dr. Gerald Jean Francis Banon

Clayton Martins Pereira - Serviço de Informação e Documentação (SESID)

REVISÃO E NORMALIZAÇÃO DOCUMENTÁRIA:

Simone Angélica Del Duca Barbedo - Serviço de Informação e Documentação (SESID)

Yolanda Ribeiro da Silva Souza - Serviço de Informação e Documentação (SESID)

EDITORAÇÃO ELETRÔNICA:

Marcelo de Castro Pazos - Serviço de Informação e Documentação (SESID)

André Luis Dias Fernandes - Serviço de Informação e Documentação (SESID)



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA, INOVAÇÕES E COMUNICAÇÕES
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

sid.inpe.br/mtc-m21c/2018/04.17.17.02-TDI

**TRAJETÓRIAS PERTURBADAS POR FORÇAS DE
ORIGEM GRAVITACIONAL E NÃO GRAVITACIONAL
APLICADAS A UM SATÉLITE ARTIFICIAL NA
VIZINHANÇA DE MARTE, FOBOS E DEIMOS**

Liana Dias Gonçalves

Tese de Doutorado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle, orientada pelos Drs. Evandro Marconi Rocco, e Rodolpho Vilhena de Moraes, aprovada em 28 de março de 2018.

URL do documento original:

<<http://urlib.net/8JMKD3MGP3W34R/3QTLK85>>

INPE
São José dos Campos
2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Gonçalves, Liana Dias.

G586t Trajetórias perturbadas por forças de origem gravitacional e não gravitacional aplicadas a um satélite artificial na vizinhança de Marte, Fobos e Deimos / Liana Dias Gonçalves. – São José dos Campos : INPE, 2018.

xxviii + 169 p. ; (sid.inpe.br/mtc-m21c/2018/04.17.17.02-TDI)

Tese (Doutorado em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle) – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2018.

Orientadores : Drs. Evandro Marconi Rocco, e Rodolpho Vilhena de Moraes.

1. Dinâmica orbital. 2. Perturbações. 3. Satélites artificiais.
4. Satélites naturais. 5. Campo gravitacional não central.
6. Harmônicos esféricos. I.Título.

CDU 521.3:629.78



Esta obra foi licenciada sob uma Licença [Creative Commons Atribuição-NãoComercial 3.0 Não Adaptada](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/).

This work is licensed under a [Creative Commons Attribution-NonCommercial 3.0 Unported License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/).

Aluno (a): *Liana Dias Gonçalves*

Título: "TRAJETÓRIAS PERTURBADAS POR FORÇAS DE ORIGEM GRAVITACIONAL E NÃO GRAVITACIONAL APLICADAS A UM SATÉLITE ARTIFICIAL NA VIZINHANÇA DE MARTE, FOBOS E DEIMOS"

Aprovado (a) pela Banca Examinadora em cumprimento ao requisito exigido para obtenção do Título de *Doutor(a)* em

Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle

Dr. Hans-Ulrich Pilchowski



Presidente / INPE / SJC Campos - SP

() Participação por Video - Conferência

Dr. Evandro Marconi Rocco



Orientador(a) / INPE / SJC Campos - SP

() Participação por Video - Conferência

Dr. Rodolpho Vilhena de Moraes



Orientador(a) / UNIFESP / São José dos Campos - SP

() Participação por Video - Conferência


Dr. Aginaldo Cardozo da Costa Filho



Convidado(a) / IFSP / São José dos Campos - SP

() Participação por Video - Conferência

Dr. William Reis Silva



Convidado(a) / ITA/DCTA / São José dos Campos - SP

() Participação por Video - Conferência

Este trabalho foi aprovado por:

() maioria simples

unanimidade

“Meus filhos terão computadores, sim, mas antes terão livros. Sem leitura os nossos filhos serão incapazes de escrever – inclusive a sua própria história”

Bill Gates

Àquela que mesmo distante ainda se faz totalmente presente.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por tudo em minha vida.

Agradeço aos meus pais, Conceição e Marco, pela confiança, apoio e respeito pelas minhas escolhas, além de se orgulharem delas. Aos meus irmãos, Lucas, Bia e Luísa, e ao Caio, por serem meus melhores amigos e parceiros de vida. À minha amada avó Therezinha, por ter sido a pessoa mais especial que tive o prazer de conhecer e conviver. Agradeço ao Big, de forma muito especial, por acreditar nos meus sonhos e me ajudar a conquista-los.

Agradeço aos meus orientadores. Ao Dr. Evandro Marconi Rocco por me orientar não somente na pesquisa, mas também na vida. Por dividir e compartilhar todos os momentos e, muito mais importante do que qualquer conquista científica, se tornou um grande amigo e uma pessoa que me inspira e tenho como exemplo, não só na área acadêmica, mas principalmente em como ser uma pessoa exemplar (um pouquinho menos briguenta e estressada, é claro...). Ao Dr. Rodolpho Vilhena de Moraes agradeço por me mostrar sempre como as coisas podem e devem ser mais leves e que podemos e devemos lidar com tudo de forma alegre e divertida. É sem a menor dúvida a figura mais bem humorada do nosso trio.

A todos os meus amigos. De forma especial à Alessandra, Leo, William e Adolfo, amigos que o INPE me deu e hoje em dia fazem parte da minha vida. Clarice, Thaís, Laura e Davi, meus amigos classiquíssimos que compartilham comigo muitos pliéés. Gege, Livia e Myrian, por mesmo longe serem queridas e essenciais, e Camila e Paula, por me fazerem sorrir todos os dias. À Mara e ao Gilberto, por cuidarem de mim, da Belinha e da Tata.

Agradeço de forma muito especial, à Dra. Fernanda Miguélez Pose (mi mamá española), por me receber, acolher e contribuir para uma das experiências mais especiais que tive o privilégio de viver. Obrigada por todo o carinho, por não se esquecer de mim e ter se tornado uma grande amiga.

Ao INPE pelos anos vividos e pelo conhecimento adquirido aqui e ao CNPq pelo apoio financeiro.

RESUMO

O sistema composto por Marte, Fobos e Deimos possui algumas características particulares que compõem um interessante objetivo de estudo: Fobos e Deimos possuem órbitas próximas a Marte cujos raios orbitais são de aproximadamente 9000 km e 23000 km, respectivamente, além de um formato irregular. Sendo assim, uma missão visando orbitar um dos satélites naturais de Marte, seja para um rápido sobrevoo, ou objetivando pouso na superfície, está sujeita a uma intensa perturbação orbital devido à atração gravitacional de Marte, o que dificulta de forma significativa manter o satélite em uma órbita estável ao redor das luas por um longo período de tempo. Além disso, o formato não esférico das luas faz com que seu campo gravitacional não seja central. Levando em consideração as dificuldades citadas, o presente trabalho busca encontrar casos onde seja possível manter o satélite próximo às luas pelo máximo tempo possível. Para esse estudo foi considerada a perturbação devido ao potencial gravitacional de Marte, considerando a expansão dos harmônicos esféricos até grau e ordem 80 e um modelo poliedral para distribuição de massa de Fobos, além da atração gravitacional do Sol e de Deimos para o caso do satélite na vizinhança de Fobos, e de Fobos para o caso do satélite na vizinhança de Deimos. Tal estudo pretende contribuir com a busca por trajetórias minimamente perturbadas na vizinhança de Fobos e Deimos, bem como estudar como manobrar o veículo de modo a aproximá-lo da superfície da lua, quesitos significativamente importantes tanto para o sobrevoo quanto para o pouso.

Palavras-chave: Dinâmica orbital, Perturbações, Satélites artificiais, Satélites naturais, Campo gravitacional não central, Harmônicos esféricos.

**TRAJECTORIES DISTURBED BY GRAVITATIONAL AND NON-
GRAVITATIONAL FORCES APPLIED TO AN ARTIFICIAL SATELLITE IN
THE VICINITY OF MARS, FOBOS AND DEIMOS**

ABSTRACT

The moons system of Mars, composed by Phobos and Deimos, has some special features which represent an interesting study objective: Phobos and Deimos have orbits near to Mars whose orbital radius are approximately 9000 km and 23000 km respectively, in addition these bodies are characterized by irregular shapes. Thus, a mission aiming to orbit one of the natural satellites of Mars, whether for a rapid overflight or landing on the surface, is subject to intense orbital disturbance due to the Mars gravitational attraction, which makes it significantly difficult to maintain the artificial satellite in a stable orbit around the moons for a long period of time. Besides, the non-spherical shape of the moons makes their gravitational field not central. Taking into account the difficulties mentioned, the present work seeks to find cases where it is possible to keep the satellite near to the moons for the maximum possible time. For this study was considered the perturbation due to the gravitational potential of Mars, considering the expansion of the spherical harmonics up to degree and order 80 and a polyhedral model for the mass distribution of Phobos, and also the gravitational attraction of the Sun and Deimos for the case of the satellite in the Phobos vicinity, and Phobos for the case of the satellite in the Deimos vicinity. Therefore this study intends to contribute to the search for trajectories in the Phobos and Deimos vicinity, as well as to study how to maneuver the vehicle so as to bring it closer to the surface of the moon, which are significantly important knowledge for missions that aim to overflight and landing.

Keywords: Orbital dynamics, Perturbations, Artificial satellites, Natural satellites, Non-central gravitational field, Spherical harmonics.

LISTA DE FIGURAS

| | <u>Pág.</u> |
|---|-------------|
| Figura 3.1. Representação de um sistema de N corpos. | 19 |
| Fonte: Adaptado de Prado (2001)..... | 19 |
| Figura 3.2. Força de radiação incidente sobre uma superfície. | 26 |
| Figura 4.1. Controle em malha fechada da trajetória. | 30 |
| Figura 4.2. Modelagem matemática da dinâmica do movimento orbital. | 31 |
| Figura 5.1. Somatório do incremento de velocidade perturbador devido ao potencial gravitacional de Marte (satélite ao redor de Marte). | 36 |
| Figura 5.2. Somatório do incremento de velocidade perturbador devido à atração gravitacional de Fobos (satélite ao redor de Marte). | 36 |
| Figura 5.3. Somatório do incremento de velocidade perturbador devido à atração gravitacional de Deimos (satélite ao redor de Marte). | 37 |
| Figura 5.4. Somatório do incremento de velocidade perturbador devido à atração gravitacional do Sol (satélite ao redor de Marte). | 37 |
| Figura 5.5. Somatório do incremento de velocidade perturbador devido à pressão de radiação solar (satélite ao redor de Marte). | 38 |
| Figura 5.6. Somatório do incremento de velocidade perturbador devido à atração gravitacional de Marte (satélite ao redor de Fobos). | 38 |
| Figura 5.7. Somatório do incremento de velocidade perturbador devido ao potencial gravitacional de Fobos (satélite ao redor de Fobos). | 39 |
| Figura 5.8. Somatório do incremento de velocidade perturbador devido à atração gravitacional de Deimos (satélite ao redor de Fobos). | 39 |
| Figura 5.9. Somatório do incremento de velocidade perturbador devido à atração gravitacional do Sol (satélite ao redor de Fobos). | 40 |
| Figura 5.10. Somatório do incremento de velocidade perturbador devido à pressão de radiação solar. | 40 |
| Figura 5.11. Somatório do incremento de velocidade perturbador devido à atração gravitacional de Marte (satélite ao redor de Deimos). | 41 |

| | |
|---|----|
| Figura 5.12. Somatório do incremento de velocidade perturbador devido à atração gravitacional de Fobos (satélite ao redor de Deimos). | 41 |
| Figura 5.13. Somatório do incremento de velocidade perturbador devido ao potencial gravitacional de Deimos (satélite ao redor de Deimos). | 42 |
| Figura 5.14. Somatório do incremento de velocidade perturbador devido à atração gravitacional do Sol (satélite ao redor de Deimos). | 42 |
| Figura 5.15. Somatório do incremento de velocidade perturbador devido à pressão de radiação solar..... | 43 |
| Figura 5.16. Incremento de velocidade perturbador devido ao potencial gravitacional de Marte (satélite ao redor de Marte). | 44 |
| Figura 5.17. Incremento de velocidade perturbador devido à atração gravitacional de Fobos (satélite ao redor de Marte). | 44 |
| Figura 5.18. Incremento de velocidade perturbador devido à atração gravitacional de Deimos (satélite ao redor de Marte). | 45 |
| Figura 5.19. Incremento de velocidade perturbador devido à atração gravitacional do Sol (satélite ao redor de Marte). | 45 |
| Figura 5.20. Incremento de velocidade perturbador devido à pressão de radiação solar (satélite ao redor de Marte). | 46 |
| Figura 5.21. Incremento de velocidade em função da altitude. | 49 |
| Figura 5.22. Curva da equação $y = 40 \exp^{-x/3050}$ | 49 |
| Figura 5.23. Força perturbadora para o satélite a 50 km de altitude. | 50 |
| Figura 5.24. Força perturbadora para o satélite a 407,21 km de altitude. | 51 |
| Figura 5.25. Força perturbadora para o satélite a 877,43 km de altitude. | 51 |
| Figura 5.26. Força perturbadora para o satélite a 1433,51 km de altitude. | 52 |
| Figura 5.27. Força perturbadora para o satélite a 2114,1 km de altitude. | 52 |
| Figura 5.28. Força perturbadora para o satélite a 2991,53 km de altitude. | 53 |
| Figura 5.29. Força perturbadora para o satélite a 4228,2 km de altitude. | 53 |
| Figura 5.30. Força perturbadora para o satélite a 6342,3 km de altitude. | 54 |
| Figura 5.31. Força perturbadora para o satélite a 30056,8 km de altitude. | 54 |
| Figura 5.32. Incremento de velocidade perturbador para cada termo da expansão dos harmônicos esféricos (eixo x). | 56 |

| | |
|---|----|
| Figura 5.33. Incremento de velocidade perturbador para cada termo da expansão dos harmônicos esféricos (eixo y). | 56 |
| Figura 5.34. Incremento de velocidade perturbador para cada termo da expansão dos harmônicos esféricos (eixo z). | 57 |
| Figura 5.35. Incremento de velocidade perturbador sobre o satélite (eixo x). | 59 |
| Figura 5.36. Incremento de velocidade perturbador sobre o satélite (eixo y). | 59 |
| Figura 5.37. Incremento de velocidade perturbador sobre o satélite (eixo z). | 60 |
| Figura 5.38. Incremento de velocidade perturbador sobre o satélite (resultante). | 60 |
| Figura 6.1. Caso 1. | 62 |
| Figura 6.2. Caso 2. | 62 |
| Figura 6.3. Caso 3. | 62 |
| Figura 6.4. Caso 1: semi-eixo maior. | 63 |
| Figura 6.5. Caso 1: excentricidade. | 63 |
| Figura 6.6. Caso 1: inclinação. | 64 |
| Figura 6.7. Caso 1: altitude. | 64 |
| Figura 6.8. Caso 2: semi-eixo maior. | 65 |
| Figura 6.9. Caso 2: excentricidade. | 65 |
| Figura 6.10. Caso 2: inclinação. | 66 |
| Figura 6.11. Caso 2: altitude. | 66 |
| Figura 6.12. Caso 3: semi-eixo maior. | 67 |
| Figura 6.13. Caso 3: excentricidade. | 67 |
| Figura 6.14. Caso 3: inclinação. | 68 |
| Figura 6.15. Caso 3: altitude. | 68 |
| Figura 6.16. Perturbação devido a Fobos (caso 1). | 69 |
| Figura 6.17. Perturbação devido a Fobos (caso 3). | 70 |
| Figura 6.18. Simulação 1: perturbação devido à Fobos. | 71 |
| Figura 6.19. Simulação 1: perturbação devido à Marte. | 72 |
| Figura 6.20. Simulação 1: perturbação devido ao Sol. | 72 |
| Figura 6.21. Simulação 1: somatório das perturbações. | 73 |
| Figura 6.22. Simulação 2: perturbação devido à Fobos. | 73 |
| Figura 6.23. Simulação 2: perturbação devido à Marte. | 74 |

| | |
|---|----|
| Figura 6.24. Simulação 2: perturbação devido ao Sol..... | 74 |
| Figura 6.25. Simulação 2: somatório das perturbações..... | 75 |
| Figura 6.26. Simulação 3: perturbação devido à Fobos..... | 75 |
| Figura 6.27. Simulação 3: perturbação devido à Marte..... | 76 |
| Figura 6.28. Simulação 3: perturbação devido ao Sol..... | 76 |
| Figura 6.29. Simulação 3: somatório das perturbações..... | 77 |
| Figura 6.30. Fobos e o satélite artificial orbitando Marte..... | 78 |
| Figura 6.31. Trajetória do satélite artificial na vizinhança de Fobos (5 dias)..... | 79 |
| Figura 6.32. Distância entre Fobos e o satélite artificial (5 dias)..... | 79 |
| Figura 6.33. Desvio no semi-eixo maior (5 dias)..... | 80 |
| Figura 6.34. Desvio da excentricidade (5 dias)..... | 80 |
| Figura 6.35. Desvio na inclinação (5 dias)..... | 81 |
| Figura 6.36. Perturbação devido à Fobos (5 dias)..... | 81 |
| Figura 6.37. Perturbação devido à Marte (5 dias)..... | 82 |
| Figura 6.38. Trajetória do satélite artificial na vizinhança de Fobos (30 dias)..... | 82 |
| Figura 6.39. Distância entre Fobos e o satélite artificial (30 dias)..... | 83 |
| Figura 6.40. Desvio no semi-eixo maior (30 dias)..... | 83 |
| Figura 6.41. Desvio na excentricidade (30 dias)..... | 84 |
| Figura 6.42. Desvio na inclinação (30 dias)..... | 84 |
| Figura 6.43. Perturbação devido a Fobos (30 dias)..... | 85 |
| Figura 6.44. Perturbação devido a Marte (30 dias)..... | 85 |
| Figura 6.45. Trajetória do satélite artificial na vizinhança de Fobos (100 dias)..... | 86 |
| Figura 6.46. Distância entre Fobos e o satélite artificial (100 dias)..... | 86 |
| Figura 6.47. Desvio no semi-eixo maior (100 dias)..... | 87 |
| Figura 6.48. Desvio na excentricidade (100 dias)..... | 87 |
| Figura 6.49. Desvio na inclinação (100 dias)..... | 88 |
| Figura 6.50. Perturbação devido a Fobos (100 dias)..... | 88 |
| Figura 6.51. Perturbação devido à Marte (100 dias)..... | 89 |
| Figura 6.52. Distância entre o satélite artificial e Fobos (manobra de correção)..... | 90 |
| Figura 6.53. Perturbação devido à Marte (manobra de correção)..... | 91 |
| Figura 6.54. Perturbação devido a Fobos durante a manobra de correção..... | 91 |

| | |
|---|-----|
| Figura 6.55. Semi-eixo maior durante a manobra de correção..... | 92 |
| Figura 6.56. Excentricidade durante a manobra de correção. | 92 |
| Figura 6.57. Inclinação durante a manobra de correção..... | 93 |
| Figura 6.58. Empuxo aplicado sobre o satélite durante a manobra de correção. | 93 |
| Figura 6.59. Órbitas do satélite e de Deimos em torno de Marte. | 95 |
| Figura 6.60. Trajetória do satélite na vizinhança de Deimos (5 dias). | 95 |
| Figura 6.61. Trajetória do satélite na vizinhança de Deimos (30 dias). | 96 |
| Figura 6.62. Trajetória do satélite na vizinhança de Deimos (100 dias). | 96 |
| Figura 6.63. Desvio no semi-eixo maior (100 dias). | 97 |
| Figura 6.64. Desvio na excentricidade (100 dias). | 97 |
| Figura 6.65. Desvio na inclinação (100 dias). | 98 |
| Figura 6.66. Perturbação devido a Deimos (5 dias). | 99 |
| Figura 6.67. Perturbação devido à Marte (5 dias). | 99 |
| Figura 6.69. Distância entre o satélite artificial e Deimos (5 dias). | 100 |
| Figura 6.70. Perturbação devido a Deimos (30 dias). | 100 |
| Figura 6.71. Perturbação devido à Marte (30 dias). | 101 |
| Figura 6.72. Distância entre o satélite artificial e Deimos (30 dias). | 101 |
| Figura 6.73. Perturbação devido a Deimos (100 dias). | 102 |
| Figura 6.74. Perturbação devido à Marte (100 dias). | 102 |
| Figura 6.75. Perturbação devido ao Sol (100 dias). | 103 |
| Figura 6.76. Distância entre o satélite artificial e Deimos (100 dias). | 103 |
| Figura 7.1. Manobra de transferência..... | 106 |
| Figura 7.2. Desvio no semi-eixo maior | 107 |
| Figura 7.3. Desvio na excentricidade | 107 |
| Figura 7.4. Desvio na inclinação | 108 |
| Figura 7.5. Distância entre o satélite e Fobos..... | 108 |
| Figura 7.6. Perturbação devido ao potencial gravitacional de Marte | 109 |
| Figura 7.7. Perturbação devido ao potencial gravitacional de Fobos..... | 109 |
| Figura 7.8. Movimento de Fobos e Deimos em uma órbita de ressonância dupla..... | 111 |
| Figura 7.9. Semi-eixo maior | 112 |
| Figura 7.10. Excentricidade..... | 112 |

| | |
|--|-----|
| Figura 7.11. Inclinação | 113 |
| Figura 7.12. Distância entre o satélite e Marte | 113 |
| Figura 7.13. Distância entre o satélite e Fobos..... | 114 |
| Figura 7.14. Distância entre o satélite e Deimos | 114 |
| Figura 7.15. Incremento de velocidade perturbador devido à Marte..... | 115 |
| Figura 7.16. Incremento de velocidade perturbador devido à Fobos | 115 |
| Figura 7.17. Incremento de velocidade perturbador devido à Deimos..... | 116 |
| Figura 7.18. Incremento de velocidade perturbador devido ao Sol..... | 116 |
| Figura 7.19. Incremento de velocidade perturbador devido à pressão de radiação solar | 117 |
| Figura 7.20. Incremento de velocidade perturbador com variação de excentricidade e inclinação | 118 |
| Figura 7.21. Manobra com valores menores que e | 119 |
| Figura 7.22. Manobra com valores maiores que e | 119 |

LISTA DE TABELAS

| | <u>Pág.</u> |
|---|-------------|
| Tabela 5.1 – Incremento de velocidade perturbador sobre um satélite em trajetória ao redor de Marte. | 47 |
| Tabela 5.2 – Incremento de velocidade perturbador sobre um satélite em trajetória ao redor de Fobos. | 47 |
| Tabela 5.3 – Incremento de velocidade perturbador sobre um satélite em trajetória ao redor de Deimos. | 47 |
| Tabela 5.4 – Componentes x , y e z do incremento de velocidade perturbador para grau e ordem 2 dos harmônicos esféricos. | 58 |
| Tabela 7.1. Incremento de velocidade aplicado sobre o satélite para executar a manobra. | 106 |
| Tabela 7.2. Condições iniciais do satélite..... | 110 |
| Tabela B.1. Polinômios de Legendre (de $n = 0$ a $n = 5$)..... | 153 |
| Tabela B.2. Polinômios de Legendre (de $n = 6$ a $n = 10$)..... | 154 |
| Tabela C.1. Coeficientes dos harmônicos esféricos de Marte..... | 169 |

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

| | |
|--------------------|--|
| INPE | Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais |
| d.C. | Depois de Cristo |
| NASA | <i>National Aeronautics and Space Administration</i> |
| JAXA | <i>Japan Aerospace Exploration Agency</i> |
| ESA | <i>European Space Agency</i> |
| STRS | <i>Spacecraft Trajectory Simulator</i> |
| DROs | <i>Double Resonant Orbits</i> |
| PID | Proporcional, integral e derivativo |
| MRO | <i>Mars Reconnaissance Orbiter</i> |
| MGS | <i>Mars Global Surveyor</i> |
| GMM-2B | <i>Goddard Mars Model 2B</i> |
| TPBVP | <i>Two Point Boundary Value Problems</i> |
| MMX | <i>Martian Moon eXploration</i> |
| A.R. N. ascendente | Ascensão reta do no ascendente |
| Pot. grav. | Potencial gravitacional |
| Atração grav. | Atração gravitacional |
| Inc. de vel. | Incremento de velocidade |

LISTA DE SÍMBOLOS

| | |
|-------------|---|
| exp | Exponencial |
| N | Número de corpos |
| ΔV | Incremento de velocidade |
| m | Massa |
| M | Massa |
| G | Constante gravitacional |
| \vec{r} | Raio vetor |
| r | Distância |
| \vec{H} | Momento angular |
| \vec{a} | Constante de integração |
| \vec{b} | Constante de integração |
| t | Tempo |
| E | Energia mecânica total |
| T | Energia cinética |
| U | Potencial gravitacional |
| \vec{a}_m | Aceleração |
| F | Força |
| μ | Produto entre a constante gravitacional e a massa |
| a_e | Raio equatorial |
| n | Grau |
| m | Ordem |
| P_{nm} | Polinômios associados de Legendre |
| P_n | Polinômios de Legendre |
| s | $\sin \phi$ |
| C_{nm} | Harmônicos zonais |
| S_{nm} | Harmônicos tesserais |
| ϕ | Latitude |
| λ | Longitude |

| | |
|----------------|---|
| E_R | Taxa de variação de energia radiante por unidade de área |
| \bar{S} | Fluxo de energia radiante |
| S_0 | Constante solar |
| R' | Distância heliocêntrica da superfície atingida pelo fluxo solar |
| p | Pressão de radiação |
| P | Pressão |
| c | Velocidade da luz no vácuo |
| \vec{F}_a | Força de radiação completamente absorvida pela superfície do satélite |
| \vec{F}_{re} | Força de radiação refletida especularmente |
| \vec{F}_{rd} | Força de radiação refletida difusamente |
| I | Energia por unidade de tempo através de uma área |
| c_a | Coeficiente de absorção |
| c_{re} | Coeficiente de reflexão especular |
| c_{rd} | Coeficiente de reflexão difusa |
| \hat{n} | Versor na direção normal à superfície |
| \hat{s} | Versor na direção tangente à superfície |
| a | Semi-eixo maior |
| e | Excentricidade |
| i | Inclinação |
| w | Argumento do periapside |
| Ω | Ascensão reta do nodo ascendente |
| M | Anomalia média |
| h | Altitude |

SUMÁRIO

| | <u>Pág.</u> |
|--------|---|
| 1 | INTRODUÇÃO 1 |
| 1.1. | Introdução 1 |
| 1.2. | Objetivos 3 |
| 1.3. | Contribuições 4 |
| 1.4. | Organização do Trabalho 5 |
| 2 | REVISÃO BIBLIOGRÁFICA 7 |
| 2.1. | Simulação de trajetória orbital (<i>Spacecraft Trajectory Simulator – STRS</i>) 10 |
| 3 | CONCEITOS BÁSICOS 19 |
| 3.1. | Problema de N corpos 19 |
| 3.2. | Potencial gravitacional de Marte 22 |
| 3.3. | Atração gravitacional do Sol, Fobos e Deimos como terceiros corpos 24 |
| 3.4. | Pressão de radiação solar 25 |
| 3.5. | O problema de Lambert 27 |
| 4 | METODOLOGIA 29 |
| 4.1. | <i>Spacecraft Trajectory Simulator (STRS)</i> 29 |
| 4.2. | O modelo GMM-2B 31 |
| 4.3. | Potencial gravitacional de Fobos e Deimos 32 |
| 5 | PERTURBAÇÕES ORBITAIS NA VIZINHANÇA DE MARTE, FOBOS E DEIMOS 35 |
| 5.1. | Força perturbadora sobre o satélite artificial devido ao potencial gravitacional de Marte 48 |
| 5.1.1. | Análise da contribuição de cada termo da expansão dos harmônicos esféricos ... 55 |
| 6 | TRAJETÓRIAS NA VIZINHANÇA DAS LUAS 61 |
| 6.1. | Trajетórias na vizinhança de Fobos 61 |
| 6.2. | Trajетórias na vizinhança de Deimos 94 |
| 7 | MANOBRAS ORBITAIS 105 |
| 8 | CONCLUSÕES 121 |
| | REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 125 |

| | |
|---|-----|
| APÊNDICE A – MISSÕES ESPACIAIS PARA MARTE E SEUS SATÉLITES | |
| NATURAIS..... | 135 |
| APÊNDICE B – EXPANSÃO DO POTENCIAL GRAVITACIONAL EM | |
| HARMÔNICOS ESFÉRICOS..... | 145 |
| APÊNDICE C – COEFICIENTES DOS HARMÔNICOS ESFÉRICOS DE MARTE | |
| | 169 |

1 INTRODUÇÃO

1.1. Introdução

Desde a antiguidade Marte chama atenção no céu devido à sua cor vermelha. Seu movimento aparente instigou a curiosidade dos astrônomos da época. Ptolomeu, no século I d.C., explicou tal movimento considerando que Marte realizava um movimento circular ao redor da Terra e outros em forma de epiciclos ao redor de um ponto em movimento na órbita circular de Marte em torno da Terra. No século XVI Copérnico deu fim à teoria geocêntrica que considerava a Terra parada e no centro do universo, propondo um modelo para o movimento dos planetas, considerando o Sol no centro do universo e a Terra e os demais planetas se movendo ao seu redor. O modelo heliocêntrico, como ficou conhecido, foi capaz de explicar o movimento aparente de Marte na esfera celeste, que descreve uma espécie de laço em determinada época do ano. Esse fenômeno ocorre com todos os planetas exteriores, pois a velocidade angular da Terra em sua órbita é maior que a velocidade angular desses planetas. Isso faz com que ao longo do ano a Terra se aproxime da “posição angular” desses planetas e depois se afaste. Ao definir uma trajetória aparente desses astros na esfera celeste, fruto das posições relativas entre a Terra e os planetas, percebe-se que a trajetória se assemelha a um laço.

O estudo do movimento de Marte também provocou a mudança do conceito até então aceito para o movimento de todos os planetas, que era considerado circular ao redor do Sol e sempre com a mesma velocidade. No século XVII, o astrônomo alemão Johannes Kepler, a partir dos dados obtidos com as observações realizadas pelo astrônomo dinamarquês Tycho Brahe da trajetória de Marte, concluiu que a órbita do planeta era elíptica, havendo momento de aproximação e afastamento entre o planeta e o Sol, o que justificava a mudança de velocidade. Ainda no século XVII, Kepler propôs que Marte poderia ter duas luas, já que fica entre a Terra e Júpiter, que eram conhecidos por terem uma e quatro luas, respectivamente.

Apesar de toda ausência de evidências, o astrônomo americano Asaph Hall realizou estudos do *U.S. Naval Observatory*, em Washington, pesquisando regiões mais próximas do planeta do que as regiões observadas em pesquisas anteriores. Na noite de 12 de agosto de 1877 ele descobriu a lua que mais tarde seria conhecida como Deimos e, seis dias depois, encontrou Fobos. As duas luas estavam tão perto de Marte que eram escondidas pelo brilho do planeta.

De todas as luas conhecidas no Sistema Solar, Fobos é a que orbita mais próxima de seu primário. Acredita-se que Fobos seja possivelmente um asteroide capturado por Marte, tornando-se um destino interessante para missões científicas (SAGITOV et al., 1982).

Demorou quase um século para que os cientistas começassem a entender os pequenos satélites naturais de Marte. Em 1971, a NASA lançou a nave espacial Mariner 9, cujas imagens revelaram a forma não esférica de Fobos e Deimos. Dando continuidade às pesquisas sobre os satélites que circundam Marte, ainda nos anos 70 novas missões que foram lançadas para o espaço enviaram informações sobre Fobos e Deimos, ainda que o objetivo principal fosse estudar o planeta.

Em 1977 a missão Viking 1 foi realizada com sucesso, nos enviando informações sobre Marte e seus satélites. Alguns anos depois a pesquisa continuava e foram lançadas as sondas *Mars Global Surveyor* (1996), *Mars Express* (2003), *Mars Reconnaissance Orbiter* (2005) e *Spirit* (2005), cujos programas também contribuíram para os estudos de Fobos e Deimos.

Algumas missões dedicadas às luas Fobos e Deimos também foram realizadas pela União Soviética. Em 1988 as duas sondas Phobos1 e 2 foram enviadas à Marte, porém sem sucesso. Em 2011 a Agência Espacial Russa planejou uma nova missão à Fobos, chamada Fobos-Grunt, cujo objetivo era trazer para a Terra amostras do solo do satélite natural. Porém, a missão falhou na órbita terrestre.

A NASA (*National Aeronautics and Space Administration*) está considerando chegar à superfície de Fobos na próxima década com a missão *Phobos Surveyor*, a JAXA promete enviar uma missão para Fobos no ano 2024 e a ESA pretende alcançar Marte e seus satélites em 2025. Uma descrição cronológica detalhada das missões realizadas e futuras para Marte e seus satélites naturais pode ser encontrada no Apêndice A.

Objeto de estudo de missões espaciais passadas e futuras, as trajetórias de veículos espaciais ao redor de Marte e seus satélites naturais Fobos e Deimos, também compõem o principal foco do estudo proposto neste trabalho. Sendo assim, o presente trabalho buscar provar se é possível ou não manter um satélite artificial em torno de Fobos e Deimos sem o uso de propulsores e sistema de controle.

1.2. Objetivos

O sistema composto por Marte, Fobos e Deimos possui algumas características particulares que compõem um interessante objetivo de estudo: Fobos e Deimos possuem órbitas próximas a Marte cujos raios orbitais são de aproximadamente 9000 km e 23000 km, respectivamente, além de um formato altamente irregular. Neste cenário, não é possível manter uma órbita estável em torno dos satélites de Marte por um longo período de tempo. Além disso, o campo gravitacional de Fobos e Deimos não pode ser considerado central, já que as luas não são esféricas.

Levando em consideração a complexidade do sistema Marte, Fobos e Deimos, o presente trabalho objetiva estudar e analisar as principais forças perturbadoras capazes de alterar a órbita de um satélite artificial que se encontra na vizinhança de Marte, Fobos ou Deimos. Desta forma, pretende-se contribuir com a busca de trajetórias na vizinhança de Fobos e Deimos e com estudo de manobras orbitais visando transferir o veículo espacial de um corpo para outro ou aproximá-lo da superfície da lua.

Para esse estudo foi considerada a perturbação devido ao potencial gravitacional de Marte utilizando o modelo fornecido por Lemoine et al. (2001), que permite considerar a expansão dos harmônicos esféricos até grau e ordem 80 e um modelo poliedral para distribuição de massa das luas, elaborado a partir de dados fornecidos pela NASA, Gaskel et al. (2011), obtidos pelas missões Viking, além da atração gravitacional do Sol e de Deimos para o caso do satélite na vizinhança de Fobos, e de Fobos para o caso do satélite na vizinhança de Deimos.

É apresentada uma estratégia para manter o satélite artificial próximo à lua por um longo período de tempo, utilizando uma metodologia semelhante à utilizada para a realização de manobras de *rendezvous* e *docking*. Nesta abordagem a intensa perturbação devido ao potencial gravitacional de Marte, expandida em harmônicos esféricos até grau e ordem 80 é considerada simultaneamente à perturbação devido ao potencial gravitacional não central da lua, modelada a partir do modelo poliedral. Além disso, também são consideradas a atração gravitacional do Sol e da outra lua que não está sendo orbitada, e a pressão de radiação solar. Esta abordagem indicando uma possibilidade de se aproximar e manter o satélite próximo às pequenas luas, considerando simultaneamente todas as perturbações com modelos bastante precisos, representa uma importante contribuição para as pesquisas que vem sendo realizadas sobre Marte e seus satélites naturais.

1.3. Contribuições

O presente trabalho apresenta como importante contribuição um estudo da dinâmica de um satélite artificial realizando trajetórias na vizinhança de Marte, Fobos e Deimos. Para isso, as principais perturbações capazes de alterar a órbita do satélite foram estudadas e consideradas em todas as simulações, com o objetivo de aproximar os resultados obtidos o máximo possível da dinâmica real de um satélite artificial que orbita o sistema. Os modelos das perturbações são considerados simultaneamente, com precisão significativa, já que os harmônicos esféricos de Marte são expandidos até 80, alto valor de grau e ordem, e a irregularidade no formato e distribuição de massa das luas são precisamente definidos pelo método dos poliedros.

A partir dos estudos e simulações realizados, foi verificada a dificuldade em manter uma órbita estável por um longo período de tempo ao redor de Fobos e Deimos, devido à intensa perturbação do potencial gravitacional de Marte. Sendo assim, foi estudada uma possibilidade estratégica de manter o satélite próximo às luas, além de uma interessante manobra orbital, que permite que o satélite se aproxime das luas em uma cadência regular. Em todos os estudos as perturbações devido ao potencial gravitacional de Marte, das luas, atração gravitacional do Sol e pressão de radiação solar são consideradas simultaneamente.

O estudo das perturbações apresentado neste trabalho pode ser, a partir de agora, estendido para outros corpos, uma vez que a modelagem implementada no *Spacecraft Trajectory Simulator – STRS* exige apenas a mudança dos parâmetros dos corpos envolvidos no novo sistema escolhido. O STRS, é um simulador de trajetória orbital que utiliza propulsão contínua e considera o sistema de controle orbital em malha fechada.

A abordagem apresentada para manter o satélite próximo às luas de Marte pode ser aplicada em uma missão real que vise estudar Fobos e/ou Deimos, além de também poder ser utilizada para o estudo ou para missões que visem outros sistemas que também apresentem significativa diferença de massa entre os corpos, como é o caso de Saturno e seus satélites e Ida e Dactyl, ambos sistemas já estudados em Rocco et al., (2017^a) e Rocco e Gonçalves (2017).

1.4. Organização do Trabalho

A presente seção expõe uma breve descrição do conteúdo apresentado nos capítulos do trabalho. O Capítulo 1 apresenta uma introdução sobre o trabalho, iniciando por uma breve história de Marte e seus satélites naturais, juntamente com as principais missões espaciais que tiveram e terão como objetivo principal Marte, Fobos e Deimos. Também são discutidos os objetivos do trabalho e as contribuições mais relevantes. No Capítulo 2 é feita uma revisão bibliográfica de importantes trabalhos correlatos aos estudos desenvolvido. No Capítulo 3 é apresentada a fundamentação teórica básica em que foi baseado o estudo e o Capítulo 4 apresenta detalhadamente a metodologia utilizada para desenvolver o problema proposto e uma breve descrição dos modelos utilizados.

Os Capítulos 5 e 6 incluem os resultados das simulações realizadas, bem como a discussão dos casos considerados. O Capítulo 7 apresenta uma sugestão de manobra visando aproximar o satélite de Fobos e Deimos em uma cadência regular. No Capítulo 8 são feitas conclusões gerais e comentários discutindo os principais tópicos estudados no trabalho.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A fim de contextualizar a pesquisa a ser desenvolvida, foi feito um breve levantamento bibliográfico com alguns dos trabalhos já desenvolvidos com pontos comuns com o tema proposto para estudo.

Um dos primeiros trabalhos encontrados visando estudar o potencial gravitacional de Fobos foi feito por Sagitov et al. (1981), que usaram superfície de Turner para mapear o campo de gravidade da lua utilizando harmônicos esféricos até grau e ordem 6. Em 1982, assumindo que Fobos tem densidade constante, elaboraram um modelo para o potencial gravitacional do satélite dividindo-o em figuras geométricas. Expandiram os termos do potencial gravitacional até sexta ordem.

Balmino et al. (1982) modelaram o campo gravitacional de Marte até grau e ordem 18 utilizando dados das missões Mariner 9, Viking 1 e 2 e Orbiters. Bursa (1988) estudou as variações seculares no potencial gravitacional de Fobos e estimou a maré do sistema Marte-Fobos. Anos mais tarde, Kuchik (1990) considerou a maré de Marte e modelou o campo gravitacional de Fobos supondo que o satélite tem densidade homogênea. Em 1999, Waz criou uma nova teoria para o movimento de Fobos baseado no problema de dois corpos, considerando a interação entre o potencial gravitacional de Marte e de Fobos, com os harmônicos zonais inferiores a 12 e os harmônicos tesserais inferiores a 6.

Por se tratar de um exemplo bastante interessante e singular, Fobos é muitas vezes utilizado como aplicação de teorias novas. Werner (1994) desenvolveu a importante teoria que utiliza poliedros para modelar objetos com formato irregular, como, por exemplo, asteroides, núcleo de cometas e satélites naturais e utilizou Fobos como ilustração. Também é importante citar Balmino (1994), que desenvolveu equações para os harmônicos até quinta ordem que descrevem o corpo e utilizou Fobos para testar a convergência das expressões. Hu e Jekeli (2014) apresentaram uma comparação numérica entre modelos para o campo gravitacional utilizando harmônicos esféricos, esferoidais e elipsoidais e utilizaram como exemplo as luas de Marte.

Pesquisas recentes envolvendo o assunto do sistema Marte, Fobos e Deimos também vêm sendo realizadas nos últimos anos. Lemoine et al. (2001) criaram o modelo *Goddard Mars Model 2B* (GMM-2B) que expande o potencial gravitacional de Marte até grau e ordem 80 a partir de dados da missão *Mars Global Surveyor* (MGS), que orbitou Marte em uma

órbita quase polar com inclinação de $92,9^\circ$ e quase circular, a uma altitude média de 400 km. Em 2006, Konopliv et al., com os dados das missões MGS e Mars Odyssey, melhoraram o modelo do campo gravitacional de Marte, o que inclui a medição das variações sazonais nos coeficientes do potencial gravitacional causada pela troca de massa entre as calotas polares e a atmosfera. Em 2011, Konopliv et al. acompanharam os dados da missão MRO melhorando os modelos do potencial gravitacional de Marte já existentes, chegando perto da resolução de grau e ordem 90. Incluíram a poeira atmosférica e a maré solar no modelo da pressão de radiação solar.

Cangahuala (2012) analisou o problema de um satélite artificial orbitar pequenos corpos irregulares a baixa altitude. Descreveu o modelo poliedral para a solução do problema e mostrou resultados análogos ao método dos harmônicos esféricos. Também em trabalhos recentes podemos encontrar estudos afins com os desenvolvidos no presente trabalho. Algumas pesquisas sobre missões objetivando sobrevoo ou pouso nas superfícies de Fobos e Deimos podem ser destacados. Kuzmin et al. (2003) apresentou um resumo das características da superfície de Fobos, contribuindo para as atividades da missão Phobos-Grunt, uma descrição de local para pouso planejado e do regolito (uma camada solta de material heterogêneo e superficial que cobre uma rocha sólida. Pode ser formado por poeira, solo, rocha quebrada e etc) de Fobos. O trabalho também fornece informações sobre o campo gravitacional e as características dinâmicas de Fobos e mapas topográficos digitais.

Gil e Schwartz (2010) estudaram órbitas quase síncronas em torno de Fobos, analisando a possibilidade e estabilidade das órbitas. É feita uma exploração do espaço de fase para analisar as condições iniciais do veículo espacial para a inserção em tais órbitas. Também é analisada a possibilidade de usar uma órbita fora do plano orbital de Fobos e em torno de Marte. Hopkins e Pratt (2011) sugeriram uma missão humana para uma das luas de Marte como um precursor mais fácil antes de uma missão para pousar em Marte propriamente. No trabalho foram feitas comparações entre Fobos e Deimos como destinos em potencial, sendo analisados design de trajetórias, acessos de comunicação entre a Terra e Marte, iluminação solar, ambiente de radiação esperado e acesso físico a partir da superfície marciana. Enquanto a maioria dos trabalhos científicos aponta Fobos como melhor destino para uma missão espacial, Hopkins e Pratt sugerem Deimos como melhor opção por estar mais distante de Marte do que Fobos, podendo reduzir o ΔV necessário

em 400 m/s. Utilizaram um modelo do formato de Deimos, realizaram análises de acesso a iluminação e comunicação e determinaram duas regiões em Deimos favoráveis para pouso.

Wallace et al. (2012) discutem opções de órbitas possíveis para atividades de missão humana para uma das luas de Marte, Fobos ou Deimos. Essas opções incluem órbitas retrógradas distantes (DROs), órbitas nos pontos de Lagrange, como órbitas de halos e Lyapunov. No mesmo ano, Mark et al. (2012) estudaram para o caso do sistema Marte, Fobos e Deimos as opções de órbitas retrógradas distantes (DROS), pontos lagrangeanos e órbitas de Lyapunov. Foram analisadas a dinâmica e a propagação orbital, focando a discussão em Fobos, mas sem deixar de analisar Deimos. No ano seguinte, Landau (2013) propôs manobras de transferência orbital entre o sistema Marte, Fobos e Deimos, visando eficiência e mínimo uso dos propulsores.

Zamaro e Biggs (2015) calculam os pontos de equilíbrio de Fobos considerando o campo gravitacional não homogêneo da lua. Apresentam possibilidades de órbitas ao redor de tais pontos de equilíbrio como opções de manter o satélite com baixo custo na proximidade de Fobos. Tais órbitas possibilitam observação próxima da lua, comunicação e possibilidades de pouso e decolagem, além de transferência de e para órbitas marcianas.

Sabitbek e Gunter (2017) propõem uma classe de órbitas estáveis com a interessante característica de poder acessar ambas luas em uma cadência regular, podendo ser ajustadas para transferir a sonda para uma das luas mais frequentemente, ou melhorar a cobertura da superfície da lua. O estudo é feito para um satélite artificial já em órbita de Marte, ou seja, aproveitar uma missão já existente para Marte. Os resultados apresentados mostram que a exploração de Fobos e Deimos pode ser feita com uma nave espacial com capacidade de nano satélites (cubesats).

Qu et al. (2017) apresentam um método para otimizar manobras de estacionamento em Marte dadas condições de chegada e partida a partir de órbitas heliocêntricas. Também analisam requisitos para decida do periapside para locais de pouso planejados, elevação ou retorno para a órbita de estacionamento, ou até mesmo transferência de baixo custo para e a partir de Fobos e Deimos. Joffre et al. (2017) investigam a otimização de trajetórias estratégicas que visam pouso na superfície de Fobos, considerando novas abordagens de teoria de sistemas dinâmicos e técnicas robustas de controle não-linear.

2.1. Simulação de trajetória orbital (*Spacecraft Trajectory Simulator – STRS*)

Esta seção apresenta uma breve revisão dos trabalhos que já foram realizados, envolvendo simulação de trajetórias orbitais, em sua maioria baseados ou com significativa contribuição do STRS. É possível encontrar trabalhos abordando variados temas da dinâmica orbital, com respeito a planetas e suas luas, asteroides, manobras, atitude e etc.

O problema das transferências orbitais de dois impulsos entre órbitas circulares ou elípticas não coplanares é estudado por Rocco et al. (2008a), usando órbitas hiperbólicas como órbitas de transferência, com consumo mínimo de combustível, mas com limite de tempo para essa transferência.

Em 2009, Marcelino (2009) considerou o problema de controlar a trajetória orbital utilizado propulsão contínua por um longo período de tempo. Analisou as não-idealidades dos propulsores e seus efeitos no sistema de controle durante a transferência orbital, o desvio na trajetória e o sistema de controle. Venditti (2009) estudou o problema de otimizar trajetórias interplanetárias com mínimo consumo de combustível e limite de tempo, utilizando a metodologia de patched conics e considerou manobras assistidas por gravidade (swing-by) para reduzir o consumo de combustível.

Costa Filho (2010) considerou o problema do acoplamento entre o controle de trajetória e controle de atitude em manobras de transferência orbital, utilizando um sistema propulsivo capaz de aplicar empuxo contínuo por um longo período de tempo, e analisou efeitos no sistema de controle que surgem durante a transferência orbital. Venditti et al. (2010) estudaram o problema de otimização de trajetórias interplanetárias com consumo mínimo de combustível e limitante de tempo, utilizando a metodologia de patched conics, e consideraram a possibilidade de manobras assistidas por gravidade (swing by) para a redução do consumo de combustível, com o objetivo de encontrar uma combinação de trajetórias cônicas, usando manobras gravitacionais assistidas, que realizam a transferência com o satélite próximo ao planeta de partida para a vizinhança próxima ao planeta de chegada, gastando o mínimo de combustível com o mínimo tempo de viagem. A partir do modelo do albedo terrestre e do modelo da dinâmica orbital, Rocco (2010) avaliou o albedo da Terra considerando as órbitas de algumas missões específicas como *Gravity Probe B*, *MICROSCOPE* e *STEP*. Arantes et al. (2010) apresentaram um sistema de controle de trajetória autônomo aplicado às missões RVD. A abordagem foi baseada em visão por computador, usando uma única câmera e algum conhecimento prévio do alvo, ou seja, a nave espacial do cliente. Uma ferramenta de missão de análise de encontro

para satélite de serviço autônomo foi desenvolvida e apresentada, para manobras distantes, para distância acima de 1 km do alvo e manobras próximas.

Santos (2011) simulou manobras aeroassistidas e analisou as vantagens e desvantagens com relação a uma manobra propulsiva em que foi dotado um veículo de corpo cúbico, composto por placas retangulares reguláveis capazes de alterar o ângulo de inclinação com relação ao fluxo de moléculas. Oliveira (2012) encontrou trajetórias ótimas para veículos que utilizam um sistema de propulsão não impulsiva, a partir do desenvolvimento de um software capaz de efetuar o cálculo das manobras ótimas com propulsores de empuxo contínuo, e implementação da possibilidade de considerar vínculos reais no cálculo das manobras ótimas, tais como limitação de direção de aplicação do empuxo e/ou regiões orbitais onde não seja permitido o uso de propulsão. A influência do potencial gravitacional e do albedo lunar sobre a órbita de um satélite artificial foi avaliada por Gonçalves (2013), além de simulações de manobras de transferência e correção orbitais de satélites lunares considerando as perturbações citadas.

Santos e Rocco (2013) apresentaram um sistema de controle de trajetória em malha fechada para missões de *rendezvous* que considerou a fase final de aproximação entre os veículos. A aproximação é executada pelo eixo V-bar. Um controlador PID e propulsão contínua são usados para eliminar os erros residuais na trajetória e um estudo comparativo sobre a dinâmica linear e não-linear é realizado. Também em 2013, Gonçalves et al. (2013a) realizaram um estudo avaliando a influência devido ao potencial gravitacional lunar, modelado por harmônicos esféricos, utilizando o modelo apresentado em Konopliv (2001). Foram simuladas manobras de transferência e correção orbital dos satélites lunares considerando os distúrbios devido ao potencial gravitacional não-uniforme da Lua. Venditti (2013) estudou manobras de correção e transferência ao redor de corpos irregulares modelando o campo gravitacional dos corpos com o auxílio do modelo dos poliedros e realizou um estudo de quatro modelos diferentes de concentrações de massa, e Venditti et al. (2013a) estudaram a dinâmica em torno de corpos com formas não esféricas modelados a partir da combinação de várias figuras geométricas como paralelepípedos. Apresentaram um primeiro estudo mostrando a evolução dos elementos keplerianos das órbitas em torno de um cubo e mostraram que é possível utilizar um sistema de controle em malha fechada para controlar a órbita a cada instante de tempo. Oliveira et al. (2013a) estimaram o consumo de combustível e a duração do trânsito nos cinturões de Van Allen para um voo de uma nave espacial que vai da Terra para a Lua.

Este problema é muito importante porque o interior da região dos cinturões tem uma alta densidade de partículas enérgicas carregadas que podem danificar o satélite. Assim, o estudo contribui com a minimização do tempo de trânsito e ajuda a proteger os equipamentos a bordo. Santos et al. (2013) apresentaram um estudo sobre a aplicação de um filtro de Kalman para estimar a posição e a velocidade de uma nave espacial em uma manobra de aerobraking ao redor da Terra. Foram simulados o *aerobraking* cis-lunar da nave espacial Hiten, bem como um aerobraking em uma órbita LEO. Rocco et al. (2013a) simularam manobras tridimensionais utilizando dois impulsos orbitais entre duas órbitas elípticas com consumo mínimo de combustível e com um limite de tempo.

O controle de uma trajetória espacial para corrigir automaticamente e simultaneamente os elementos orbitais que definem a órbita, eixo semi-maior, excentricidade, argumento periapse, inclinação e ascensão direita do nó ascendente, foi estudado e simulado por Rocco (2013). Para realizar o controle da trajetória foi utilizado um sistema de propulsão capaz de aplicar impulso com magnitude ajustável e direção de aplicação. Também em 2013, Rocco et al. (2013b) estudaram o problema de realizar manobras de manutenção de estações de satélites que pertencem a uma constelação, minimizar o consumo de combustível, o erro de posicionamento entre os satélites, e também incluir uma restrição de tempo para a realização das manobras de correção orbital. Sendo assim foi desenvolvida uma estratégia multi-objetivo para otimizar todos parâmetros simultaneamente. Oliveira et al. (2013b) desenvolveram um algoritmo capaz de encontrar trajetórias ótimas com impulso contínuo que satisfaçam diferentes tipos de missões e restrições ao mesmo tempo, e estudaram o desempenho de dois dispositivos de propulsão para manobras orbitais em desenvolvimento na Universidade de Brasília, incluindo um estudo dos efeitos dos erros de magnitude desses novos dispositivos. Gonçalves et al. (2013b) analisaram a influência da não homogeneidade do campo gravitacional lunar sobre a órbita de um satélite artificial ao redor da Lua a partir da variação da inclinação do satélite. Também foi analisada a contribuição de cada termo do potencial gravitacional e utilizado um sistema de controle para minimizar os efeitos perturbativos sobre o satélite. Gonçalves et al. (2013c) avaliaram a influência do albedo lunar na órbita de um satélite artificial ao redor da superfície da Lua a partir do comportamento dos elementos orbitais. Também foram estimados o consumo de combustível e o empuxo aplicado para corrigir a trajetória do satélite.

Gonçalves et al. (2014a) obtiveram o desvio padrão que caracteriza a incerteza para cada valor de grau e ordem até 100 do potencial gravitacional lunar e, utilizando as incertezas obtidas foi utilizado um filtro de Kalman na trajetória para reduzir os desvios na órbita simulada. O objetivo é aproximar os resultados obtidos quando são utilizados valores baixos para a expansão do potencial gravitacional, aos valores que seriam obtidos se considerada a expansão do potencial gravitacional até grau e ordem 100. Gonçalves et al. (2014b) avaliaram a influência da pressão de radiação solar e do albedo lunar na órbita de um satélite artificial ao redor da Lua e realizaram uma análise do movimento orbital. Santos et al. (2014) apresentaram os resultados da simulação de uma manobra aeroespacial ao redor da Terra, entre órbitas circulares coplanares, de uma órbita geostacionária a uma órbita baixa. Adotaram uma nave espacial com um corpo cúbico composto por duas placas retangulares dispostas perpendicularmente ao vetor de velocidade do veículo. Jatos propulsivos são aplicados no apogeu da órbita de transferência para manter a altitude do perigeu e controlar a taxa de transferência de calor sofrida pelo veículo durante a passagem atmosférica. Um controlador PID é usado para corrigir o desvio no vetor de estado e nos elementos keplerianos.

Santos (2015) explorou o problema de controle da nave espacial usando atuadores com características conflitantes, propondo uma nova estratégia de comando autônomo, baseada em uma abordagem discreta de otimização multi-objetivo que determina a melhor maneira de operar um determinado grupo de atuadores, de acordo com especificações predefinidas e entradas adquiridas on-line. A modelagem de um sistema robótico em ambiente espacial, levando em consideração as perturbações causadas à atitude do satélite, decorrentes de torques gerados pelo acionamento dos mecanismos robóticos na fase de atracção (*berthing*) entre satélites artificiais foi investigada por Nardin (2015). Gonçalves et al. (2015a) simularam parte da trajetória orbital da missão Lunar Prospector para analisar a relevância de usar um filtro de Kalman para estimar a trajetória, em que foi considerada a incerteza do sensor que define a posição do satélite em cada etapa da simulação e a incerteza do modelo, por meio da variância característica do modelo de gravidade truncada. A influência de forças perturbativas de origem gravitacional e não gravitacional, sobre um satélite artificial orbitando a Lua foi analisada por Gonçalves et al. (2015b). Neste trabalho foram consideradas as perturbações devido à não homogeneidade do campo gravitacional lunar, atração gravitacional da Terra e do Sol, albedo lunar e pressão de radiação solar. Rocco (2015a) analisou as manobras orbitais

de uma nave espacial orbitando Marte, considerando os efeitos de perturbação decorrentes da atração gravitacional do Sol, de Fobos e de Deimos, além dos distúrbios devido ao potencial gravitacional de Marte. Selecionou manobras ótimas impulsivas a partir das soluções do problema de Lambert visando consumo mínimo de combustível. Analisou a influência da capacidade dos propulsores na trajetória para um modelo mais realista, em vez do caso ideal representado pela abordagem impulsiva. Além da avaliação do desvio no trajeto orbital, foi considerada uma correção automática no semi-eixo maior, usando propulsão contínua de baixo impulso e sistema de controle orbital em malha fechada para minimizar o erro na trajetória após a aplicação do impulso principal. Júnior (2015) apresentou uma abordagem integrada para projetar o estimador e o controlador de atitude de satélites considerando diferentes tipos de erros presentes nos sensores e atuadores, em que foi utilizado uma abordagem multi-objetivo do problema de determinação e controle de atitude, levando em conta erros aleatórios e não aleatórios. Costa Filho (2015) considerou o problema de transição entre os modos de operação e o controle de atitude, analisando o sistema atuador subsidiado por auxílio de sensores e os efeitos que surgem durante a transição nos modos de operação.

Gonçalves et al. (2015c) analisaram a influência da não homogeneidade do campo gravitacional lunar utilizando a expansão dos harmônicos esféricos até grau e ordem 100, considerando uma variação na inclinação do satélite, além da contribuição de cada termo do potencial gravitacional. Também foram realizadas manobras de correção e transferência do satélite. Rocco (2015b) avaliou a influência da atração gravitacional do Sol e das luas galileanas durante as manobras de um satélite artificial orbitando Júpiter. Inicialmente foram obtidas manobras ótimas a partir da solução do problema de Lambert para, posteriormente, a manobra ótima selecionada ser simulada considerando um modelo mais realista do sistema de propulsão. Gonçalves et al. (2015d) analisaram manobras orbitais de um satélite artificial em torno da Lua sujeito ao potencial gravitacional lunar, atração gravitacional da Terra e do Sol, albedo lunar e pressão de radiação solar. Foram obtidas manobras ótimas com relação ao consumo de combustível a partir da solução do problema de Lambert e simuladas assumindo um modelo mais realista do sistema de propulsão. Foram analisados os desvios nos elementos orbitais que caracterizam a órbita do satélite artificial. Santos et al. (2015a) estudaram o problema ótimo de design de um sistema linear de controle invariante no tempo, composto por três tipos diferentes de atuadores em paralelo. Santos et al. (2015b) Propuseram uma abordagem inovadora para

resolver o problema de comando em tempo real dos propulsores de uma nave espacial, incluindo um sistema de controle de atitude e translação acoplados aplicados ao cenário de aproximação final de manobras de *rendezvous*.

Gonçalves et al. (2016a) analisaram a influência da não homogeneidade do campo gravitacional lunar na órbita de um satélite artificial, utilizando o modelo apresentado por Konopliv et al (2011), que permite expandir o potencial gravitacional em harmônicos esféricos até grau e ordem 100. A análise feita apresenta como resultados a contribuição de cada termo do potencial, a variação da perturbação devido à inclinação da órbita, a atuação do sistema de controle e a influência nas manobras de transferência e correção feitas para minimizar os efeitos perturbativos na órbita de satélite artificial. Rocco et al. (2016a) simularam trajetórias de um veículo espacial ao redor de Fobos considerando o campo gravitacional não central da lua, obtido por um modelo poliedral, e as atrações gravitacionais de Marte e do Sol. Gonçalves et al. (2016b) realizaram um detalhado estudo do potencial gravitacional de Marte considerando a expansão dos harmônicos esféricos até grau e ordem 80, por meio do mapeamento da perturbação a partir da variação da altitude, inclinação e ascensão reta do nodo ascendente. Também foi feita uma análise da contribuição de cada termo do potencial gravitacional individualmente. Santos et al. (2016) apresentaram um novo conceito de controle de veículos espaciais com base em uma técnica de otimização multi-objetivo.

Rocco e Gonçalves (2016) simularam o movimento orbital de um veículo espacial em torno do asteroide Ida, perturbado pela atração gravitacional de Dactyl e pelo campo gravitacional não central de Ida. Mapearam o campo gravitacional do asteroide e determinaram a trajetória que seria descrita por um veículo espacial em torno de Ida/Dactyl. Rocco et al. (2016b) estudaram e simularam trajetórias orbitais descritas por um veículo espacial em torno de Saturno, considerando as perturbações gravitacionais geradas por Saturno, pelo Sol e por Titã, Encélado, Tétis, Mimas, Hipérion, Jápeto, Reia, Dione e Febe. Gonçalves et al. (2016c) encontraram estratégias que permitem manter o satélite próximo a Fobos pelo máximo de tempo possível, considerando o satélite artificial em órbita de Marte, porém descrevendo uma órbita semelhante à órbita de Fobos. Utilizando propulsão contínua e um sistema de controle em malha fechada, foram realizadas manobras visando aproximar o satélite artificial de Fobos. Gonçalves et al. (2017) analisaram o campo gravitacional devido à distribuição não uniforme de massa de Deimos e simularam trajetórias na vizinhança da lua considerando a atração gravitacional

de Marte, do Sol e de Fobos, além do campo gravitacional não central de Deimos. Também realizaram manobras orbitais visando aproximar o satélite da superfície de Deimos.

Araujo (2017) modelou a perturbação gravitacional devido às 62 luas de Júpiter, avaliou e o mapeou a magnitude de tais perturbações, realizou um estudo visando a otimização de trajetórias que permitam o maior número de aproximações das luas galileanas e simulou manobras orbitais necessárias para inserir o veículo em uma órbita que permite o maior número de aproximações. Araujo e Rocco (2017) mapearam as perturbações sobre a trajetória de um satélite artificial devido às luas galileanas de Júpiter, Io, Europa, Ganimedes e Calisto e Silva e Rocco (2017) modelaram os cinturões de Van Allen usando dados reais da missão Van Allen Probes Mission. Com este modelo, foi realizado um estudo levando em conta a passagem de uma nave espacial através dos cinturões de Van Allen, estimando a dose de radiação absorvida e o tempo que a nave espacial permaneceu nas zonas de radiação, considerando os efeitos de uma atividade solar baixa e alta. Mahler (2017) estudou a variação do posicionamento relativo de quatro satélites que se agrupam sob a geometria de um tetraedro durante o movimento orbital, considerando o potencial gravitacional terrestre, as atrações gravitacionais do Sol e da Lua, pressão de radiação solar e arrasto atmosférico. Gonçalves et al. (2017a) estudaram possibilidades de manter um satélite artificial próximo à superfície de Deimos considerando a intensa atração gravitacional de Marte. Para esse estudo foi utilizada uma abordagem semelhante à abordagem utilizada para manobras de *rendezvous* e *docking*.

Ainda em 2017, Mahler et al. (2017) apresentaram um estudo sobre o layout tetraédrico de quatro satélites de forma que, a cada todo período de meia órbita o conjunto se agrupa enquanto voa em formação. A formação é calculada analisando o problema a partir de uma perspectiva geométrica e ajustando precisamente os parâmetros orbitais de cada satélite. Meireles e Rocco (2017) realizaram um estudo para o problema de Lambert de transferência orbital bi-impulsiva com restrição de tempo para a realização de manobras com mínimo consumo de combustível entre órbitas elípticas coplanares e não coplanares. A magnitude e o comportamento do potencial gravitacional do asteroide 243 Ida e seu satélite natural Dactyl foram analisadas por Rocco e Gonçalves (2017), bem com a influência sobre os elementos orbitais que definem a trajetória de um veículo espacial na vizinhança desses corpos.

Rocco et al. (2017a) estudaram a magnitude do potencial gravitacional não central de Prometeu, Epimeteu, Jano e Pandora e a magnitude das forças perturbativas devido ao potencial gravitacional de Saturno, atração gravitacional do Sol, pressão de radiação solar e atração gravitacional das demais luas que circundam o satélite imerso na região de influência das luas. Gonçalves et al. (2017b) investigaram possibilidades de órbitas com inclinação críticas e possibilidades de órbitas heliossíncronas em torno das luas de Saturno Titã, Encelado, Mimas, Rhea e Dione. Para algumas das possibilidades encontradas foram simuladas manobras de transferência e correção dos efeitos perturbativos devido ao potencial gravitacional de Saturno, atração gravitacional do Sol e potencial gravitacional das luas consideradas. Rocco et al. (2017b) modelaram a perturbação devido ao potencial gravitacional das 13 luas de Saturno que possuem raio superior a 50 quilômetros: Prometeu, Pandora, Epimeteu, Jano, Mimas, Encélado, Tétis, Dione, Reia, Titã, Hipérion, Jápeto e Febe e apresentaram um estudo do incremento de velocidade perturbador sobre um satélite artificial, quando consideradas simultaneamente as perturbações devido ao intenso potencial gravitacional de Saturno e ao potencial gravitacional das luas consideradas neste estudo. Também foi analisado o efeito de tais forças nos elementos orbitais que caracterizam a órbita do satélite.

Rocco et al. (2017c) apresentaram o levantamento da magnitude das principais perturbações capazes de alterar a órbita de um satélite artificial na vizinhança de Fobos, utilizando o problema de Lambert, calcularam o incremento de velocidade necessário para a realização de uma manobra que transfira o satélite de uma órbita ao redor de Marte para uma órbita próxima a Fobos, bem como a realização dessa manobra, e apresentaram uma estratégia para manter o satélite artificial próximo a Fobos, primeiramente sem a utilização de sistema de controle, depois controlando simultaneamente todos os elementos orbitais que caracterizam a órbita do satélite artificial. Silva (2017) estudou e analisou as manobras orbitais de um veículo espacial utilizando propulsão contínua, controladas por um sistema de controle PID em malha fechada, a partir de uma órbita de baixa altitude, em torno da Terra, para cada um dos três pontos colineares lagrangianos do sistema Terra-Lua, considerando as perturbações externas como efeito durante as manobras orbitais. Mota (2017) estabeleceu uma metodologia para determinar o modelo do campo gravitacional de um corpo com distribuição de massa irregular, utilizando o método da expansão do potencial em série, após a sua decomposição em elementos tetraédricos. Foi calculado o potencial total a partir do somatório dos potenciais relativos

de cada tetraedro. Utilizou o método para calcular o potencial dos asteroides Itokawa, Geographos, Eros, Bacchus, Bennu, Betulia, Castalia, Lutetia e Nereus.

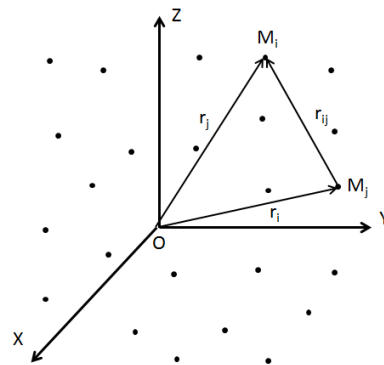
3 CONCEITOS BÁSICOS

No capítulo a seguir serão apresentados, brevemente, os conceitos teóricos básicos que fundamentam a pesquisa.

3.1. Problema de N corpos

Uma aproximação simplificada do problema de N corpos é considerar que todos os corpos envolvidos são pontos de massa, formulado pela primeira vez por Isaac Newton. A complexidade da abordagem em questão se dá pelo fato de que num sistema de N corpos existem múltiplas quase-colisões. Uma maneira comum de tratar tal problema é considerar um problema de dois corpos perturbado pelos demais $N - 2$ corpos envolvidos. Apesar da complexidade citada, as dez integrais do movimento que descrevem o sistema são conhecidas. A Figura 3.1 apresenta um sistema de N corpos, a fim de que sejam obtidas as equações de movimento (PRADO, 2001).

Figura 3.1. Representação de um sistema de N corpos.



Fonte: Adaptado de Prado (2001)

Da lei da gravitação universal de Newton, a equação do movimento do corpo de massa m_i é dada pela Equação (3.1):

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = G \sum_{j=1}^N \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3} \vec{r}_{ij} \quad (j \neq i, i = 1, 2, \dots, n) \quad (3.1)$$

sendo:

\vec{r}_i é o raio vetor da i -ésima partícula em relação ao referencial inercial $OXYZ$ e $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_j - \vec{r}_i = -\vec{r}_{ji}$ é o raio vetor que aponta de m_i para m_j .

Realizando o somatório da Equação (3.1), temos a equação (3.2):

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i = 0 \quad (3.2)$$

Integrando (3.2) duas vezes no tempo, tem-se, respectivamente (3.3) e (3.4):

$$\sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i = \vec{a} \quad (3.3)$$

$$\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i = \vec{a}t + \vec{b} \quad (3.4)$$

sendo \vec{a} e \vec{b} as constantes de integração.

Lembrando da definição de centro de massa, equação (3.5):

$$M\vec{r} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \quad (3.5)$$

em que $M = \sum_{i=1}^N m_i$ e \vec{r} é o raio vetor do centro de massa.

E combinando com as equações (3.3), (3.4), obtemos as Equações (3.6) e (3.7):

$$\vec{r} = (\vec{a}t + \vec{b}) \frac{1}{M} \quad (3.6)$$

$$\dot{\vec{r}} = \frac{\vec{a}}{M} \quad (3.7)$$

As equações (3.6) e (3.7) mostram que o centro de massa do sistema de N corpos se move com velocidade constante no espaço. As três componentes do vetor \vec{a} e as três componentes do vetor \vec{b} fornecem as seis primeiras integrais do movimento. Para

obtermos mais três integrais do movimento, vamos multiplicar vetorialmente a Equação (3.1) por \vec{r}_i e soma-la membro a membro. Assim obtemos a Equação (3.8):

$$\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \times \ddot{\vec{r}}_i = G \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3} \vec{r}_i \times \vec{r}_j \quad (j \neq i) \quad (3.8)$$

Lembrando que

$$\vec{r}_i \times \vec{r}_{ij} = \vec{r}_i \times (\vec{r}_j - \vec{r}_i) = \vec{r}_i \times \vec{r}_j$$

$$\vec{r}_j \times \vec{r}_{ji} = \vec{r}_j \times (\vec{r}_i - \vec{r}_j) = -\vec{r}_i \times \vec{r}_j$$

Executando o duplo somatório da Equação (3.8), é possível ver que os elementos do lado direito se cancelam dois a dois. Então, é obtida a Equação (3.9):

$$\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \times \ddot{\vec{r}}_i = 0 \quad (3.9)$$

Integrando, tem-se a Equação (3.10):

$$\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i = \vec{H} \quad (3.10)$$

Derivando em relação ao tempo, tem-se que $\dot{\vec{H}} = 0$, ou seja, o momento angular do sistema de N corpos é constante.

Para obter a décima constante do movimento é efetuado o produto escalar da Equação (3.1) por $\dot{\vec{r}}_i$ e executar o somatório, obtem-se a Equação (3.11):

$$\sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \ddot{\vec{r}}_i = G \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3} \vec{r}_i \cdot \vec{r}_j \quad (j \neq i) \quad (3.11)$$

Integrando a Equação (3.11), obtem-se a Equação (3.12):

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i - \frac{1}{2} G \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{m_i m_j}{r_{ij}} = E \quad (j \neq i) \quad (3.12)$$

Substituindo as variáveis da equação (3.12) por variáveis tradicionais da Mecânica, temos as Equações (3.13) e (3.14):

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i \quad (3.13)$$

$$U = \frac{1}{2} G \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{m_i m_j}{r_{ij}} \quad (3.14)$$

Temos que $T - U = E$, sendo T a energia cinética do sistema, U a energia potencial do sistema e E a energia total do sistema e a décima integral do movimento.

3.2. Potencial gravitacional de Marte

Considerando duas partículas de massa m e M , sendo $M \gg m$, separadas por uma distância \vec{r} , a aceleração \vec{a}_m da massa m em relação ao centro de massa das partículas, de acordo com a lei da gravitação universal de Newton, é dada pela Equação (15) (CHOBOTOV, 1991):

$$\vec{a}_m = -\frac{GM}{r^3} \vec{r} \quad (3.15)$$

em que G é a constante gravitacional ($G = 6,6726 \pm 0,0005 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg s}^2$), \vec{r} é o vetor que conecta as duas partículas, \vec{a}_m é o vetor aceleração da gravidade na direção de \vec{r} .

O vetor \vec{a}_m pode ser obtido pelo gradiente do potencial gravitacional U , dado pelas Equações (3.16) a (3.18):

$$\vec{a}_m = \vec{\nabla} U \quad (3.16)$$

$$U = \frac{GM}{r} = \frac{\mu}{r} \quad (3.17)$$

$$F = \frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{\mu}{r^2} \quad (3.18)$$

Derivando U duas vezes com respeito às coordenadas x , y e z , é obtida a equação de Laplace (3.19):

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 U = \mu \left[-\frac{3}{r^3} + \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} \right] = 0 \quad (3.19)$$

Usando coordenadas esféricas, a solução da equação de Laplace é dada pela Equação (3.20):

$$U = \frac{\mu}{r} + \frac{\mu}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a_e}{r}\right)^n P_{nm}(\text{sen } \phi) [C_{nm} \cos(m\lambda) + S_{nm} \text{sen}(m\lambda)] \quad (3.20)$$

em que

$$P_{nm}(s) = (1 - s^2)^{m/2} \frac{d^m}{ds^m} (P_n(s)) \quad (3.21)$$

$$P_{nm}(s) = 0, \quad m > n$$

$$P_n(s) = \frac{1}{2^n} \sum_{j=0}^N \frac{(-1)^j (2n - 2j)! s^{n-2j}}{j! (n - j)! (n - 2j)!} \quad (3.22)$$

$$N = \frac{n}{2}, \quad \text{para } n \text{ par} \quad (3.23)$$

$$N = \frac{n-1}{2}, \quad \text{para } n \text{ ímpar}$$

$n = 0, 1, 2, 3, \dots$, $s = \text{sen } \phi$, C_{nm} , S_{nm} são os coeficientes dos harmônicos esféricos, μ ($= GM$) é a constante gravitacional, a_e é o raio equatorial de Marte, r é o raio vetor (distância), ϕ é a latitude do centro de Marte, λ é a longitude do centro de Marte, $P_{nm}(s)$ são os polinômios associados de Legendre, n é o grau e m a ordem e $P_n(s)$ são os polinômios de Legendre.

3.3. Atração gravitacional do Sol, Fobos e Deimos como terceiros corpos

A função do potencial gravitacional devido a presença do terceiro corpo é dada pela Equação (3.24) (CHOBOTOV, 1991):

$$F' = \left(\frac{\mu'}{r'}\right) \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{r}{r'}\right)^n P_n \cos \psi \right] \quad (3.24)$$

em que: μ' é o produto entre a constante gravitacional e a massa m' do terceiro corpo; r' é o módulo do vetor posição do terceiro corpo em relação ao centro de massa de Marte; ψ é o ângulo entre o vetor posição do satélite com relação à Marte (\vec{r}) e o vetor posição do satélite com relação ao terceiro corpo; r é o módulo do vetor posição do satélite com relação à Marte.

De acordo com Prado e Kuga (2001) e Szebehely (1967) o problema geral de três corpos fornece uma maneira simples de calcular as acelerações perturbadoras devido à atração gravitacional dos corpos, obtido a partir de lei da gravitação de Newton, dadas pelo conjunto de Equações (3.25).

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}}_1 &= -Gm_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} + Gm_3 \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|^3} \\ \ddot{\vec{r}}_2 &= -Gm_3 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} + Gm_1 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \\ \ddot{\vec{r}}_3 &= -Gm_1 \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|^3} + Gm_2 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} \end{aligned} \quad (3.25)$$

em que \vec{r}_1 , \vec{r}_2 e \vec{r}_3 são os vetores posição dos corpos, m_1 , m_2 e m_3 são as massas dos corpos e G é a constante gravitacional.

3.4. Pressão de radiação solar

A pressão de radiação solar é uma força de origem não gravitacional capaz de perturbar o movimento translacional de um satélite artificial lunar devido a quantidade de movimento dos fótons que colidem com a superfície do satélite, causando uma variação nos elementos orbitais.

Segundo Vilhena de Moraes (1978), a força de pressão de radiação solar afeta principalmente a excentricidade e o semi-eixo maior da órbita de um satélite artificial.

A taxa de variação de energia radiante por unidade de área é dada pela Equação (3.23).

$$\left(\frac{d}{dt} (E_R) \right) = \frac{P}{dA} \quad (3.23)$$

O fluxo de energia radiante é proporcional ao quadrado da distância heliocêntrica. Logo:

$$\bar{S} = S_0 \left(\frac{a_s}{R'} \right)^2 \quad (3.24)$$

em que \bar{S} é o fluxo de energia radiante, S_0 é a constante solar.

Em que R' é a distância heliocêntrica da superfície atingida pelo fluxo, dada pela Equação (3.25):

$$p = \frac{\bar{K}}{R'^2} \quad (3.25)$$

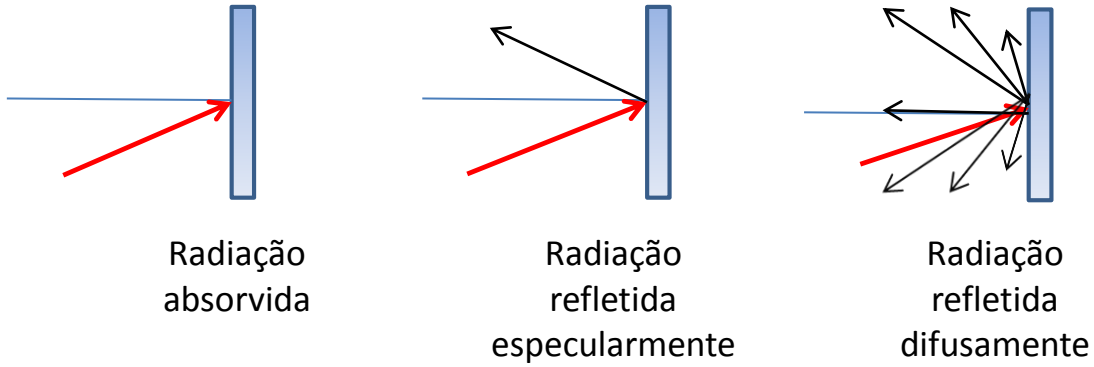
Em que $\bar{K} = \frac{S_0 a_s^2}{c} = 1,01 \times 10^{17} \text{ kg m/s}$ (ZANARDI, 1993) e sabendo que a pressão de radiação solar quando o fluxo de energia radiante é perpendicular à superfície em questão é dada pela Equação (3.26).

$$p = \frac{\bar{S}}{c} \quad (3.26)$$

sendo c a velocidade da luz no vácuo.

Em geral, é assumida que toda radiação solar incidente sobre a superfície do satélite é absorvida, refletida especularmente, refletida difusamente, como representado na Figura 3.2, ou alguma combinação das situações citadas.

Figura 3.2. Força de radiação incidente sobre uma superfície.



Segundo Harris e Lyle (1969), a força de radiação completamente absorvida pela superfície do satélite é dada pela Equação (3.26), a força de radiação refletida especularmente é dada pela Equação (3.27) e a força de radiação refletida difusamente é dada pela Equação (3.28).

$$d\vec{F}_a = \frac{I}{c} [c_a(-\cos\theta \hat{n} + \sin\theta \hat{s})] \cos\theta dA \quad (3.26)$$

$$d\vec{F}_{re} = \frac{I}{c} [-(1 + c_{re}) \cos\theta \hat{n} + 1 - c_{re}) \sin\theta \hat{s}] \cos\theta dA \quad (3.27)$$

$$d\vec{F}_{rd} = \frac{I}{c} \left[-\left(\cos\theta + \frac{2}{3}c_{rd} \right) \hat{n} + \sin\theta \hat{s} \right] \cos\theta dA \quad (3.28)$$

sendo I a energia por unidade de tempo através de uma área, c a velocidade da luz em m/s , c_a o coeficiente de absorção, c_{re} o coeficiente de reflexão especular, c_{rd} o coeficiente de reflexão difusa, \hat{n} o versor na direção normal à superfície e \hat{s} o versor na direção tangente à superfície.

Fazendo $\theta = 0$ nas Equações (3.26) a (3.28), obtemos as Equações (3.29) a (3.31).

$$d\vec{F}_a = -\frac{I}{c} c_a \hat{n} dA \quad (3.29)$$

$$d\vec{F}_{re} = -\frac{I}{c} (1 + c_{re}) \hat{n} dA \quad (3.30)$$

$$d\vec{F}_{rd} = -\frac{I}{c} \left(1 + \frac{2}{3} c_{rd}\right) \hat{n} dA \quad (3.31)$$

Sendo assim, a força de radiação incidente sobre a superfície do satélite na direção normal à superfície é dada pela Equação (3.32):

$$\begin{aligned} d\vec{F}_{\hat{n}} &= d\vec{F}_{a\hat{n}} + d\vec{F}_{re\hat{n}} + d\vec{F}_{rd\hat{n}} \\ d\vec{F}_{\hat{n}} &= -\frac{I}{c} \left(\frac{2}{3} c_{rd} + c_a + 2 + c_{re} \right) \end{aligned} \quad (3.32)$$

3.5. O problema de Lambert

A determinação de uma manobra que liga um ponto na órbita inicial a um ponto na órbita final durante um intervalo de tempo t pode ser feita a partir da solução do Problema do Valor de Limite de Dois Pontos (*Two Point Boundary Value Problems* - TPBVP).

A velocidade inicial \vec{v}_1 e a velocidade final \vec{v}_2 da órbita de transferência que conecta os pontos inicial e final estão relacionadas aos raios vetores \vec{r}_1 e \vec{r}_2 pela Equação (3.33):

$$\vec{v}_1 = \frac{\vec{r}_2 - f(z)\vec{r}_1}{g(z)}; \quad \vec{v}_2 = \frac{\dot{g}(z)\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{g(z)} \quad (3.33)$$

Assim, para obter a solução do TPBVP é necessário encontrar as funções $f(z)$ e $g(z)$. Este problema é conhecido como problema de Lambert, cujo estudo detalhado pode ser encontrado em Bate et al. (1971) e o algoritmo para resolver este problema é dado pelas Equações (3.34) a (3.39) (BATTIN, 1999, BOND E ALLMAN, 1996 e BATE et al., 1971):

$$A = \text{sign}(\pi - \Delta\theta) \sqrt{|\vec{r}_1| |\vec{r}_2| (1 + \cos \Delta\theta)}; \quad \begin{aligned} \text{sign}(\pi - \Delta\theta) = -1 &\Rightarrow \Delta\theta > \pi \\ \text{sign}(\pi - \Delta\theta) = +1 &\Rightarrow \Delta\theta < \pi \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\Delta\theta = a \cos\left(\frac{\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2}{|\vec{r}_1||\vec{r}_2|}\right) \quad (3.35)$$

$$F(z) = x^3(z)S(z) + A\sqrt{y(z)} - t\sqrt{\mu} = 0 \quad (3.36)$$

$$S(z) = \frac{\sqrt{z} - \sin(\sqrt{z})}{\sqrt{z}^3}; \quad C(z) = \frac{1 - \cos(\sqrt{z})}{z} \quad (3.37)$$

$$x(z) = \sqrt{\frac{y(z)}{C(z)}}; \quad y(z) = |\vec{r}_1| + |\vec{r}_2| - A \frac{1 - zS(z)}{\sqrt{C(z)}} \quad (3.38)$$

$$\{z \in \mathfrak{R} : 0 \leq z \leq (2\pi)^2\} \quad (3.39)$$

As possibilidades para a função $f(z)$ são varridas usando um algoritmo em cascata e cobre toda a gama de soluções elípticas.

$$f(z) = 1 - \frac{y(z)}{|\vec{r}_1|}; \quad g(z) = A\sqrt{\frac{y(z)}{\mu}}; \quad \dot{g}(z) = 1 - \frac{y(z)}{|\vec{r}_2|} \quad (3.40)$$

Desta forma, é possível obter a velocidade inicial \vec{v}_1 , a velocidade final \vec{v}_2 e o incremento de velocidade necessário para realizar a manobra dada pela Equação 3.41:

$$\Delta\vec{v}_1 = \vec{v}_1 - \vec{v}_{initial}; \quad \Delta\vec{v}_2 = \vec{v}_{final} - \vec{v}_2 \quad (3.41)$$

Para o cálculo da manobra impulsiva ótima, várias soluções do TPBVP são obtidas com a variação do intervalo de tempo gasto na manobra. Porém, é escolhida a manobra com menor incremento de velocidade e consequentemente o consumo mínimo de combustível.

4 METODOLOGIA

Tendo em vista que um dos objetivos do trabalho é analisar o problema que envolve colocar um satélite artificial orbitando os corpos envolvidos no sistema Marte, Fobos e Deimos, faz-se necessário um estudo detalhado da dinâmica de um satélite artificial na vizinhança de tais corpos.

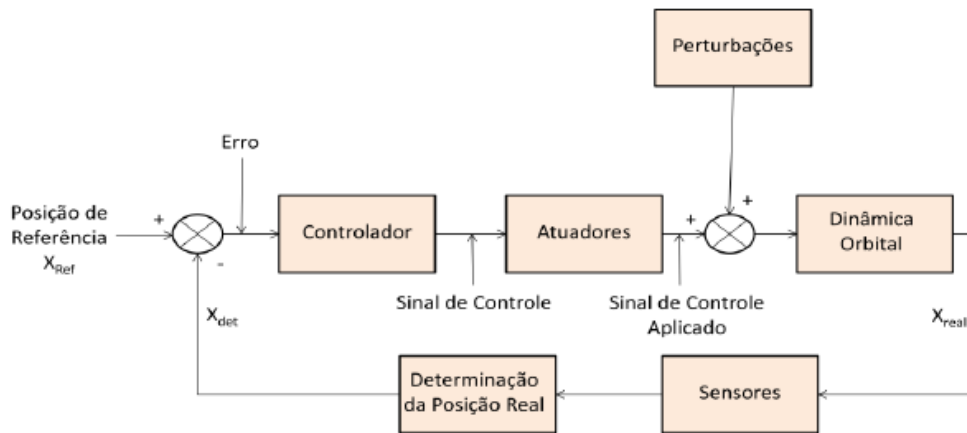
Com o objetivo de realizar simulações com resultados o mais próximos possível da dinâmica real que envolve o sistema Sol, Marte, Fobos e Deimos, as principais perturbações capazes de alterar a órbita de um satélite artificial foram estudadas e implementadas no simulador de trajetórias STRS. São consideradas perturbações de origem gravitacional, tais como atração gravitacional do corpo central e atração gravitacional de terceiro corpo e não gravitacional, tal como a pressão de radiação solar. Para a perturbação devido ao potencial gravitacional de Marte é utilizado o modelo GMM-2B (Lemoine, et al. 2001), que permite considerar a expansão dos harmônicos esféricos do planeta até grau e ordem 80. Já para o caso das luas, tendo em vista que o método dos harmônicos esféricos não é aplicável a corpos irregulares com significativa precisão, segundo Venditti (2013), Venditti et al. (2013a e 2013b) e Rocco (2014) é mais recomendado que se utilize o método de poliedros para o estudo do potencial gravitacional. Tal método se baseia na divisão do corpo em vários termos associados a poliedros definidos por meio de dados observacionais que modelam o volume do corpo. O potencial gravitacional de cada poliedro é calculado e a soma do potencial de todos os poliedros resulta no potencial gravitacional do corpo.

4.1. *Spacecraft Trajectory Simulator (STRS)*

O simulador STRS tem algumas características específicas: opera de forma discreta, calculando o estado do veículo espacial (posição e velocidade) a cada passo da simulação, que é definido como um dos parâmetros de entrada do simulador; considera as perturbações orbitais no cálculo do estado atual do veículo; permite modelar aspectos construtivos do veículo espacial como as não linearidades dos atuadores e sensores; é capaz de simular tanto a aplicação de manobras impulsivas quanto de baixo empuxo, utilizando propulsão contínua controlada em malha fechada visando diminuir os erros na trajetória durante a aplicação de manobras de correção ou de transferência orbital.

O diagrama de blocos da Figura 4.1 representa o sistema de controle da trajetória orbital em malha fechada utilizado pelo STRS.

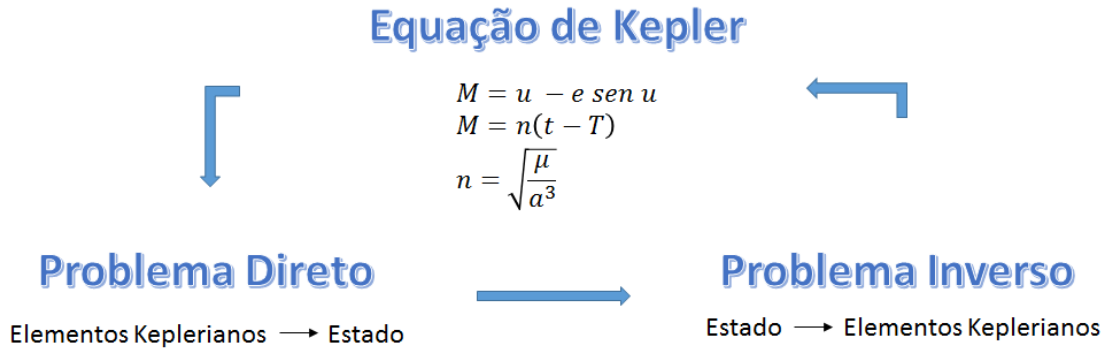
Figura 4.1. Controle em malha fechada da trajetória.



Primeiramente determina-se um estado de referência (X_{ref}), uma estimativa ótima da trajetória a ser seguida pelo satélite, a partir dos objetivos da missão. Esta referência é comparada com o estado real do satélite (X_{det}), que é obtido por meio de sensores. Essa comparação gera um sinal de erro, que será a entrada do controlador. O controlador utiliza as técnicas PID (proporcional, integral e derivativo) para gerar o sinal de controle, que será enviado para os atuadores, definindo a magnitude e a direção das correções a serem aplicadas. A saída do atuador, somada às perturbações ou distúrbios externos, são inseridas à dinâmica do movimento orbital, determinando a posição e a velocidade atuais do satélite. Por meio de sensores são coletados parâmetros referentes à posição real do satélite (X_{det}), que é novamente comparada com a posição de referência (X_{ref}), que gera um erro e o ciclo do sistema de controle recomeça.

A dinâmica do movimento orbital pode ser determinada resolvendo a equação de Kepler a cada passo, definido como parâmetro de entrada no simulador, dados um estado inicial e um intervalo de tempo. Resolvendo o problema inverso de posicionamento de um satélite, é possível determinar os elementos keplerianos da órbita. Utilizando a equação de Kepler obtêm-se os elementos propagados para o intervalo de tempo considerado como entrada para a simulação. A partir dos novos elementos keplerianos, é possível obter o estado propagado resolvendo o problema direto de posicionamento de um satélite (ROCCO, 2013). Um esquema ilustrando a dinâmica do movimento orbital implementada no STRS é apresentada na Figura 4.2.

Figura 4.2. Modelagem matemática da dinâmica do movimento orbital.



4.2. O modelo GMM-2B

No período anterior ao lançamento das missões Mariner 9 e Viking Orbiter pouco se sabia sobre o campo gravitacional de Marte, sendo o conhecimento limitado a uma estimativa do valor da constante gravitacional universal e do achatamento do planeta. Tais missões contribuíram com o desenvolvimento de modelos com baixa precisão para a solução dos harmônicos esféricos do potencial gravitacional, mas serviram como impulso inicial para a investigação do assunto, além de importante ajuda para o desenvolvimento dos precisos modelos que temos atualmente. A partir dos resultados obtidos pela missão *Mars Global Surveyor*, foi elaborado por Lemoine et al. (2001) o modelo GMM-2B, que é uma representação dos harmônicos esféricos devido à gravidade planetária baseada no potencial gravitacional do corpo celeste, dado pela Equação (4.1), que representa o potencial gravitacional de Marte U , modelado em harmônicos esféricos (KAULA, 1966).

$$U(r, \lambda, \phi) = \frac{\mu}{r} + \frac{\mu}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a_e}{r}\right)^n (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \operatorname{sen} m\lambda) \bar{P}_{nm}(\operatorname{sen} \phi) \quad (4.1)$$

em que $\mu (= GM)$ é a constante gravitacional, a_e é o raio equatorial, \bar{P}_{lm} são os polinômios de Legendre associados normalizados de grau n e ordem m , r é a coordenada radial fixa no corpo, ϕ é a latitude e λ é a longitude, e \bar{C}_{nm} e \bar{S}_{nm} são os coeficientes normalizados da expansão dos harmônicos esféricos.

A saída calculada pelo modelo fornece as componentes x , y e z para a aceleração da gravidade a cada instante de tempo ao longo da órbita de um satélite artificial. Neste modelo é possível considerar os harmônicos esféricos até grau e ordem 80. Por uma

comparação entre a aceleração da gravidade de um campo central e a aceleração gravitacional fornecida pelo modelo GMM-2B, obtém-se o incremento de velocidade perturbador sobre o satélite, sendo possível, por meio do problema inverso, a obtenção dos elementos keplerianos que caracterizam a órbita de um do satélite artificial, a fim de que seja feita uma análise do movimento orbital.

4.3. Potencial gravitacional de Fobos e Deimos

O campo gravitacional de Fobos e Deimos não pode ser considerado central, já que as luas não são esféricas, assemelhando-se mais ao formato de um asteroide irregular. Assim, neste trabalho considera-se um campo gravitacional não central gerado por Fobos e Deimos, obtido por meio de um modelo poliedral para a distribuição de massa do satélite, associado ao modelo de concentrações de massa.

4.3.1. Modelo poliedral

Baseado no modelo apresentado por Werner (1994), o modelo poliedral utilizado para definir a irregularidade no formato de Fobos e Deimos tem por base dividir o corpo da lua em tetraedros e calcular o potencial de cada tetraedro separadamente. O potencial total de todo o poliedro é dado pelo somatório do potencial de cada tetraedro.

A partir de leituras de tabelas fornecidas pela NASA (GASKELL, 2011), contendo as coordenadas de cada poliedro que forma o corpo, foi desenvolvido um modelo que junta cada um dos poliedros da tabela, descrevendo o formato irregular da lua.

4.3.2. Modelo das concentrações de massas

Associado ao método poliedral que define o formato do corpo, é utilizado o modelo das concentrações de massas, que define a distribuição não uniforme de massa do corpo. O método das concentrações de massas consiste, basicamente, em determinar a massa de cada tetraedro, proporcional ao seu volume, alocada no centroide do tetraedro. Com as posições de cada concentração de massa é possível calcular o potencial gravitacional gerado por cada concentração, e o somatório do potencial gerado por cada concentração fornece o potencial gravitacional gerado pela lua. Dessa forma é possível obter o potencial gravitacional quando considerada a irregularidade no formato e na distribuição de massa

dos corpos. Ou seja, com as posições de cada concentração de massa foi possível calcular o potencial gravitacional gerado por cada concentração ao longo de toda trajetória do veículo espacial nas proximidades dos satélites de Marte. O somatório do potencial gerado por todas as concentrações de massa fornece o potencial gravitacional gerado pelas luas no ponto que o veículo se encontra. A comparação do potencial gravitacional de campo central, considerando uma massa igual à massa de Fobos ou Deimos, e o potencial gravitacional não central, obtido por meio do modelo poliedral associado ao modelo de concentrações de massa, fornece a perturbação gravitacional que o veículo espacial está submetido devido a não esfericidade de Fobos e Deimos.

O modelo matemático, bem como as equações que definem a metodologia utilizada para o cálculo do potencial gravitacional de Fobos e Deimos, considerando a irregularidade no formato e a distribuição não uniforme de massa, podem ser encontrados em Venditti (2013) e Mota (2017).

5 PERTURBAÇÕES ORBITAIS NA VIZINHANÇA DE MARTE, FOBOS E DEIMOS

O presente capítulo objetiva estudar e analisar as forças perturbadoras capazes de alterar os elementos orbitais de um satélite artificial, realizando trajetórias orbitais próximo a Marte, Fobos e Deimos. As perturbações propostas para estudo são o potencial gravitacional do corpo central (Marte, Fobos ou Deimos), a pressão de radiação solar e a atração gravitacional do Sol e dos terceiros corpos (Fobos e Deimos, para o caso do satélite estar próximo a Marte; Marte e Deimos, para o caso do satélite estar próximo a Fobos; e Marte e Fobos, para o caso do satélite estar próximo a Deimos), modeladas conforme descrito no Capítulo 4.

Para todos os casos estudados, foram variadas a altitude, a ascensão reta do nodo ascendente e a inclinação do satélite. Para o caso do satélite orbitando Marte, a altitude foi variada entre 50 e 550 km, de 100 em 100 km, e para o caso de Fobos e Deimos as altitudes foram variadas entre 5 e 55 km, de 10 em 10 km. Para todos os casos estudados, a ascensão reta do nodo ascendente foi variada entre 0 e 180°, de 30 em 30 graus, e a inclinação entre 0 e 90°, também de 30 em 30 graus.

É válido salientar que as perturbações são apresentadas e estudadas isoladamente, porém todas são consideradas simultaneamente. Devido à dificuldade em manter um satélite artificial orbitando os satélites naturais de Marte, para o estudo das perturbações na região próxima à superfície de Fobos e Deimos, todas as perturbações foram calculadas, mas nesta situação, apenas para fins de mapeamento das perturbações, optou-se por não inseri-las na dinâmica do sistema. Ou seja, a magnitude de cada perturbação é calculada, mas o satélite não sofre a influência da mesma pois neste estudo objetiva-se apenas avaliar a magnitude das perturbações em função da posição. Desta forma é possível que o satélite artificial realize uma volta completa em torno da lua, o que não acontece quando são consideradas todas as perturbações atuando simultaneamente.

Os resultados obtidos para o somatório do incremento de velocidade perturbador, para um tempo de simulação de uma órbita ao redor do corpo central, estão apresentados nas Figuras 5.1 a 5.15. Para a organização dos resultados foi utilizada uma escala de cores, em que cada grupo de cor (azul, vermelha, verde e rosa) apresenta os resultados para determinado valor de inclinação (0°, 30°, 60° e 90°). Para cada valor de inclinação foi variada a cor em função da altitude do satélite, em que a cor mais clara representa o

satélite posicionado na altitude mais próxima do corpo perturbador, e a mais escura representa o satélite posicionado na altitude mais afastada do corpo perturbador.

Figura 5.1. Somatório do incremento de velocidade perturbador devido ao potencial gravitacional de Marte (satélite ao redor de Marte).

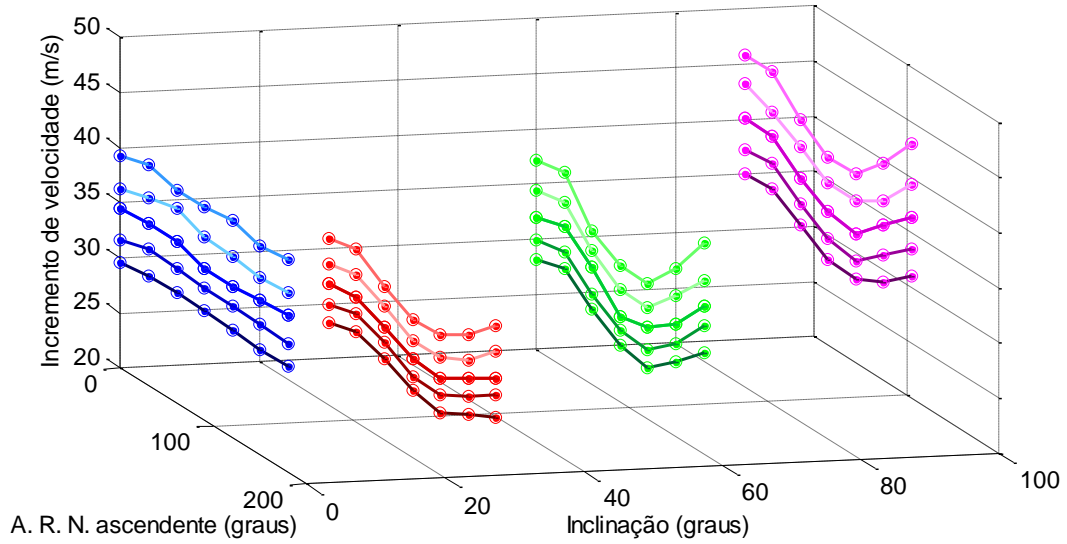


Figura 5.2. Somatório do incremento de velocidade perturbador devido à atração gravitacional de Fobos (satélite ao redor de Marte).

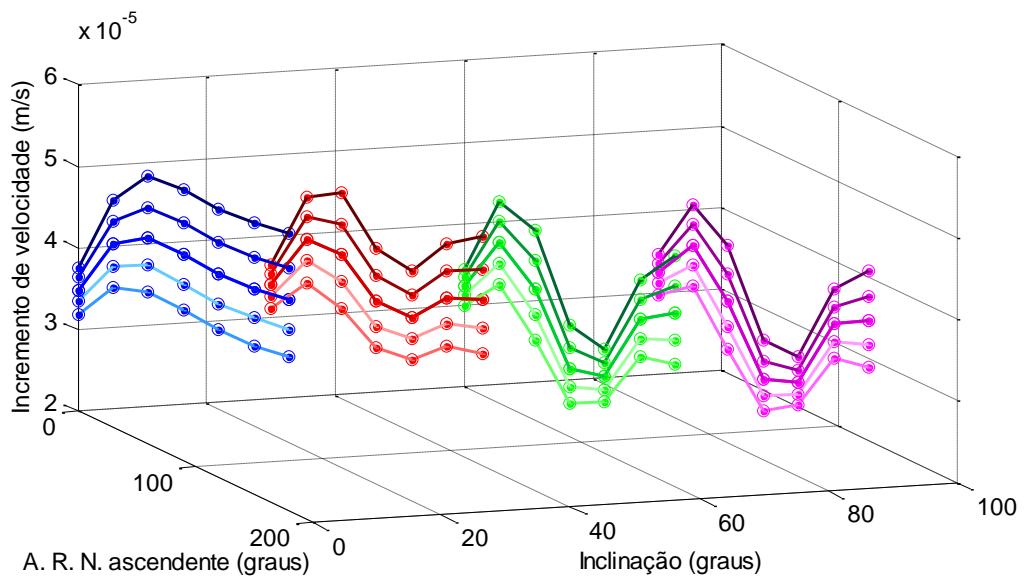


Figura 5.3. Somatório do incremento de velocidade perturbador devido à atração gravitacional de Deimos (satélite ao redor de Marte).

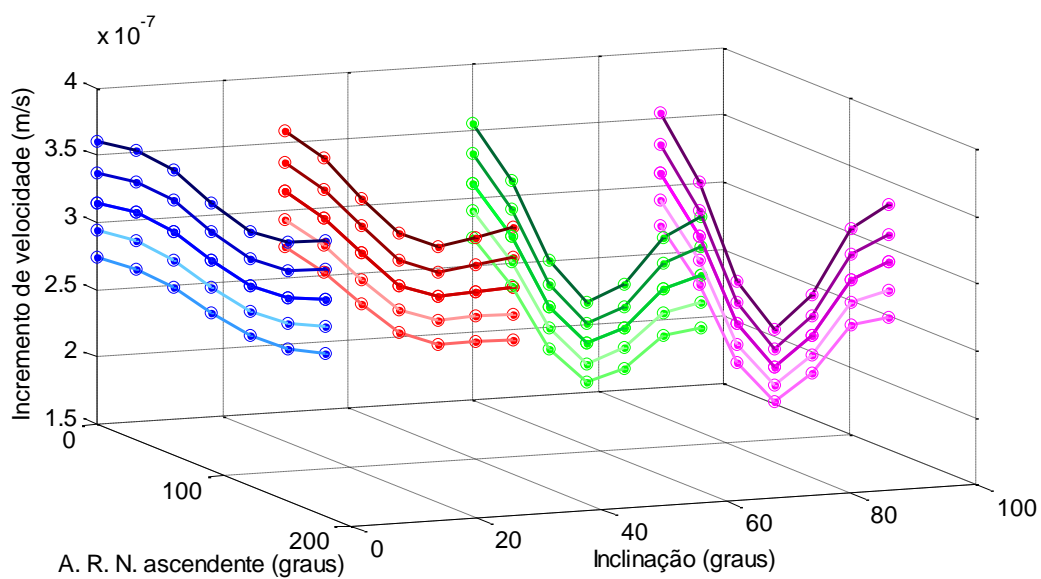


Figura 5.4. Somatório do incremento de velocidade perturbador devido à atração gravitacional do Sol (satélite ao redor de Marte).

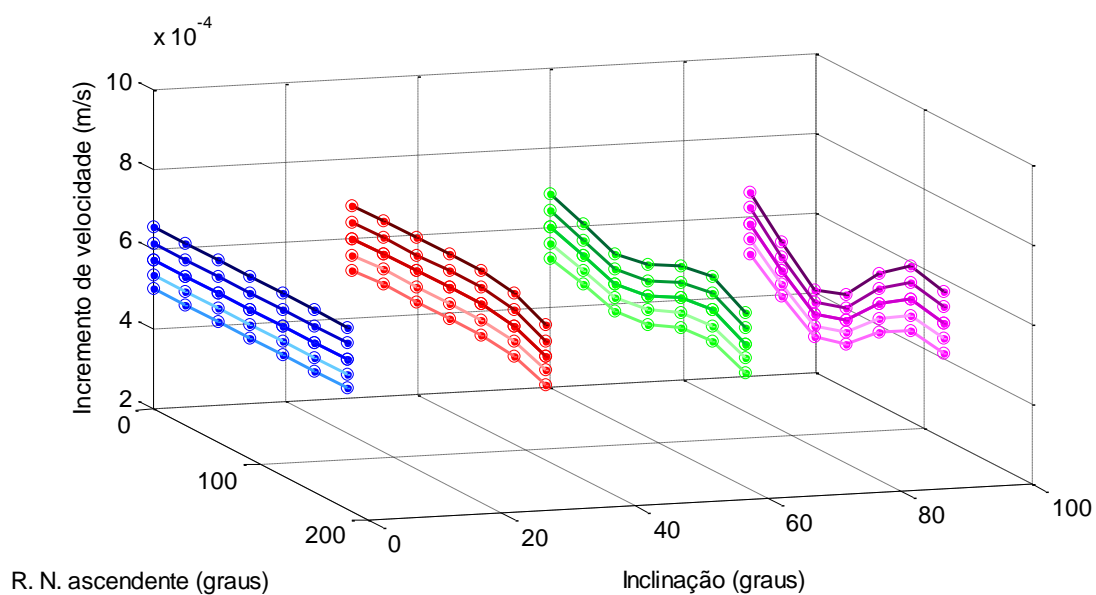


Figura 5.5. Somatório do incremento de velocidade perturbador devido à pressão de radiação solar (satélite ao redor de Marte).

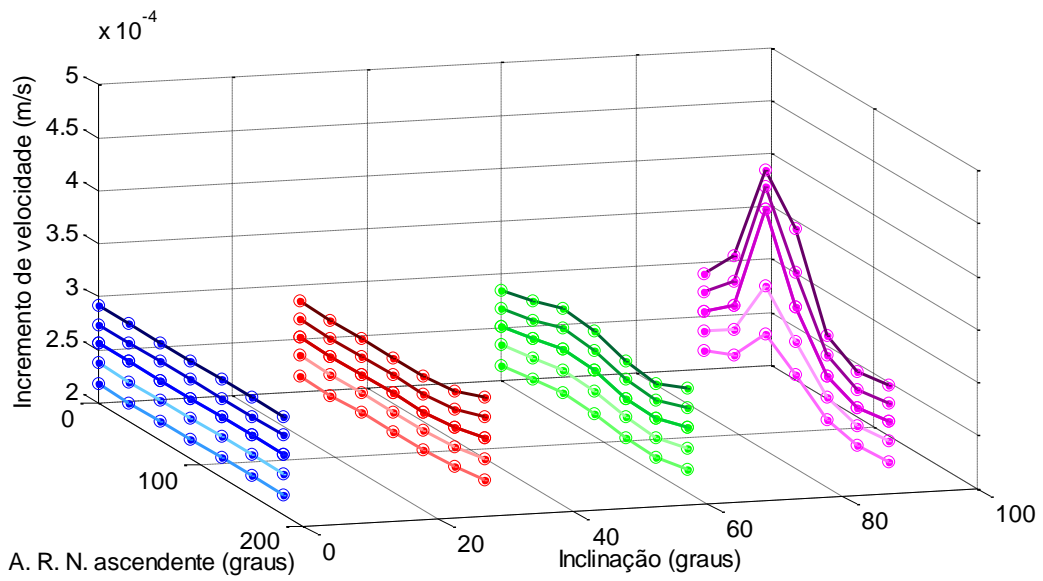


Figura 5.6. Somatório do incremento de velocidade perturbador devido à atração gravitacional de Marte (satélite ao redor de Fobos).

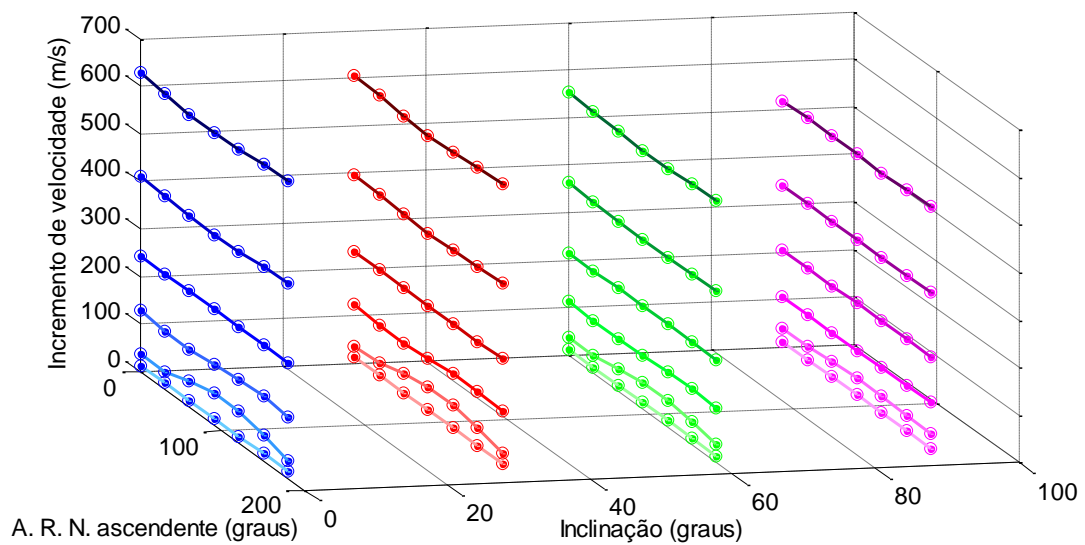


Figura 5.7. Somatório do incremento de velocidade perturbador devido ao potencial gravitacional de Fobos (satélite ao redor de Fobos).

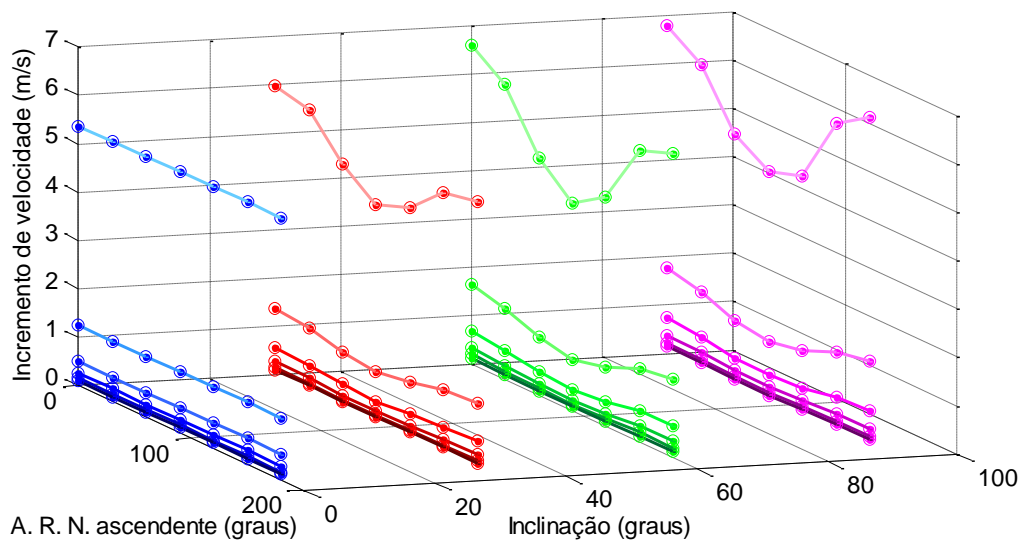


Figura 5.8. Somatório do incremento de velocidade perturbador devido à atração gravitacional de Deimos (satélite ao redor de Fobos).

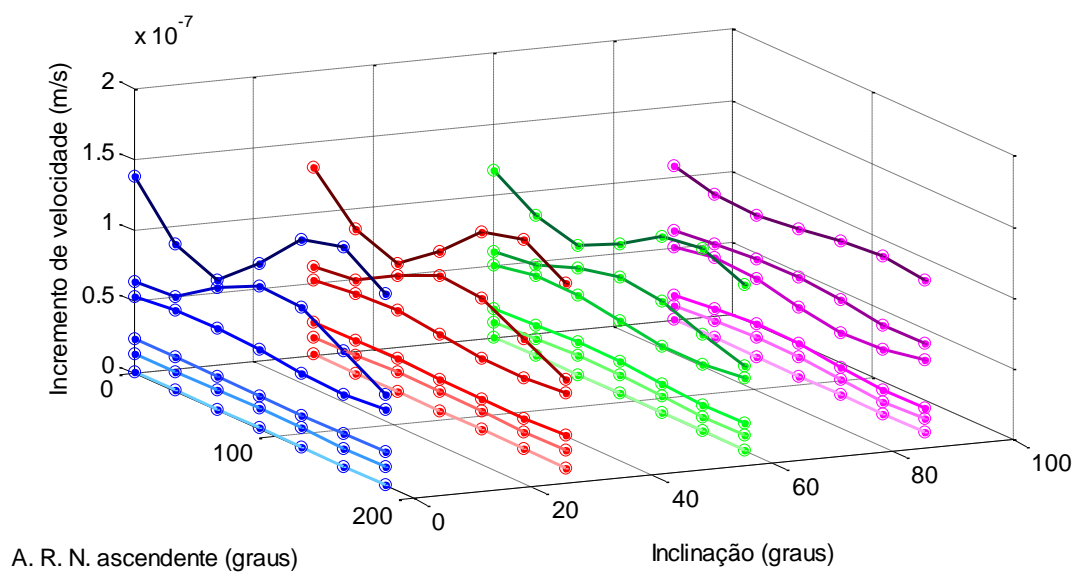


Figura 5.9. Somatório do incremento de velocidade perturbador devido à atração gravitacional do Sol (satélite ao redor de Fobos).

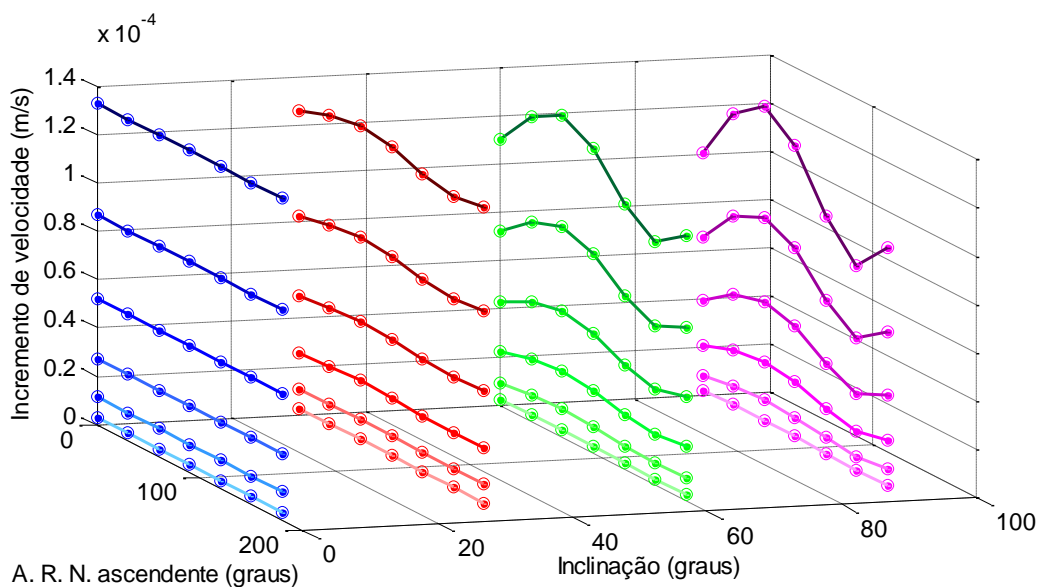


Figura 5.10. Somatório do incremento de velocidade perturbador devido à pressão de radiação solar.

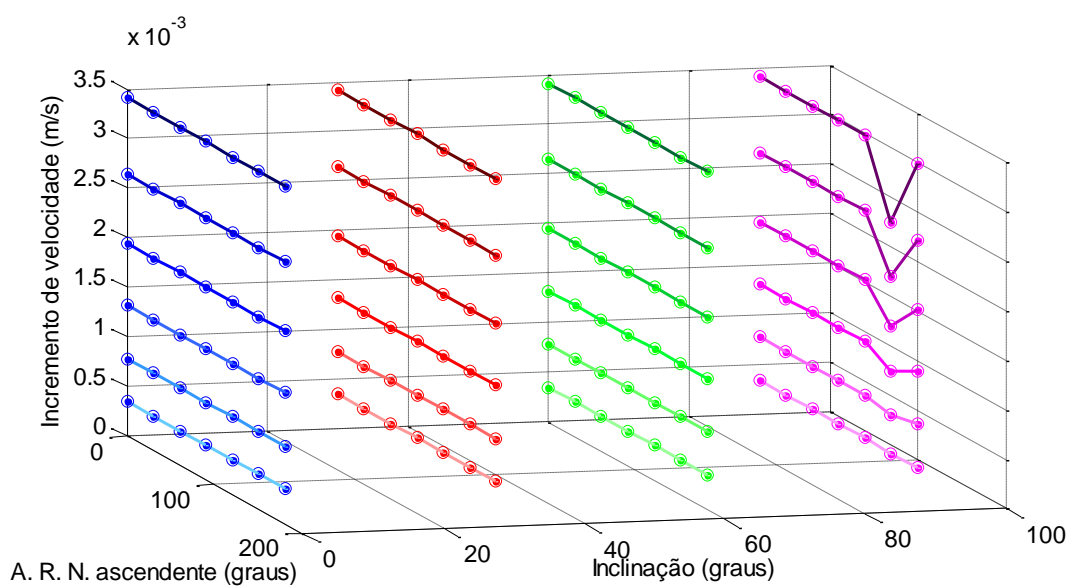


Figura 5.11. Somatório do incremento de velocidade perturbador devido à atração gravitacional de Marte (satélite ao redor de Deimos).

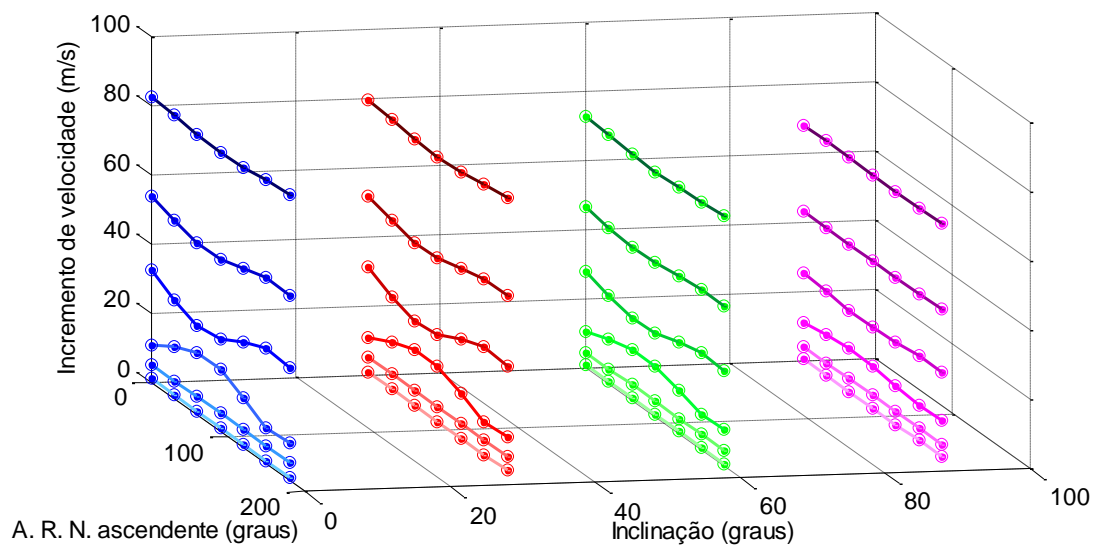


Figura 5.12. Somatório do incremento de velocidade perturbador devido à atração gravitacional de Fobos (satélite ao redor de Deimos).

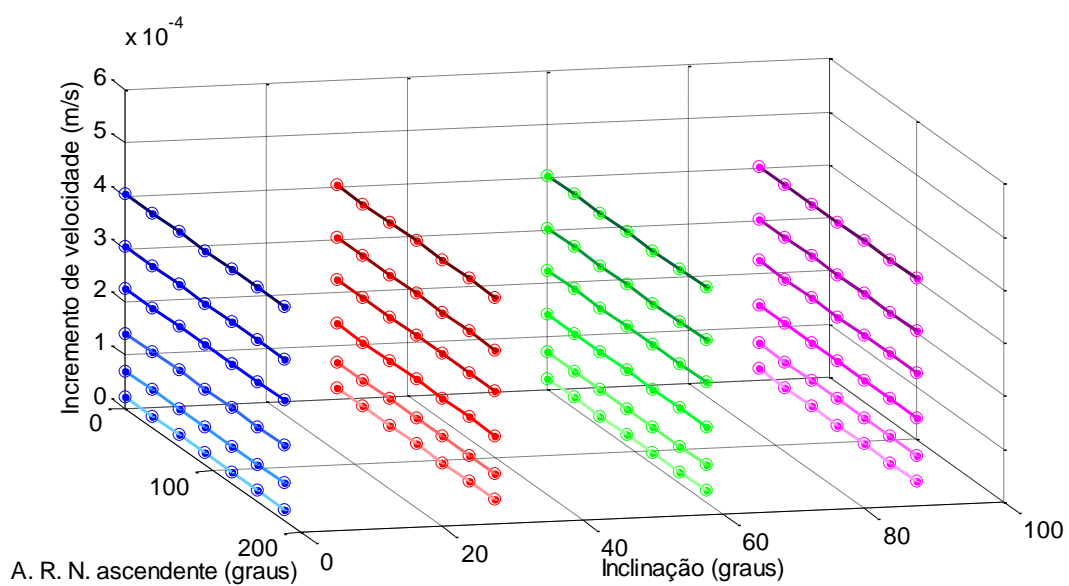


Figura 5.13. Somatório do incremento de velocidade perturbador devido ao potencial gravitacional de Deimos (satélite ao redor de Deimos).

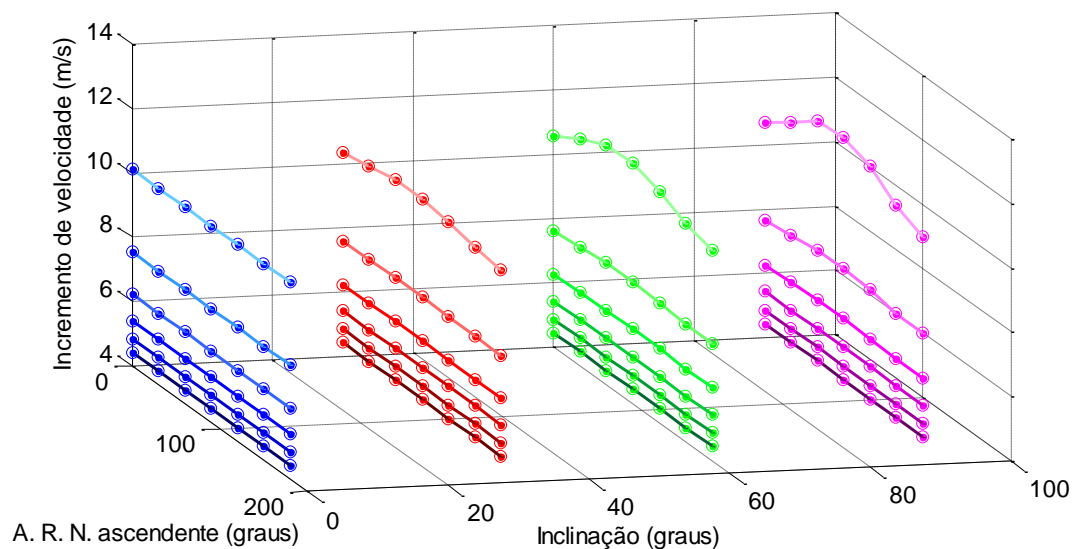


Figura 5.14. Somatório do incremento de velocidade perturbador devido à atração gravitacional do Sol (satélite ao redor de Deimos).

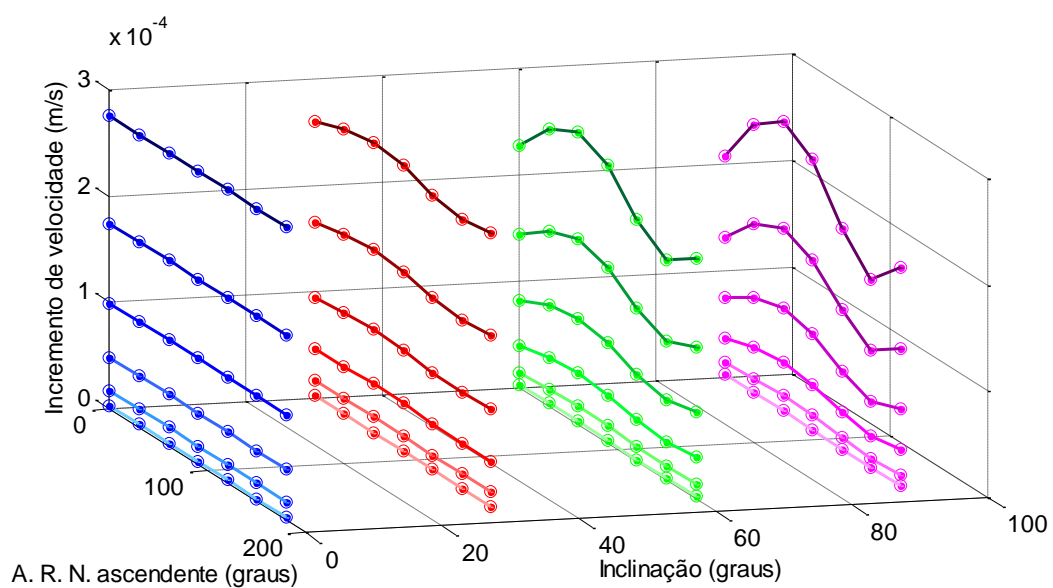
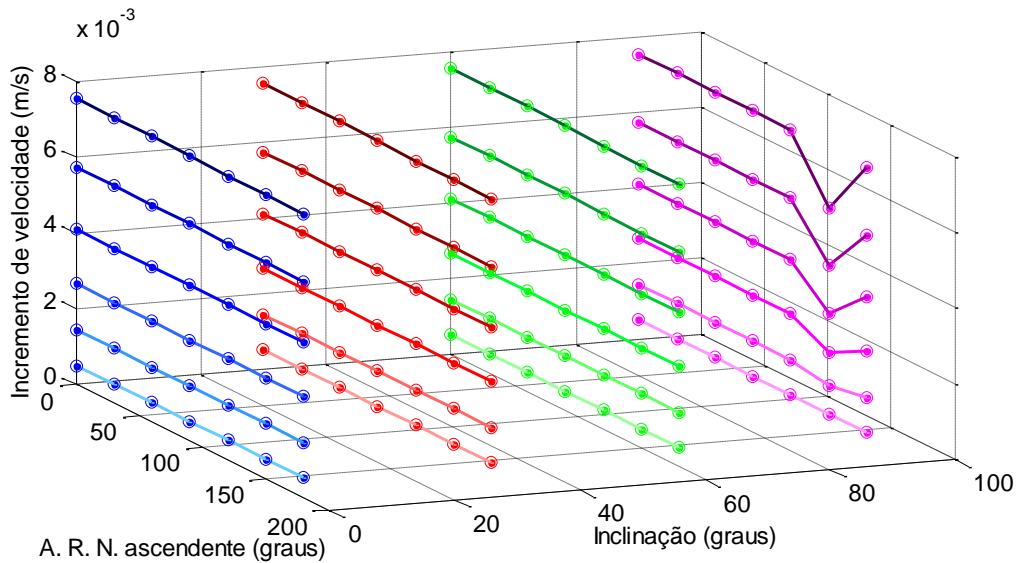


Figura 5.15. Somatório do incremento de velocidade perturbador devido à pressão de radiação solar.



É possível observar uma intensa influência do potencial gravitacional de Marte (Figura 5.1), mesmo quando o satélite artificial se encontra na vizinhança de Fobos ou Deimos (Figuras 5.6 e 5.11). Sendo assim, fica clara a dificuldade de manter um veículo espacial orbitando cada uma das luas.

Com a variação da ascensão e da inclinação para cada altitude, nota-se a existência de órbitas mais e menos perturbadas. Como aqui foi simulado para o tempo de simulação de uma órbita ao redor do corpo central, para uma missão real a diferença de perturbação total entre cada órbita se intensifica, já que o satélite permanece mais tempo em órbita e, conseqüentemente, mais tempo sob influência das perturbações, tornando necessária tal análise. Pode-se notar que quando o satélite artificial apresenta inclinação 0 graus, existe pouca variação do incremento de velocidade perturbador sobre o satélite em função da variação da ascensão reta do nodo ascendente. Conforme são assumidos valores mais altos para a inclinação do satélite essa variação vai se tornando mais acentuada, sendo a inclinação de 90° a que apresenta maior variação de incremento de velocidade perturbador em função da ascensão reta do nodo ascendente.

De acordo os resultados obtidos, ignorando a perturbação devido à atração gravitacional de Marte, a pressão de radiação solar é a força que exerce maior perturbação sobre o satélite. Porém, é importante ressaltar que nos resultados das Figuras 5.1 a 5.15 são

apresentados o somatório do incremento de velocidade perturbador sobre o satélite. Já as Figuras 5.16 a 5.20 apresentam os incrementos de velocidade perturbadores, para cada perturbação considerada, a cada instante de tempo, para o caso mais perturbado do satélite artificial em torno de Marte ($h = 50 \text{ km}$, $i = 90^\circ$, $O = 180^\circ$).

Figura 5.16. Incremento de velocidade perturbador devido ao potencial gravitacional de Marte (satélite ao redor de Marte).

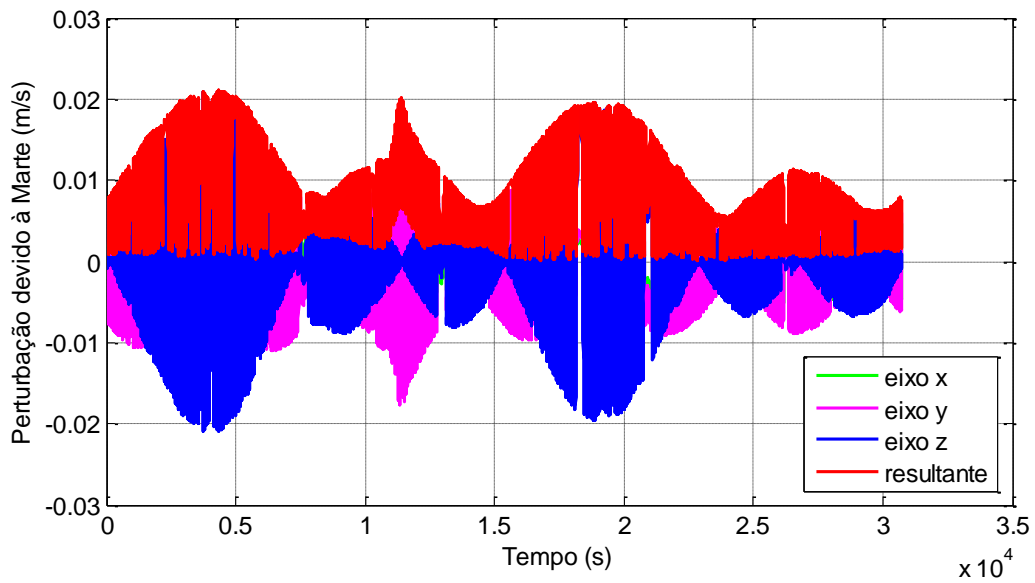


Figura 5.17. Incremento de velocidade perturbador devido à atração gravitacional de Fobos (satélite ao redor de Marte).

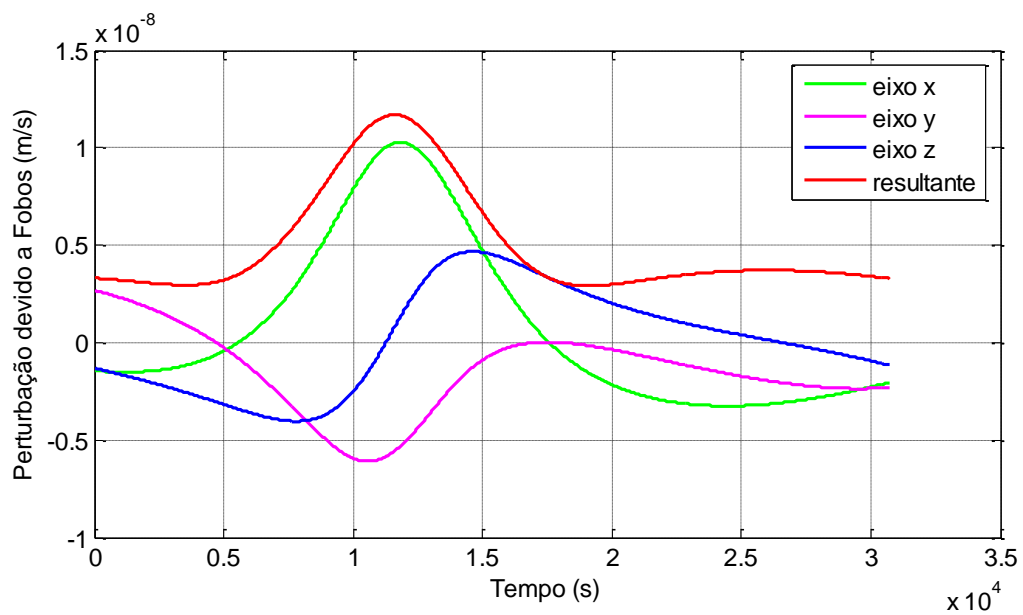


Figura 5.18. Incremento de velocidade perturbador devido à atração gravitacional de Deimos (satélite ao redor de Marte).

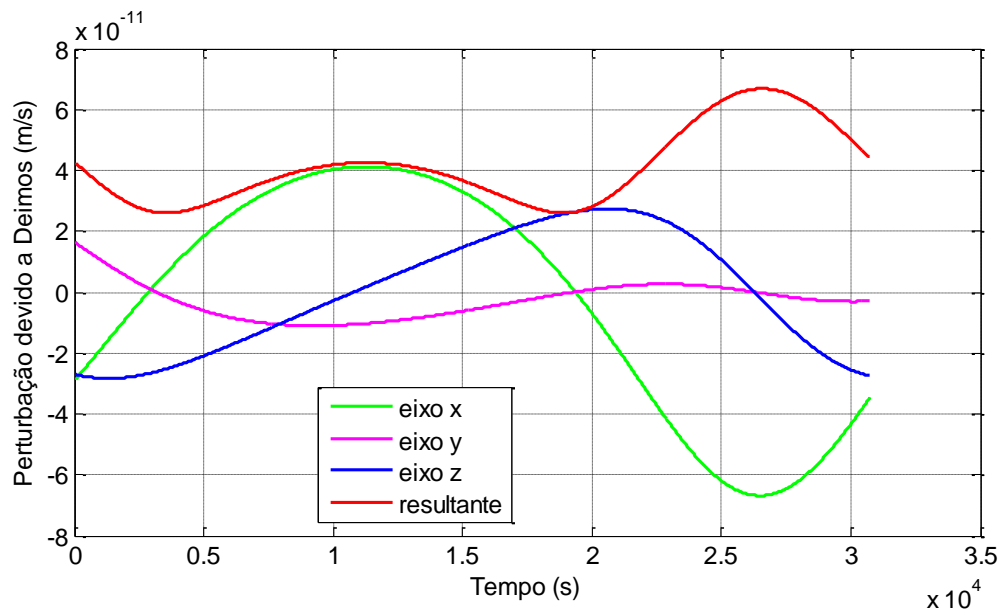


Figura 5.19. Incremento de velocidade perturbador devido à atração gravitacional do Sol (satélite ao redor de Marte).

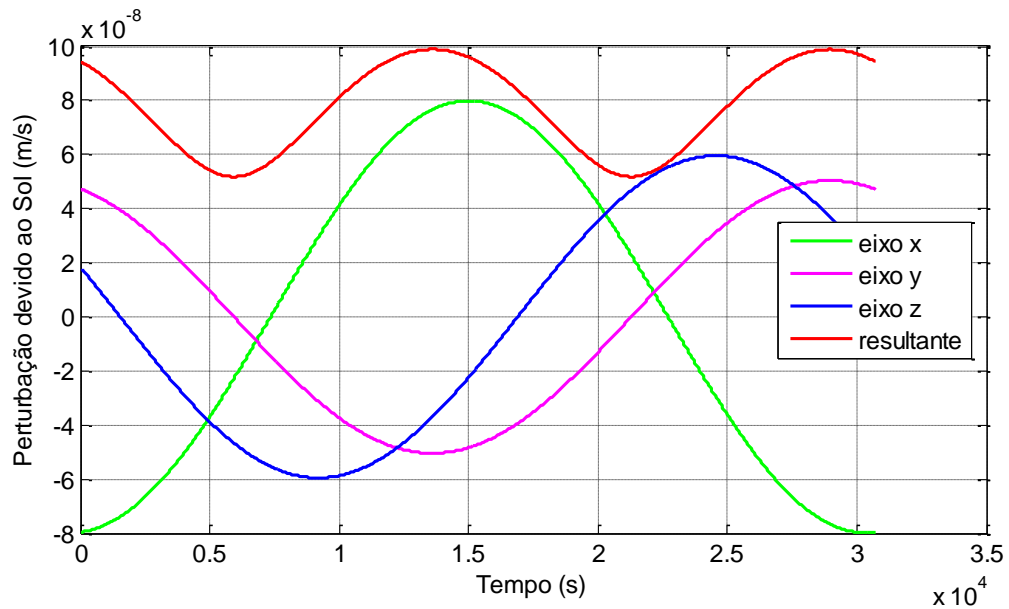
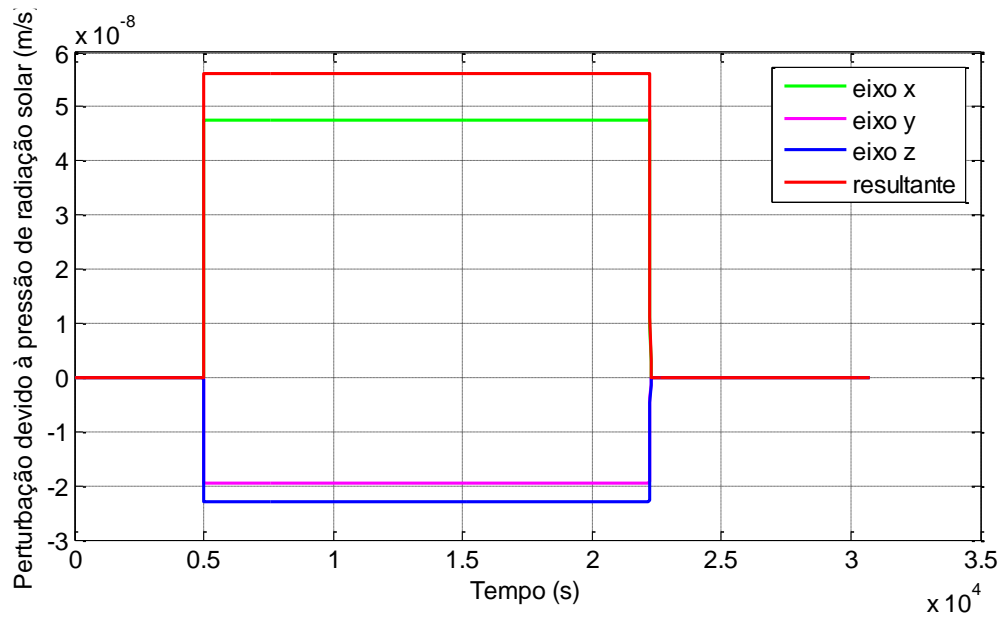


Figura 5.20. Incremento de velocidade perturbador devido à pressão de radiação solar (satélite ao redor de Marte).



Para o caso da perturbação devido à pressão de radiação solar, o satélite não sofre influência dessa perturbação durante todo o tempo, por passar por regiões de sombra, ou seja, regiões em que o satélite não é atingido pela radiação solar por estar atrás de algum dos corpos envolvidos no sistema, como pode ser visto na Figura 5.20, que apresenta intervalos em que a resultante é nula. Sendo assim, nota-se que o satélite sofre uma perturbação devido à pressão de radiação solar significativamente mais intensa que as demais (com exceção do potencial gravitacional de Marte) a cada instante de tempo. Tal resultado pode ser visto comparando a Figura 5.5 com as Figuras 5.1 a 5.4 e a Figura 5.20 com as Figuras 5.16 a 5.19.

De posse do mapeamento da magnitude da perturbação em função da altitude e do plano orbital escolhido, é possível escolher órbitas menos perturbadas visando auxiliar na análise de missão de um veículo espacial que objetive descrever trajetórias nas proximidades de Marte, Fobos ou Deimos. As magnitudes das perturbações para os casos de órbitas mais e menos perturbadas devido ao potencial gravitacional de Marte, dentre os casos estudados, para as situações em que o satélite realiza uma trajetória ao redor de Marte em torno de 50 km de altitude, de Fobos em torno de 55 km de altitude e de Deimos em torno de 55 km de altitude estão apresentadas nas Tabelas 5.1 a 5.3.

Tabela 5.1 – Incremento de velocidade perturbador sobre um satélite em trajetória ao redor de Marte.

| | Órbita mais perturbada ($h = 50 \text{ km}, i = 90^\circ,$ $\Omega = 180^\circ$) | Órbita menos perturbada ($h = 50 \text{ km}, i = 30^\circ, \Omega =$ 120°) |
|---|--|---|
| Potencial gravitacional de Marte (m/s) | 43,63978 | 26,42145 |
| Potencial gravitacional de Fobos (m/s) | $3,60 \times 10^{-5}$ | $3,56 \times 10^{-5}$ |
| Potencial gravitacional de Deimos (m/s) | $2,90 \times 10^{-7}$ | $2,63 \times 10^{-7}$ |
| Potencial gravitacional do Sol (m/s) | $5,46 \times 10^{-4}$ | $5,64 \times 10^{-4}$ |
| Pressão de radiação solar (m/s) | $2,36 \times 10^{-4}$ | $2,33 \times 10^{-4}$ |

Tabela 5.2 – Incremento de velocidade perturbador sobre um satélite em trajetória ao redor de Fobos.

| | Órbita mais perturbada ($h = 55 \text{ km}, i = 0^\circ,$ $\Omega = 0^\circ$) | Órbita menos perturbada ($h = 55 \text{ km}, i = 90^\circ,$ $\Omega = 120^\circ$) |
|---|---|---|
| Potencial gravitacional de Marte (m/s) | 627,6908 | 516,0881 |
| Potencial gravitacional de Fobos (m/s) | $9,9224 \times 10^{-2}$ | $1,2913 \times 10^{-1}$ |
| Potencial gravitacional de Deimos (m/s) | $1,38 \times 10^{-7}$ | $1,09 \times 10^{-7}$ |
| Potencial gravitacional do Sol (m/s) | $1,33 \times 10^{-4}$ | $1,01 \times 10^{-4}$ |
| Pressão de radiação solar (m/s) | $3,413 \times 10^{-3}$ | $3,406 \times 10^{-3}$ |

Tabela 5.3 – Incremento de velocidade perturbador sobre um satélite em trajetória ao redor de Deimos.

| | Órbita mais perturbada ($h = 55 \text{ km}, i = 0^\circ,$ $\Omega = 180^\circ$) | Órbita menos perturbada ($h = 55 \text{ km}, i = 90^\circ,$ $\Omega = 120^\circ$) |
|---|---|---|
| Potencial gravitacional de Marte (m/s) | 83,02024 | 68,06239 |
| Potencial gravitacional de Fobos (m/s) | $4,04 \times 10^{-4}$ | $4,04 \times 10^{-4}$ |
| Potencial gravitacional de Deimos (m/s) | 4,433188 | 4,448502 |
| Potencial gravitacional do Sol (m/s) | $2,76 \times 10^{-4}$ | $2,1 \times 10^{-4}$ |
| Pressão de radiação solar (m/s) | $7,49 \times 10^{-3}$ | $7,525 \times 10^{-3}$ |

Para os três casos estudados, ou seja, para o satélite ao redor de Marte, com altitude em torno de 50 km, para o satélite na vizinhança de Fobos e para o satélite na vizinhança de Deimos, com altitudes em torno de 55 km, são encontradas órbitas mais e menos perturbadas pelas forças consideradas, em função da variação da inclinação e da ascensão reta do nodo ascendente. Para o caso do satélite artificial realizando órbitas ao redor de Marte, a órbita mais perturbada tem as condições iniciais de inclinação 90° e ascensão reta do nodo ascendente 180° e a órbita menos perturbada tem as condições iniciais de inclinação 30° e ascensão reta do nodo ascendente 120° . Para o caso do satélite artificial realizando trajetórias na vizinhança de Fobos, a órbita mais perturbada tem as condições iniciais de inclinação 0° e ascensão reta do nodo ascendente 0° e a órbita menos perturbada tem as condições iniciais de inclinação 90° e ascensão reta do nodo ascendente 120° . Já para o caso do satélite artificial realizando trajetórias na vizinhança de Fobos, a órbita mais perturbada tem as condições iniciais de inclinação 0° e ascensão reta do nodo ascendente 180° e a órbita menos perturbada tem as condições iniciais de inclinação 90° e ascensão reta do nodo ascendente 120° .

5.1. Força perturbadora sobre o satélite artificial devido ao potencial gravitacional de Marte

Nesta seção será apresentado um estudo mais detalhado da perturbação devido ao potencial gravitacional de Marte sobre a órbita de um veículo espacial, como apresentado em (GONÇALVES, 2016b). Foram realizadas simulações com o período de uma órbita ao redor da superfície do planeta, variando a altitude, a inclinação e a ascensão reta do nodo ascendente do satélite. Para cada altitude simulada foram variados os valores de inclinação entre 0 e 90° , de 10 em 10 graus, e ascensão reta do nodo ascendente de 0 a 180° , também de 10 em 10 graus.

É interessante que esta análise seja feita desde uma altitude próxima a superfície de Marte até depois da região em que Deimos, o satélite mais distante de Marte, orbita, uma vez que é esta a região de interesse do presente trabalho. Não é necessário (e nem viável) realizar pequenas variações na altitude do satélite quando a órbita estiver próximo a Fobos e Deimos, já que a diferença entre os incrementos de velocidade perturbadores sobre o satélite diminui em função da altitude, sendo essa pequena variação em elevadas altitudes.

Para definir a taxa de variação da altitude do satélite nas simulações, é apresentado na Figura 5.21 o somatório do incremento de velocidade perturbador sobre o satélite durante uma volta ao redor de Marte, com as mesmas condições iniciais da *Mars Reconnaissance Orbiter Telecommunications*, exceto para o semi-eixo maior, que foi variado: $e = 0,0091$; $i = 92,6^\circ$; $\Omega = -14,7^\circ$; $\omega = -78,8^\circ$.

Figura 5.21. Incremento de velocidade em função da altitude.

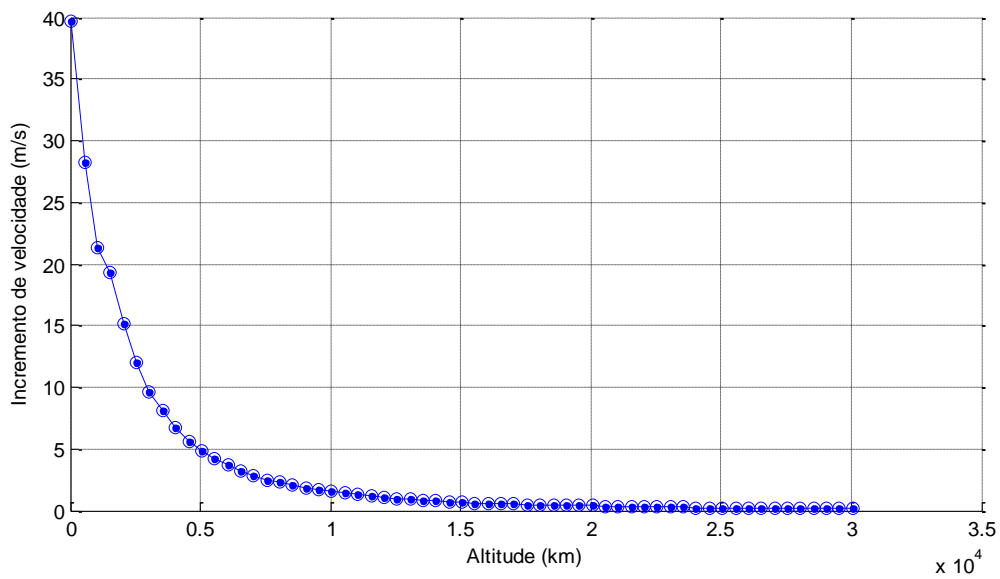
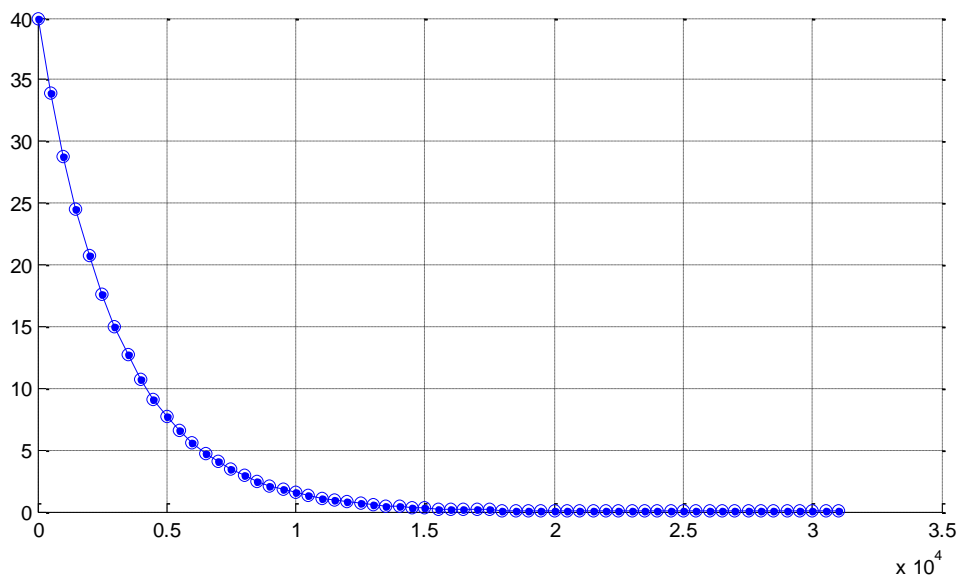


Figura 5.22. Curva da equação $y = 40 \exp^{-x/3050}$.



A Figura 5.22 apresenta a curva obtida pela equação $y = 40 \exp^{-x/3050}$, que pode ser considerada como uma estimativa aproximada da equação do potencial gravitacional de Marte em função da altitude. Tal conclusão foi obtida observando que a curva da Figura 5.21 se assemelha a curva da função exponencial decrescente, dada por $y = a e^{-bx}$, em que a é o valor de y para $x = 0$ e b a taxa de decaimento da função.

Assim, para uma variação na coordenada y de 5 em 5 unidades, encontramos as seguintes altitudes: 50 km, 407,21 km, 877,43 km, 1433,51 km, 2114,1 km, 2991,53 km, 4228,2 km, 6342,3 km e 30056,8 km, que foram utilizadas para a realização do estudo proposto. O resultado do somatório da força perturbadora para cada altitude selecionada, em função da variação da inclinação e da ascensão reta do nodo ascendente, é apresentado nas Figuras 5.23 a 5.31.

Figura 5.23. Força perturbadora para o satélite a 50 km de altitude.

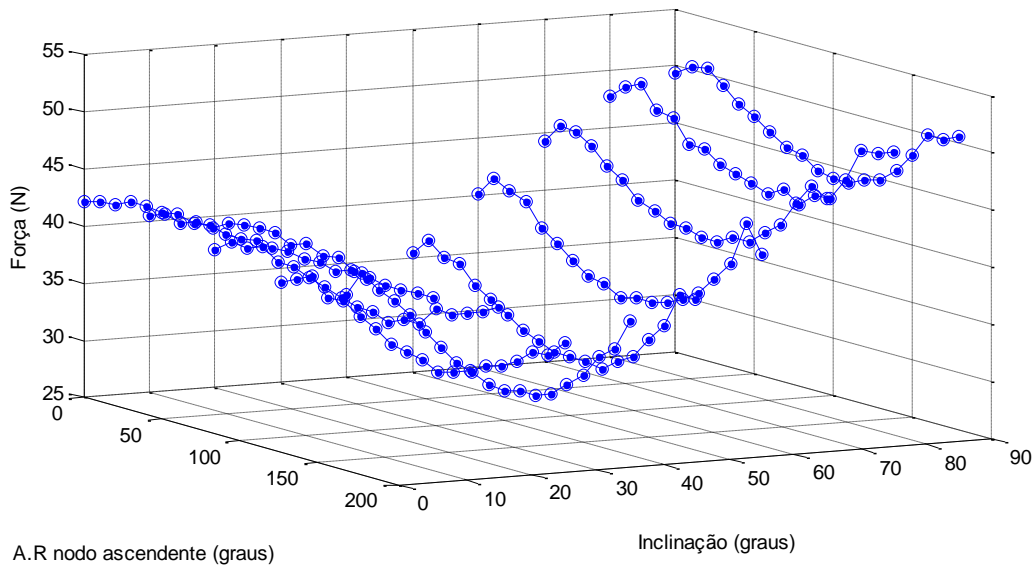


Figura 5.24. Força perturbadora para o satélite a 407,21 km de altitude.

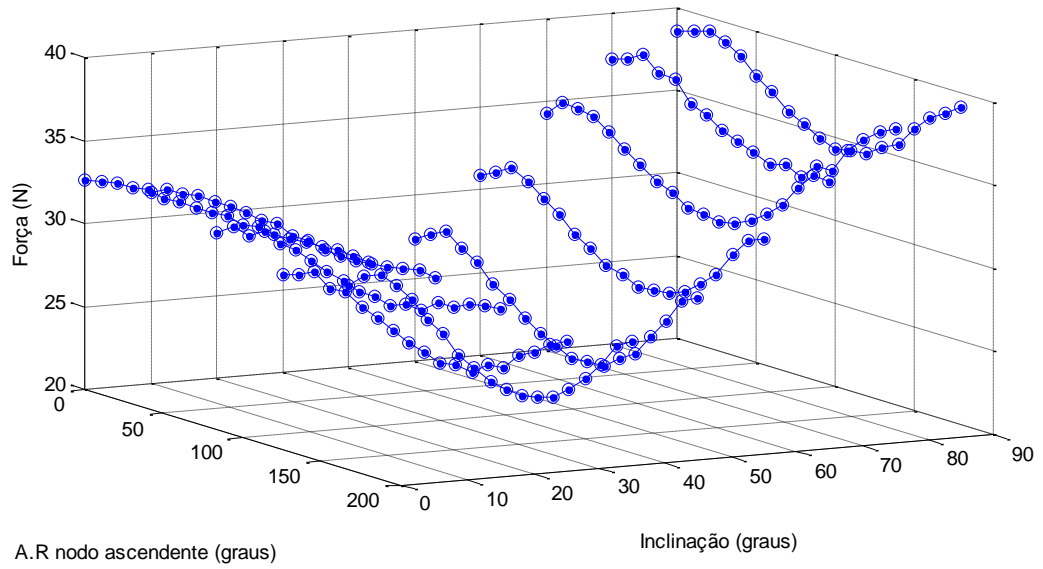


Figura 5.25. Força perturbadora para o satélite a 877,43 km de altitude.

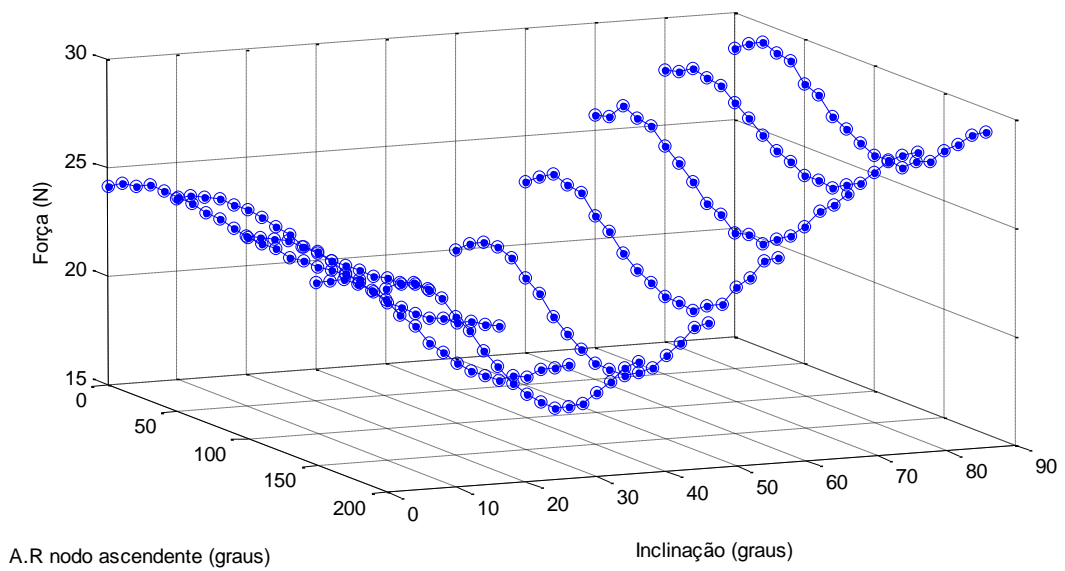


Figura 5.26. Força perturbadora para o satélite a 1433,51 km de altitude.

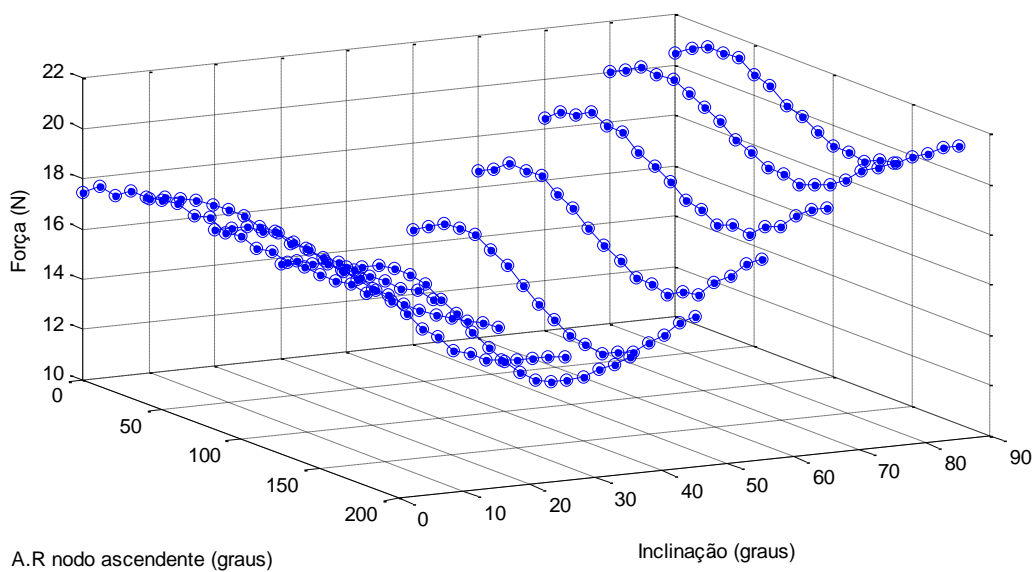


Figura 5.27. Força perturbadora para o satélite a 2114,1 km de altitude.

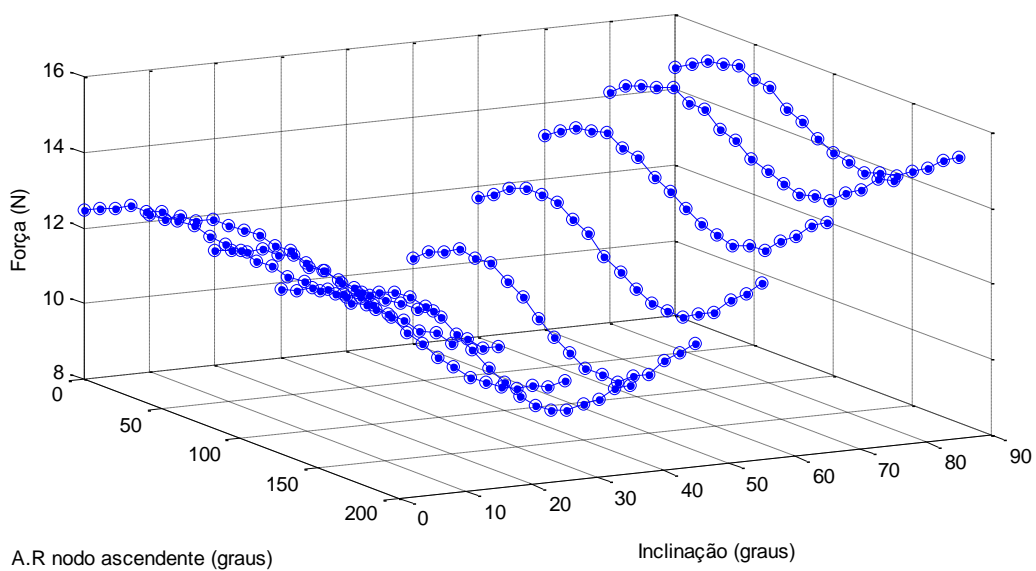


Figura 5.28. Força perturbadora para o satélite a 2991,53 km de altitude.

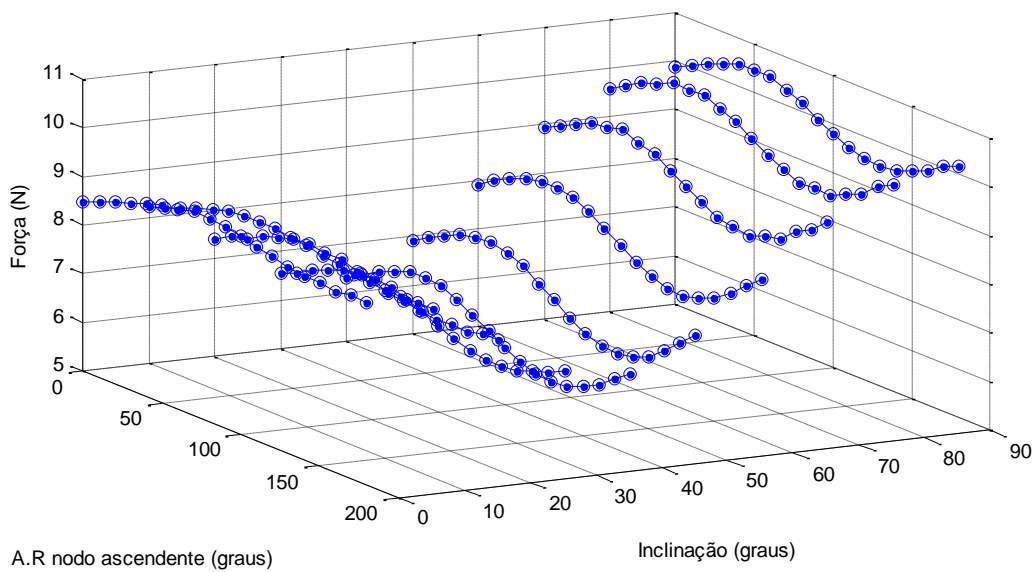


Figura 5.29. Força perturbadora para o satélite a 4228,2 km de altitude.

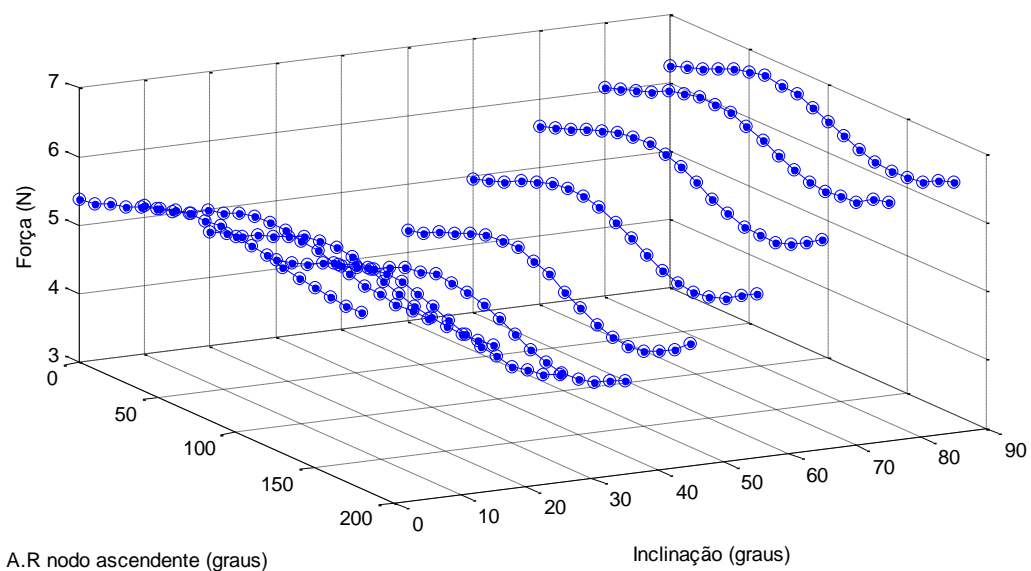


Figura 5.30. Força perturbadora para o satélite a 6342,3 km de altitude.

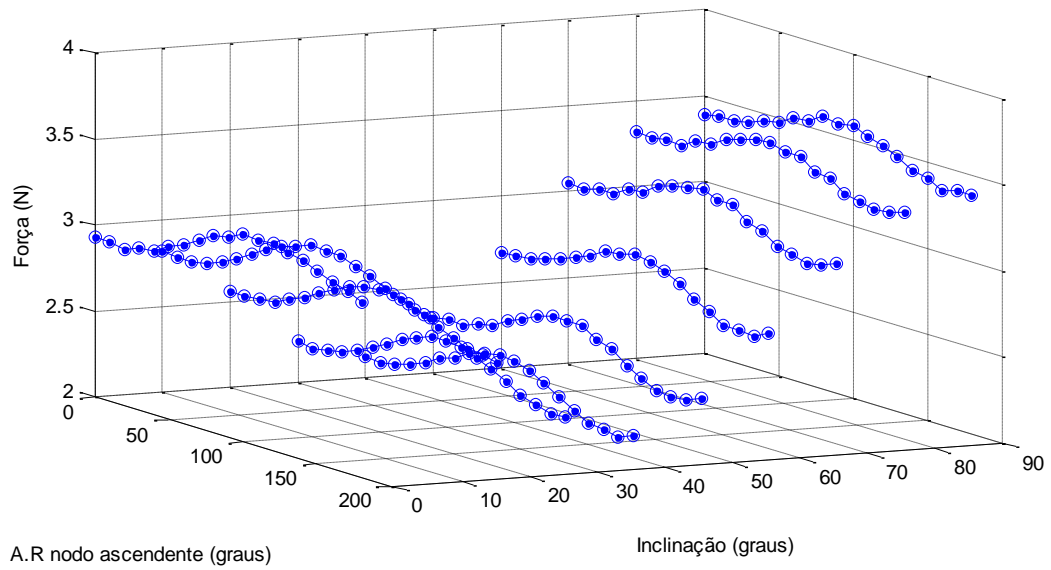
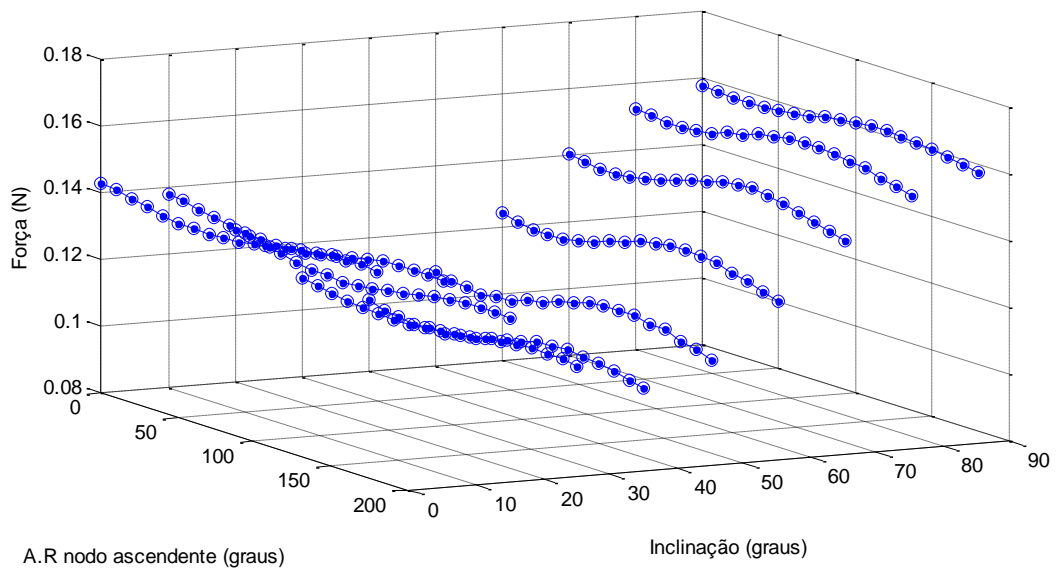


Figura 5.31. Força perturbadora para o satélite a 30056,8 km de altitude.



A partir das Figuras 5.23 a 5.31 é possível ver que a força perturbadora sobre o satélite devido ao potencial gravitacional de Marte varia em função da variação da inclinação e da ascensão reta do nodo ascendente. É possível perceber que com o aumento da altitude do satélite, além da intensidade do potencial perturbador diminuir, a diferença entre a

magnitude das perturbações máxima e mínima, e a variação da perturbação para um valor fixo de inclinação com ascensão reta do nodo ascendente também diminuem. Para todas as altitudes estudadas as órbitas com inclinação 90° foram sempre as mais perturbadas, e as órbitas com inclinação 40° sempre as menos perturbadas pelo potencial gravitacional de Marte.

5.1.1. Análise da contribuição de cada termo da expansão dos harmônicos esféricos

Para um estudo do potencial gravitacional de Marte mais detalhado em função da altitude, foi selecionado dentre todos os casos estudados no início do presente capítulo, o caso mais perturbado, que é o caso de altitude 50 km da superfície de Marte, inclinação 90° e ascensão reta do nodo ascendente 180° , como visto na Tabela 5.1. As simulações foram feitas com o período de uma órbita ao redor da superfície de Marte, em que foi analisada a contribuição de cada harmônico esférico individualmente.

Para obter a contribuição de cada harmônico, primeiramente o incremento de velocidade sobre o satélite referente ao somatório dos termos foi comparado com o incremento de velocidade referente ao termo 1 dos harmônicos esféricos, que seria o caso não perturbado, que representa o movimento kepleriano do satélite. Por exemplo, para o caso do décimo harmônico esférico, o incremento de velocidade sobre o satélite referente a todos os termos de 1 a 10 (ou seja, o somatório) foi comparado com o incremento de velocidade referente ao primeiro termo dos harmônicos esféricos. Esse procedimento é feito para todos os harmônicos esféricos, de 2 a 80.

Finalmente, para obter a contribuição individual de cada termo, e não o somatório, é feita a diferença entre os dois incrementos de velocidade perturbadores $(N + 1) - N$. Novamente exemplificando, para o décimo harmônico esférico, é obtida primeiramente a contribuição do somatório de todos os termos de 1 a 10 e para o nono harmônico esféricos, é obtida a contribuição do somatório de todos os termos de 1 a 9. É obtida a contribuição do décimo termo individualmente fazendo a diferença entre todos os termos de 1 a 10 e todos os termos de 1 a 9. Esse procedimento também é repetido para todos os harmônicos esféricos, de 2 a 80, cujos resultados para as componentes x , y e z do vetor incremento de velocidade perturbador estão apresentados nas Figuras 5.32 a 5.34.

Figura 5.32. Incremento de velocidade perturbador para cada termo da expansão dos harmônicos esféricos (eixo x).

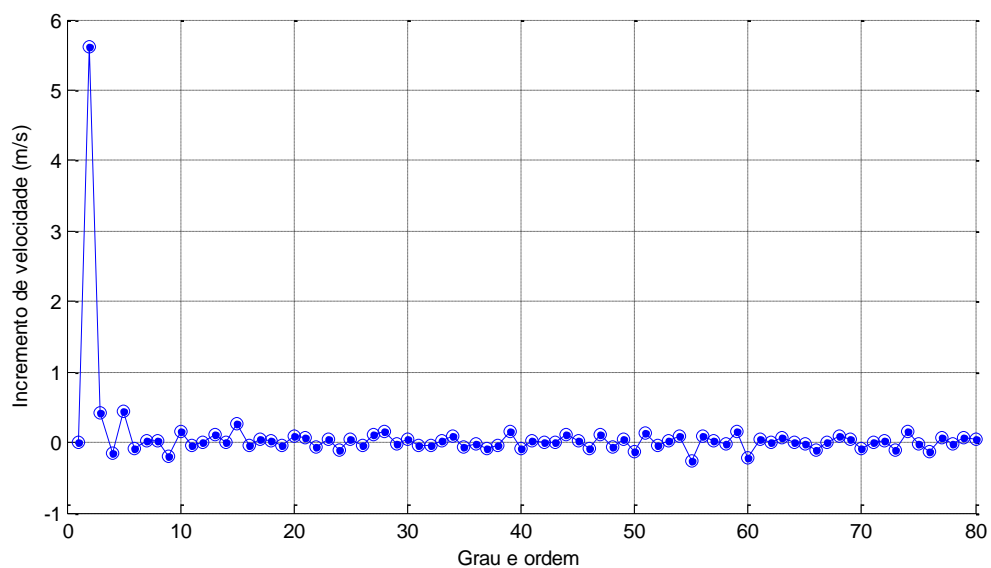


Figura 5.33. Incremento de velocidade perturbador para cada termo da expansão dos harmônicos esféricos (eixo y).

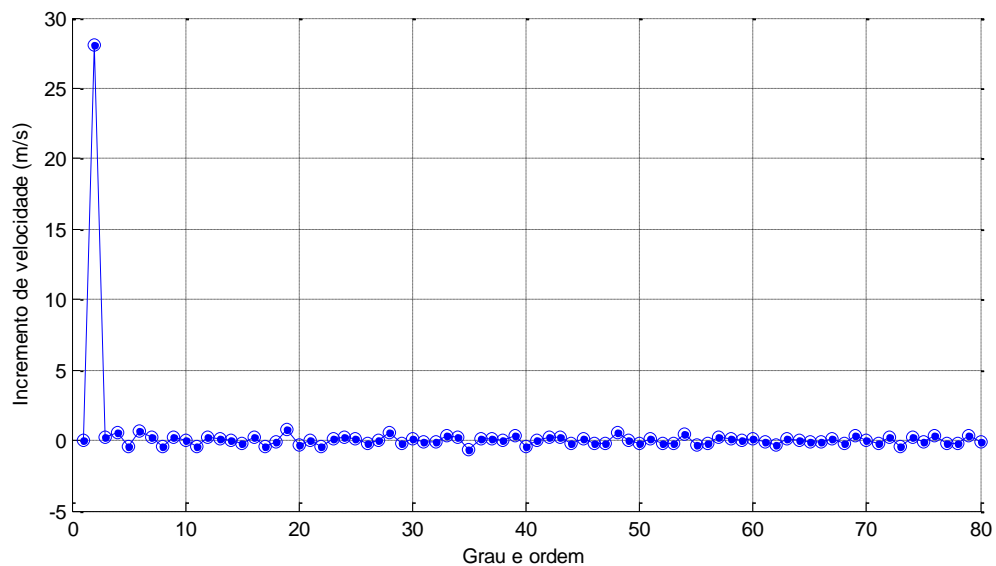
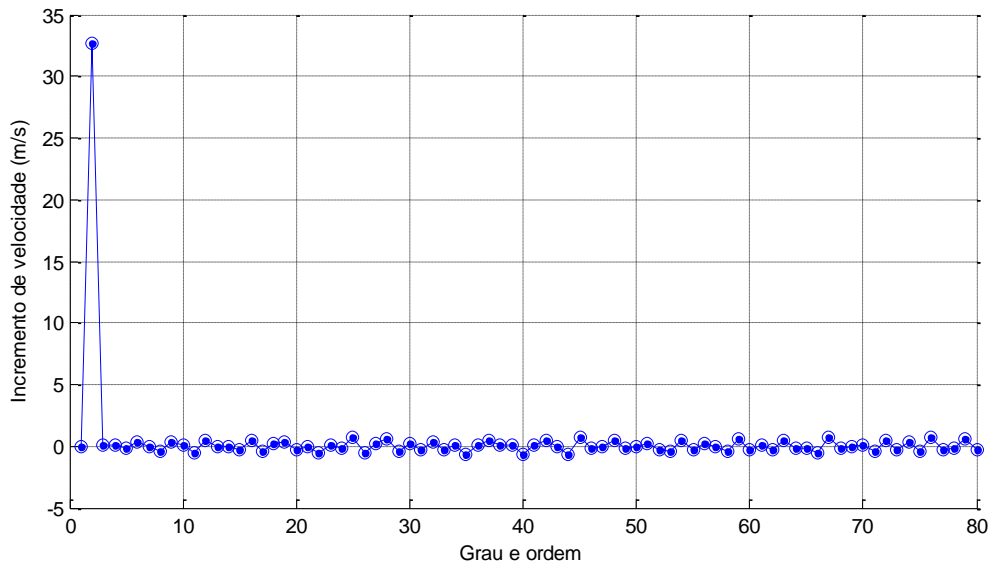


Figura 5.34. Incremento de velocidade perturbador para cada termo da expansão dos harmônicos esféricos (eixo z).



A partir das Figuras 5.32 a 5.34 é possível perceber em todas as coordenadas a predominância dos harmônicos esféricos de grau e ordem 2, como observado para o estudo do caso lunar em Gonçalves et al. (2016a), porém com uma relevância mais significativa quando comparado aos outros harmônicos esféricos. Tais resultados estão de acordo com os resultados apresentados por Lemoine et al. (2001). Observa-se que os valores dos termos não decrescerem conforme o aumento do valor do grau e ordem, o que significa que um termo de ordem mais elevada pode fornecer uma contribuição maior para o incremento de velocidade do satélite que o anterior. Sendo assim, é necessário sempre utilizar a máxima precisão do modelo utilizado para o potencial gravitacional de Marte.

Termos negativos aparecem nas Figuras 5.32 a 5.34, o que significa que a adição deste termo no potencial gravitacional de Marte diminui a perturbação sofrida pelo veículo espacial, reduzindo assim a variação de velocidade requerida para manutenção da órbita kepleriana. Existe significativa diferença entre as magnitudes dos incrementos de velocidade perturbadores em cada componente do vetor. Essa diferença diminui com o aumento da altitude do satélite, e para ilustrar, as magnitudes das três componentes x , y , e z para o harmônico esférico de grau e ordem 2 são apresentadas na Tabela 5.4.

Tabela 5.4 – Componentes x , y e z do incremento de velocidade perturbador para grau e ordem 2 dos harmônicos esféricos.

| Altitude | Eixo x | Eixo y | Eixo z |
|-------------|----------|-----------|-----------|
| 50 km | 5,61 m/s | 28,06 m/s | 32,64 m/s |
| 407,21 km | 4,97 m/s | 21,80 m/s | 25,46 m/s |
| 877,43 km | 4,27 m/s | 15,97 m/s | 18,97 m/s |
| 1433,51 km | 2,76 m/s | 11,92 m/s | 14,06 m/s |
| 2114,10 km | 2,29 m/s | 8,53 m/s | 10,13 m/s |
| 2991,53 km | 1,85 m/s | 5,74 m/s | 6,94 m/s |
| 4228,20 km | 1,47 m/s | 3,56 m/s | 4,52 m/s |
| 6342,30 km | 1,06 m/s | 1,70 m/s | 2,43 m/s |
| 30056,80 km | 0,06 m/s | 0,06 m/s | 0,11 m/s |

Nas Figuras 5.36 a 5.38 são apresentadas as componentes x , y e z e a resultante do incremento de velocidade perturbador resultante sobre o satélite, onde é possível ver o comportamento variante, o que justifica a oscilação da contribuição de cada um dos termos da solução da expansão do potencial gravitacional de Marte em harmônicos esféricos. Pode-se observar que existe perturbação devido ao potencial gravitacional de Marte nos três eixos coordenados. Sendo assim, caso seja necessária correção utilizando um sistema de controle, é necessário que o mesmo atue no três eixos. Os picos de perturbação apresentados nas Figuras 5.36 a 5.38 representamos os instantes de maior perturbação sobre o satélite artificial.

Figura 5.35. Incremento de velocidade perturbador sobre o satélite (eixo x).

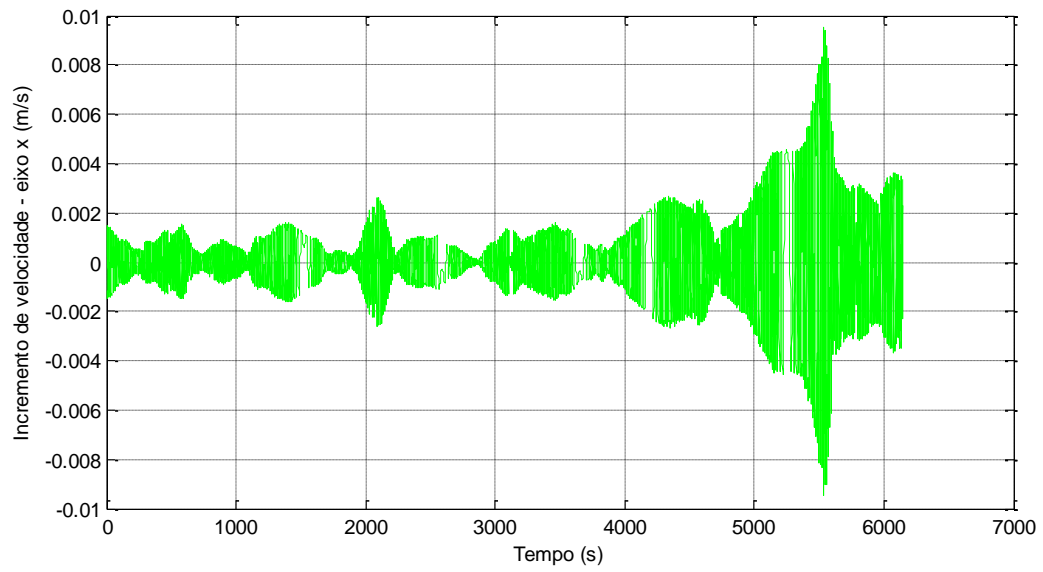


Figura 5.36. Incremento de velocidade perturbador sobre o satélite (eixo y).

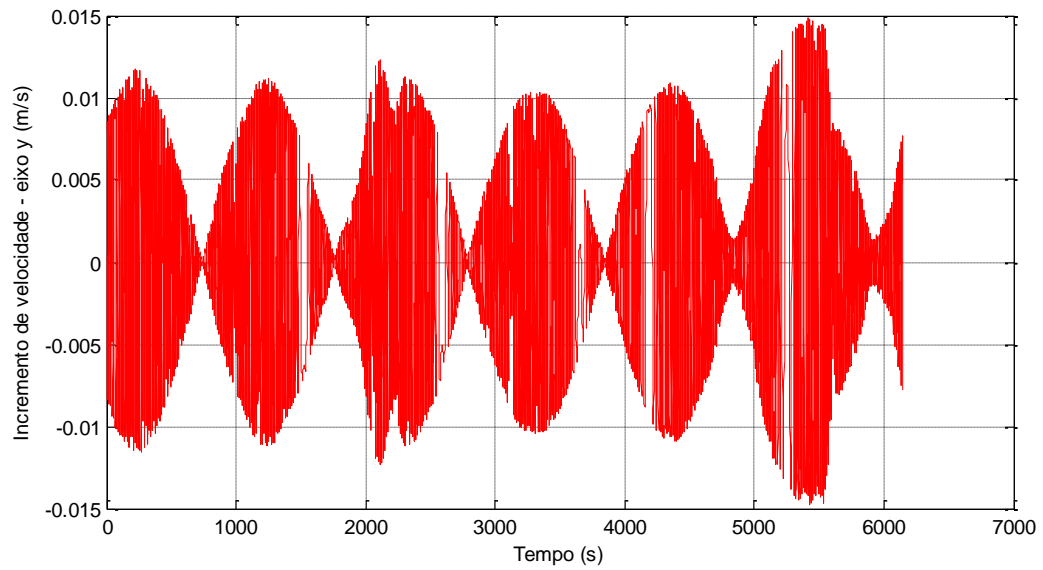


Figura 5.37. Incremento de velocidade perturbador sobre o satélite (eixo z).

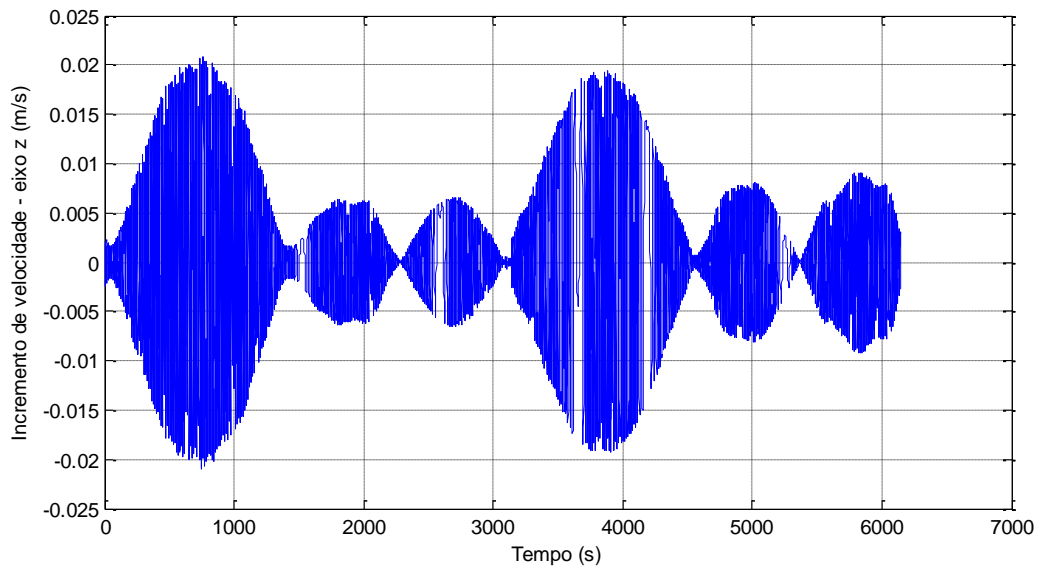
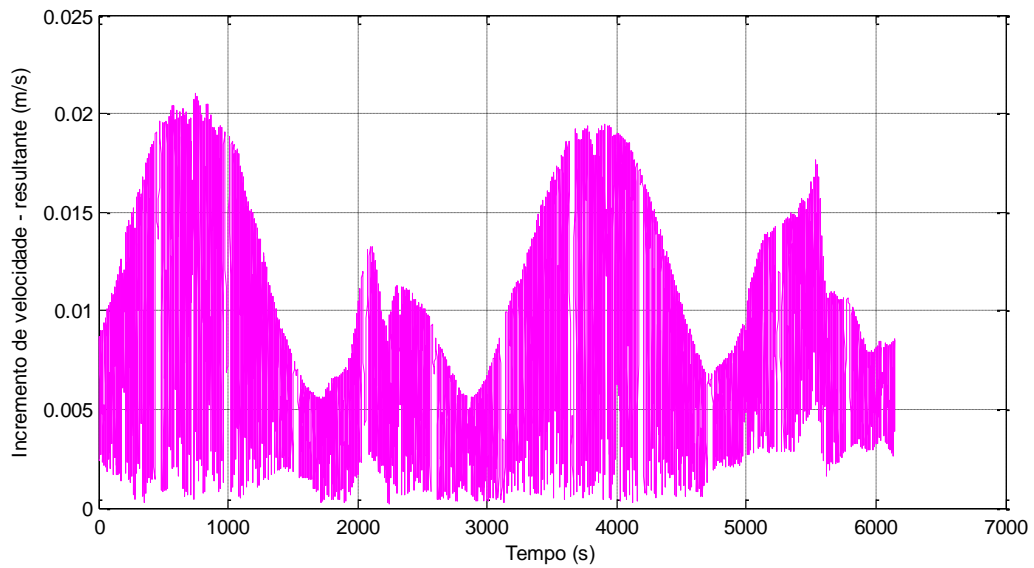


Figura 5.38. Incremento de velocidade perturbador sobre o satélite (resultante).



Outra opção para considerar a distribuição não uniforme de massa de Marte, diferente da utilização do modelo apresentado por Lemoine et al. (2001) é utilizar a expansão da Equação (3.20). A expansão da Equação 3.20 e as equações para os polinômios de Legendre e para os polinômios associados de Legendre (Equações (3.21), (3.22) e (3.23)), até $n = 10$, podem ser encontradas no Apêndice B, e os valores dos coeficientes dos harmônicos esféricos de Marte, $n = 80$ no apêndice C.

6 TRAJETÓRIAS NA VIZINHANÇA DAS LUAS

O presente capítulo apresenta um estudo sobre a busca de possibilidades de órbitas estáveis ao redor de Fobos e uma estratégia para manter o satélite artificial próximo à superfície de Fobos ou Deimos por um longo período de tempo.

6.1. Trajetórias na vizinhança de Fobos

Trajetórias ao redor de Fobos representam um grande desafio já que, por tratar-se de um corpo de pequenas dimensões (27 x 22 x 18 km), cujo raio médio é de pouco mais que 11,26 km e cuja massa é de $1,0659 \times 10^{16}$ kg, o campo gravitacional é muito tênue quando comparado com o campo gravitacional de Marte cuja massa é de $6,4171 \times 10^{23}$ kg. Além disso, a órbita de Fobos é muito próxima da superfície de Marte e apresenta os seguintes elementos orbitais: semi-eixo maior de 9376 km, que representa apenas 2,76 raios do planeta Marte; excentricidade 0,015; inclinação com relação ao equador de Marte de $1,093^\circ$; período orbital de 7 horas, 39 minutos e 12 segundos. Essas características fazem com que a região de influência de Fobos esteja muito próxima da superfície, e em alguns pontos até mesmo em seu interior. Assim, posicionar um veículo espacial de modo a descrever uma trajetória ao redor de Fobos é uma tarefa de grande complexidade, pois as trajetórias descritas pelo veículo acabam por chocar-se com a superfície ou escapam da sua atração gravitacional assumindo órbitas hiperbólicas com relação a Fobos ($e > 1$). No entanto, durante um curto intervalo de tempo é possível que um veículo descreva uma trajetória nas proximidades de Fobos, antes que o escape da atração gravitacional do satélite ou o choque com sua superfície ocorram.

Dessa maneira, assim como apresentado em Rocco et al. (2016a), foram realizadas em uma primeira fase simulações considerando várias órbitas iniciais circulares em planos orbitais diversos. Apesar disso, aqui serão apresentados apenas três casos que ilustram trajetórias nas proximidades de Fobos com diferentes valores iniciais para o semi-eixo maior a , inclinação orbital i e ascensão reta do nodo ascendente Ω . No primeiro caso, cuja órbita está representada na Figura 6.1, considerou-se $a = 11$ km, $i = 45^\circ$ e $\Omega = 30^\circ$. No segundo caso, Figura 6.2, $a = 12$ km, $i = 45^\circ$ e $\Omega = 50^\circ$. No terceiro caso, Figura 6.3, considerou-se $a = 13$ km, $i = 70^\circ$ e $\Omega = 50^\circ$ (Figura 6.3 e Figuras 6.12 a 6.15). Nesta fase

do estudo fica evidente o efeito das perturbações e a impossibilidade de obter uma órbita estável ao redor de Fobos.

Figura 6.1. Caso 1.

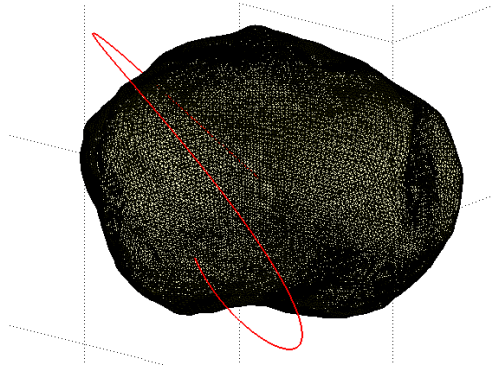


Figura 6.2. Caso 2.

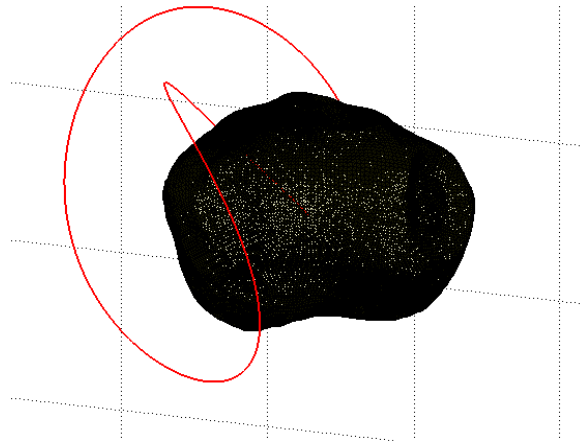
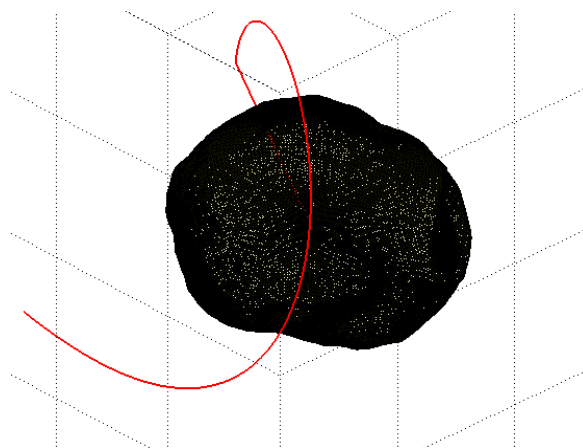


Figura 6.3. Caso 3.



As Figuras 6.4 a 6.7 apresentam o comportamento do semi-eixo maior, excentricidade, inclinação e altitude do satélite com relação à Fobos para o caso 1; as Figuras 6.8 a 6.11 apresentam o comportamento do semi-eixo maior, excentricidade, inclinação e altitude do satélite com relação à Fobos para o caso 2; e as Figuras 6.12 a 6.15 apresentam o comportamento do semi-eixo maior, excentricidade, inclinação e altitude do satélite com relação à Fobos para o caso 3.

Figura 6.4. Caso 1: semi-eixo maior.

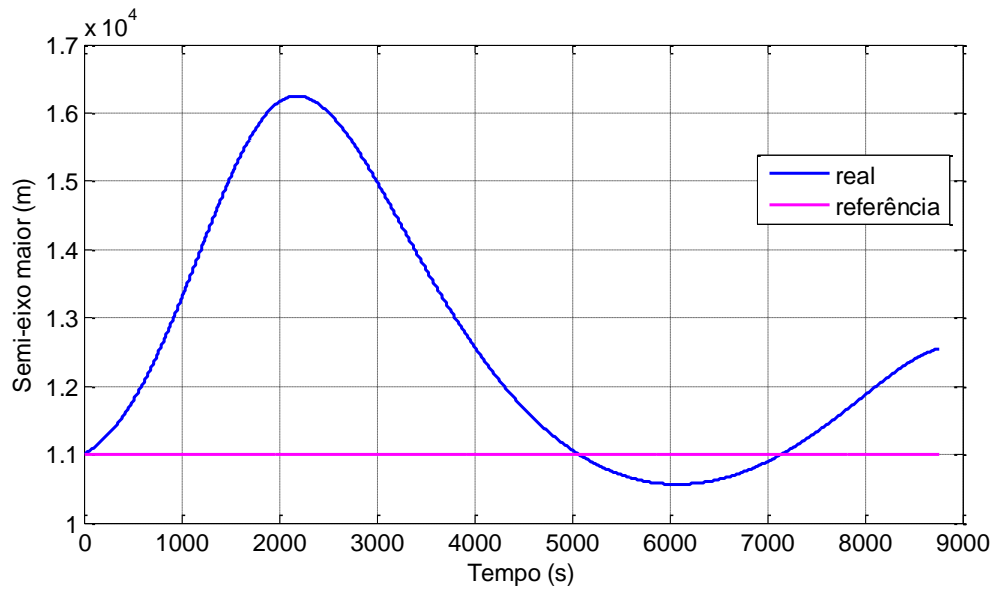


Figura 6.5. Caso 1: excentricidade.

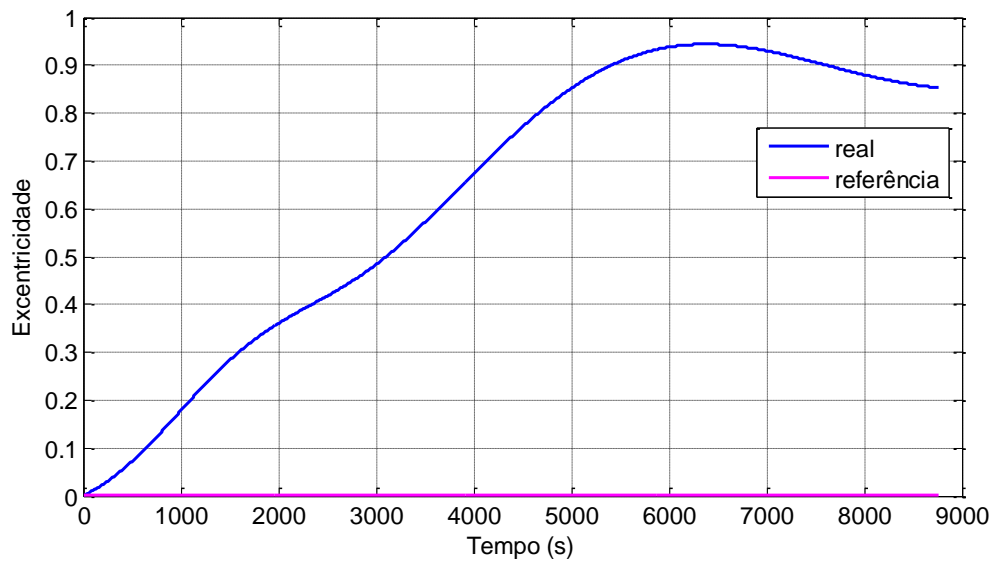


Figura 6.6. Caso 1: inclinação.

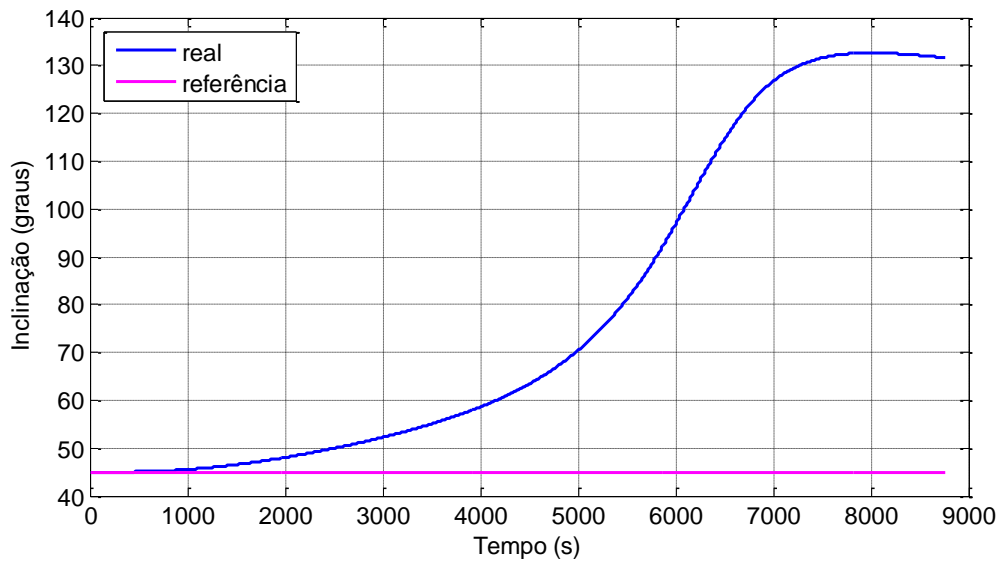
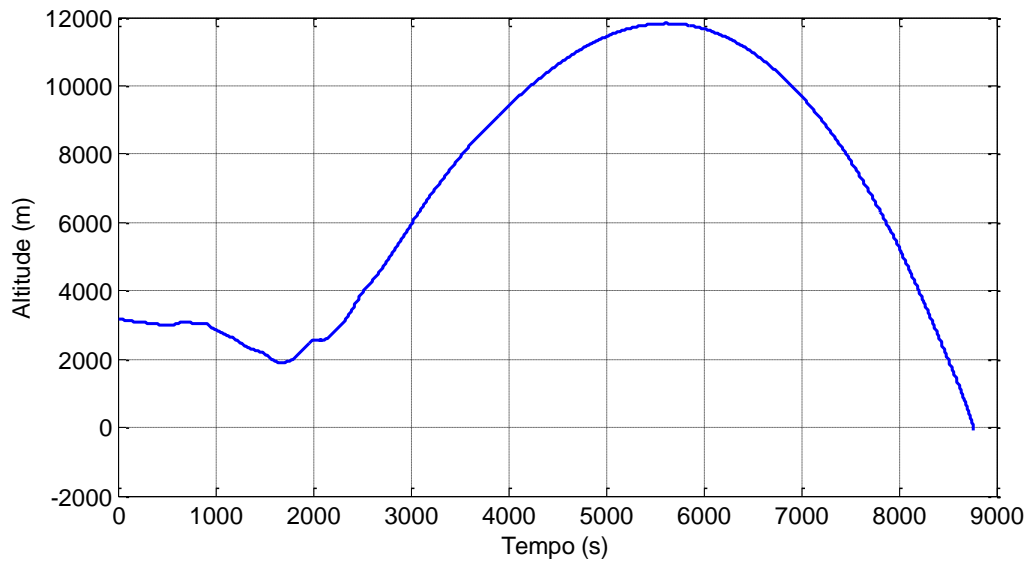


Figura 6.7. Caso 1: altitude.



A partir das Figuras 6.4, 6.5 e 6.6 é possível verificar uma significativa variação na órbita descrita devido à perturbação aplicada sobre o veículo. Embora neste caso tenha sido possível descrever uma trajetória ao redor de Fobos por um curto período de tempo, o veículo acabou por se chocar com a superfície, como ilustrado na Figura 6.7 que apresenta a altitude do veículo com relação à superfície de Fobos.

Figura 6.8. Caso 2: semi-eixo maior.

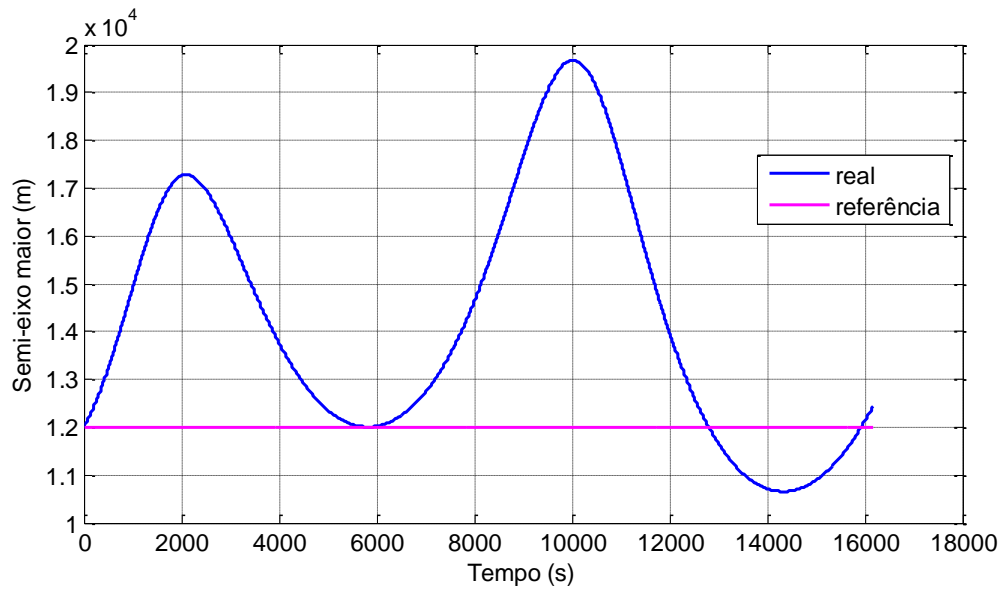


Figura 6.9. Caso 2: excentricidade.

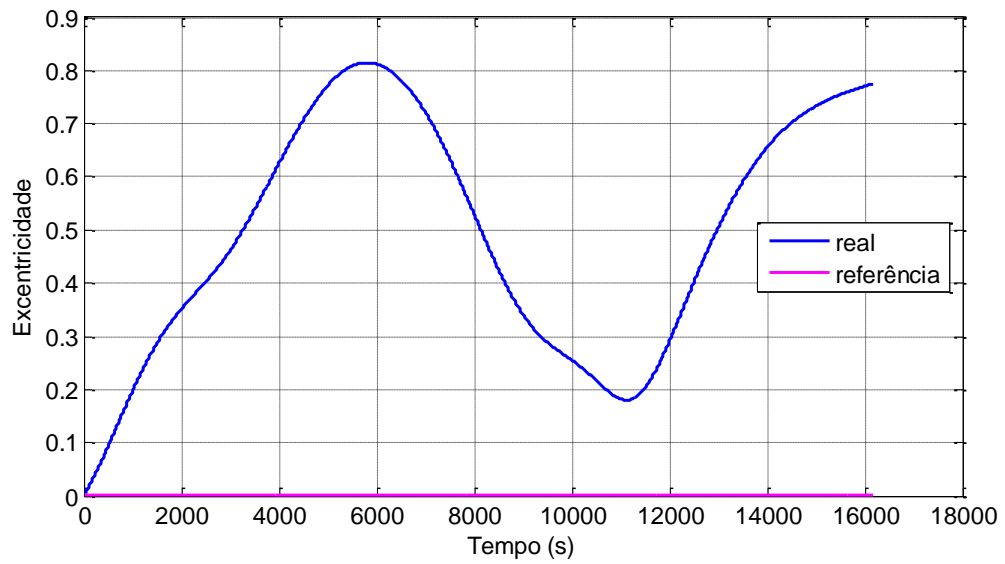


Figura 6.10. Caso 2: inclinação.

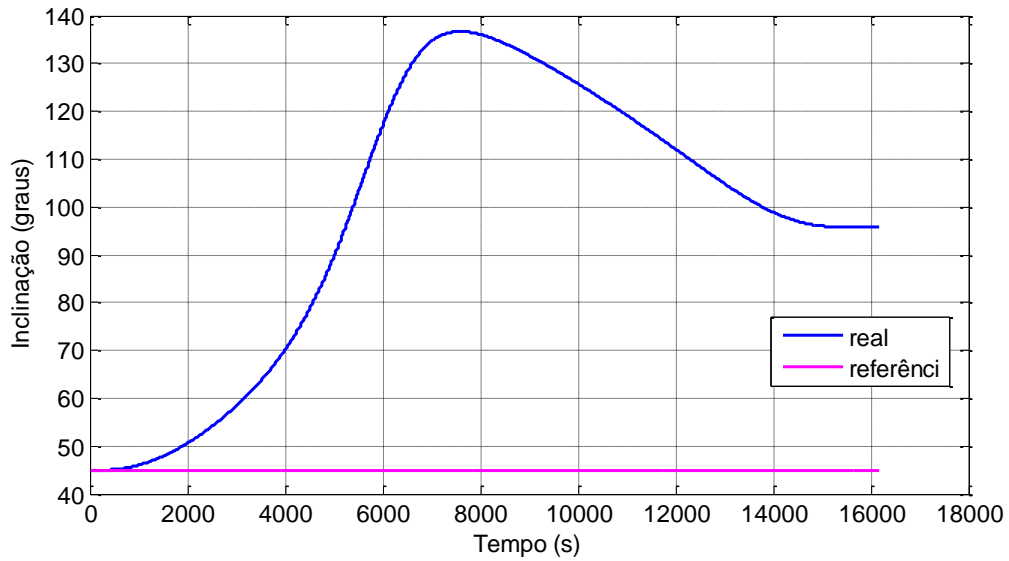
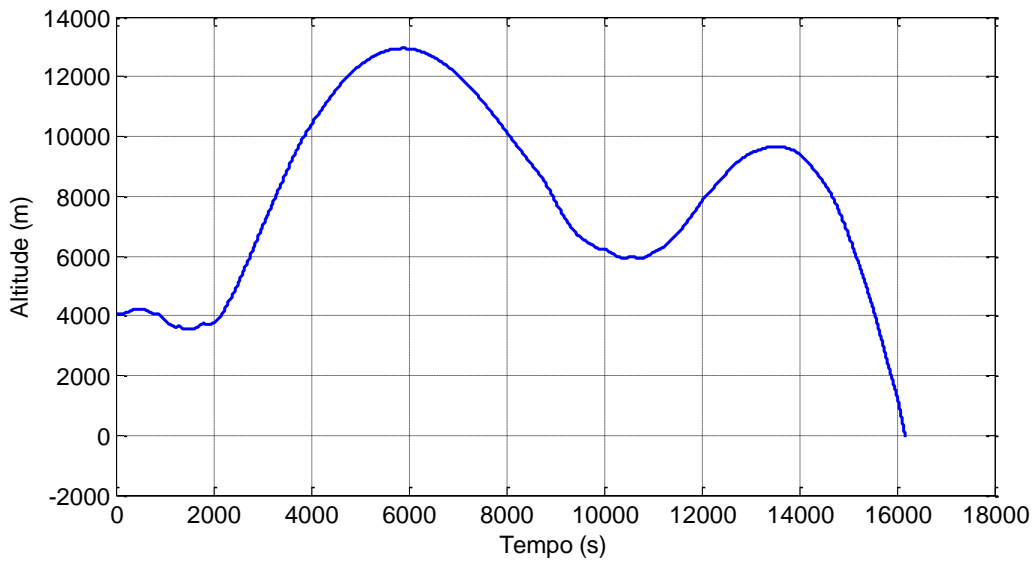


Figura 6.11. Caso 2: altitude.



Para o caso 2, em que é considerado o semi-eixo maior inicial de 12 km, para a mesma inclinação orbital de 45° do caso 1, mas agora com ascensão reta do nodo de 50° ao invés de 30° , percebe-se nitidamente um efeito ainda mais acentuado da perturbação. A trajetória sofreu uma significativa mudança do plano orbital, com a inclinação variando de maneira expressiva, o que evidencia o amplo efeito da atração gravitacional de Marte que age de maneira a tirar o veículo da diminuta atração gravitacional de Fobos. Porém, neste caso 2 o choque com a superfície do satélite ocorreu antes que o veículo pudesse

passar a descrever uma trajetória de escape hiperbólica com relação a Fobos, embora a excentricidade tenha atingido valores significativos como ilustra a Figura 6.9.

Figura 6.12. Caso 3: semi-eixo maior.

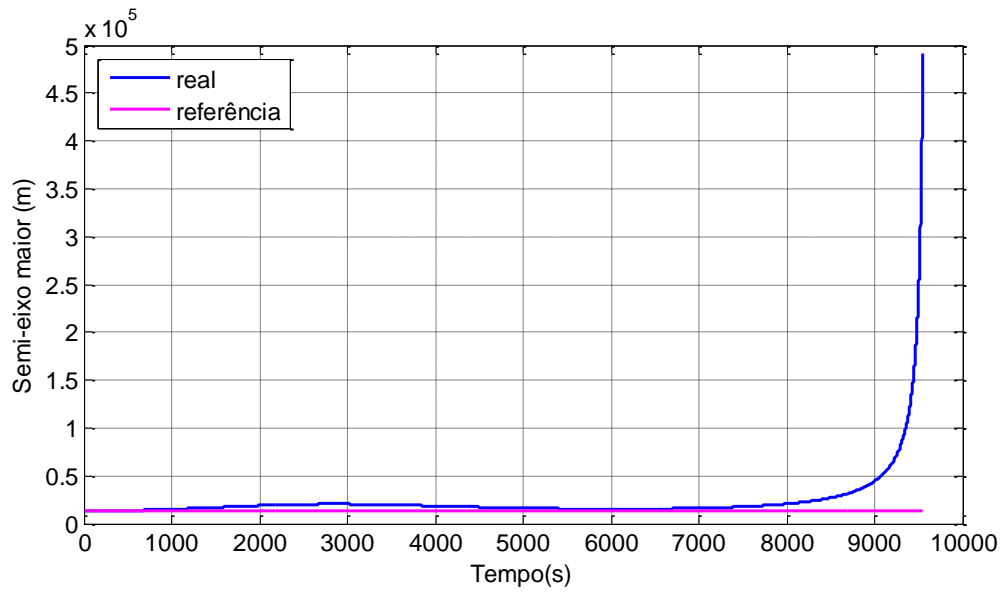


Figura 6.13. Caso 3: excentricidade.

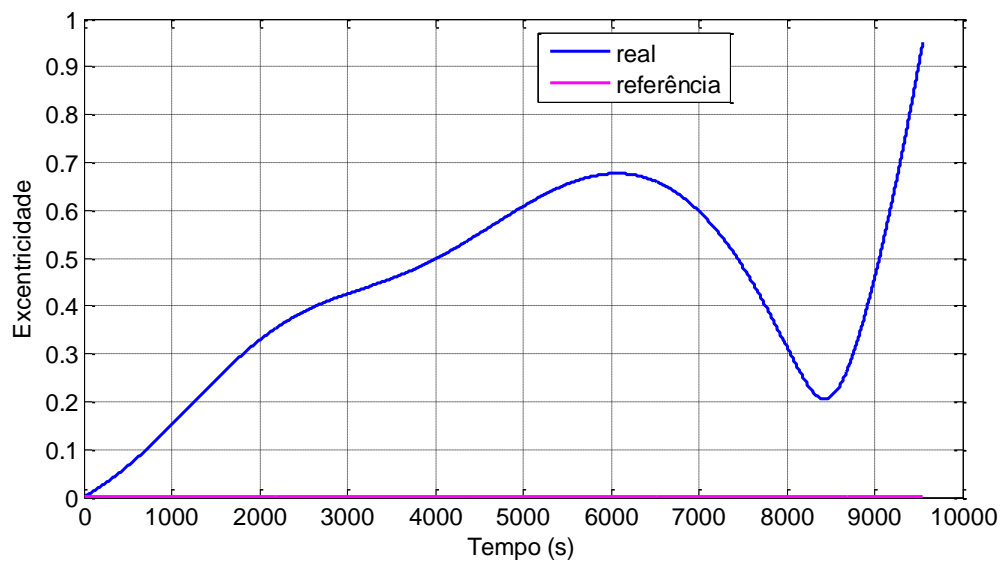


Figura 6.14. Caso 3: inclinação.

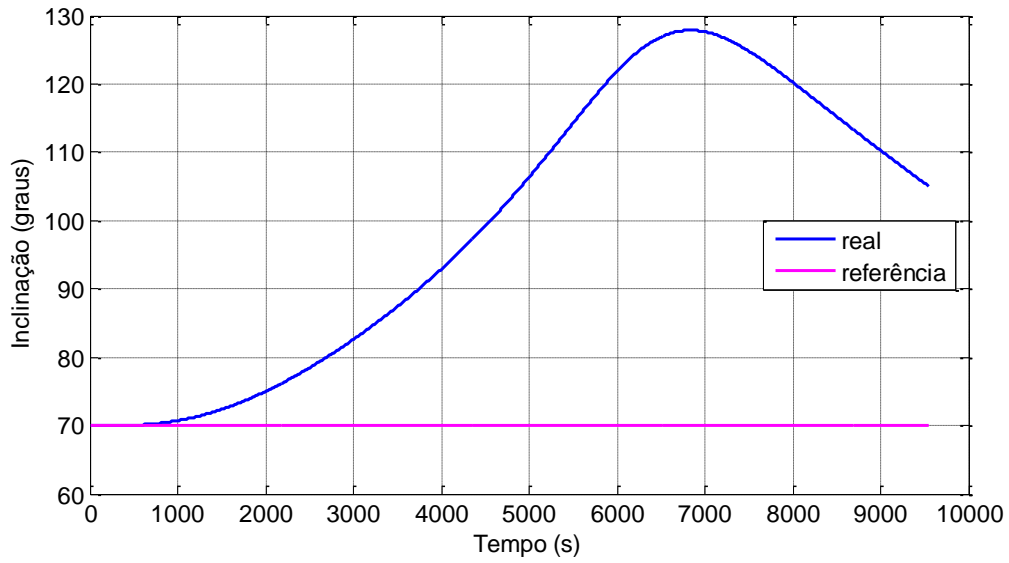
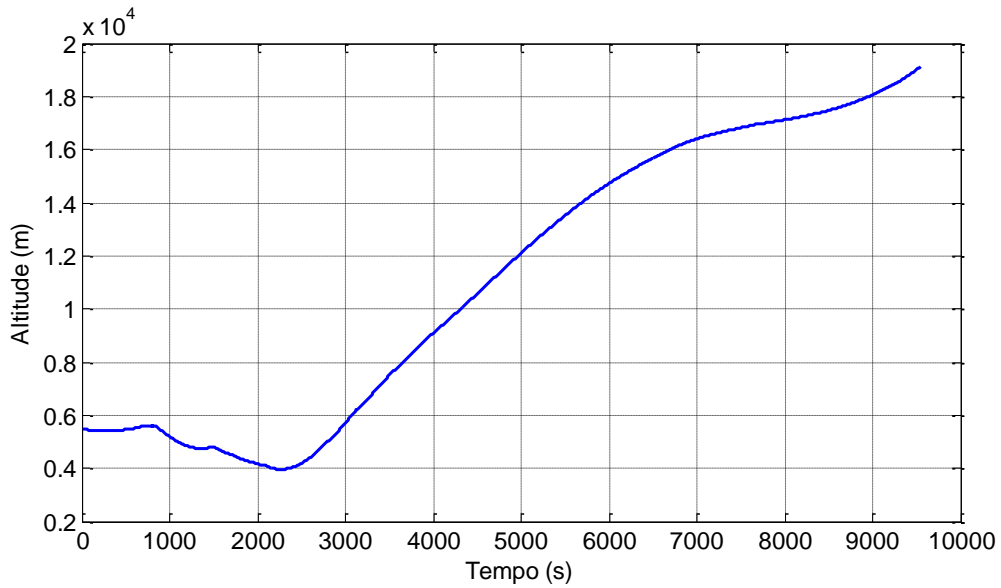


Figura 6.15. Caso 3: altitude.



O caso 3 considera semi-eixo maior de 13 km. Como a posição inicial do veículo está mais afastada de Fobos do que nos casos anteriores, o efeito da perturbação gravitacional de Marte torna-se ainda mais relevante fazendo com que a trajetória torne-se cada vez mais excêntrica até escapar da atração gravitacional de Fobos, como ilustrado nas Figuras 6.13 e 6.15. Neste caso o efeito perturbador gerado por Marte é tão pronunciado que o veículo passaria a descrever uma trajetória hiperbólica com relação à Fobos, bem antes

de completar ao menos uma volta ao redor do satélite, se a simulação continuasse por mais tempo (optou-se por encerrar a simulação quando a excentricidade atingisse 0,95).

Para ilustrar o efeito perturbador do campo não central gerado por Fobos, as Figuras 6.16 e 6.17 apresentam a força perturbadora para os casos 1 e 3, onde pode ser verificado na Figura 6.16 o choque com a superfície (caso 1), e o escape da atração gravitacional de Fobos na Figura 6.17 (caso 3). Pouco antes do choque a força perturbadora assume valores mais significativos devido à aproximação com a superfície de Fobos. O caso 2, no momento do impacto com a superfície, apresentou comportamento semelhante ao caso 1, por este motivo o gráfico com a força perturbadora devido ao campo gravitacional de Fobos foi omitido. Já no caso 3, em que ocorreu o escape, conforme a excentricidade da órbita aproxima-se de 1 e o veículo espacial afasta-se de Fobos a força perturbadora de Marte passe a ser ainda mais relevante enquanto a perturbação devido a Fobos torna-se menor a cada passo da simulação.

Figura 6.16. Perturbação devido a Fobos (caso 1).

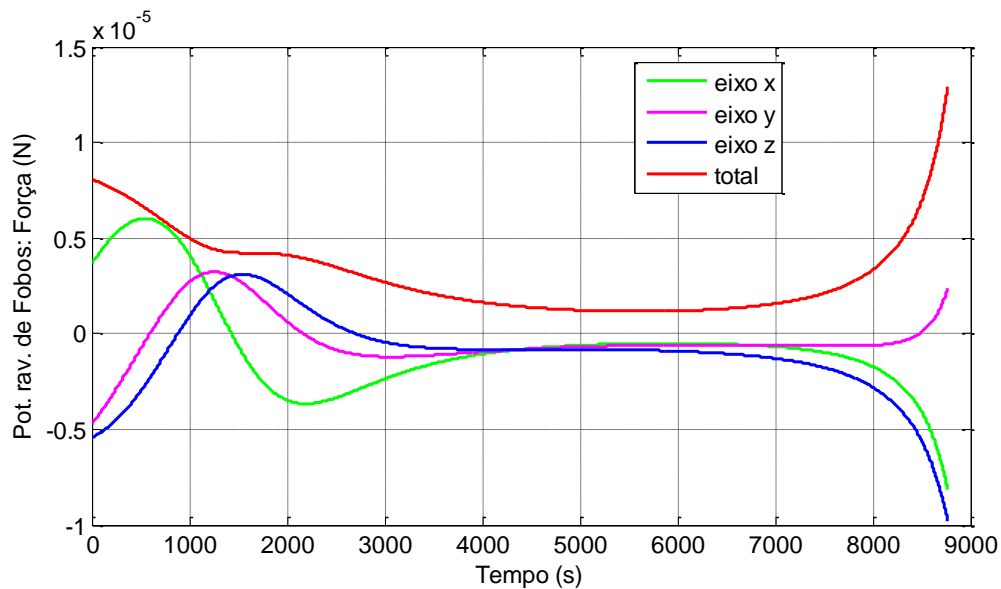
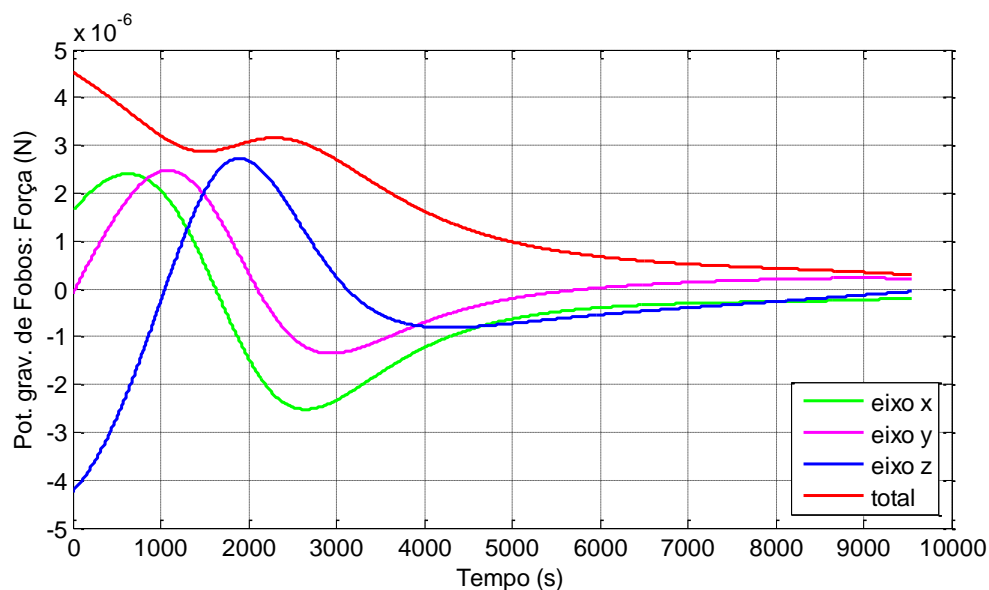


Figure 6.17. Perturbação devido a Fobos (caso 3).



Na segunda fase deste estudo, as simulações visaram mapear o campo gravitacional da região ao redor de Fobos. Para isso foram verificadas as magnitude das perturbações de origem gravitacional ao longo de trajetórias circulares hipotéticas ao redor de Fobos com raios e inclinações constantes, para cada simulação, de valores que variaram de 11 km a 19 km e 0 a 90°. Entretanto, aqui serão apresentados os resultados de três simulações que ilustram o mapeamento total feito neste estudo considerando os planos orbitais iniciais dos casos 1 a 3 da fase anterior. Assim, na simulação 1 considerou-se raio de 11 km $i = 45^\circ$ e $\Omega = 30^\circ$ (Figuras 6.18 a 6.21). Na simulação 2 raio de 12 km $i = 45^\circ$ e $\Omega = 50^\circ$ (Figuras 6.22 a 6.25). Na simulação 3 considerou-se raio 13 km $i = 70^\circ$ e $\Omega = 50^\circ$ (Figuras 6.26 a 6.29).

Nas Figuras 6.18, 6.22 e 6.26 o incremento de velocidade perturbador devido ao campo não central de Fobos é apresentado para as três simulações realizadas com valores diferentes do raio e da inclinação. As Figuras 6.19, 6.23 e 6.27 mostram o incremento de velocidade devido à perturbação gravitacional gerada por Marte. As Figuras 6.20, 6.24 e 6.28 exibem a contribuição do Sol na perturbação que um suposto veículo seria submetido nas proximidades de Fobos. Finalmente, as Figuras 6.21, 6.25 e 6.29 revelam o somatório do incremento de velocidade total considerando todas as três perturbações gravitacionais anteriormente descritas, para uma hipotética trajetória circular completa ao redor de Fobos.

Para cada uma das perturbações é calculado, a partir dos modelos desenvolvidos, o vetor perturbação que atua sobre o satélite artificial. Ou seja, é inserido na dinâmica, a cada passo da simulação, o vetor referente a cada perturbação considerada. Após isso, é feita a soma vetorial de cada uma das perturbações e obtida a perturbação resultante sobre o satélite. Porém, para o estudo da magnitude das perturbações capazes de alterar a órbita de um satélite artificial na vizinhança de Marte e suas luas, é calculado o somatório das perturbações, a fim de extrair as características das órbitas estudadas, possibilitando uma comparação e análise de órbitas mais e menos perturbadas. Neste caso, o somatório da perturbação é equivalente à integral da perturbação agindo no corpo durante o período estudado. Entretanto, existem duas maneiras de obter o somatório das perturbações. Uma delas é por meio da soma dos vetores das perturbações resultantes obtidos durante toda a simulação. A outra é realizar o somatório dos módulos dos vetores de perturbação resultante durante toda a perturbação. As Figuras 6.21, 6.25 e 6.29 apresentam somatório dos módulos dos vetores de perturbação resultante durante toda a perturbação. Optou-se por essa abordagem pois dessa forma é obtida a magnitude total do incremento de velocidade necessário para corrigir a trajetória caso fosse acionado o sistema de propulsão.

Figura 6.18. Simulação 1: perturbação devido à Fobos.

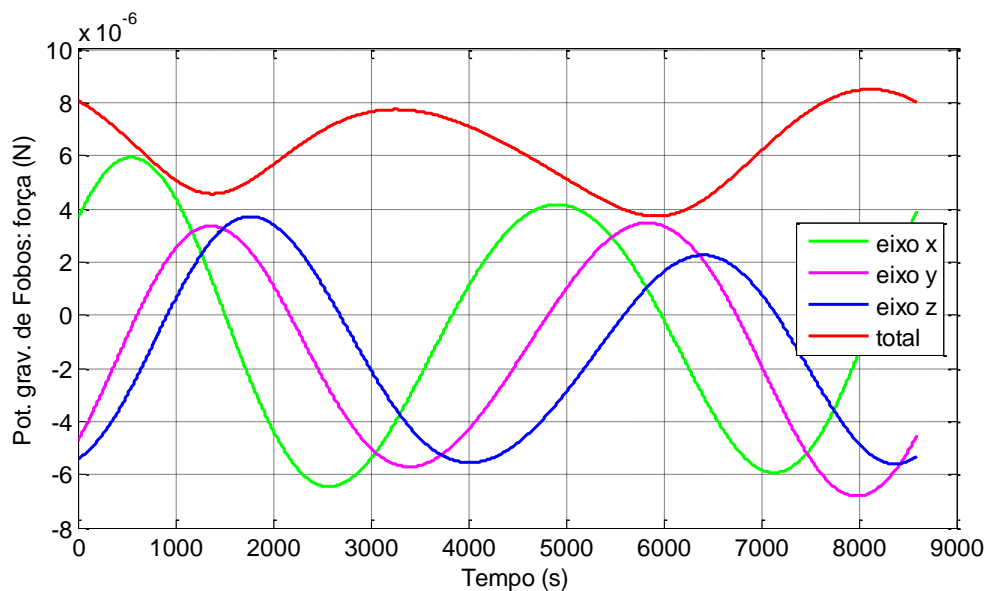


Figura 6.19. Simulação 1: perturbação devido à Marte.

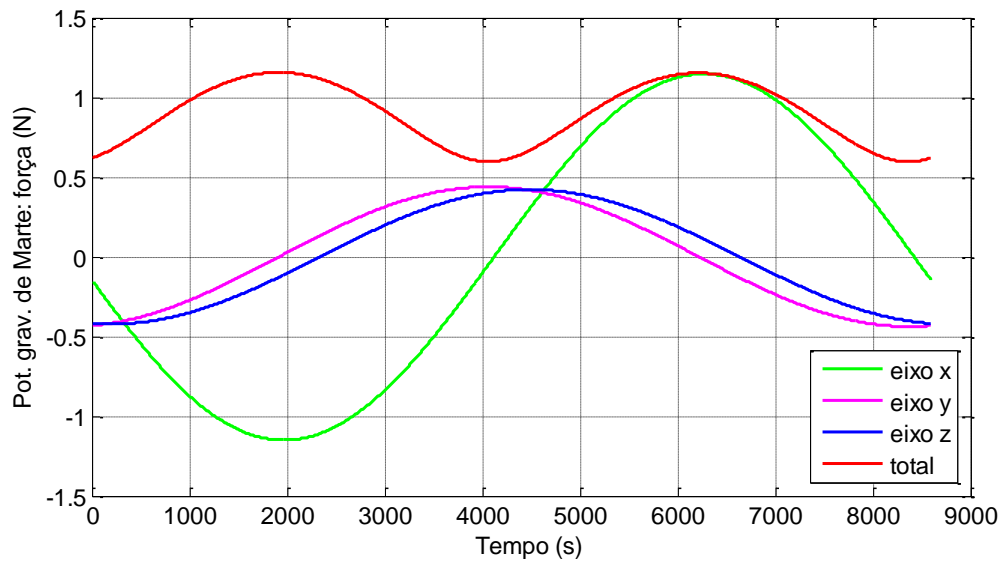


Figura 6.20. Simulação 1: perturbação devido ao Sol.

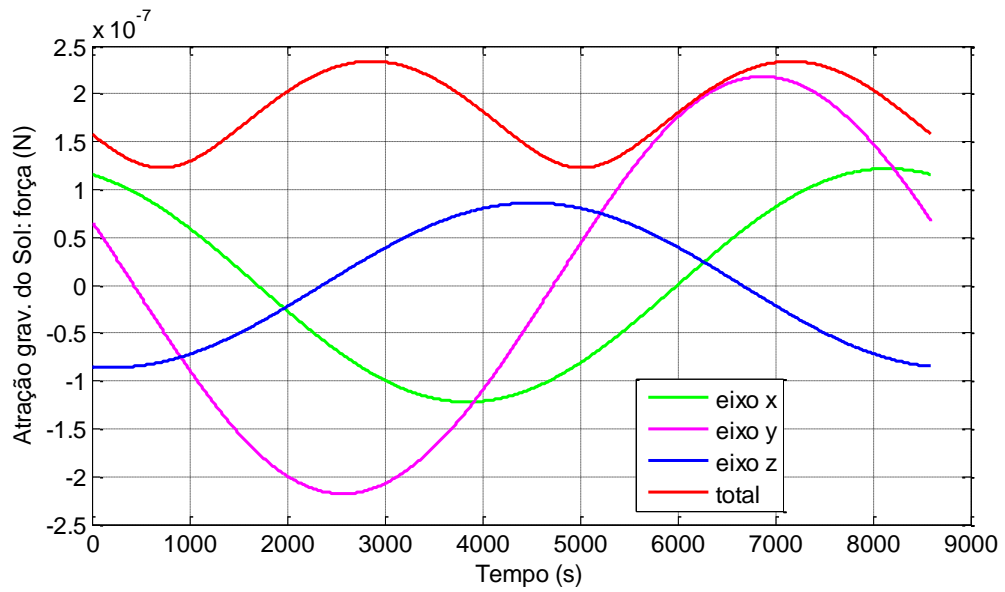


Figura 6.21. Simulação 1: somatório das perturbações.

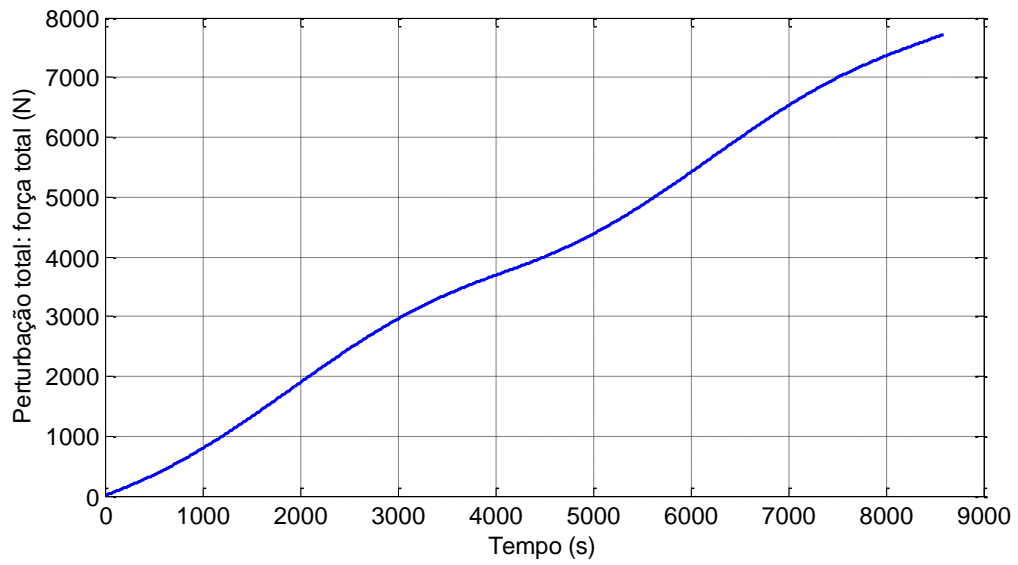


Figura 6.22. Simulação 2: perturbação devido à Fobos.

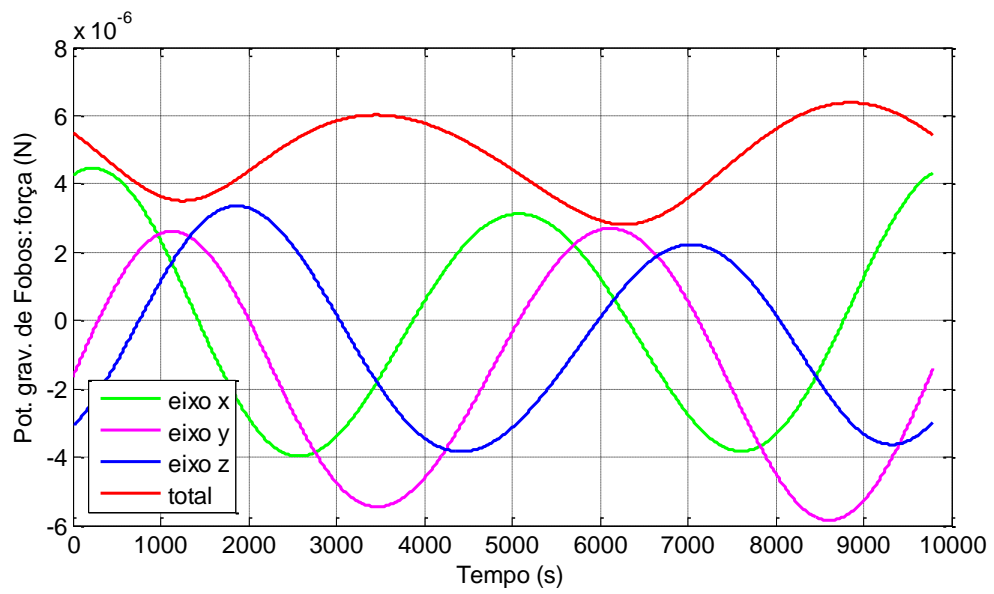


Figura 6.23. Simulação 2: perturbação devido à Marte.

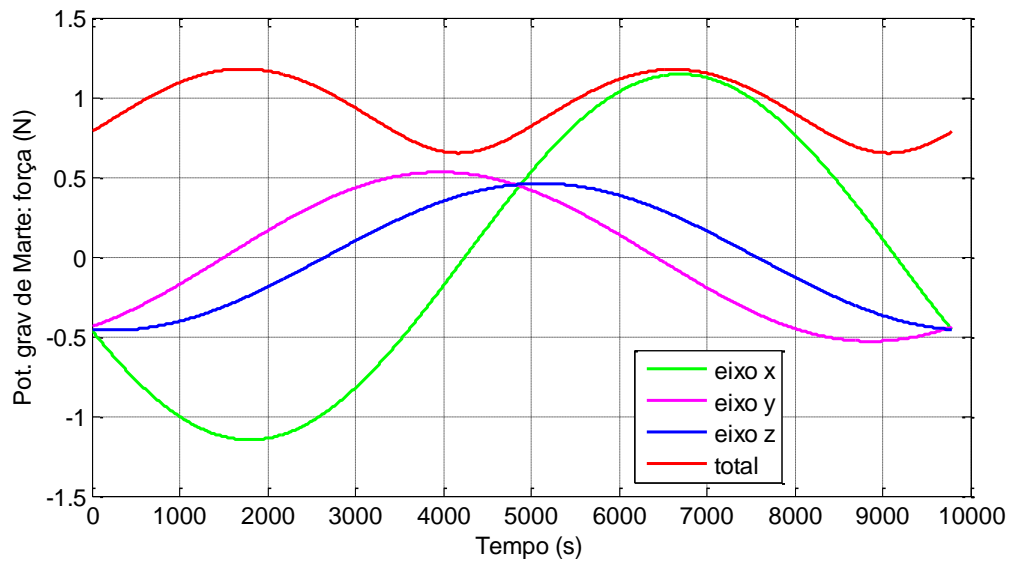


Figura 6.24. Simulação 2: perturbação devido ao Sol.

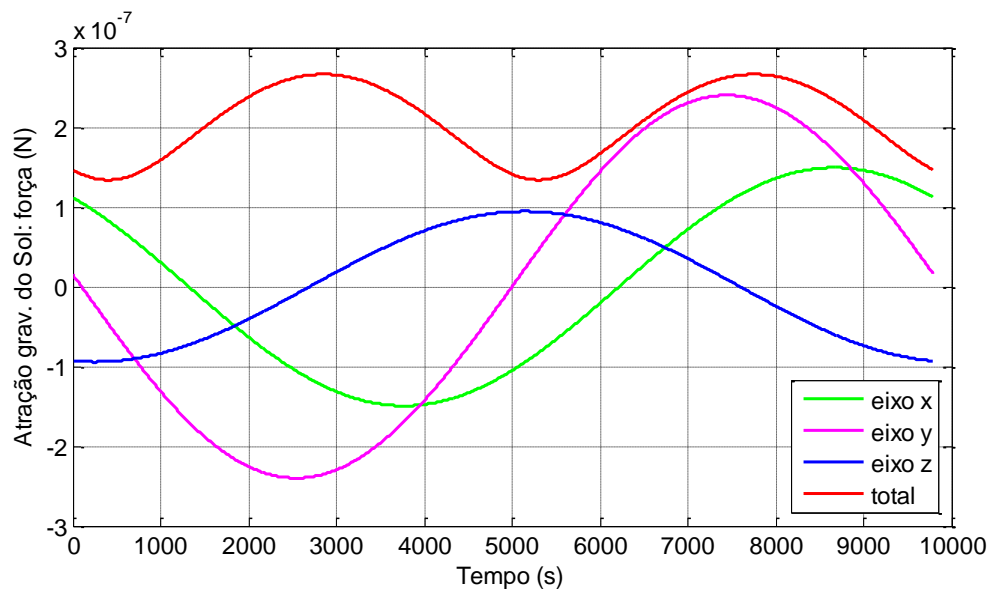


Figura 6.25. Simulação 2: somatório das perturbações.

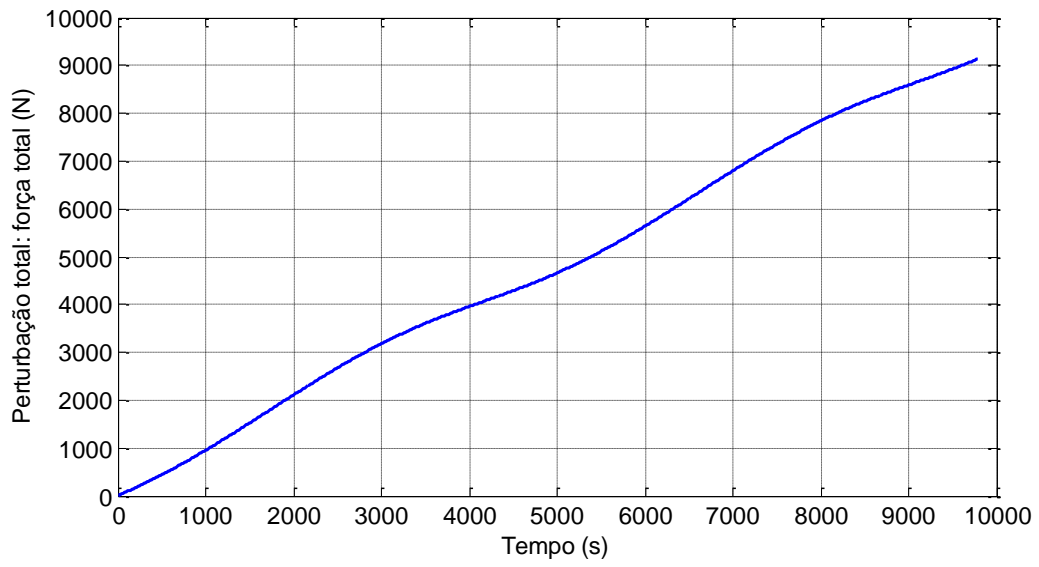


Figura 6.26. Simulação 3: perturbação devido à Fobos.

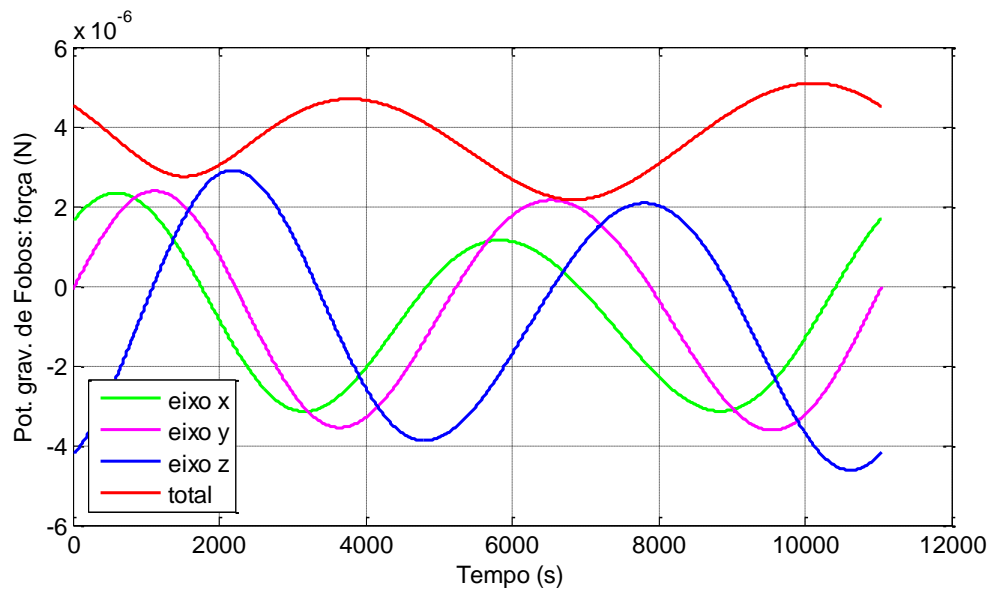


Figura 6.27. Simulação 3: perturbação devido à Marte.

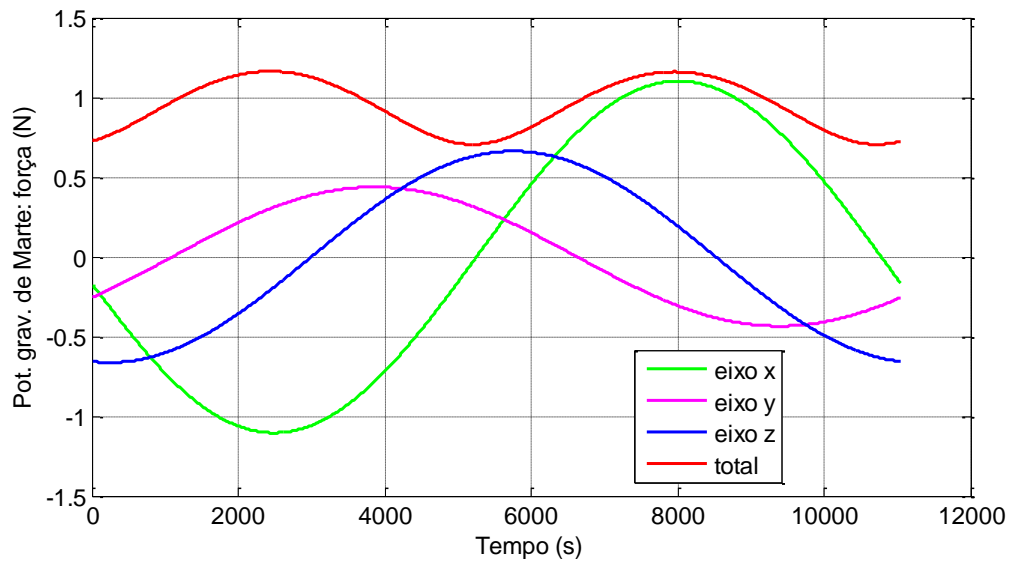


Figura 6.28. Simulação 3: perturbação devido ao Sol.

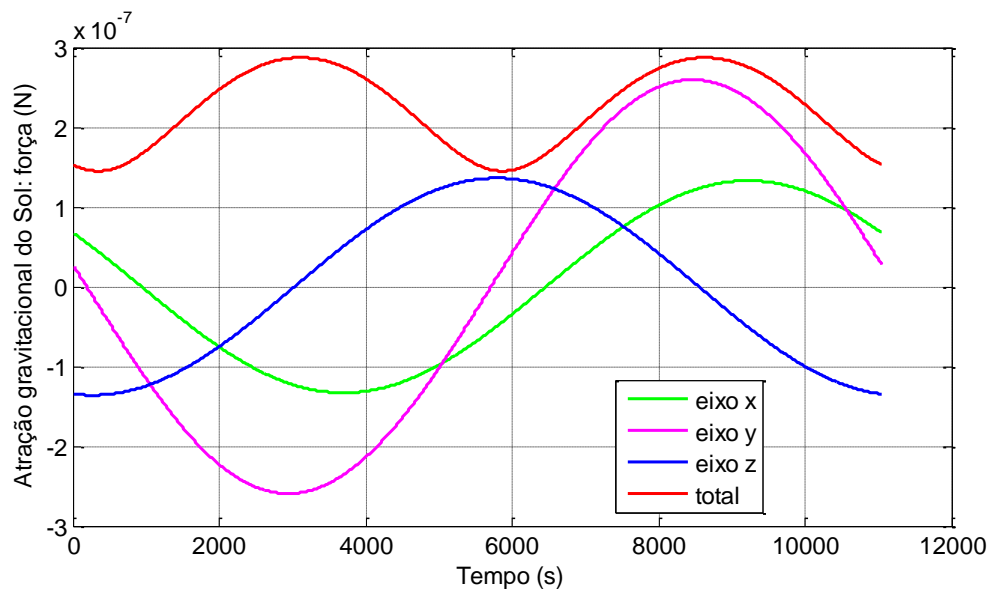
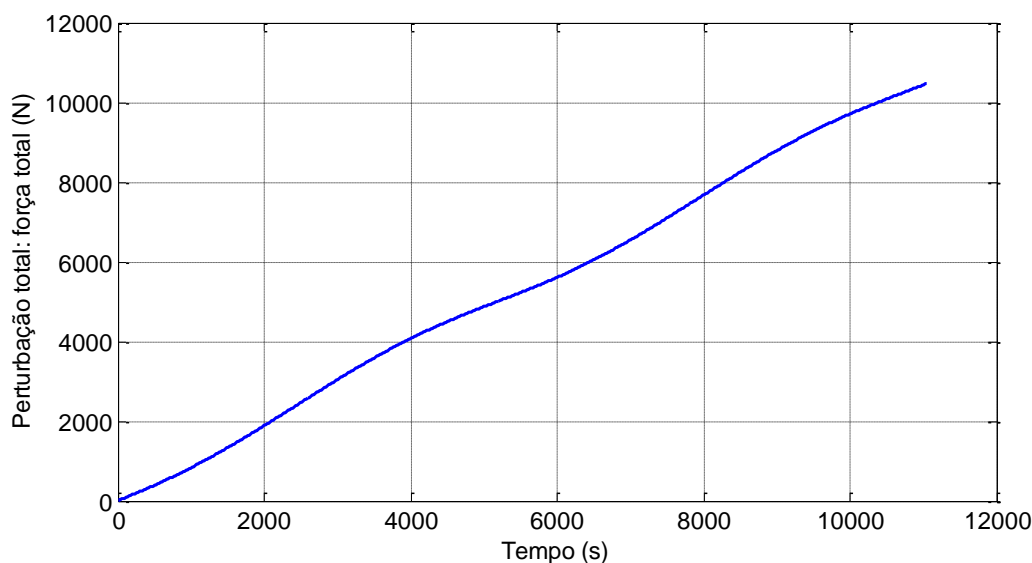


Figura 6.29. Simulação 3: somatório das perturbações.



Analisando os resultados apresentados nas Figuras 6.16 a 6.29 verifica-se que a principal perturbação a que um veículo estaria sujeito em trajetória de aproximação e/ou pouso em Fobos seria a perturbação devido ao campo gravitacional de Marte cuja ordem de grandeza da força perturbadora é de 1 N. Diante da perturbação de Marte a força perturbadora devido a não esfericidade de Fobos passa a ter papel secundário, já que a ordem de grandeza é de apenas 6×10^{-6} N. A contribuição na perturbação devido ao Sol é ainda mais irrelevante, pois a ordem de grandeza da perturbação é de 2×10^{-7} N. Porém é importante ressaltar que não se pode substituir o modelo de campo gravitacional não central de Fobos por um modelo de campo central, pois isso certamente incorreria em erros na trajetória e principalmente na definição da região de influência de Fobos, que seguramente não é esférica. Esses erros poderiam se tornar relevantes em uma missão com o objetivo de pousar na superfície da lua. Por fim, as figuras que apresentam o somatório dos incrementos de velocidade devido às perturbações, atestam a necessidade de mapear o campo gravitacional ao redor de Fobos visando encontrar trajetórias menos perturbadas, já que o somatório pode ser interpretado como uma característica da trajetória. A otimização dessas trajetórias com base no valor do somatório é de fundamental importância na análise de missões com destino a Fobos.

Sendo assim, uma alternativa para manter o satélite artificial próximo a Fobos é, na verdade, colocar o satélite artificial em órbita de Marte, porém com o mesmo período

orbital e condições iniciais similares às da órbita de Fobos ao redor de Marte, como visto na Figura 6.30, em que a linha vermelha representa a órbita de Fobos ao redor de Marte e a linha verde representa a órbita de Fobos ao redor de Marte. Para essa abordagem foi utilizado um sistema de referência similar ao adotado em manobras de *rendezvous* e *docking*. Os resultados para as simulações com tempo de 5 dias, 30 dias e 100 dias estão apresentados nas Figuras 6.31 a 6.51. Os desvios apresentados nas Figuras 6.33 a 6.35, 6.40 a 6.43 e 6.47 a 6.49 representam a diferença entre a trajetória de referência, que é uma estimativa da trajetória kepleriana que o satélite seguiria caso não estivesse sujeito às perturbações consideradas, e a trajetória real, que é a trajetória que o satélite descreve quando perturbado pelas forças consideradas.

Neste estudo estão sendo consideradas, simultaneamente, a intensa atração do potencial gravitacional de Marte, expandida em harmônicos esféricos até grau e ordem 80 e o potencial gravitacional não central de Fobos, utilizando o modelo dos poliedros. Os eixos coordenados H-bar, R-bar e V-bar mostrados nas Figuras 6.31, 6.38 e 6.45 representam, respectivamente as coordenadas na direção oposta ao momento angular, na direção do centro do corpo central e na direção do vetor velocidade (Fehse, 2003). Tal estudo pode ser encontrado em Gonçalves et al. (2016c) e Rocco et al. (2017c).

Figura 6.30. Fobos e o satélite artificial orbitando Marte.

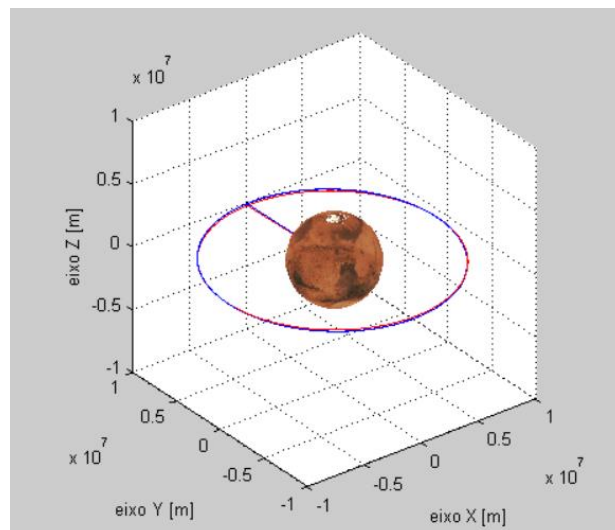


Figura 6.31. Trajetória do satélite artificial na vizinhança de Fobos (5 dias).

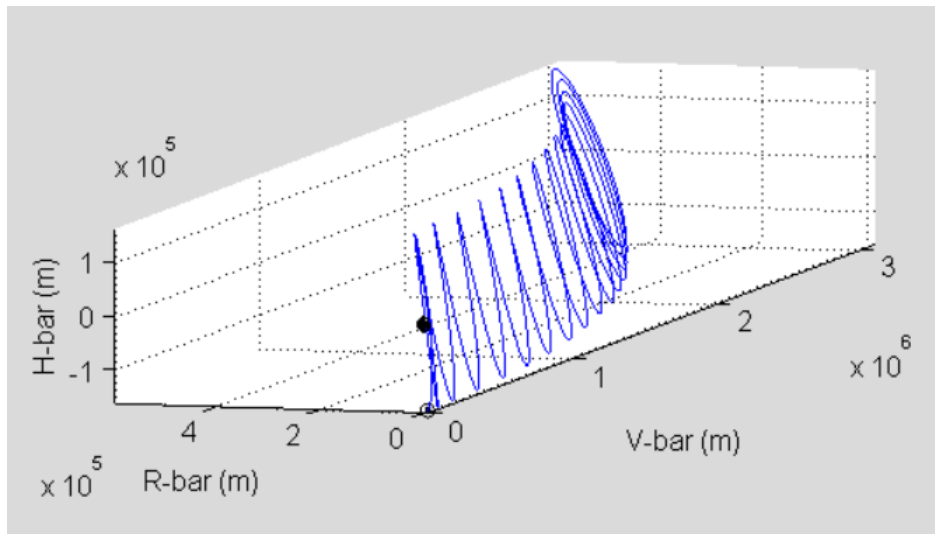


Figura 6.32. Distância entre Fobos e o satélite artificial (5 dias).

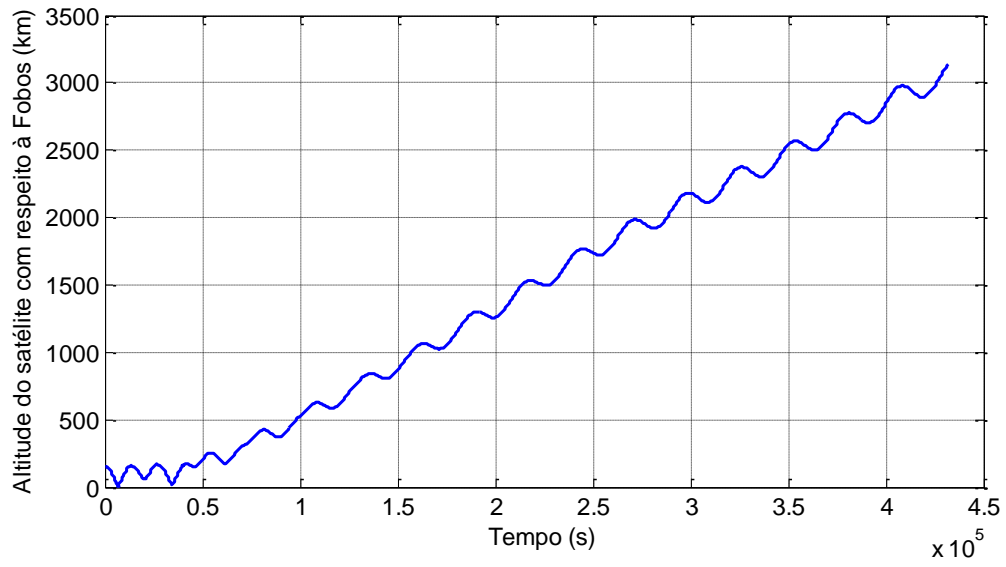


Figura 6.33. Desvio no semi-eixo maior (5 dias).

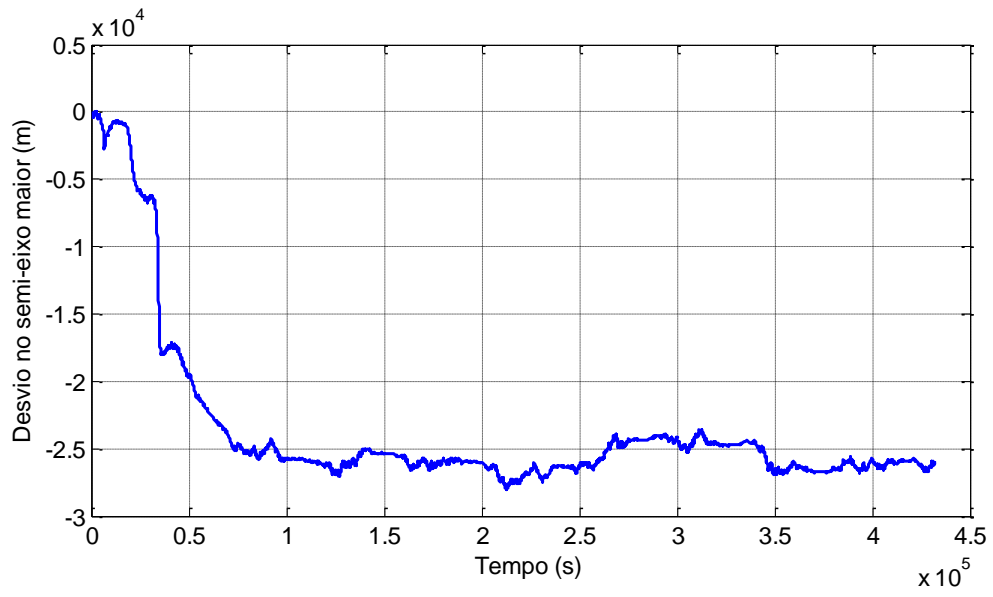


Figura 6.34. Desvio da excentricidade (5 dias).

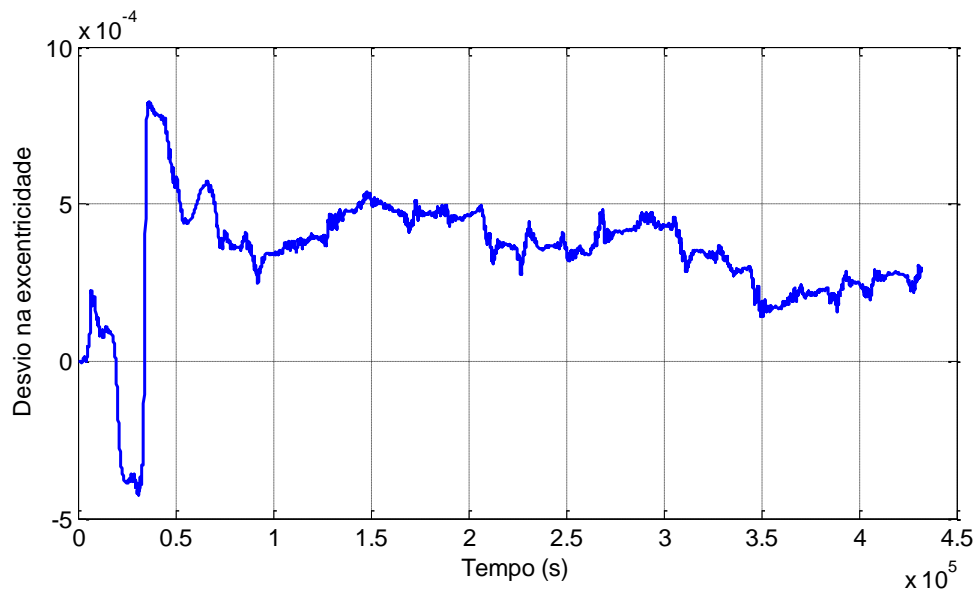


Figura 6.35. Desvio na inclinação (5 dias).

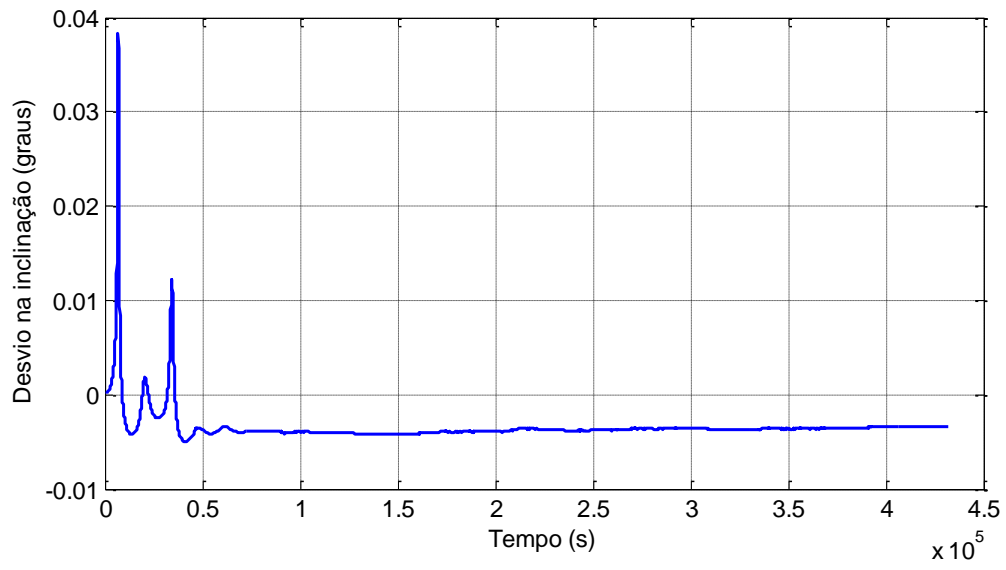


Figura 6.36. Perturbação devido à Fobos (5 dias).

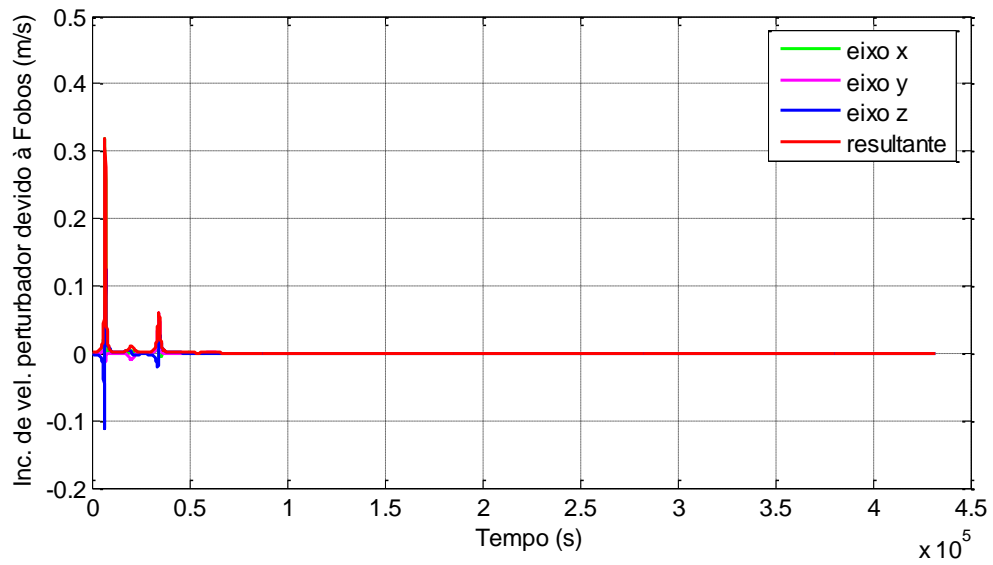


Figura 6.37. Perturbação devido à Marte (5 dias).

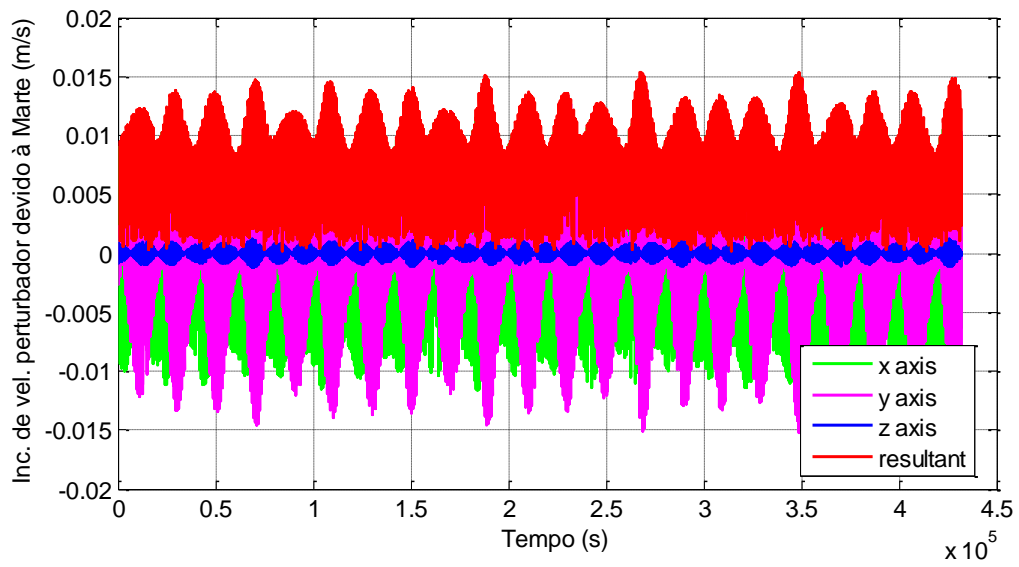


Figura 6.38. Trajetória do satélite artificial na vizinhança de Fobos (30 dias).

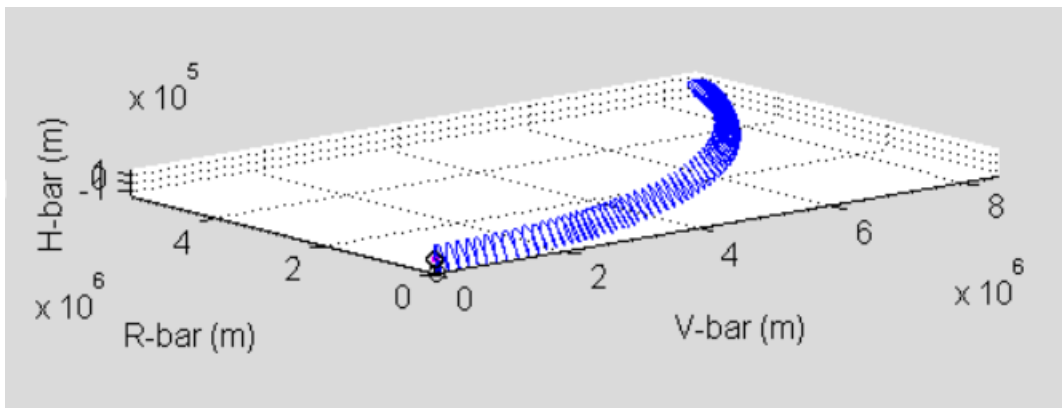


Figura 6.39. Distância entre Fobos e o satélite artificial (30 dias).

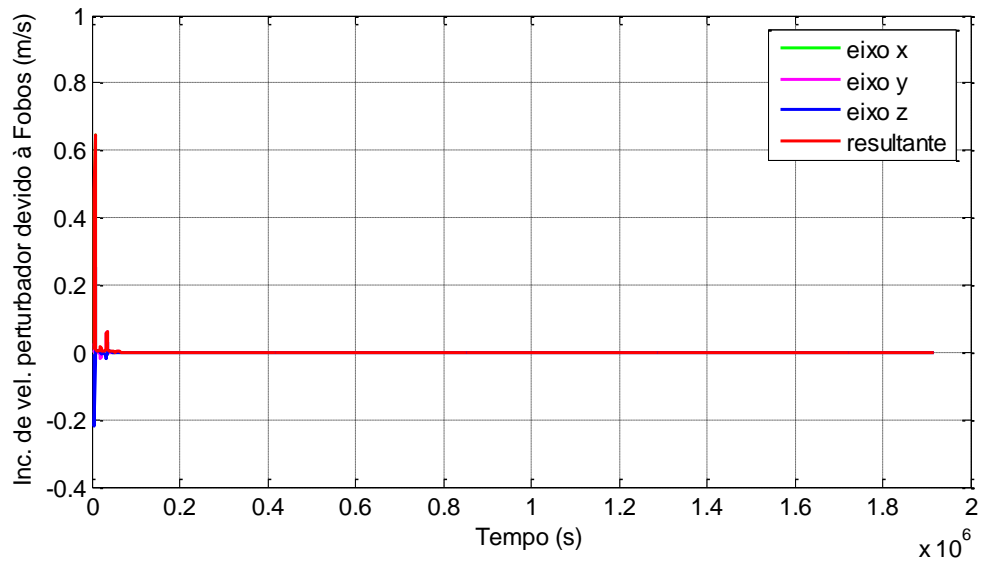


Figura 6.40. Desvio no semi-eixo maior (30 dias).

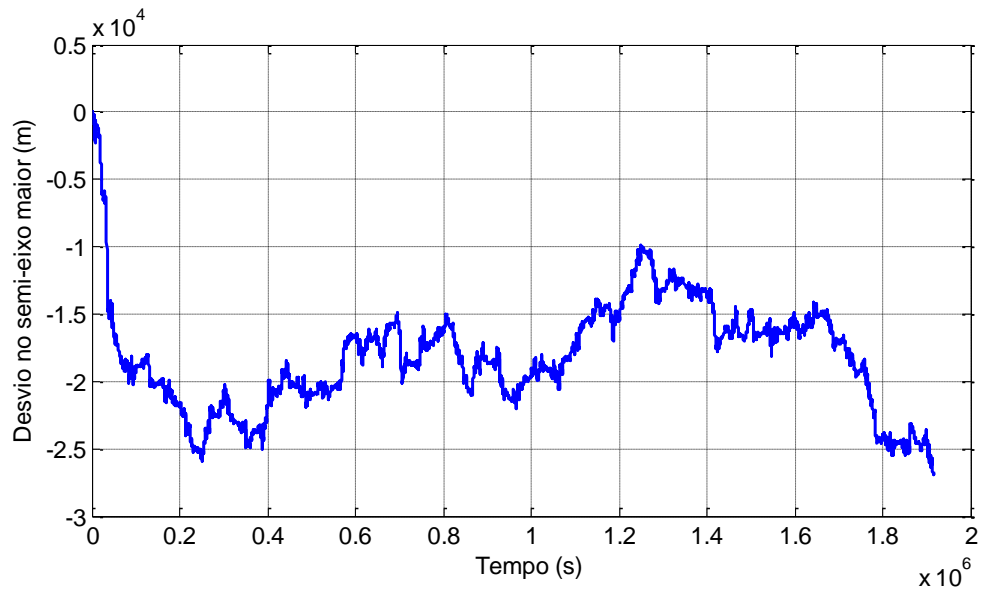


Figura 6.41. Desvio na excentricidade (30 dias).

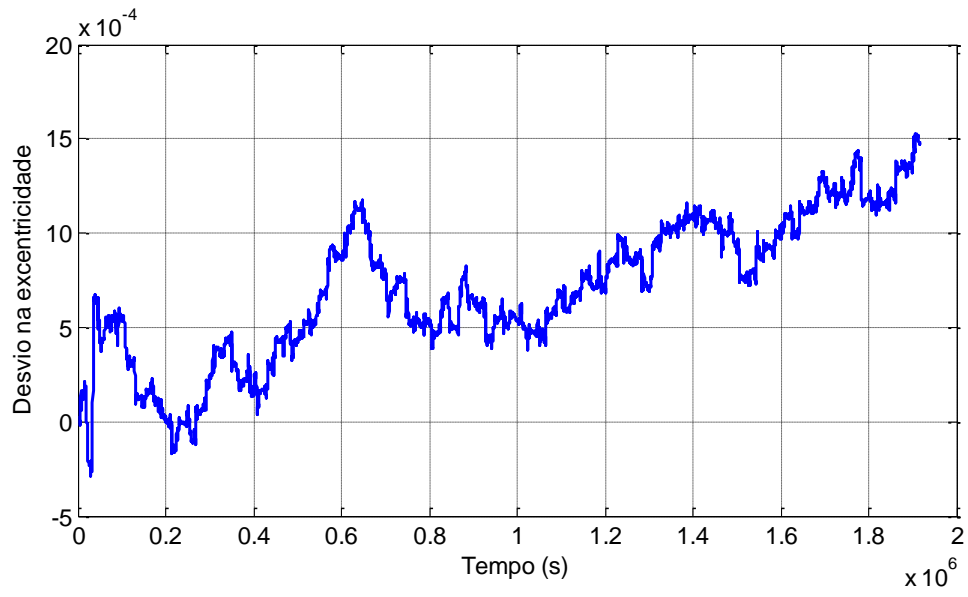


Figura 6.42. Desvio na inclinação (30 dias).

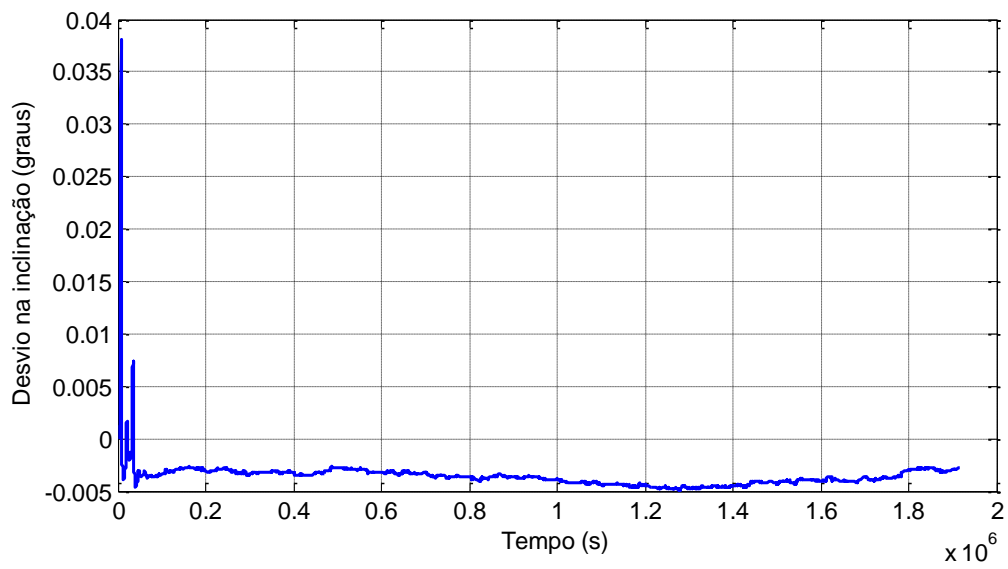


Figura 6.43. Perturbação devido a Fobos (30 dias).

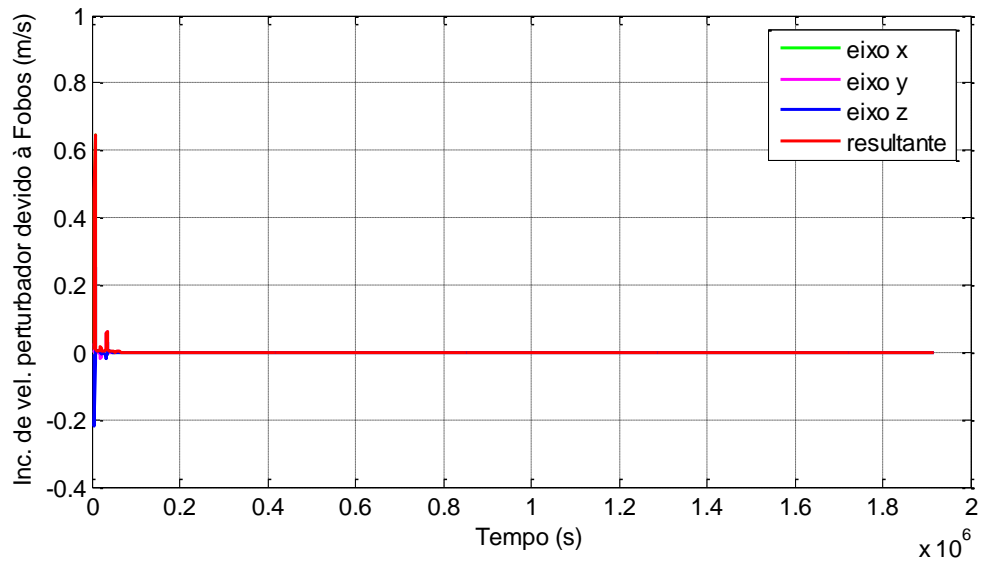


Figura 6.44. Perturbação devido a Marte (30 dias).

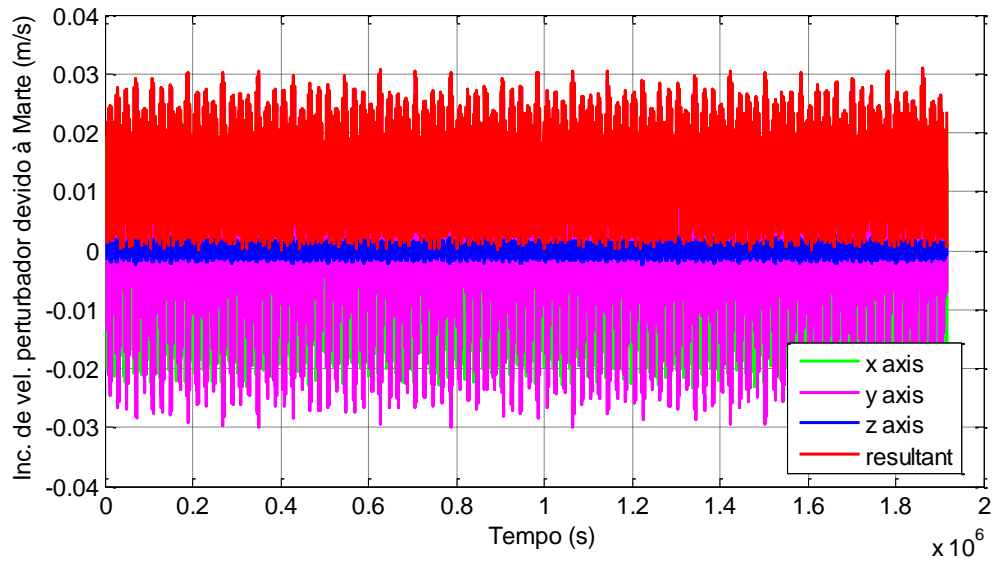


Figura 6.45. Trajetória do satélite artificial na vizinhança de Fobos (100 dias).

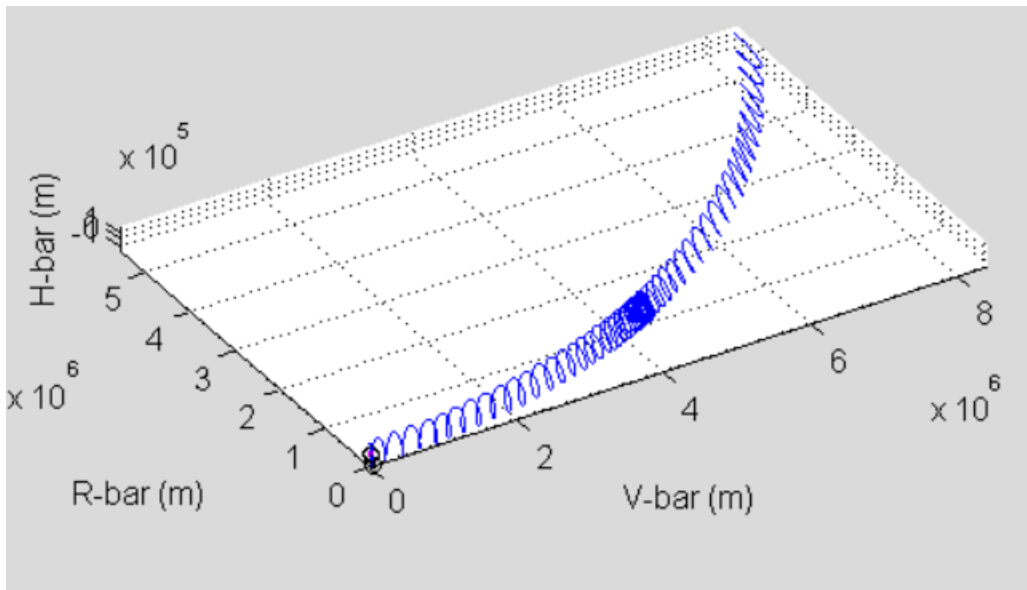


Figura 6.46. Distância entre Fobos e o satélite artificial (100 dias).

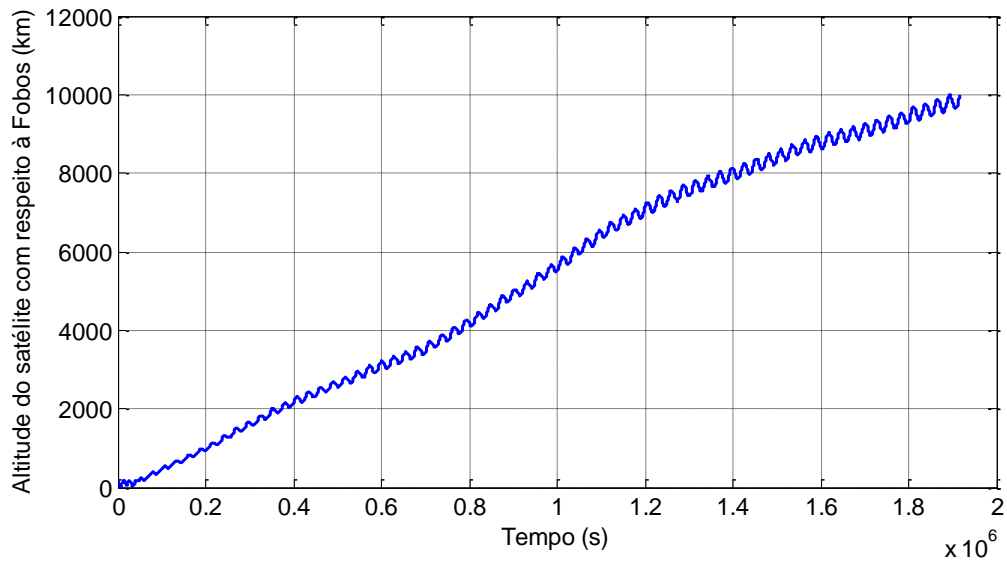


Figura 6.47. Desvio no semi-eixo maior (100 dias).

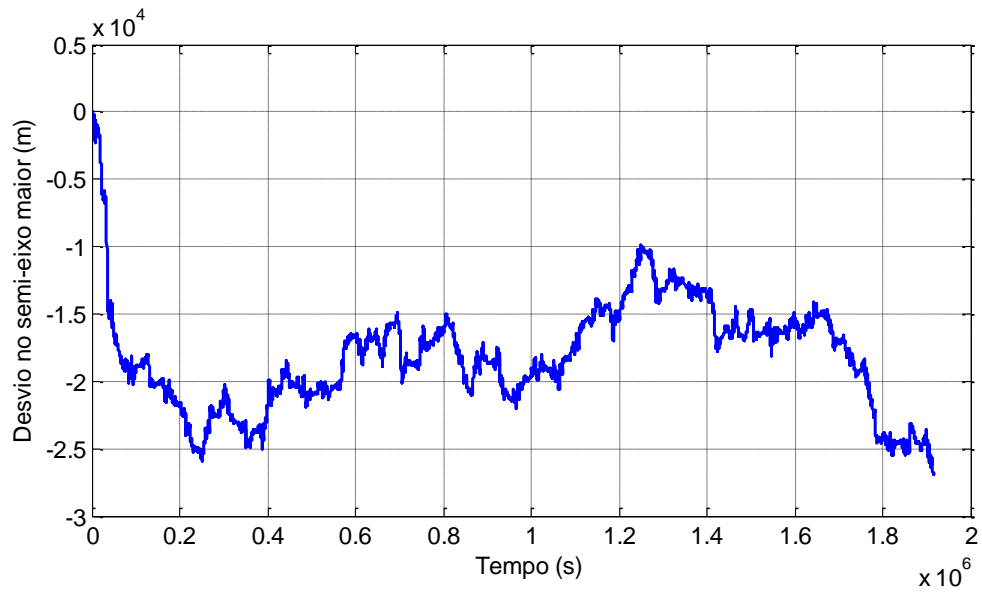


Figura 6.48. Desvio na excentricidade (100 dias).

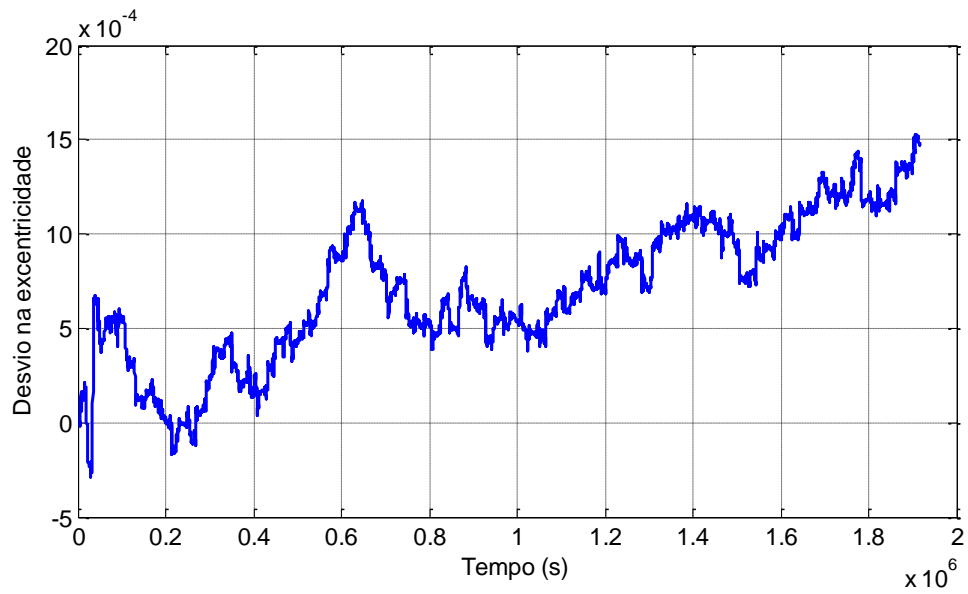


Figura 6.49. Desvio na inclinação (100 dias).

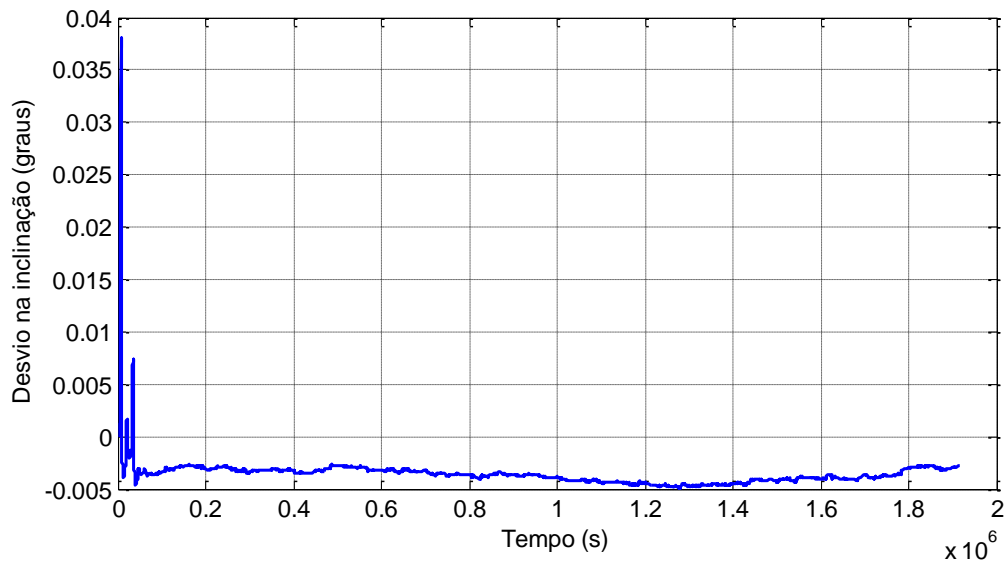


Figura 6.50. Perturbação devido a Fobos (100 dias).

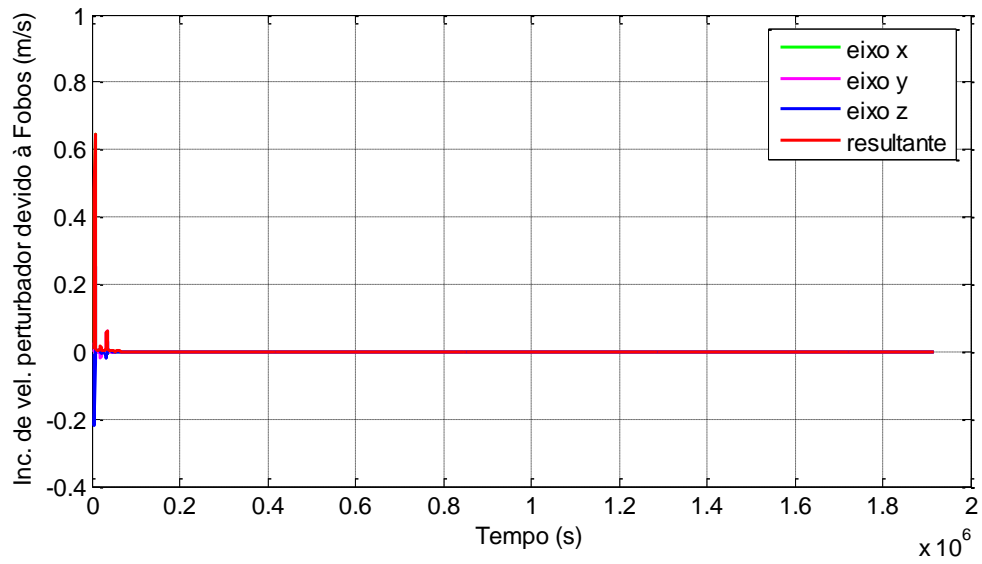
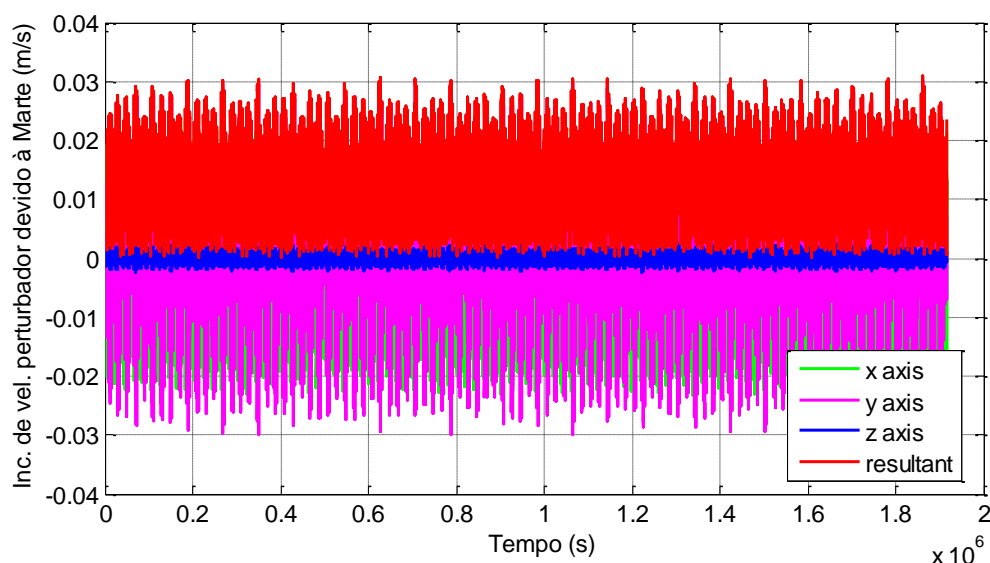


Figura 6.51. Perturbação devido à Marte (100 dias).



Pode-se ver pelas Figuras 6.32, 6.39 e 6.46 que o satélite é inicialmente colocado bem próximo a Fobos, porém sua posição é alterada com o passar do tempo e o satélite não segue junto a órbita de Fobos para sempre. Isso ocorre pois Fobos e o satélite são perturbados por Marte, porém o satélite também é perturbado por Fobos, o que causa uma diferença entre as posições do satélite e da lua, fazendo com que os elementos orbitais evoluam (Figuras 6.33 a 6.35, 6.40 a 6.42 e 6.47 a 6.49) e afastem o satélite de Fobos.

As forças perturbadoras devido ao potencial gravitacional de Marte e Fobos são apresentada nas Figuras 6.36, 6.37, 6.43, 6.44, 6.50 e 6.51, onde é possível ver a significativa diferença entre a magnitude dessas forças. A perturbação devido ao potencial gravitacional de Fobos, além de menos intensa, ao contrário da perturbação devido ao potencial gravitacional de Marte, sofre significativa variação de intensidade conforme ocorre a variação de altitude do satélite com relação a Fobos, que é cada vez mais influenciado por Marte.

Esta alternativa mantém o satélite próximo a Fobos por algum tempo, que pode ser suficiente para a realização de experimentos científicos, captura de imagens ou estudos específicos. Outra alternativa para manter o satélite perto de Fobos é a utilização de um sistema de controle, que, neste caso, controla os elementos orbitais do satélite simultaneamente e pelo tempo necessário para a realização da missão.

Assim, nesta simulação foi considerado que após 12 horas do início da simulação o sistema de controle foi acionado de modo que a força propulsiva cancela, na medida do possível, a força perturbadora. Dessa maneira a magnitude do empuxo se aproxima da magnitude da força perturbadora mas na direção oposta. Após 24 horas do início da simulação o sistema de controle foi desligado permitindo que os elementos orbitais do veículo evoluíssem em função da perturbação aplicada. A distância entre o satélite e Fobos, a força perturbadora devido ao potencial gravitacional de Marte e de Fobos, os desvios nos elementos orbitais e o empuxo aplicado sobre o satélite são apresentados nas Figuras 6.52 a 6.58.

Figura 6.52. Distância entre o satélite artificial e Fobos (manobra de correção).

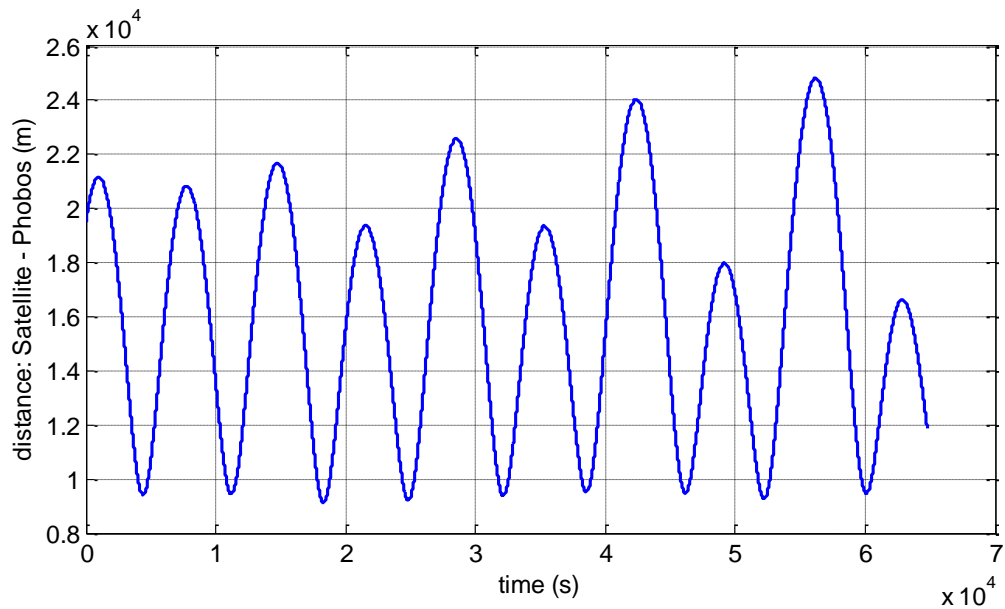


Figura 6.53. Perturbação devido à Marte (manobra de correção).

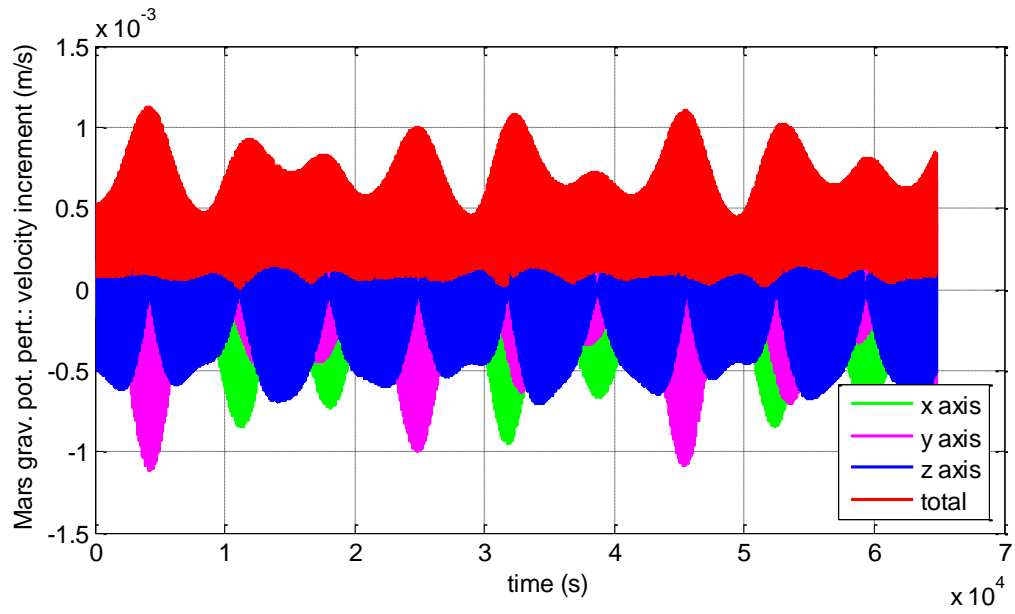


Figura 6.54. Perturbação devido a Fobos durante a manobra de correção.

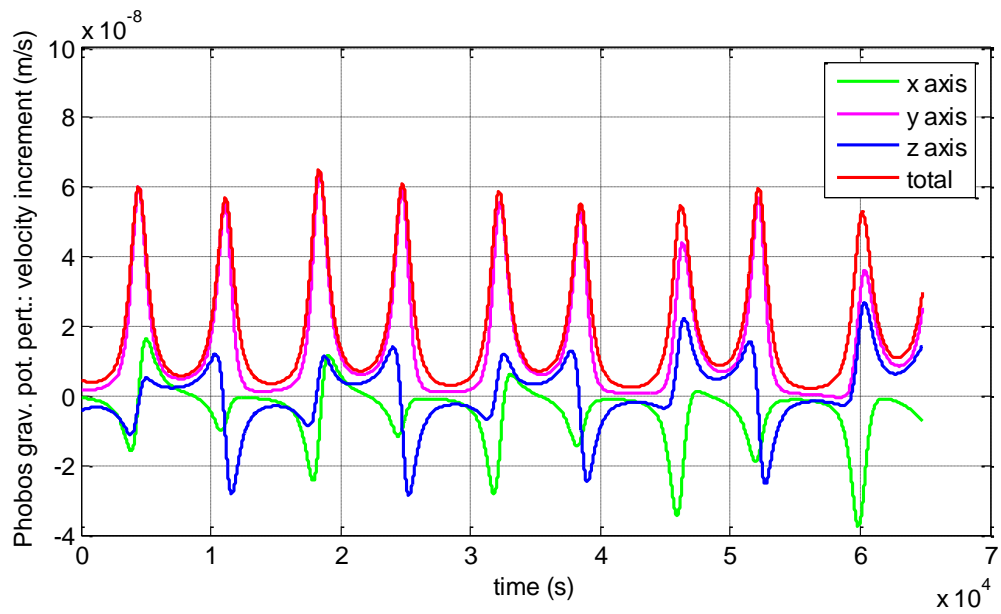


Figura 6.55. Semi-eixo maior durante a manobra de correção.

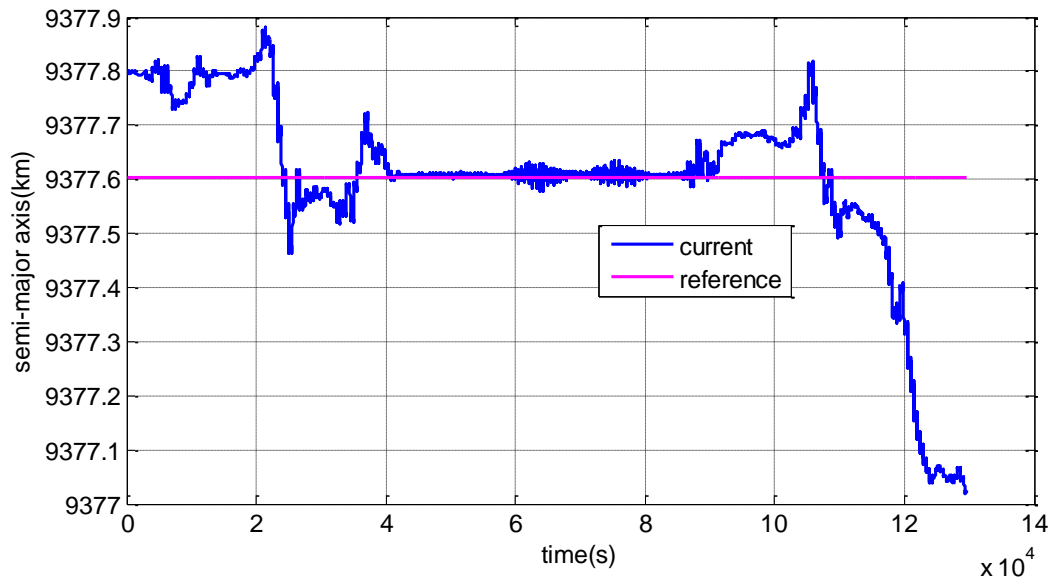


Figura 6.56. Excentricidade durante a manobra de correção.

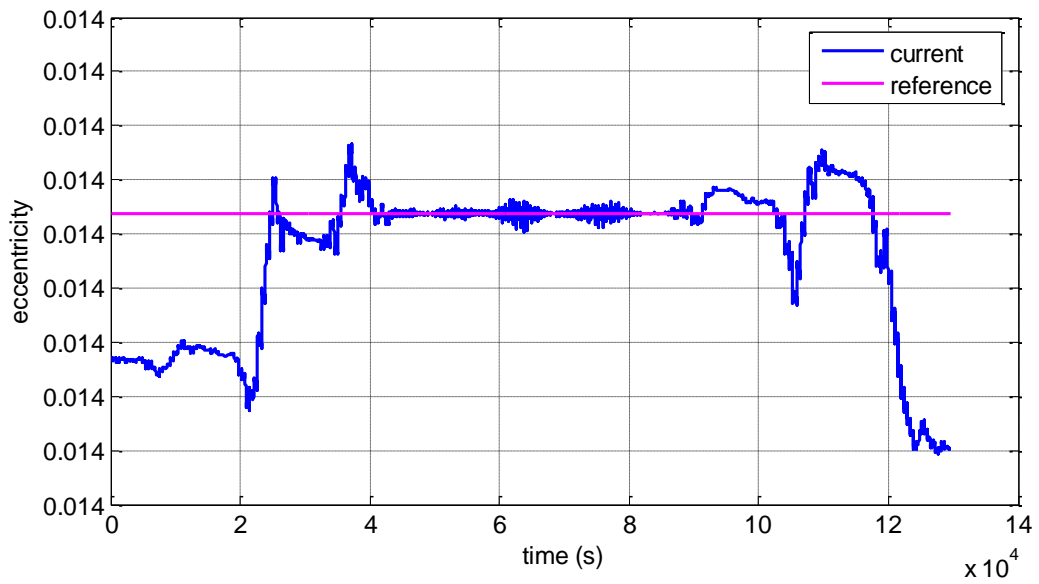


Figura 6.57. Inclinação durante a manobra de correção.

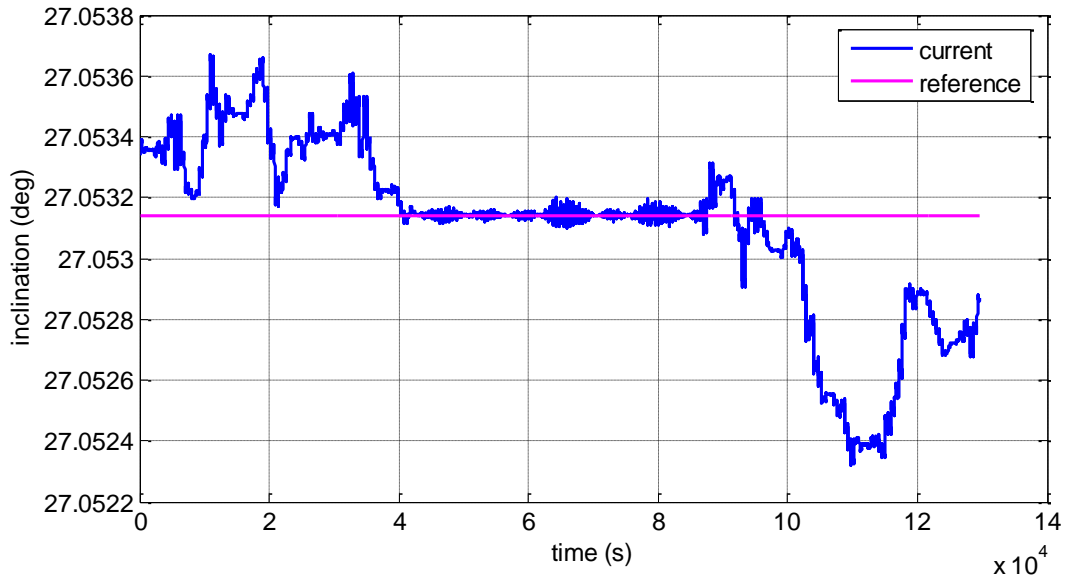
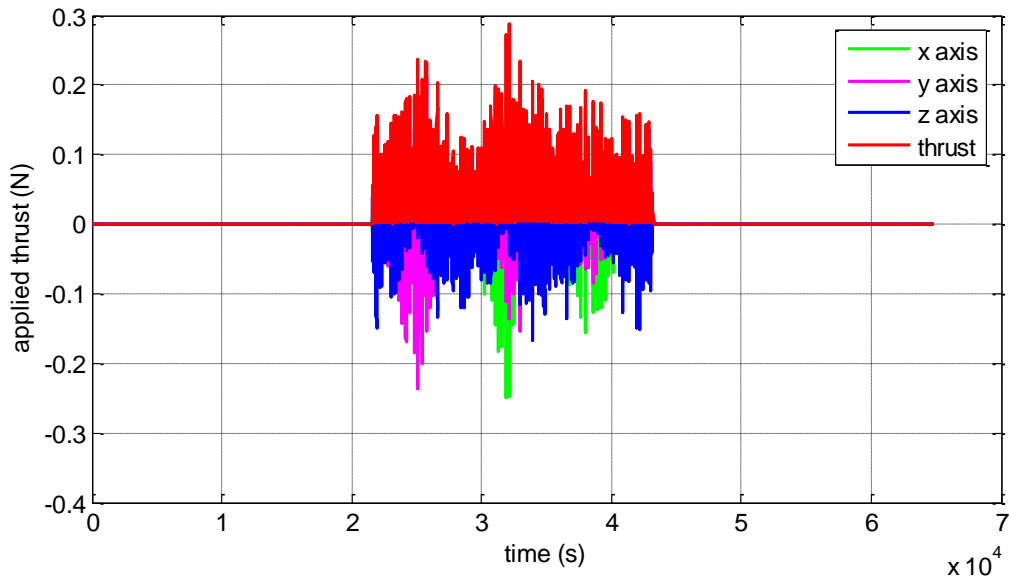


Figura 6.58. Empuxo aplicado sobre o satélite durante a manobra de correção.



A partir da Figura 6.52 é possível observar que o sistema de controle manteve o satélite orbitando Fobos durante todo o tempo de simulação, corrigindo os efeitos perturbativos que dificultam manter uma órbita estável por um longo período de tempo. A Figura 6.58 apresenta a magnitude e o momento em que o empuxo é aplicado sobre o satélite para corrigir as perturbações. Nas Figuras 6.55 a 6.57 são apresentados os desvios nos

elementos orbitais que caracterizam a órbita do satélite, que são minimizados durante o intervalo de tempo em que os propulsores estão ligados.

6.2. Trajetórias na vizinhança de Deimos

Embora menor e mais distante de Marte quando comparado a Fobos, Deimos foi a primeira das duas luas de Marte descoberta. Assim como para Fobos, a proximidade entre Marte e Deimos, e a diferença significativa entre suas massas, o planeta exerce uma forte influência na trajetória de um satélite artificial na vizinhança de Deimos. A massa de Deimos é de aproximadamente $1,8 \times 10^{15}$ kg, e orbita Marte com semi-eixo maior de aproximadamente 23 463,2 km, em uma órbita quase circular de excentricidade 0,00033.

Sendo assim, seguindo o estudo apresentado para Fobos, também são apresentados aqui os resultados obtidos aplicando a estratégia para manter o satélite próximo a Deimos por um longo período de tempo, mesmo quando a intensa atração gravitacional de Marte é considerada. Também é apresentado um estudo da magnitude das principais forças perturbadoras capazes de alterar o movimento orbital de um satélite artificial na vizinhança de Deimos, bem como uma análise do comportamento dos elementos orbitais do satélite artificial quando perturbado por tais forças. Tal estudo também pode ser encontrado em Gonçalves et al. 2017a.

Nas Figuras 6.60 a 6.62 é possível ver que o satélite permanece muito perto de Deimos, mas ao longo do tempo está se afastando. Assim como para o caso da estratégia aplicada para manter o satélite artificial próximo a Fobos, isso ocorre porque Deimos e o satélite são perturbados por Marte, mas o satélite também é perturbado por Deimos. Devido à esta perturbação de Deimos, o satélite deixa de ter os elementos keplerianos similares para a lua. Portanto, o distúrbio devido a Marte, somado ao distúrbio devido a Deimos, faz com que a distância entre o satélite e Deimos aumente ao longo do tempo.

Figura 6.59. Órbitas do satélite e de Deimos em torno de Marte.

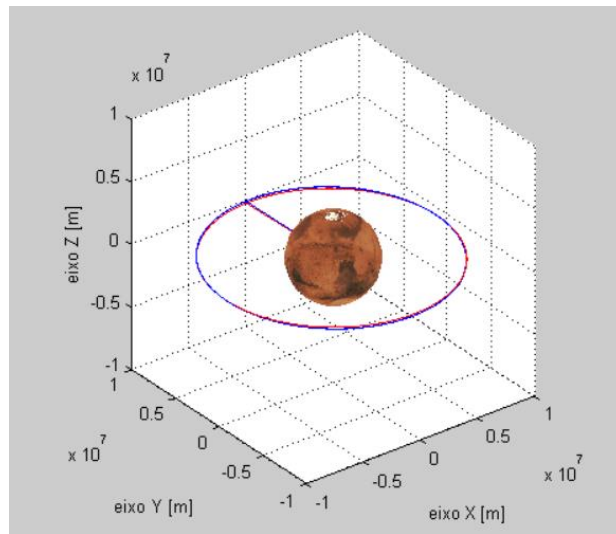


Figura 6.60. Trajetória do satélite na vizinhança de Deimos (5 dias).

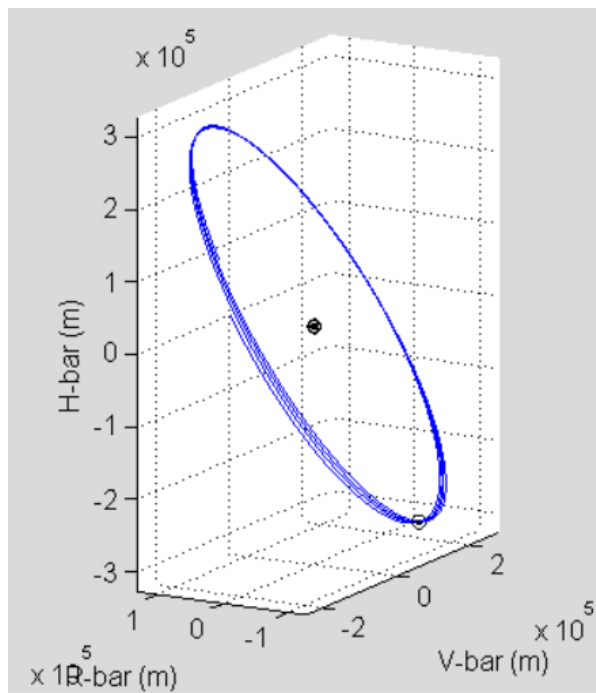


Figura 6.61. Trajetória do satélite na vizinhança de Deimos (30 dias).

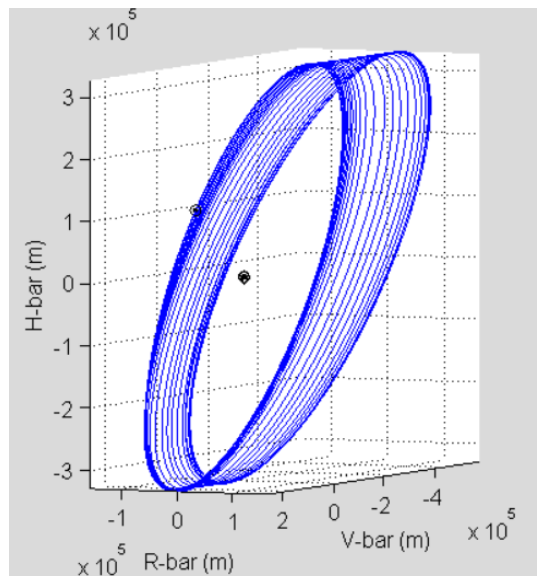
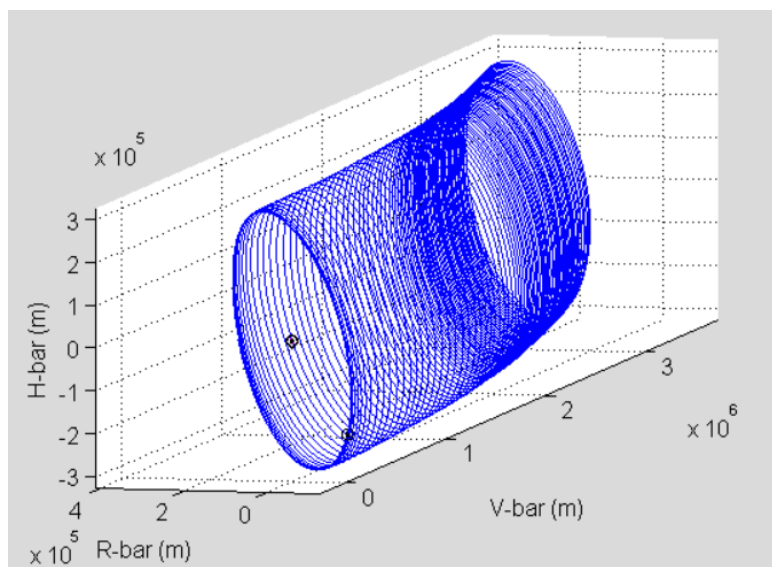


Figura 6.62. Trajetória do satélite na vizinhança de Deimos (100 dias).



Nas Figuras 6.63 a 6.65 são apresentados os elementos keplerianos que caracterizam a órbita do satélite artificial, apenas para o caso de simulação de 100 dias.

Figura 6.63. Desvio no semi-eixo maior (100 dias).

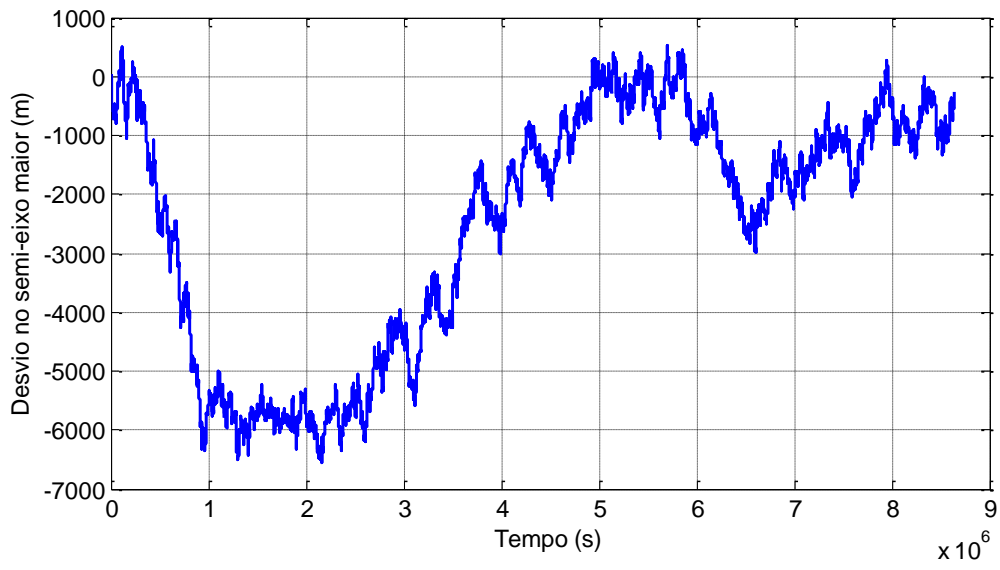


Figura 6.64. Desvio na excentricidade (100 dias).

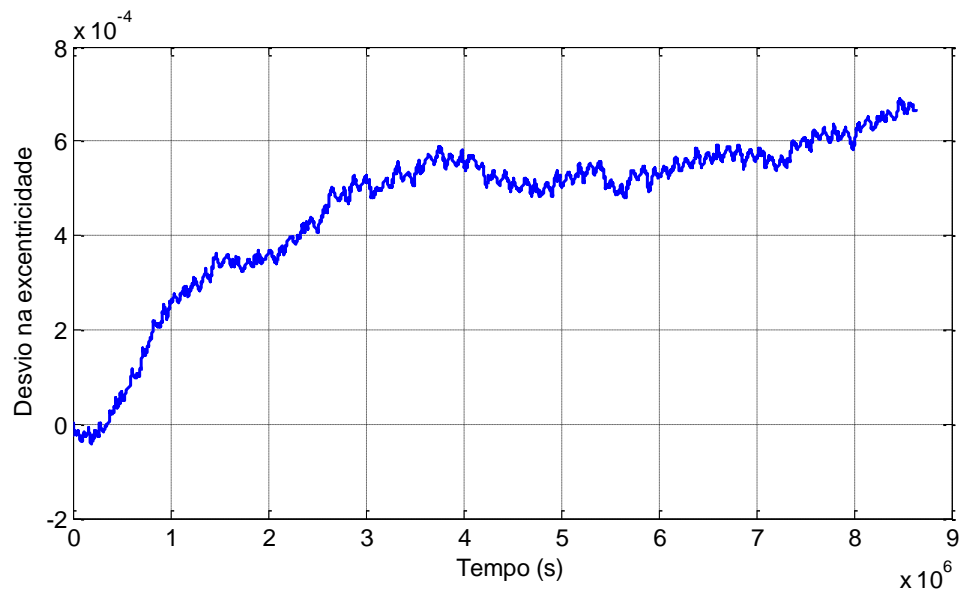
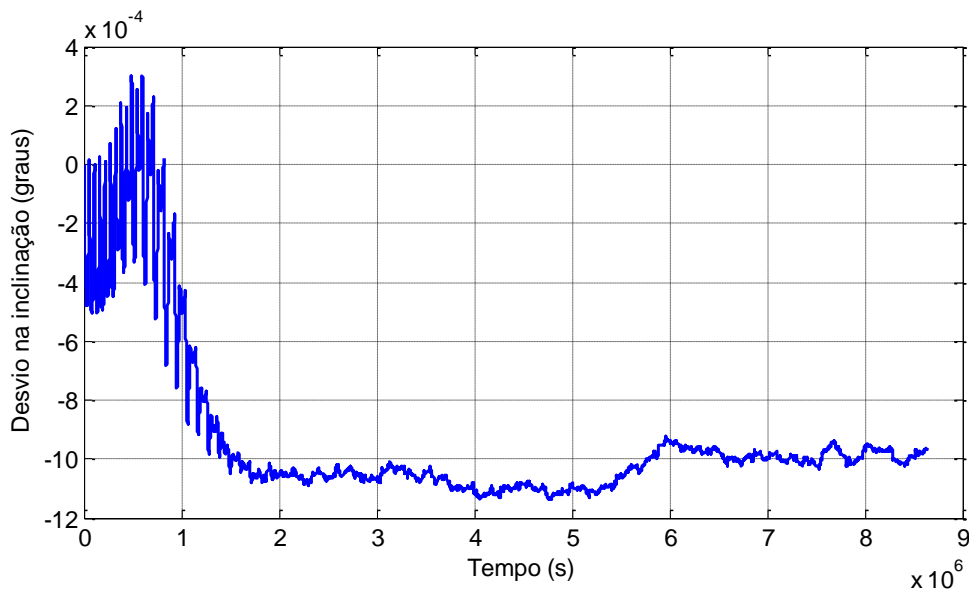


Figura 6.65. Desvio na inclinação (100 dias).



As Figuras 6.63 e 6.65 mostram que o desvio no eixo semi-maior e a inclinação foram mais pronunciados no início da simulação, quando o satélite estava mais perto de Deimos. Devido ao efeito dos distúrbios, à medida que o satélite se afasta de Deimos, o desvio na excentricidade aumenta. Vale ressaltar que os desvios apresentados são a órbita do satélite em torno de Marte, seguindo a abordagem proposta.

As Figuras 6.66 a 6.72 mostram o incremento de velocidade de perturbação devido a Deimos, Marte, a perturbação total e a distância entre a nave espacial e Deimos para o tempo de simulação de 5 e 30 dias e as Figuras 6.74 a 6.78 mostram o incremento de velocidade perturbador devido a Deimos, Marte, Sol, o distúrbio total na nave espacial e a distância entre o satélite e Deimos para o tempo de simulação de 100 dias.

Figura 6.66. Perturbação devido a Deimos (5 dias).

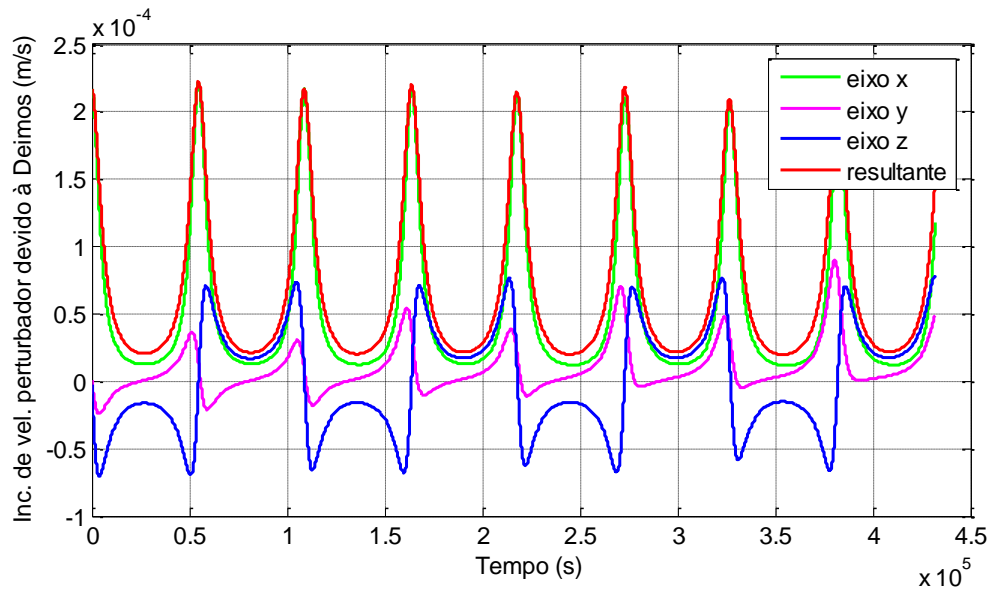


Figura 6.67. Perturbação devido à Marte (5 dias).

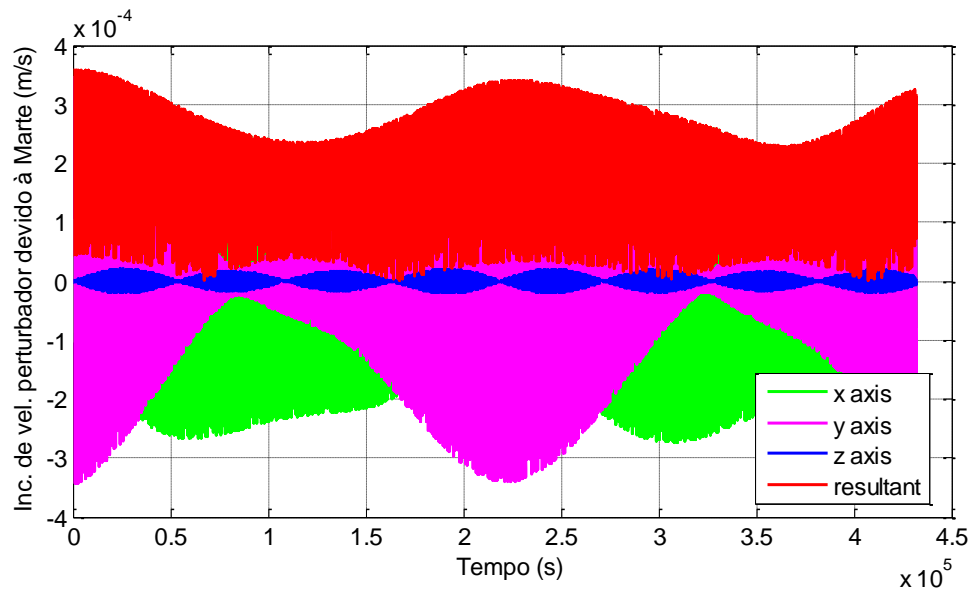


Figura 6.69. Distância entre o satélite artificial e Deimos (5 dias).

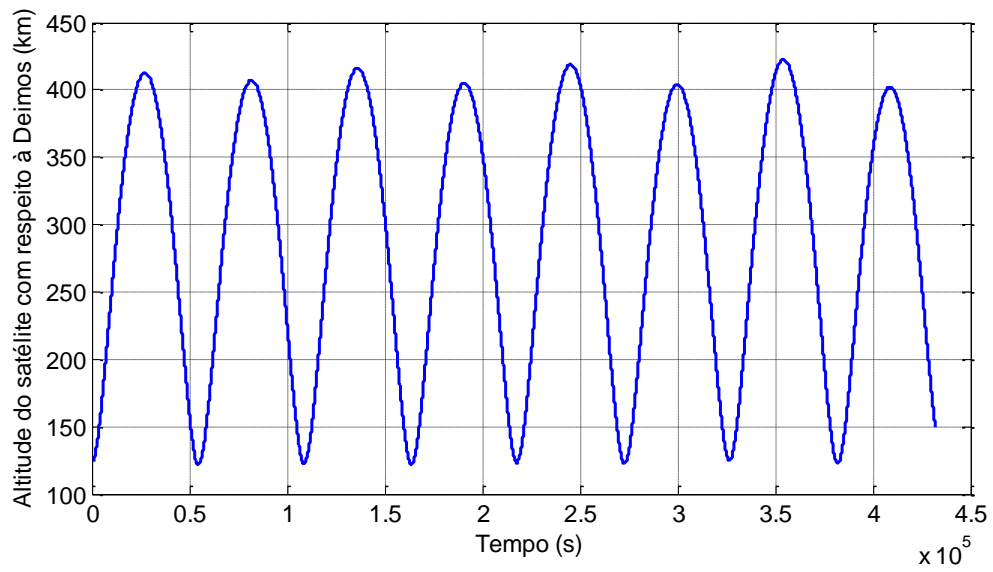


Figura 6.70. Perturbação devido a Deimos (30 dias).

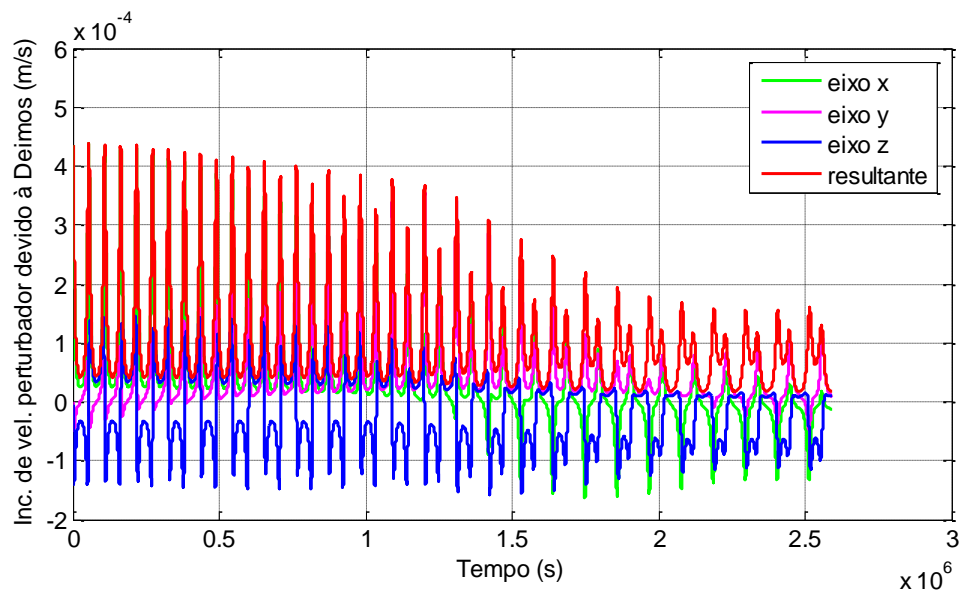


Figura 6.71. Perturbação devido à Marte (30 dias).

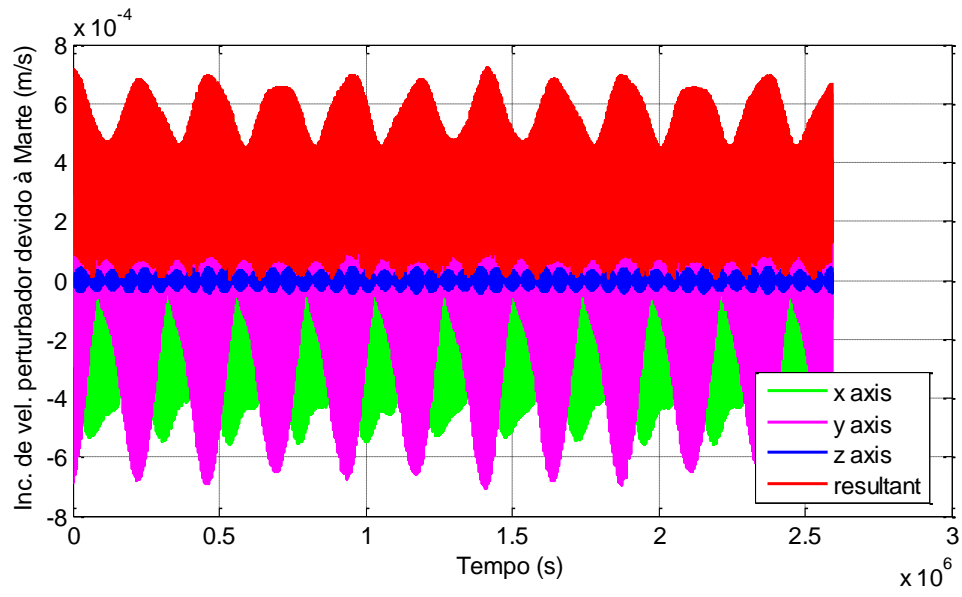


Figura 6.72. Distância entre o satélite artificial e Deimos (30 dias).

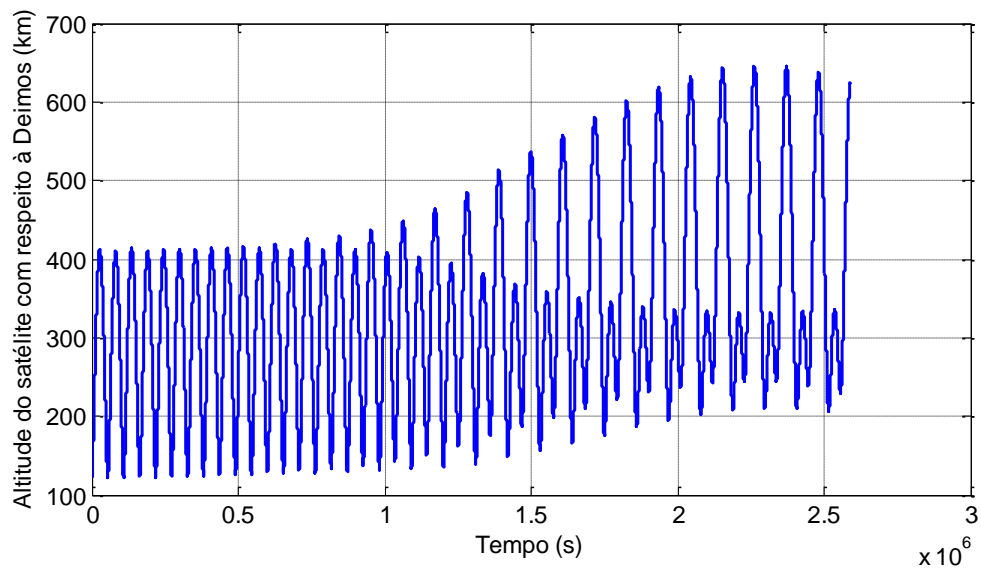


Figura 6.73. Perturbação devido a Deimos (100 dias).

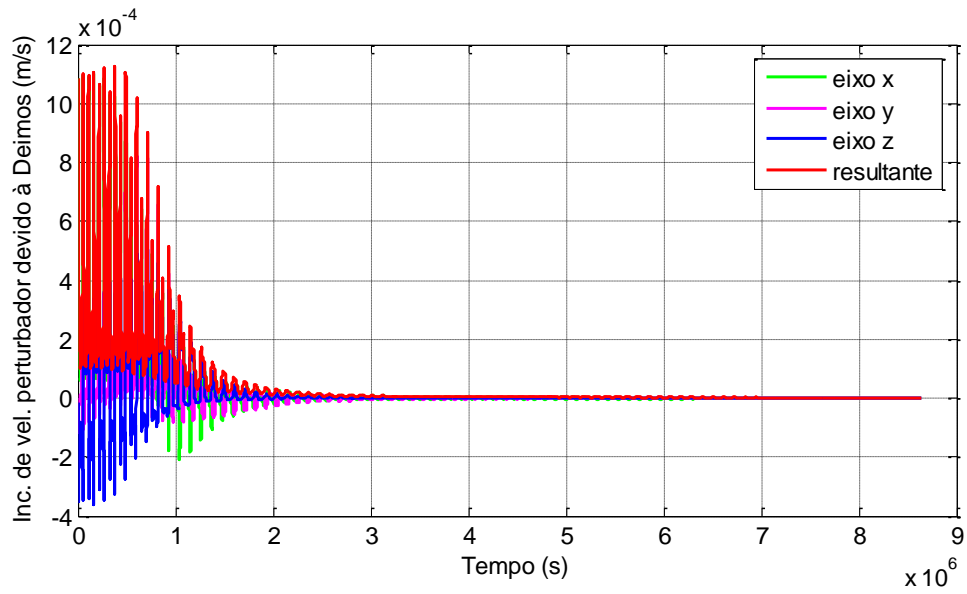


Figura 6.74. Perturbação devido à Marte (100 dias).

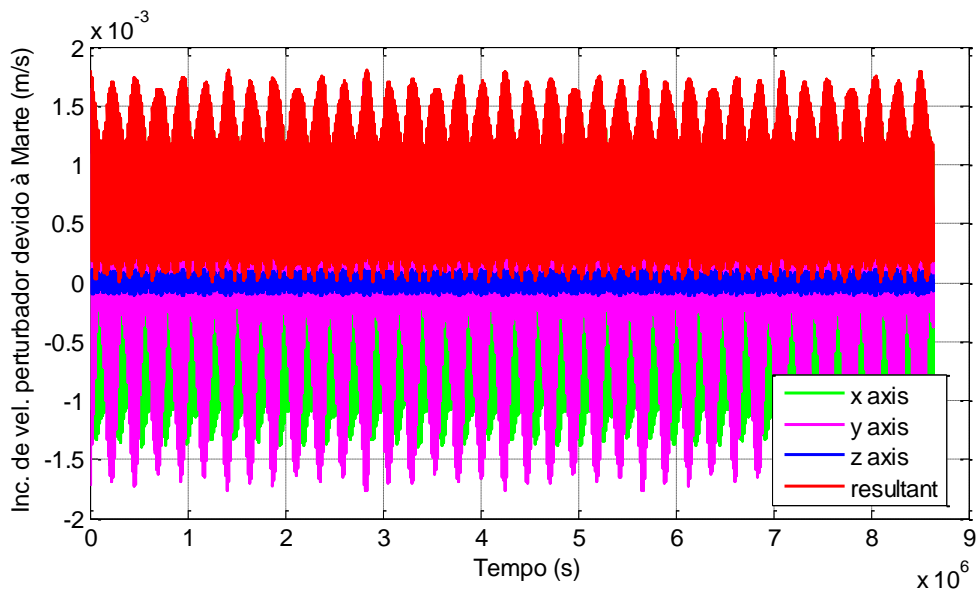


Figura 6.75. Perturbação devido ao Sol (100 dias).

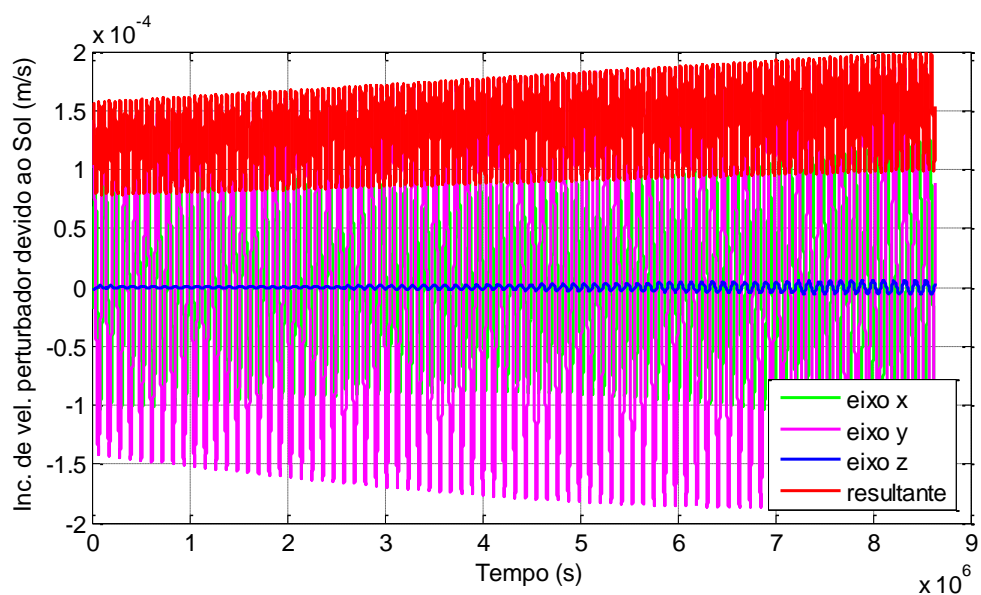
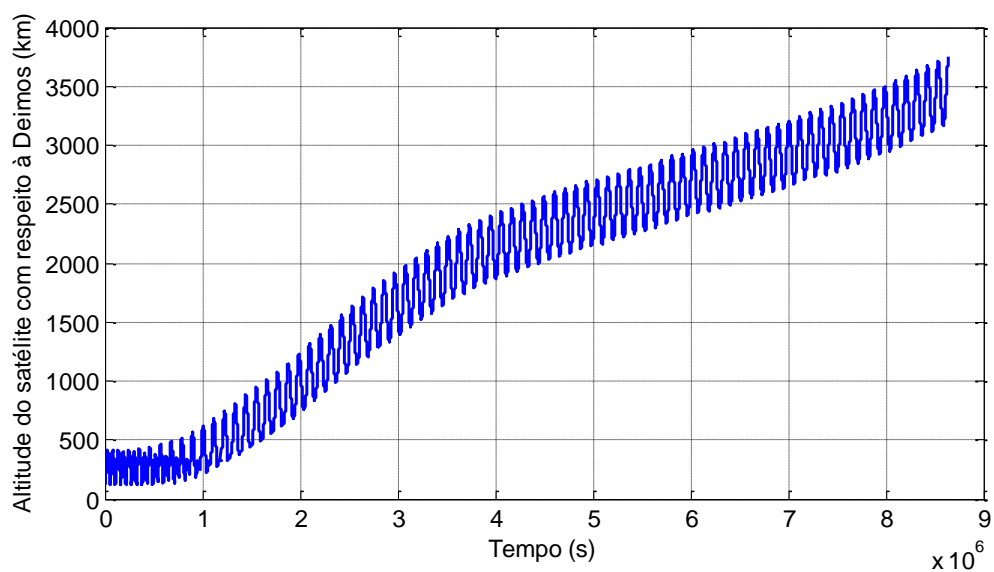


Figura 6.76. Distância entre o satélite artificial e Deimos (100 dias).



Pelas Figuras 6.73 a 6.75 é nota-se diferença na magnitude da perturbação devido ao potencial gravitacional dos corpos estudados. Mesmo com massa significativamente maior, no caso das condições iniciais estudadas, Marte exerce menos influência do que Deimos. No entanto, essa diferença não é suficiente para manter a nave espacial orbitando Deimos indefinidamente, e a soma dos distúrbios faz com que os elementos orbitais

evoluam ao longo do tempo e a espaçonave distancie-se da lua, como se vê nas Figuras 6.76 e 6.72. O comportamento oscilatório do potencial gravitacional de Marte (Figuras 6.67, 6.71 e 6.74) também é notável. Isso ocorre porque são considerados valores altos de grau e ordem na expansão dos harmônicos esféricos do planeta. Quando as Figuras 6.73 e 6.76 (e as figuras relativas para o caso de 5 e 30 dias) são comparadas, é possível observar que existem picos de maior perturbação devido ao potencial gravitacional de Deimos. Isto ocorre devido ao fato de que há momentos de aproximação entre a nave espacial e Deimos.

7 MANOBRAS ORBITAIS

O interesse no Sistema de Marte e seus satélites é atualmente significativo, com uma série de missões planejadas, seja tanto para o envio de robôs quanto para o envio de pessoas. Até a presente data, apenas a missão japonesa *Martian Moon eXploration* (MMX) está programada para visitar Fobos e/ou Deimos, cujo lançamento está previsto para 2024. Porém, antes desta data outras missões estão agendadas para visitar Marte. Estas missões poderiam, por exemplo, acomodar um pequeno satélite que objetive uma missão secundária visando as luas e obtenha informações e imagens importantes, a partir de um baixo custo e risco.

Esta situação motivou o estudo a seguir, que apresenta uma possibilidade de manobra que permite que o satélite visite Fobos e Deimos em uma cadência regular, a partir de uma órbita estável e cíclica. O impulso aplicado sobre o satélite para a realização da manobra é calculado a partir da solução do problema de Lambert. Um estudo similar pode ser encontrado em Sabitbek e Gunter (2017), que analisaram o movimento ressonante entre Marte, Fobos e Deimos, sugerindo possibilidades de manobras

Para testar e avaliar o modelo desenvolvido para se obter a solução do TPBVP foi feito o cálculo de uma manobra ótima que transfere o satélite de uma órbita em torno de Marte para uma órbita próxima a Fobos. A partir da solução foi obtido o incremento de velocidade necessário para a realização da manobra de transferência. Foram selecionadas como condição inicial e final as órbitas menos perturbadas da altitude de 400 km da superfície de Marte e 30 km da superfície de Fobos, obtidas no Capítulo 5.

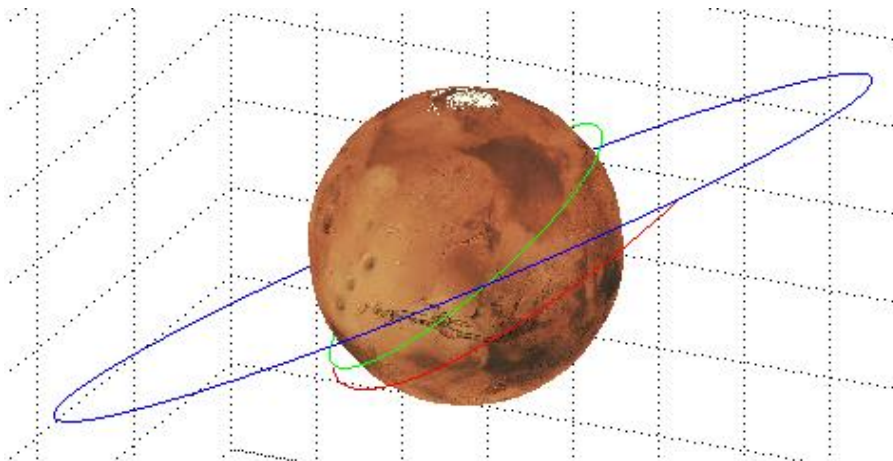
Sendo assim, utilizando o problema de Lambert foi feito um cálculo que idealiza uma manobra bi-impulsiva em relação ao consumo de combustível, a partir da seleção da manobra com incremento mínimo de velocidade (Tabela 7.1).

Tabela 7.1. Incremento de velocidade aplicado sobre o satélite para executar a manobra.

| Primeiro impulso (m/s) | Segundo impulso (m/s) |
|---|---|
| [160.903783772091, 953.113815596214, -531.327839346932] | [160.903783772091, 953.113815596214, -531.327839346932] |

O impulso calculado usando o problema de Lambert foi inserido como parâmetro de entrada no STRS para realizar a manobra de transferência que conecta a órbita inicial do satélite em torno de Marte até a órbita final perto de Fobos, como pode ser visto na Figura 7.1.

Figura 7.1. Manobra de transferência



Foi considerada aqui uma manobra impulsiva, que é, na verdade, uma idealização, já que é considerada uma mudança instantânea na velocidade e, dessa forma, a capacidade dos propulsores deve ser infinita, conforme mostrado por Rocco (2017c).

Os resultados obtidos para os elementos orbitais que caracterizam a órbita do satélite artificial e as forças perturbativas devido ao potencial gravitacional de Marte e de Fobos são apresentados nas Figuras 7.2 a 7.4.

Figura 7.2. Desvio no semi-eixo maior

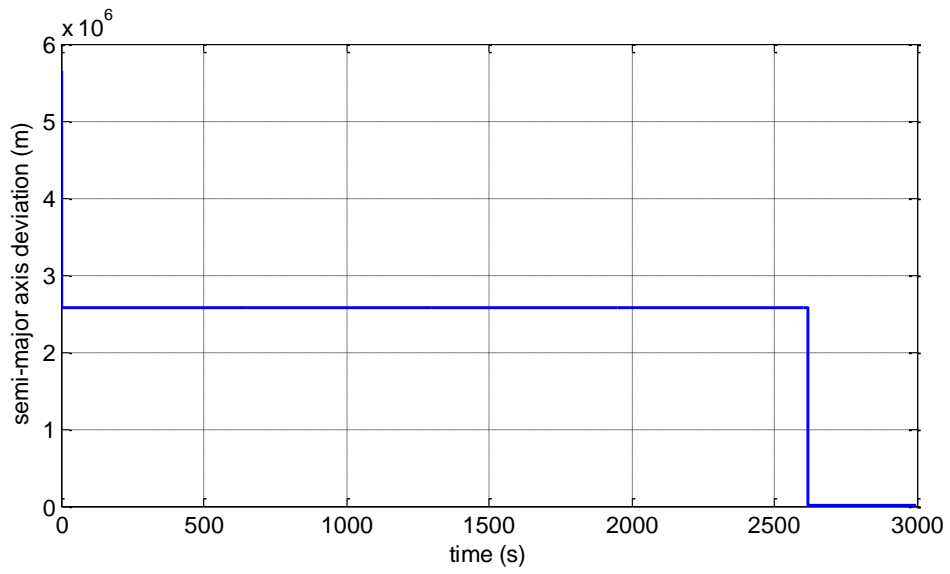


Figura 7.3. Desvio na excentricidade

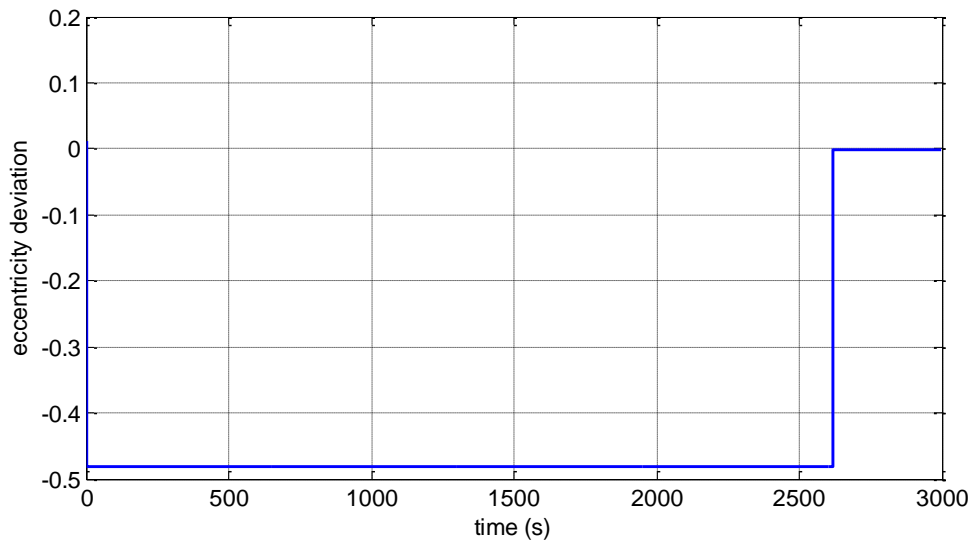
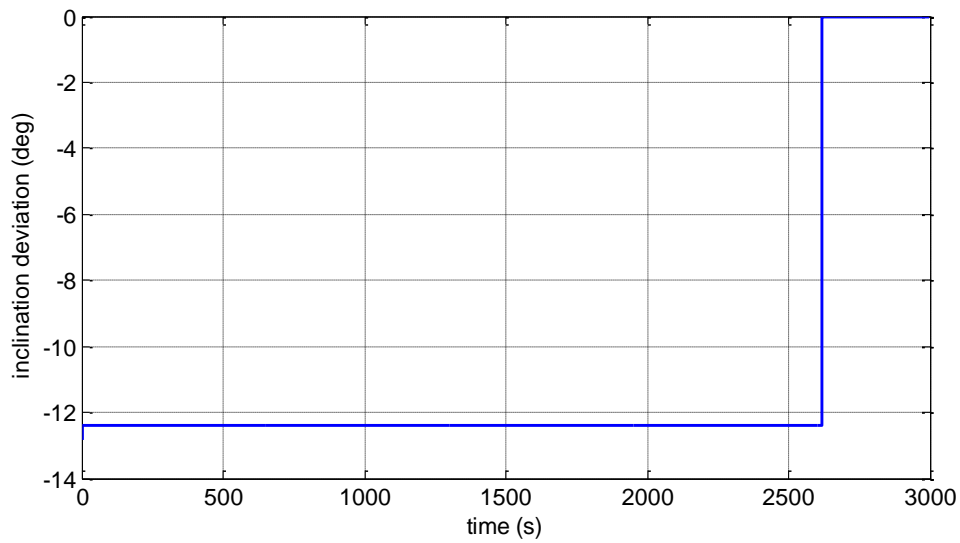


Figura 7.4. Desvio na inclinação



A partir das Figuras 7.2 a 7.4, em que são apresentadas a variação no semi-eixo maior, excentricidade e inclinação, é possível perceber que uma manobra de transferência foi realizada. A Figura 7.2 apresenta uma variação brusca no semi-eixo maior, caracterizando um aumento significativo na altitude do satélite.

A distância entre o satélite e a superfície de Fobos é mostrada na Figura 7.5 e as forças perturbadoras devido ao potencial gravitacional de Marte e Fobos nas Figuras 7.6 e 7.7.

Figura 7.5. Distância entre o satélite e Fobos

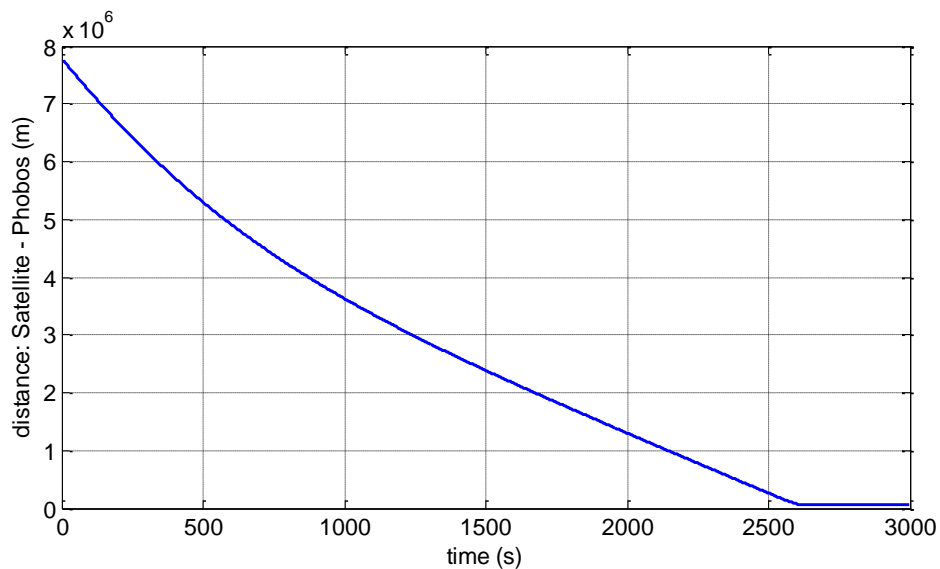


Figura 7.6. Perturbação devido ao potencial gravitacional de Marte

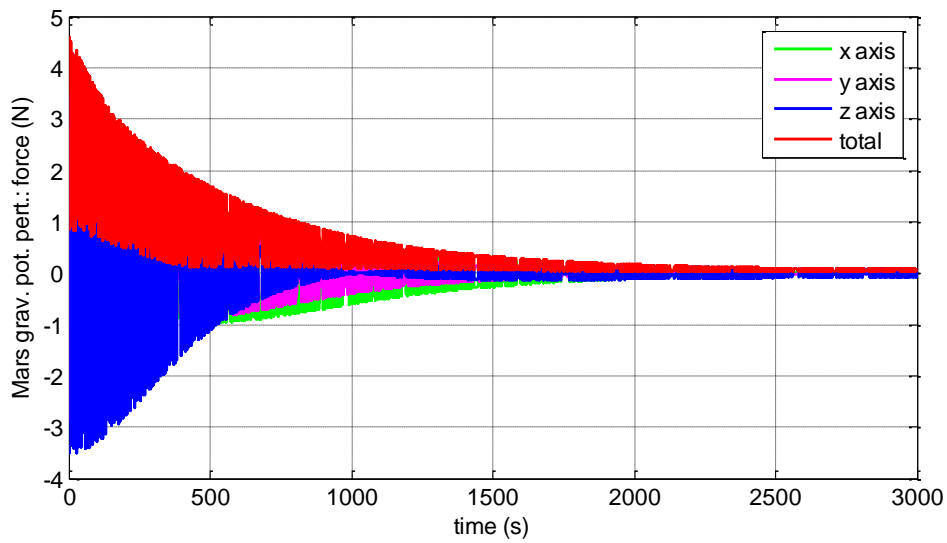
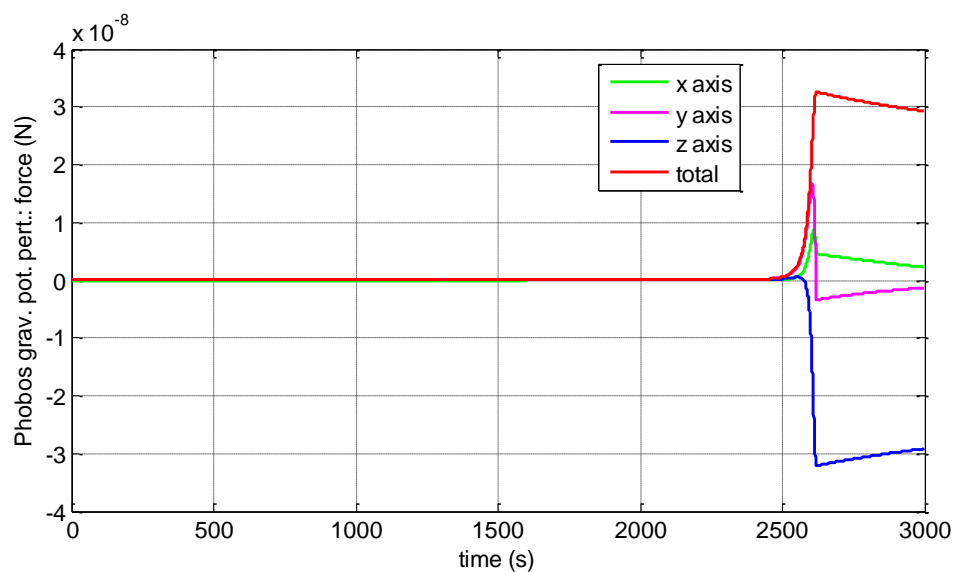


Figura 7.7. Perturbação devido ao potencial gravitacional de Fobos



A partir das Figuras 7.5 a 7.7 é notável que o satélite está inicialmente em uma órbita baixa ao redor de Marte e após a realização da manobra se aproxima de Fobos, ou seja, inicialmente a perturbação devido ao potencial gravitacional de Marte é mais intensa e vai diminuindo conforme o satélite se afasta do planeta. Ao contrário, a perturbação de

Fobos é menor antes da manobra, e vai se tornando mais intensa conforme o satélite se aproxima da lua.

A maioria dos estudos anteriores se concentra quase que exclusivamente na exploração de Fobos, ou trata Fobos e Deimos como casos separados. Seguindo a mesma ideia de aplicar a solução do problema de Lambert para transferir o satélite de uma órbita inicial para uma órbita final, será apresentada uma possibilidade de órbitas estáveis e cíclicas em que o satélite artificial visita ambas as luas em uma cadência regular. Tais órbitas podem ser utilizadas para observar as luas de perto, fotografar, coletar dados e realizar experimentos. A partir delas também é possível planejar um pouso sobre a superfície de Fobos ou Deimos.

Fobos e Deimos realizam com Marte um movimento síncrono, uma vez que seus períodos orbitais são 7,64 e 30,12 horas, respectivamente. Sendo assim, as luas se apresentam naturalmente em ressonância 4:1, que permite o cálculo de todas as órbitas possíveis que teriam ressonância de movimento médio com Fobos e Deimos. Tais órbitas são denominadas DROs (*Double Resonant Orbits*), que são órbitas com movimento médio ressonante com Fobos e Deimos sob as seguintes condições:

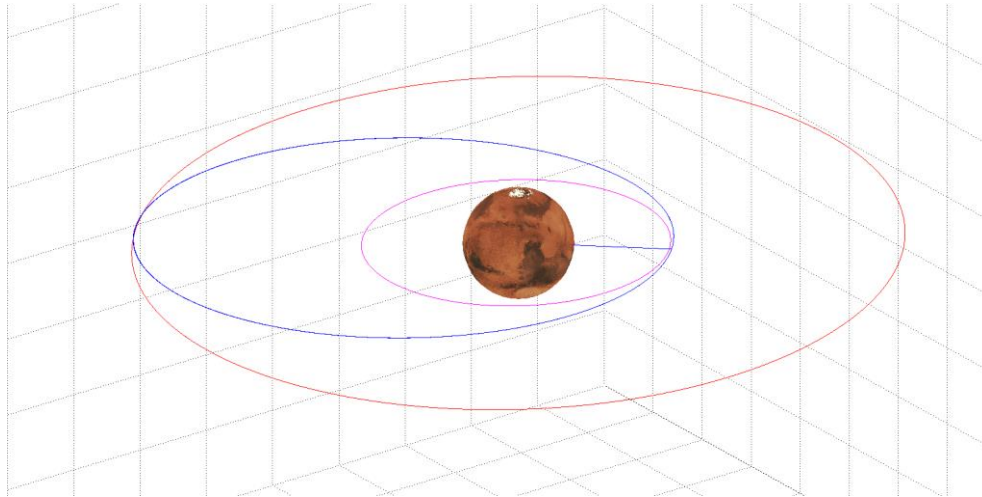
- O periapside da DRO é igual ao semi-eixo maior de Fobos;
- O apoapside da DRO é igual ou maior que o semi-eixo maior de Deimos.

A partir dos resultados encontrados com as Equações 7.1 a 7.9, as condições iniciais, apresentadas na Tabela 7.2, foram inseridas no STRS e os resultados da simulação são apresentados nas Figuras 8 a 19.

Tabela 7.2. Condições iniciais do satélite

| | |
|------------------------|---------------------------------|
| Semi-eixo maior (m) | 16419600 |
| Excentricidade | 0.428975127286901 |
| Inclinação (graus) | 1.093800140079840 |
| Asc. reta do nodo asc. | $356993008427543 \times 10^2$ |
| Arg. periapside | $7.928102422206435 \times 10^1$ |

Figura 7.8. Movimento de Fobos e Deimos em uma órbita de ressonância dupla.



Na Figura 7.8, a trajetória rosa representa o movimento de Fobos ao redor de Marte, a trajetória vermelha o movimento de Deimos ao redor de Marte e a trajetória azul o movimento do satélite artificial. A partir dela é possível observar os momentos de aproximação entre o satélite e as luas de Marte.

As Figuras 7.9 a 7.10 apresentam o comportamento dos elementos orbitais ao longo do tempo. Vale lembrar que o referencial do sistema está localizado no centro de massa de Marte.

Figura 7.9. Semi-eixo maior

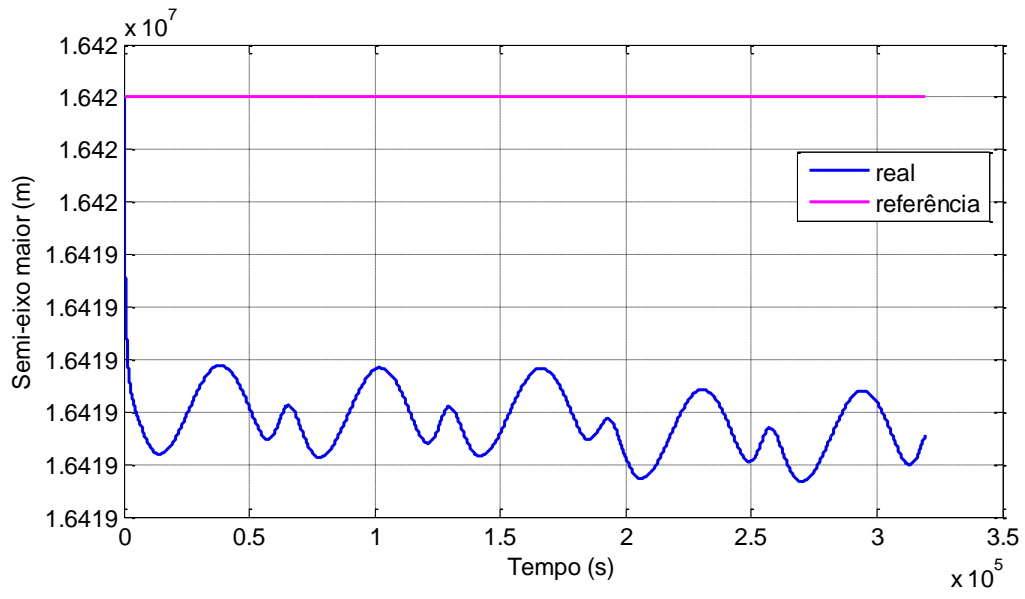


Figura 7.10. Excentricidade

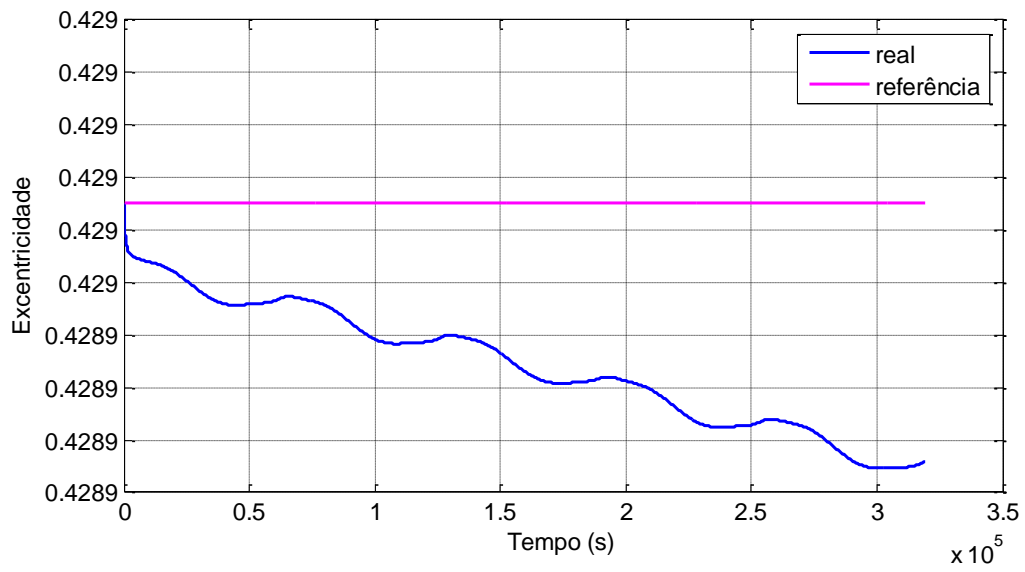
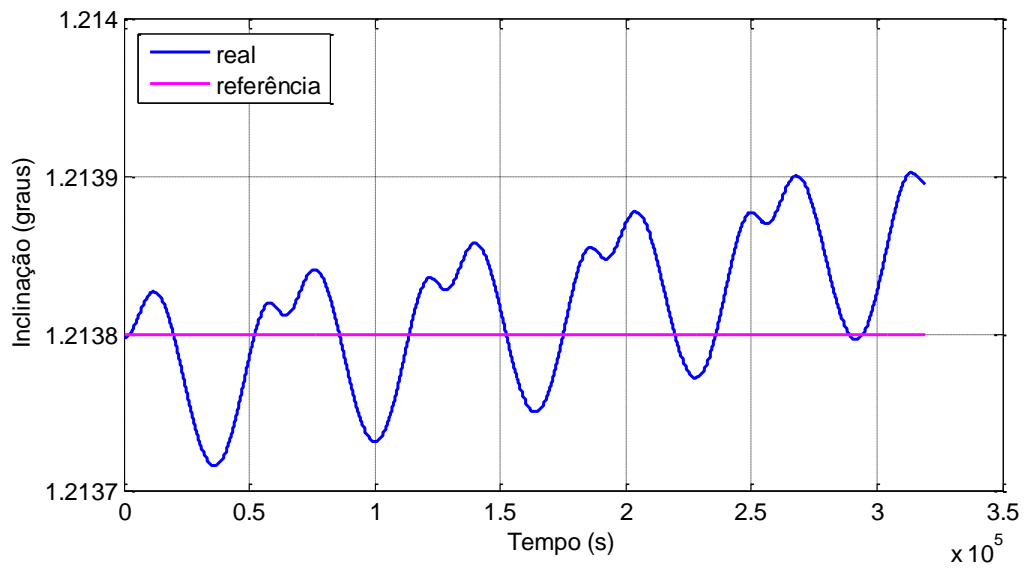


Figura 7.11. Inclinação



As Figuras 7.12 a 7.14 mostram a distância entre o satélite e Marte, o satélite e Fobos e o satélite e Deimos, respectivamente.

Figura 7.12. Distância entre o satélite e Marte

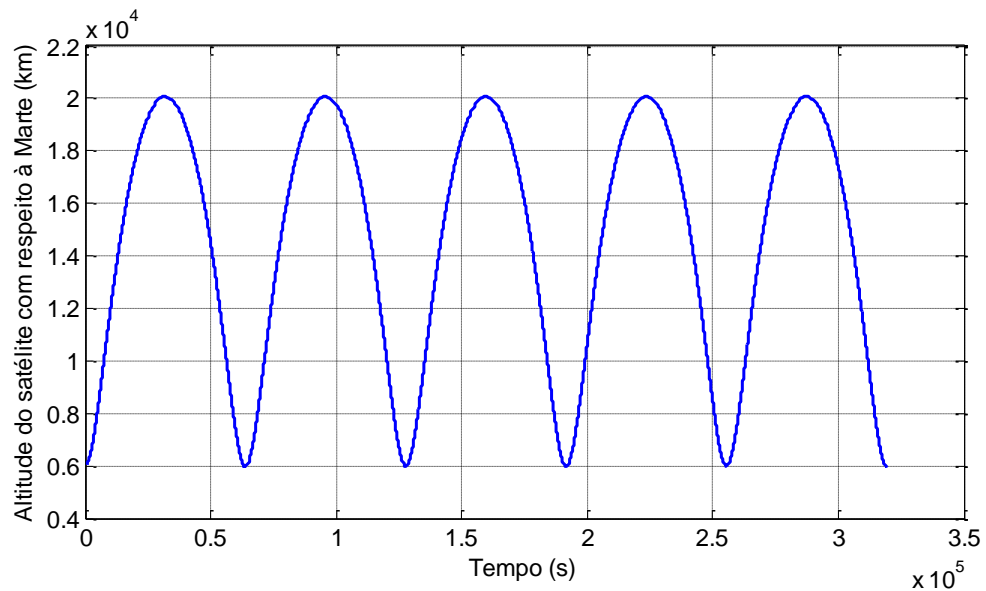


Figura 7.13. Distância entre o satélite e Fobos

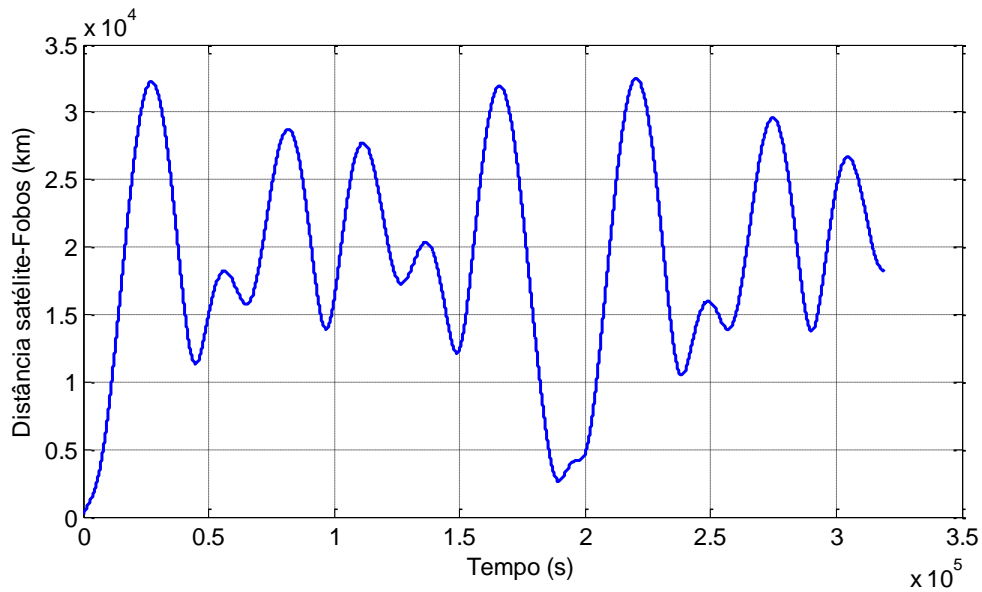
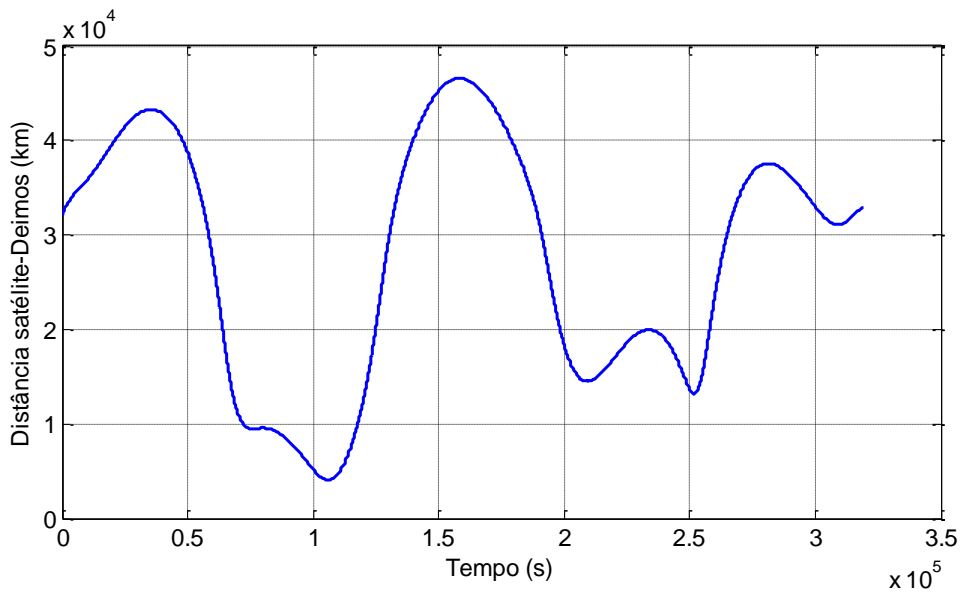


Figura 7.14. Distância entre o satélite e Deimos



A Figura 7.12 (altitude com respeito à Marte) mostra que o satélite artificial está realizando uma órbita elíptica excêntrica ao redor de Marte. Já as Figuras 7.13 e 7.14 mostram que o satélite apresenta momentos de aproximação e afastamento de cada uma das luas, movimento de acordo com o objetivo da manobra. Os momentos de maior aproximação de Fobos acontecem no início da simulação (o satélite começa no periapside

de Fobos) e no tempo pouco antes de 2×10^5 s. Já com relação à Deimos, o momento de maior aproximação é no tempo pouco depois de 1×10^5 s.

As perturbações sobre o satélite devido à Marte, Fobos e Deimos, atração gravitacional do Sol e pressão de radiação solar são apresentadas nas Figuras 7.15 a 7.19.

Figura 7.15. Incremento de velocidade perturbador devido à Marte

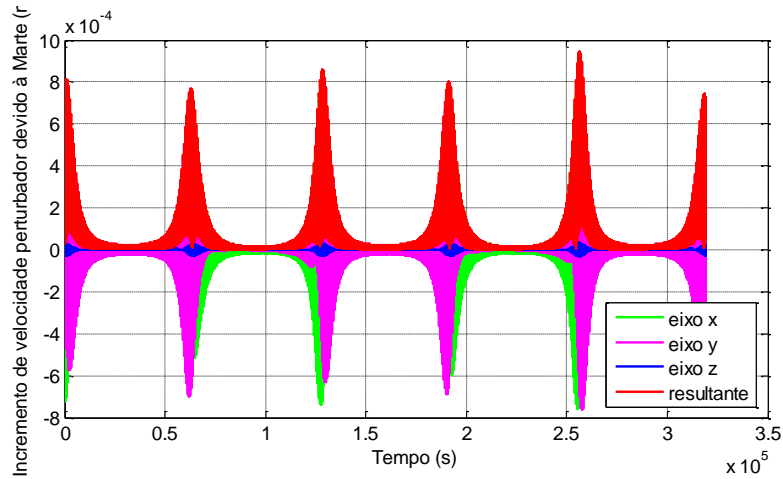


Figura 7.16. Incremento de velocidade perturbador devido à Fobos

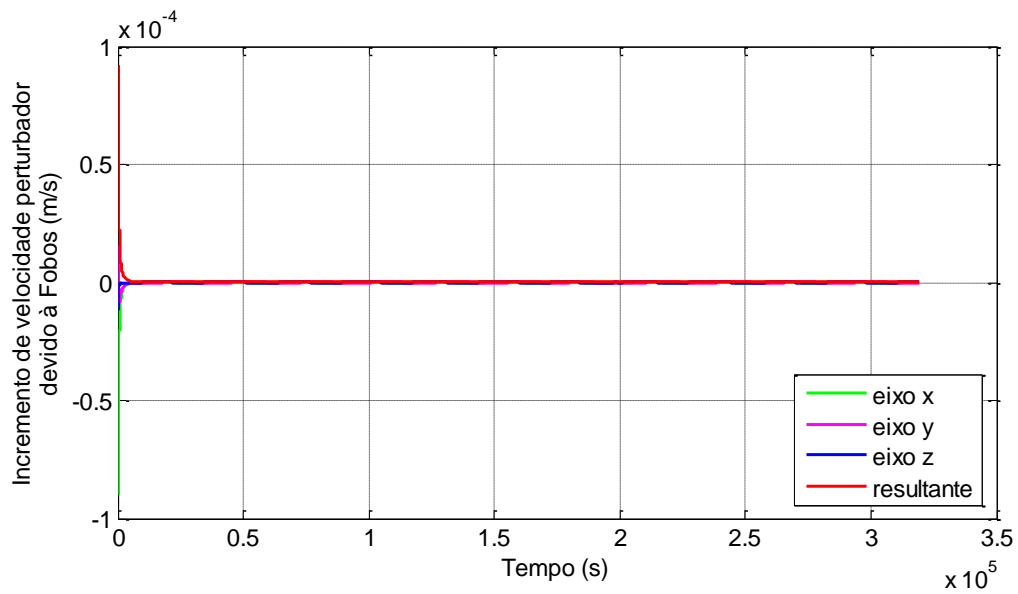


Figura 7.17. Incremento de velocidade perturbador devido à Deimos

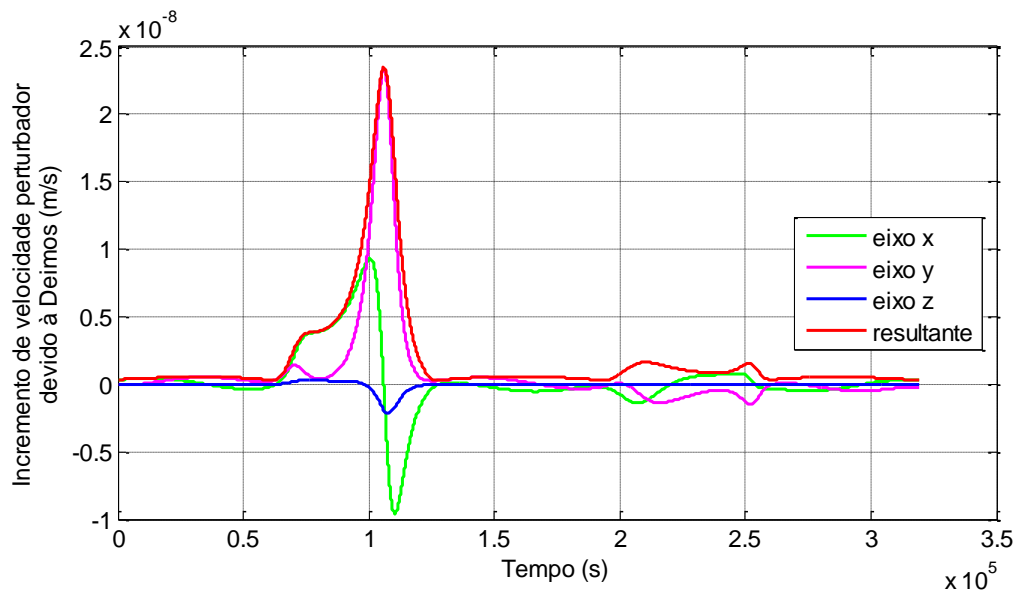


Figura 7.18. Incremento de velocidade perturbador devido ao Sol

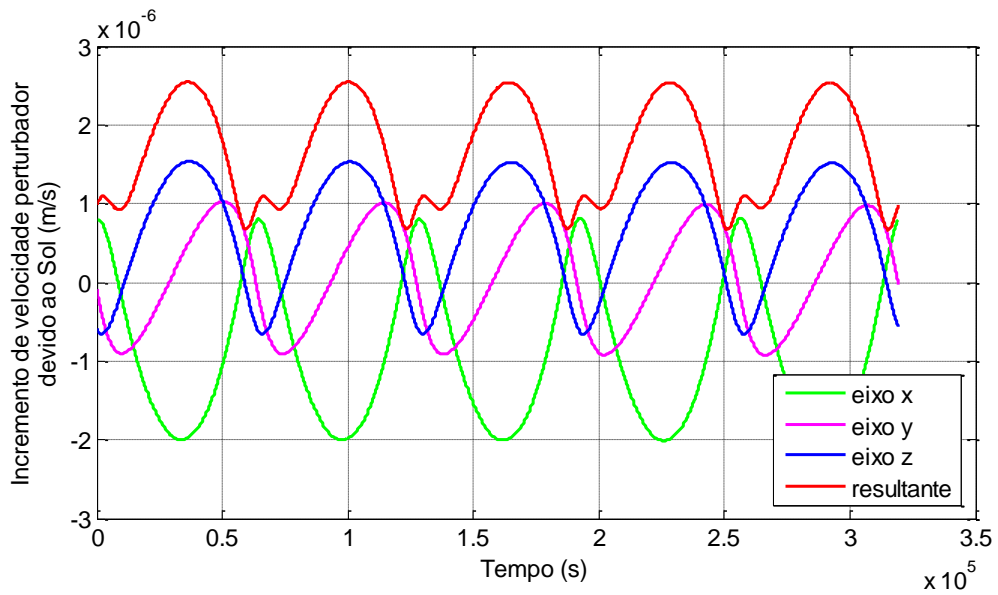
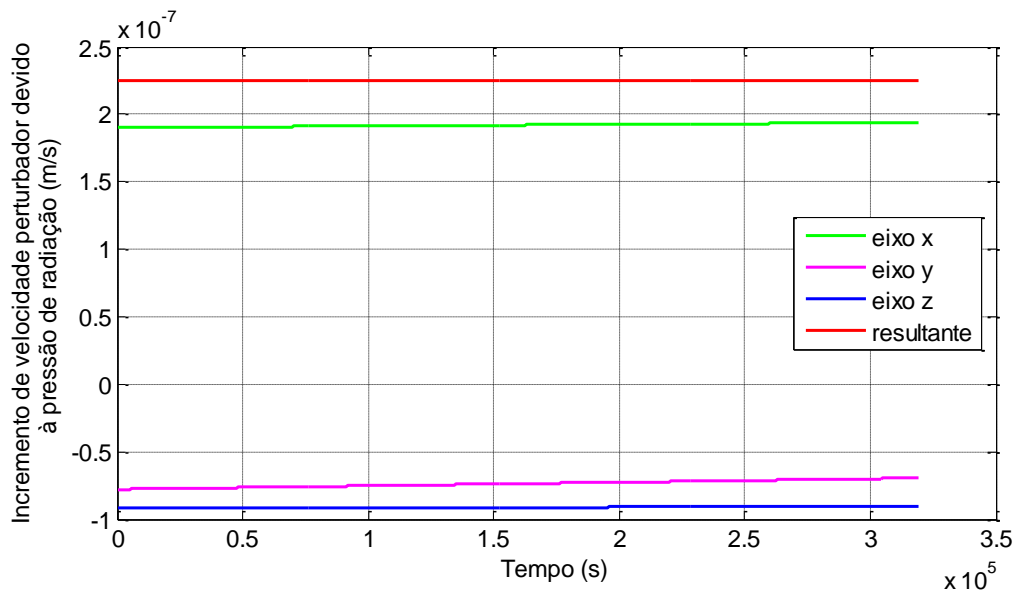


Figura 7.19. Incremento de velocidade perturbador devido à pressão de radiação solar



As Figuras 7.12, 7.13 e 7.14 estão respectivamente de acordo com as Figuras 7.15, 7.16 e 7.17, uma vez que os momentos de maior aproximação entre Marte, Fobos e Deimos são os momentos de maior intensidade da força perturbadora devido ao respectivo corpo. Vale observar novamente a intensa magnitude da perturbação de Marte sobre o satélite. Mesmo nos momentos de maior aproximação entre o satélite artificial e Deimos (e conseqüentemente os momentos em que o satélite se encontra mais afastado de Marte), a perturbação mais significativa é devido ao potencial gravitacional de Marte.

Também é possível observar que todas as perturbações agindo em conjunto impedem que o satélite se aproxime das luas em uma cadência perfeitamente regular. Além disso, quando o veículo se aproxima do periapside da órbita a perturbação de Marte é mais intensa e faz com que a órbita evolua. Conforme o veículo se aproxima de cada uma das luas ele também vai sofrendo uma perturbação mais significativa das mesmas, o que também contribui para que a perturbação sobre o satélite se intensifique.

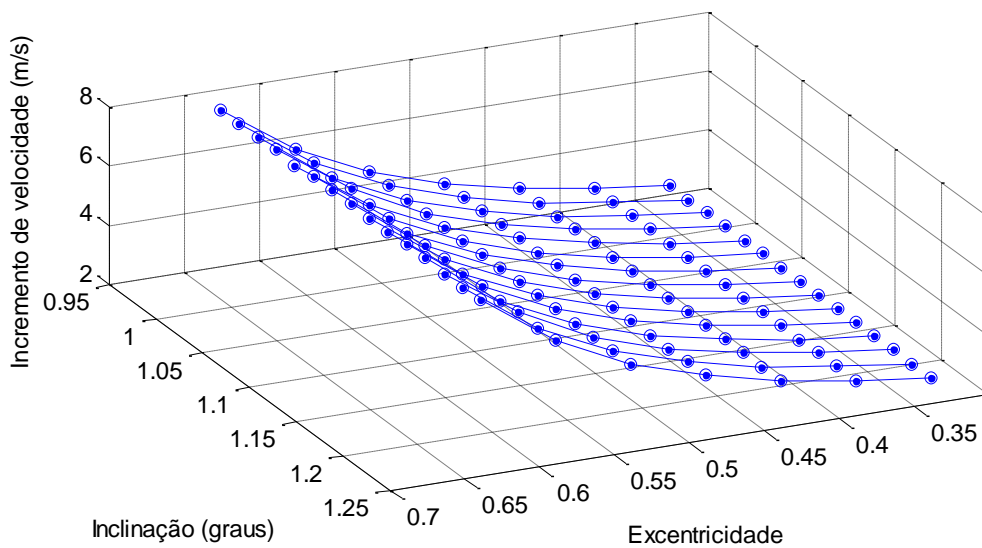
Os resultados encontrados em Sabitbek e Gunter (2017) representam uma situação que seria encontrada em um sistema ideal, uma vez que não são consideradas todas as principais perturbações que afetam a órbita do satélite, nem o potencial gravitacional de Marte e das luas são considerados com uma precisão significativa. No caso dos resultados

apresentados por Sabitbek e Gunter (2017), o satélite artificial visita cada uma das luas em uma cadência regular perfeita.

Porém, como visto com os resultados obtidos neste estudo, uma cadência perfeita só seria possível caso fossem realizadas manobras de correção, como as apresentadas no início deste estudo. Neste caso fica clara a necessidade de um sistema de controle atuando sobre a órbita do satélite artificial

Com o objetivo de analisar a variação na perturbação total sobre o satélite, foram realizadas variações na excentricidade e na inclinação do satélite, para a mesma manobra de transferência calculada. A excentricidade foi variada de $e - 0,01$ até $e + 0,2$, de 0,05 em 0,05, sendo e o valor para a excentricidade calculado como condição inicial do satélite, e a inclinação de $i - 0,14$ até $i + 0,14$, de 0,02 em 0,02, sendo i o valor para a excentricidade calculado como condição inicial do satélite. Tais valores limites de variação de inclinação foram adotados seguindo a condição de que o satélite artificial, ao se aproximar das luas, não poderia se manter a uma distância de mais de 50 km, já que é esta a distância máxima entre o satélite e as luas estipulada pelas missões projetadas para visitar Fobos e Deimos. Os resultados obtidos para o somatório de todas as perturbações são apresentados na Figura 7.20.

Figura 7.20. Incremento de velocidade perturbador com variação de excentricidade e inclinação



Observando a Figura 7.20 é possível perceber que, cada variação de e e i , por menor que seja, altera o valor da perturbação total que atua sobre o satélite artificial, fazendo com que essa análise seja necessária no projeto de uma missão real que vise estudar o sistema composto por Marte Fobos e Deimos. Quando são considerados valores de excentricidade menores do que e , o satélite não chega a alcançar a órbita Deimos, apenas se aproxima da lua, como pode ser observado na Figura 7.21. Já quando são considerados valores de excentricidade maiores do que e , o satélite passa da órbita de Deimos, ou seja, ele cruza a órbita da lua duas vezes, como pode ser observado na Figura 7.22. Em geral, as órbitas menos perturbadas são aquelas com excentricidade maior do que e , e as mais perturbadas as com excentricidade maior do que e . Porém, dependendo dos objetivos da missão, as opções em que o satélite não cruza a órbita de Deimos ou que cruza mais de uma vez são necessárias ou suficientes.

Figura 7.21. Manobra com valores menores que e .

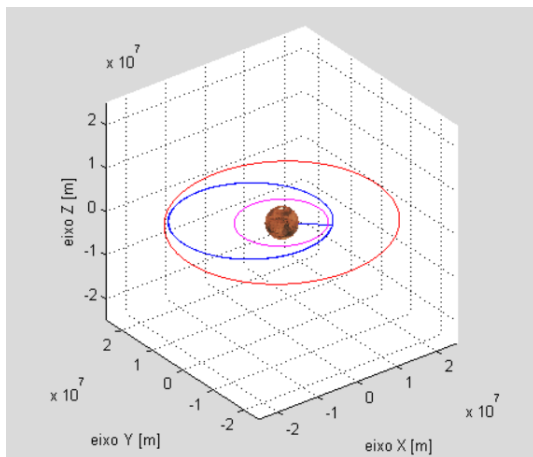
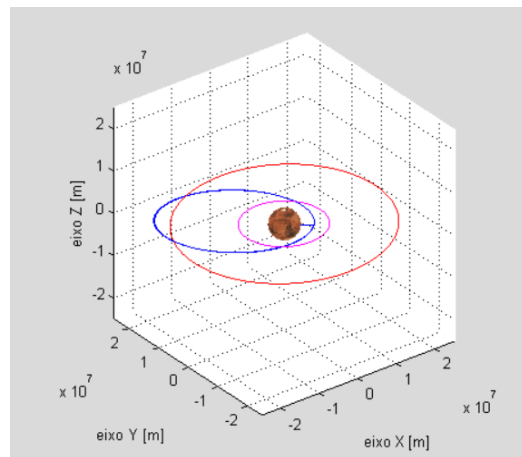


Figura 7.22. Manobra com valores maiores que e .



Vale ressaltar a importância de serem consideradas todas as perturbações simultaneamente e com a maior precisão possível, a fim de se aproximar o máximo possível do movimento real de um satélite artificial realizando trajetórias na vizinhança de Fobos e Deimos.

8 CONCLUSÕES

Com os estudos realizados no presente trabalho, é mostrado que não é possível orbitar Fobos, de forma natural, durante um longo período de tempo quando considerada a intensa atração gravitacional de Marte, o campo gravitacional não central gerado pela lua, a atração gravitacional de Deimos e do Sol e a pressão de radiação solar. Uma alternativa para manter o satélite orbitando Fobos por um longo período de tempo é utilizar um sistema de controle capaz de minimizar os efeitos das perturbações sobre a órbita do satélite ou utilizar estratégias similares às utilizadas para manobras de *rendezvous* e *docking*, em que o satélite na verdade orbita Marte, porém com condições iniciais semelhantes aos elementos orbitais de Fobos. Com esta estratégia é possível manter o satélite próximo à lua por algum tempo, porém as forças perturbativas alteram o movimento do satélite fazendo com que ele se afaste de Fobos ao longo do tempo.

O primeiro estudo apresentou uma análise das principais forças perturbadoras capazes de alterar a órbita de um satélite artificial na vizinhança de Marte, Fobos e Deimos. Os resultados mostraram a existência de órbitas mais e menos perturbadas tanto pelo potencial gravitacional de Marte quanto pelas demais forças consideradas, mostrando que este deve ser um ponto importante a ser analisado no projeto de uma missão espacial real. Os valores de inclinação e ascensão reta do nodo ascendente estudados mostraram que a variação de tais parâmetros pode alterar significativamente a perturbação sofrida pelo satélite artificial. Dentre os casos estudados, em todas as altitudes foram encontradas as inclinações de 90° e 40° mais e menos perturbadas, respectivamente. Com este estudo foi verificada a significativa diferença entre o potencial gravitacional de Marte e suas luas, o que resulta em grande dificuldade de manter um satélite artificial orbitando Fobos ou Deimos por um longo período de tempo.

O estudo feito para analisar o efeito de cada termo do potencial gravitacional sobre a órbita de um satélite artificial em Marte mostrou que os harmônicos esféricos de grau e ordem 2 para a expansão da solução do potencial gravitacional de Marte dominam o movimento, além de não ser possível estabelecer uma sequência hierárquica entre os termos estudados, fazendo com que seja necessário utilizar sempre a máxima precisão dos modelos utilizados. Foram encontrados valores negativos neste estudo, evidenciando que alguns termos atuam no sentido contrário à resultante anterior, ajudando assim a manter a órbita do satélite artificial próximo à órbita kepleriana. Também foi possível

verificar que a perturbação sobre um satélite artificial devido à distribuição não uniforme de massa de Marte é consideravelmente variável, o que, no caso de uma órbita pré determinada, exige atuação intensa do sistema de controle para o satélite em sua trajetória de referência.

Este trabalho também contribuiu no esforço de analisar tentativas de órbitas ao redor de Fobos. Foram apresentados alguns casos para exemplificar que, independente da condição inicial, após pouco tempo de simulação sempre existe escape ou colisão do satélite com a superfície da lua. Porém, foi apresentada uma alternativa para manter um satélite artificial próximo às luas de Marte. Para essa abordagem foi considerado simultaneamente o potencial gravitacional de Marte expandido em harmônicos esféricos até grau e ordem 80 e o potencial gravitacional da lua a partir do método dos poliedros. Além disso, também foram consideradas a atração gravitacional do Sol e da outra lua e a pressão de radiação solar.

Tanto a análise inicial das perturbações, quanto a seleção de trajetórias na vizinhança de Fobos e Deimos, bem como a aproximação do satélite e da superfície da lua são significativamente importantes para a realização de uma missão, seja objetivando sobrevôo ou até mesmo pouso. Tal abordagem com tal precisão apresenta uma contribuição relevante para as pesquisas que já foram e vem sendo realizadas sobre temas relacionados.

Por fim, foi proposta uma manobra orbital visando aproximar o satélite de cada uma das luas em uma cadência regular, com o objetivo de possibilitar a otimização de uma missão com destino a uma das luas, ou até mesmo a Marte. Até hoje a maioria dos trabalhos encontrados na literatura concentra seus estudos apenas em Fobos e, raramente, apenas em Deimos. A proposta é, então, concentrar a atenção nas duas luas simultaneamente.

O presente trabalho contribui com as pesquisas que vem sendo realizadas sobre Marte e seus satélites naturais, que seguramente terá continuidade, a partir do estudo de diferentes tópicos que são relevantes para a dinâmica do sistema Marte, Fobos, Deimos e satélite. Além disso, também existe importante contribuição com relação aos modelos desenvolvidos e implementados no STRS, que possuem um caráter geral, possibilitando que outros sistemas de corpos sejam estudados, por exemplo planetas com mais luas e asteroides com luas.

Conceitos de *rendezvous* e *docking*, normalmente aplicados em problemas de controle, foram aplicados a um problema de mecânica celeste, e foram obtidos resultados satisfatórios. Essa aplicação representa uma inovação com relação às pesquisas realizadas até hoje. Para isso, são necessários dois simuladores orbitais atuando em paralelo, o que também não tinha sido desenvolvido até então. Outra importante inovação apresentada é considerar várias perturbações atuando simultaneamente sobre o satélite artificial e sobre as luas de Marte, utilizando diferentes modelos, já que o potencial gravitacional de Marte é calculado por meio dos harmônicos esféricos e o potencial gravitacional de Fobos e Deimos por meio dos poliedros e concentrações de massas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ARANTES JUNIOR, G.; ROCCO, E. M. ; FONSECA, I. M., STEPHAN, T. Far and proximity maneuvers of a constellation of service satellites and autonomous pose estimation of customer satellite using machine vision. **Acta Astronautica**, v. 66, p. 1493-1505, 2010.
- ARAUJO, N. C. **Controle de trajetórias ao redor de Júpiter visando a aproximação das luas galileanas**. 2017. Dissertação (Mestrado em Engenharia e Tecnologia Espaciais) - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais. São José dos Campos, 2017.
- ARAUJO, N. C., ROCCO, E. M. Mapping the Galilean moons disturbance acting on a spacecrafts trajectory. **Journal of Physics: Conference Series**, v. 911, p. 012010, 2017.
- BALMINO, G.; MOYNOT, B.; VALES, N. Gravity field model of Mars in spherical harmonics up to degree and order eighteen. In: INTERNATIONAL COLLOQUIUM ON MARS, 3., 1982, Pasadena, CA. **Journal of Geophysical Research**, v. 87, nov. 1982.
- BALMINO, G. Gravitational potential harmonics from shape of an homogeneous body. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, v.60, p.331-364, 1994.
- BATE, R.R.; MUELLER, D.D.; WHITE, J.E. **Fundamentals of astrodynamics**. New York: Dover Publications, 1971.
- BATTIN, R. H. **An introduction to the mathematics and methods of astrodynamics**. Reston: Reston, 1999.
- BOND, V. R.; ALLMAN, M. C. **Modern astrodynamics: fundamentals and perturbation methods**. New Jersey: Princeton University Press, 1996.
- BURSA, M. Long-term variations in Phobos' gravity field. **Bulletin of the Astronomical Institutes of Czechoslovakia**, v. 39, n. 5, p. 289-295, 1988.
- CHOBOTOV, V.A. **Orbital mechanics**. Washington, DC: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1991. 365p.
- FEHSE, W. **Automated rendezvous and docking of spacecraft**. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.
- COSTA FILHO, A. C. **Análise do acoplamento entre o controle de atitude e de trajetória durante manobras orbitais de empuxo contínuo**. 2010. Dissertação (Mestrado em Engenharia e Tecnologia Espaciais) - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2010.
- COSTA FILHO, A. C. **Análise da transição dos modos de operação do controle de atitude**. 2015. Tese (Doutorado em Engenharia e Tecnologia Espaciais) - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2015.

GASKELL, R.W. **Gaskell phobos shape model V1.0**. Washington: NASA Planetary Data System, 2011.

GIL, P. J. S.; SCHWARTZ, J. Simulations of quasi-satellite orbits around Phobos. **Journal of Guidance and Control Dynamics**, v.33, n.3, p.901–914, 2010.

GONÇALVES, L. D. **Manobras orbitais de satélites artificiais lunares com aplicação de empuxo contínuo**. 2013. Dissertação (Mestrado em Engenharia e Tecnologia Espaciais) - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2013.

GONÇALVES, L. D.; ROCCO, E. M.; MORAES, R. V. Orbital disturbance analysis due to the lunar gravitational potential and deviation minimization through the trajectory control in closed loop. **Journal of Physics: Conference Series**, v. 465, p. 012013, 2013a.

GONÇALVES, L. D.; ROCCO, E. M.; MORAES, R. V.; PRADO, A. F. B. A. Estudo dos efeitos do potencial lunar em trajetórias de veículos espaciais. In: CONFERÊNCIA BRASILEIRA DE DINÂMICA, CONTROLE E APLICAÇÕES,(DINCON), 2013. **Anais...** 2013b. v. 1.

GONÇALVES, L. D.; ROCCO, E. M.; MORAES, R. V. Evaluation of a spacecraft trajectory deviation due to the lunar Albedo. In: INTERNATIONAL CONGRESS OF MECHANICAL ENGINEERING (COBEM), 22., 2013, Ribeirão Preto. **Proceedings...** 2013c. v. 1. p. 1.

GONÇALVES, L. D.; ROCCO, E. M.; MORAES, R. V.; KUGA, H. K. Uncertainty analysis of the lunar gravitational field for simulation of a spacecraft trajectory using Kalman filter. In: IBERIAN LATIN-AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING (CILAMCE), 35., 2014, Fortaleza – CE. **Proceedings...** 2014a.

GONÇALVES, L. D.; ROCCO, E. M.; MORAES, R. V. Estudo dos efeitos da pressão de radiação solar e do albedo lunar no movimento orbital de satélites artificiais.. In: CONGRESSO NACIONAL DE ENGENHARIA MECÂNICA (CONEM), 8., 2014, Uberlândia – MG. **Anais...** 2014b.

GONÇALVES, L. D.; ROCCO, E. M.; MORAES, R. V.; KUGA, H. K. Kalman filter application to mitigate the errors in the trajectory simulations due to the lunar gravitational model uncertainty. **Journal of Physics: Conference Series**, v. 641, p. 012029, 2015a.

GONÇALVES, L. D.; ROCCO, E. M.; MORAES, R. V. Analysis of the influence of orbital disturbances applied to an artificial lunar satellite. **Journal of Physics: Conference Series**, v. 641, p. 012028, 2015b.

- GONÇALVES, L. D.; ROCCO, E. M.; MORAES, R. V. Efeitos dos termos individuais do potencial gravitacional lunar no movimento de satélites artificiais ao redor da superfície da lua. In: CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL (CNMAC), 35., 2015. **Anais..** 2015. v. 3.
- GONÇALVES, L. D.; ROCCO, E. M.; MORAES, R. V. Orbital maneuvers of a lunar artificial satellite, under the action of gravitational and non-gravitational perturbation forces. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON SPACE FLIGHT DYNAMICS, 25., 2015, Munich - Germany. **Proceedings...** 2015. v. 1.
- GONÇALVES, L. D.; ROCCO, E. M.; MORAES, R. V.; PRADO, A. F. B. A. Effects of the individual terms of the lunar potential in the motion of satellites around the moon. **International Journal of Theoretical and Applied Mechanics**, v. 1, p. 20-29, 2016a.
- GONÇALVES, L.D.; ROCCO, E.M.; MORAES, R.V. Estudo do campo gravitacional de Marte considerando a expansão dos harmônicos esféricos até grau e ordem 80. In: CONGRESSO NACIONAL DE ENGENHARIA MECÂNICA, 2016, Fortaleza, Ceará. **Anais...** 2016b.
- GONÇALVES, L. D.; ROCCO, E. M.; MORAES, R. V. Trajetórias na vizinhança de Fobos visando sobrevoo e aproximação. In: COLÓQUIO BRASILEIRO DE DINÂMICA ORBITAL, 18., 2016, Águas de Lindóia. **Anais...** 2016c. v. 1. p. 126-127.
- GONÇALVES, L. D.; ROCCO, E. M.; MORAES, R. V. Trajetórias de um satélite artificial nas vizinhanças de Deimos, perturbadas pelo campo gravitacional não central da lua, pelo potencial gravitacional de Marte, do Sol e de Fobos. In: COLÓQUIO BRASILEIRO DE DINÂMICA ORBITAL, 18., 2016, Águas de Lindóia. **Anais...** 2016c. v. 1. p. 127-128.
- GONÇALVES, L. D.; ROCCO, E. M.; MORAES, R. V. Orbital trajectories in deimos vicinity considering perturbations of gravitational origin. **Journal of Physics: Conference Series**, v. 911, p. 012022, 2017.
- GONÇALVES, L. D.; COSTA, M. L. G. T. X., MORAES, R. V.; ROCCO, E. M. Investigation of critical inclination and Sun-synchronous orbit around the moons of Saturn. In: AAS/AIAA SPACE FLIGHT MECHANICS MEETING, 27., 2017, San Antonio. **Proceedings...** 2017b.
- HARRIS, M.; LYLE, R. **Spacecraft radiation torques**. Washington: NASA, 1969.
- HOPKINS, J. B.; PRATT, W D. Comparison of deimos and phobos as destinations for human exploration and identification of preferred landing sites. In: AIAA SPACE CONFERENCE & EXPOSITION, 2011, Long Beach, California. **Proceedings...** 2011.

HU, X.; JEKELI, C. A numerical comparison of spherical, spheroidal and ellipsoidal harmonic gravitational field models for small non-spherical bodies: examples for the Martian moons. **Journal of Geodesy**, v.89, p.159–177, 2015. DOI 10.1007/s00190-014-0769-x.

JOFFRE, E.; ZAMARO, M.; SILVA, N.; RICHARDSON, B.; SIMPLICIO, P.; RICHARDSON, B. Landing on small bodies trajectory design, robust nonlinear guidance and control. In: AAS/AIAA SPACE FLIGHT MECHANICS MEETING, 27., 2017, San Antonio. **Proceedings...** 2017.

GRANZIERA JÚNIOR, F. **Mapeamento de conflitos na determinação e controle de atitude e estratégia para sua mitigação considerando erros dos sensores e atuadores e requisitos de missão**. 2015. 187p. Tese (Doutorado em Engenharia e Tecnologia Espaciais) - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2015.

KAULA, W. M. Theory of satellite geodesy. New York: Dover, 1966.

KONOPLIV, A. S.; YODER, C. F.; STANDISH, E. M.; YUAN, D.; SJOGREN, W. L. A global solution for the Mars static and seasonal gravity, Mars orientation, Phobos and Deimos masses, and Mars ephemeris. **Icarus**, v. 182, Issue 1, p. 23-50, 2006.

KONOPLIV, A.S.; ASMAR, S. W.; FOLKNER, W. M.; KARATEKIN, Ö.; NUNES, D. C.; SMREKAR, S. E.; YODER, C. F.; ZUBER, M. T. Mars high resolution gravity fields from MRO, Mars seasonal gravity, and other dynamical parameters. **Icarus**, v. 211, Issue 1, p. 401-428.

KUCHIK, E. K. The gravitational field of Phobos. **Astronomicheski Vestnik**, v. 24, p. 96-102, 1990.

KUGA, H. K; CARRARA, V.; RAO, K. R. **Satélites Artificiais – Movimento Orbital**. São José dos Campos: INPE, 2011. 103 p. IBI : <8JMKD3MGP7W/3ARJ3NH>. (sid.inpe.br/mtc-m19/2011/11.22.18.25-PUD). Disponível em: <<http://utlib.net/8JMKD3MGP7W/3ARJ3NH>>.

KUZMIN, R. O.; SHINGAREVA, T. V.; ZABALUEVA, E. V.. An engineering model for the Phobos surface. **Solar System Research**, v. 37, Issue 4, p. 266-281, 2003.

LEMOINE, F.G.; SMITH, D.E.; ROWLANDS, D. D.; ZUBER M. T.; NEUMANN, G. A.; CHINN, D. S.; PAVLIS, D. E. An improved solution of the gravity field of Mars (GMM-2B) from Mars Global Surveyor. **Journal of Geophysical Research**, v. 106, 2001.

MAHLER, W. F. C. **Estudo do posicionamento relativo de satélites dispostos em uma formação de voo poliédrica**. 2017. Dissertação (Mestrado em Engenharia e Tecnologia Espaciais) - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais. São José dos Campos, 2017.

- MAHLER, W. F. C.; ROCCO, E. M.; SANTOS, D. P. S. Relative positioning evaluation of a tetrahedral flight formation's Satellites. **Journal of Physics: Conference Series**, v. 911, p012013, 2017.
- MARCELINO, E. W. **Controle de trajetória orbital em manobras de empuxo contínuo de longo prazo**. 2009. Dissertação (Mestrado em Engenharia e Tecnologia Espaciais) - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais. São José dos Campos, 2009.
- MEIRELES, L. G.; ROCCO, E. M. Study of orbital transfers with time constraint and fuel optimization. **Journal of Physics: Conference Series**, v. 911, p. 012014, 2017.
- MORAES, R. V. **Ação da pressão de radiação solar e do arrasto atmosférico sobre órbitas de satélite artificiais**. 1978. Tese (Doutorado) – Instituto Tecnológico da Aeronáutica, São José dos Campos, 1978.
- MOTA, M. L. **Modelo do campo gravitacional de um corpo com distribuição de massa irregular utilizando o método da expansão do potencial em série e determinação de seus coeficientes dos harmônicos esféricos**. 2017. Tese (Doutorado em Engenharia e Tecnologia Espaciais) - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2017.
- NARDIN, A. B. **Análise de manobras de atracação de satélites dotados de manipuladores robóticos**. 2015. Dissertação (Mestrado em Engenharia e Tecnologia Espaciais) - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2015.
- OLIVEIRA, T. C. **Estratégias ótimas para manobras orbitais utilizando propulsão contínua**. 2012. Dissertação (Mestrado em Engenharia e Tecnologia Espaciais) - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2012.
- OLIVEIRA, T. C.; ROCCO, E. M.; PRADO, A. F. B. A.; FERREIRA, J. L. A study of the duration of the passage through the Van Allen belts for a spacecraft going to the Moon. **Journal of Physics: Conference Series**, v. 465, p. 012019, 2013a.
- OLIVEIRA, T. C.; ROCCO; E. M.; FERREIRA, J. L.; PRADO, A. F. B. A. Minimum fuel low-thrust transfers for satellites using a permanent magnet hall thruster. **Mathematical Problems in Engineering**, v. 2013, p. 1-12, 2013b.
- PRADO, A. F. B. A. **Trajетórias espaciais e manobras assistidas por gravidade**. São José dos Campos: INPE, 2001. 171 p. Disponível em: <<http://urlib.net/6qtX3pFwXQZsFDuKxG/DGUpi>>.
- PRADO, A.F.B.A; KUGA, H.K. **Fundamentos de tecnologia espacial**. São José dos Campos: Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, 2001. ISBN: 85-17-00004-8
- QU, M.; MERRILL, R. G.; CHAI, P.; KOMAR, D. R. Optimizing parking orbits for round trip Mars missions. In: AAS/AIAA ASTRODYNAMICS SPECIALIST CONFERENCE, 2017, Washington. **Proceedings...** 2017.

ROCCO, E. M.; PRADO, A. F. B. A.; SOUZA, M. L. O.; BALDO, J. E. J. Optimal bi-impulsive non-coplanar maneuvers using hyperbolic orbital transfer with time constraint. **Journal of Aerospace Engineering, Sciences and Applications**, v. 1, p. 43-50, 2008a.

ROCCO, E. M. Evaluation of the terrestrial albedo applied to some scientific missions. **Space Science Reviews**, v. 151, p. 135-147, 2010.

ROCCO, E. M. Automatic correction of orbital elements using continuous thrust controlled in closed loop. **Journal of Physics: Conference Series**, v. 465, p. 012007, 2013.

ROCCO, E. M.; PRADO, A. F. B. A.; SOUZA, M. L. O. Three-dimensional two-impulsive orbital maneuvers with time limit. **WSEAS Transactions on Applied and Theoretical Mechanics**, v. 8, p. 84-97, 2013a.

ROCCO, E. M.; SOUZA, M. L. O.; PRADO, A. F. B. A. Station keeping of constellations Using multiobjective strategies. **Mathematical Problems in Engineering**, v. 2013, p. 1-15, 2013b.

ROCCO, E. M. Automatic correction of orbital elements using continuous thrust controlled in closed loop. **Journal of Physics: Conference Series**, v. 465, 2013.

ROCCO, E. M. Gravitational disturbances generated by the Sun, Phobos and Deimos in orbital maneuvers around Mars with automatic correction of the semi-major axis. **Journal of Physics: Conference Series**, v. 641, p.1-6, 2015a.

ROCCO, E. M. Maneuvers around jupiter with automatic correction of the trajectory considering gravitational disturbances generated by the Galilean moons: IO, Europa Ganymede and Callisto. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON SPACE FLIGHT DYNAMICS, 25., 2015, Munich, Germany. **Proceedings...** 2015.

ROCCO, E. M.; GONÇALVES, L. D.; DE MORAES, R. V. Trajetórias imersas no campo gravitacional não central de Fobos perturbadas pelas atrações gravitacionais de Marte e do Sol. In: CONGRESSO NACIONAL DE ENGENHARIA MECÂNICA - CONEM, 2016, Fortaleza. **Anais...** 2016.

ROCCO, E. M.; GONÇALVES, L. D.; MORAES, R. V. Trajetórias orbitais em torno de Saturno perturbadas pelas atrações gravitacionais do Sol e de seus nove maiores satélites naturais. In: COLÓQUIO BRASILEIRO DE DINÂMICA ORBITAL, 18., 2016, Águas de Lindóia. **Anais...** 2016. v. 1, p. 71-72.

ROCCO, E. M.; GONÇALVES, L. D. Simulação das trajetórias descritas por um veículo espacial em torno do asteroide 243 Ida e de seu satélite natural Dactyl. In: COLÓQUIO BRASILEIRO DE DINÂMICA ORBITAL, 18., 2016, Águas de Lindóia. **Anais...** 2016. v. 1, p. 72-73.

- ROCCO, E. M.; GONÇALVES, L. D. Simulation of the trajectories described by a space vehicle around the asteroid 243 Ida and its natural satellite Dactyl. **Journal of Physics: Conference Series**, v. 911, p. 012019, 2017.
- ROCCO, E. M.; GONÇALVES, L. D.; DE MORAES, R. V. Orbital trajectories in the vicinity of Saturn's moons Prometheus, Epimetheus, Janus and Pandora. In: **ASTERIODS, COMETS, METEORS - ACM**, 2017, Montevideo. **Anais...** 2017.
- ROCCO, E. M.; GONÇALVES, L. D.; DE MORAES, R. V. Avaliação da influência do potencial gravitacional de Saturno da atração gravitacional do Sol e dos seus treze maiores satélites naturais na órbita de um veículo espacial. In: **CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL**, 37., 2017, São José dos Campos. **Anais...** 2017.
- ROCCO, E. M.; GONÇALVES, L. D.; MORAES, R. V. Orbital maneuvers in the non-central gravitational field of Phobos perturbed by the gravitational attraction due Mars, Sun and Deimos. In: **AAS/AIAA SPACE FLIGHT MECHANICS MEETING**, 27., 2017, San Antonio. **Proceedings...** 2017.
- ROCCO, E. M.; GONÇALVES, L. D. Simulation of the trajectories described by a space vehicle around the asteroid 243 Ida and its natural satellite Dactyl. **Journal of Physics: Conference Series**, v. 911, p. 012019, 2017.
- SABITBEK, B.; GUNTER, B. C. Orbit design for a Phobos-Deimos cypher mission. In: **AAS/AIAA ASTRODYNAMICS SPECIALIST CONFERENCE**, 2017, Washington. **Proceedings...** 2017.
- SAGITOV, M. U.; TADZHIDINOV, K. G.; MIKHAJLOV, B. O. Model of the gravitational field of Phobos. **Astronomicheskii Vestnik**, v.15, n.3, p. 142 – 152, 1981.
- SANTOS, W. G. **Simulação de manobras aeroassistidas de um veículo espacial controlado por placas aerodinâmicas reguláveis e sistema propulsivo**. 2011. Dissertação (Mestrado em Engenharia e Tecnologia Espaciais) - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2011.
- SANTOS, W. G.; KUGA, H. K.; ROCCO, E. M. Application of the Kalman filter to estimate the state of an aerobraking Mmneuver. **Mathematical Problems in Engineering**, v. 2013, p. 1-8, 2013.
- SANTOS, W. G.; ROCCO, E. M. Trajectory control with continuous thrust applied to a rendezvous maneuver. **Journal of Physics: Conference Series**, v. 465, p. 012021, 2013.
- SANTOS, W. G.; ROCCO, E. M.; CARRARA, V. Trajectory control during an aeroassisted maneuver between coplanar circular orbits. **Journal of Aerospace Technology and Management**, v. 6, p. 159-168, 2014.

- SANTOS, W. G. **Discrete multiobjective optimization applied to the spacecraft actuators command problem and tested in a hardware-in-the-loop rendezvous simulator**. 2015. Tese (Doutorado em Engenharia e Tecnologia Espaciais) - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2015.
- SANTOS, W. G.; ROCCO, E. M.; BOGE, T. Design of a linear time-invariant control system based on a multiobjective optimization approach. **Matemática Aplicada e Computacional**, v. 2015, p. 1, 2015a.
- SANTOS, W. G.; ROCCO, E. M.; BOGE, T.; BENNINGHOFF, H.; REMS, F. Multi-objective optimization applied to real-time command problem of spacecraft thrusters. **Journal of Spacecraft and Rockets**, v. 52, p. 1407-1416, 2015b.
- SANTOS, W. G.; ROCCO, E. M.; BOGE, T.; BENNINGHOFF, H.; REMS, F. Hardware-in-the-loop rendezvous tests of a novel actuators command concept. **Journal of the Astronautical Sciences**, v. 63, p. 287-307, 2016.
- SILVA, M. R. **Estudo de uma missão espacial aos pontos colineares lagrangianos no sistema Terra-Lua**. 2017. Tese (Doutorado em Engenharia e Tecnologia Espaciais) - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2017.
- SILVA, M. R.; ROCCO, E. M. Analysis of the passage of a spacecraft between the Van Allen belts considering a low and high solar activity. **Journal of Physics: Conference Series**, v. 911, p. 012005, 2017.
- SZEBEHELY, V. **Theory of orbits**. New York: Academic Press, 1967.
- VENDITTI, F. C. F. **Otimização multi-objetivo de trajetórias interplanetárias para Plutão**. 2009. Dissertação (Mestrado em Engenharia e Tecnologia Espaciais) - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2009.
- VENDITTI, F. C. F.; ROCCO, E. M.; PRADO, A. F. B. A.; SUHKANOV, A. Gravity-assisted maneuvers applied in the multi-objective optimization of interplanetary trajectories. **Acta Astronautica**, v. 67, p. 1255-1271, 2010.
- VENDITTI, F. C. F. **Manobras orbitais ao redor de corpos irregulares**. 2013. Tese (Doutorado em Engenharia e Tecnologia Espaciais) - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2013.
- VENDITTI, F. C. F.; ROCCO, E. M.; PRADO, A. F. B. A. Trajectory control around non-spherical bodies modelled by parallelepipeds. **Journal of Physics: Conference Series**, v. 465, p. 012008, 2013a.
- VENDITTI, F. C. F.; ROCCO, E. M.; PRADO, A. F. B. A. Estudos de perturbações em órbitas ao redor do asteroide 216 Kleopatra utilizando modelo de poliedros. In: CONFERÊNCIA BRASILEIRA DE DINÂMICA, CONTROLE E APLICAÇÕES, 2013, Fortaleza. **Anais...** 2013b.

WALLACE, M. S.; PARKER, J. S.; STRANGE, N. J. Orbital operations for Phobos and Deimos exploration. In: AAS/AIAA ASTRODYNAMICS SPECIALIST CONFERENCE, 2012, Minnesota. **Proceedings...** 2012.

WAŽ, P. Disturbing function in the analytical theory of the motion of Phobos. **Astronomy and Astrophysics**, v.348, p. 300-310, 1999.

WERNER, R. A. The gravitational potential of a homogeneous polyhedron or don't cut corners. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, v. 59, n. 3, p. 253-278, 1994.

ZAMARO, M.; BIGGS, J. Natural motion around the martian moon Phobos: the dynamical substitutes of the libration point orbits in an elliptical three-body problem with gravity harmonics. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, v. 122, p. 263-302.

ZANARDI, M.C.F.P.S. **Influência do torque de radiação solar na atitude de um satélite artificial**, 1993. Tese (Doutorado) – Instituto Tecnológico da Aeronáutica, São José dos Campos, 1993.

APÊNDICE A – MISSÕES ESPACIAIS PARA MARTE E SEUS SATÉLITES NATURAIS

A seguir é apresentado um breve levantamento das missões espaciais passadas e futuras cujo objetivo principal consiste em explorar Marte e/ou seus satélite naturais Fobos e Deimos

1960 - Marte 1960 A e Marte 1960 B

As primeiras tentativas de missões para Marte foram realizadas pela URSS com as missões Marte 1960 A (ou Korabl 4 ou Marsnik 1), Marte 1960 B (ou Korabl 5 ou Marsnik 2) e Marte 1962 A (ou Korabl 11 ou Sputnik 22), lançadas, respectivamente em 10 de outubro e 14 de outubro. A missão Marte 1960 A falhou no lançamento e Marte 1960 B não atingiu a órbita marciana.

1962 - Marte 1962 A, Mars 1 e Marte 1962 B

No ano de 1962 mais três fracassadas tentativas com destino à Marte foram realizadas pela URSS. Marte 1962 A (ou Korabl 11 ou Sputnik 22) foi lançada em 22 de outubro, porém falhou na saída da órbita terrestre. Mars 1 (ou Sputnik 23), lançada em 1 de novembro foi a primeira sonda a conseguir deixar a Terra em direção à Marte, porém uma falha no vôo fez com que fosse perdido o contato em 21 de março de 1963, depois de viajar cerca de 106 000 km, mas sem chegar ao seu destino. Marte 1962 B (ou Korabl 13 ou Sputnik 24), lançada em 4 de novembro, também não conseguiu atingir a órbita de Marte.

1964 – Mariner 3, Mariner 4 e Zond 2

A primeira sonda lançada pelos EUA com destino à Marte em 5 de novembro, Mariner 3 apresentou uma falha na abertura dos painéis solares, causando mudanças na aerodinâmica da sonda e impedindo que ela chegasse na órbita de Marte, permanecendo em órbita solar. Mariner 4, lançada em 28 de novembro pelos EUA, foi a primeira sonda a finalmente passar pela órbita de Marte, chegando a uma distância de 9900 km do planeta em 14 de julho de 1965. A missão tirou 22 fotografias de Marte, descobriu crateras e confirmou a presença de gás carbônico na atmosfera. Atualmente Mariner 4 está em órbita solar. Zond 2, lançada em 30 de novembro de 1964 pela URSS, passou a cerca de 1500 km de Marte em 6 de agosto de 1965, porém a comunicação foi interrompida em 4 de maio de 1965 sem nenhuma informação recebida pela missão.

1965 – Zond 3

Lançada em 18 de julho pela URSS, a sonda foi projetada inicialmente para ser lançada à Marte, porém a oportunidade de lançamento foi perdida e a missão mudou de objetivo, passando a sobrevoar a Lua obtendo um grande número de fotos consideradas espetaculares para a época.

1969 – Mariner 6, Mariner 7, Marte 1969 A, Marte 1969 B

MARINER 6 E MARINER 7. A missão soviética Marte 1969 A, lançada em 27 de março, tinha como objetivo estudar a atmosfera de Marte. Porém complicações no lançamento acabaram por destruir a sonda cujos destroços caíram nos Montes Altai. Marte 1969 B, lançada em 2 de abril também não obteve êxito devido a problemas no lançamento.

1971 – Mariner 8, Kosmos 419, Marte 2, Marte 3 e Mariner 9

Mariner 8 foi lançada em 8 de maio pelos EUA com o objetivo de entrar em órbita de Marte e retornar imagens e dados. Porém, uma falha no veículo lançador não permitiu que a sonda sequer atingisse a órbita da Terra, caindo no oceano Atlântico pouco depois do lançamento. Kosmos 419 foi lançada em 10 de maio pela União Soviética. Uma falha no último estágio do foguete fez com que a sonda entrasse em uma órbita baixa, reentrando na atmosfera terrestre dois dias depois do seu lançamento. Marte 2 e Marte 3 foram duas missões soviéticas não tripuladas lançadas com o objetivo de orbitar e pousar em Marte. Marte 2, lançada em 19 de maio, transmitiu dados sobre a atmosfera, gravidade, magnetosfera e temperatura. Porém uma falha no aterrissador, que carregava um robô pequeno cujo objetivo era caminhar na superfície de Marte, impossibilitou o pouso da sonda, que foi destruída ao chocar com a superfície do planeta sem retornar nenhum dado. Mesmo assim a sonda se tornou o primeiro objeto feito pelo homem a tocar a superfície de Marte. Marte 3, lançada em 28 de maio, entrou em órbita de Marte, enviou fotos e informações sobre a temperatura da superfície e composição da atmosfera. O aterrissador fez um pouso suave em 2 de novembro de 1971, mas os equipamentos pararam de funcionar 20 segundos após o contato com a superfície de Marte, provavelmente devido a uma tempestade de areia. Mariner 9, lançada em 20 de maio pelos EUA entrou em órbita de Marte e tornou-se o primeiro objeto americano a orbitar um corpo celeste que não fosse a Lua. A missão enviou 7329 fotos que contribuíram com a elaboração do primeiro mapa global de Marte fotos detalhadas de Fobos e Deimos. Descobriu canais, vulcões e outras estruturas. Aproveitando uma coincidente tempestade de areia que estava acontecendo no momento, a missão coletou dados sobre esse evento.

1973 – Marte 4, Marte 5, Marte 6, Marte 7

As missões Marte 4 e Marte 5 deveriam entrar em órbita de Marte em 1974 com o objetivo de estabelecer um link de comunicação para as missões Marte 6 e Marte 7. Porém, devido a um mau funcionamento no sistema de controle de bordo de Marte 4, o retrofoguetes não foram acionados e a sonda passou perto de Marte retornando algumas fotos e dados,

porém seguiu e entrou em órbita heliocêntrica. Marte 5, lançada em 25 de julho, entrou em órbita de Marte, coletou imagens e dados e após 10 dias de inserção na órbita do planeta os equipamentos pararam de funcionar. Marte 6, lançada em 5 de agosto, entrou em órbita de Marte e chegou a lançar a sonda aterrissadora, que infelizmente falhou e se chocou com a superfície do planeta. Porém, durante sua descida conseguiu coletar dados sobre a atmosfera. Marte 7, lançada em 9 de agosto, falhou ao tentar ingressar em órbita de Marte e atualmente está em órbita solar.

1975 – Viking 1 e Viking 2

A missão Viking foi lançada pelos EUA com o objetivo de orbitar e aterrissar em Marte. Viking 1, lançada em 20 de agosto, entrou em órbita de Marte e pousou suavemente no dia 21 de julho de 1976. A missão realizou experimentos biológicos na tentativa de encontrar microorganismos em Marte, porém não foram obtidos resultados conclusivos, além de imagens da superfície e monitoramento do clima. A sonda orbitadora passou perto de Fobos e mapeou Marte através de mais de 52000 imagens. Atualmente orbitador e aterrissador estão desativados. Viking 2, lançada em 9 de setembro, pousando com sucesso na superfície de Marte dia 3 de setembro de 1976. Realizou as mesmas experiências que Viking 1 e passou perto de Deimos. Juntas, as missões Viking 1 e 2 coletaram mais de 52000 imagens, cartografaram 97% da superfície do planeta com detalhes da topografia, realizaram experimentos biológicos no solo e obtiveram dados sobre a superfície, clima, atmosfera e mudanças sazonais.

1988 – Phobos 1 e Phobos 2

Phobos 1 foi lançada pela URSS em 7 de julho com o objetivo de investigar Fobos, porém foi perdido o contato com a Terra. Phobos 2, lançada em 12 de julho, entrou com sucesso em órbita de Marte, chegou a uma distância de 800 km de Fobos, mas perdeu contato com a Terra.

1992 – Mars Observer

Lançada pelos EUA em 25 de setembro, a missão Mars Observer tinha como objetivo estudar a superfície, a atmosfera, o clima e o campo magnético de Marte, além de realizar um levantamento topográfico e fotográfico de toda a superfície do planeta. Porém a comunicação foi perdida 3 dias antes da inserção em órbita de Marte.

1996 – Mars Global Surveyor, Mars 96 e Mars Pathfinder

Após o fracasso da missão Mars Observer, a NASA elaborou o programa Mars Surveyor Program, que enviaria sondas espaciais em direção à Marte a cada 26 meses. As sondas seriam as seguintes: Mars Global Surveyor, Mars Pathfinder, Mars 98 (Mars Climate Orbiter e Mars Polar Lander), Mars 2001, Mars 2003 e Mars 2005. A primeira delas, lançada em 7 de novembro, Mars Global Surveyor entrou em órbita de Marte e permaneceria, inicialmente, por um período de 2 anos, coletando dados sobre a superfície, topografia, dinâmica atmosférica, gravidade, campo magnético e composição do planeta. Porém, com o fracasso da missão Mars 98, o prazo da missão foi prorrogado para 2006. Mars 96, lançada pela Rússia em 19 de novembro, com o objetivo científico de investigar a evolução de Marte, sua atmosfera, superfície e interior. Porém não obteve sucesso e a sonda caiu no oceano Pacífico. Mars Pathfinder, lançada em 4 de dezembro pelos EUA, tinha como objetivo enviar um robô para Marte. A Mars Pathfinder pousou em Marte dia 4 de julho de 1997 e no dia 6 de julho de 1997 o veículo de 6 rodas Sojourner caminhou pela superfície do planeta. A missão enviou imagens, realizou análises químicas de rochas marcianas e estudou o clima, atingindo 100% dos seus objetivos.

1998 – Planet B e Mars Climate Orbiter

Planet B (ou Nozomi, que significa esperança), lançada em 4 de julho pela JAXA, deveria chegar em Marte em 1999 com o objetivo de estudar a atmosfera superior de Marte e sua interação com o vento solar. Porém, devido a problemas para adquirir aceleração

gravitacional atrasaram a meta de chegada para dezembro de 2003 ou janeiro de 2004. Uma explosão solar danificou os equipamentos elétricos e o sistema de comunicação e a sonda não chegou a entrar em órbita de Marte, sendo a missão abandonada em 9 de dezembro de 2003. Mars Climate Orbiter, lançada em 11 de dezembro pelos EUA, era a missão orbitadora da Mars 98. A missão Mars 98 objetivava enviar duas sondas em épocas distintas, um orbitador (Mars Climate Orbiter) e um aterrissador (Mars Polar Lander), para estudar o clima marciano. A missão Mars Climate Orbiter foi destruída na atmosfera de Marte devido a erros de cálculo na manobra de inserção orbital.

1999 – Mars Polar Lander e Deep Space 2

A missão Mars Polar Lander, lançada em 3 de janeiro, foi a primeira tentativa de pouso em Marte após o sucesso da missão Mars Pathfinder, com o objetivo de estudar o solo e o clima de Marte. A missão na verdade transportava três sondas: a sonda principal, Mars Polar Lander, e duas micro-sondas de experimento, Deep Space 2. Em 3 de dezembro de 1999, dez minutos antes de aterrissar foi perdido o contato com a sonda e não houve mais comunicação, não chegando a ser enviado nenhum dado. O fracasso das missões Mars Climate Orbiter e Mars Polar Lander fez com que a NASA suspendesse a missão Mars Surveyor Program, cancelando as missões Mars 2001, Mars 2003 e Mars 2005, com objetivo de revisar os dados e informações e traçar uma nova estratégia de exploração de Marte.

2001 – Mars Odyssey

A missão Mars Odyssey, lançada pela NASA em 7 de abril, cumpriu com seus principais objetivos que eram estudar o clima marciano e verificar possibilidade de existência de água no presente ou no passado, o que poderia fornecer indícios sobre a possibilidade de vida no planeta. A missão encontrou fortes evidências de água na superfície e por baixo da superfície.

2003 – Mars Express, Beagle 2, Mars Exploration Rover A, Mars Exploration Rover B

Lançada em 2 de junho pela ESA, a sonda Mars Express consistia no orbitador Mars Express e no aterrissador Beagle 2. A missão orbitadora tinha como objetivo enviar imagens de alta resolução para estudo da topografia e morfologia da superfície, elaborar um mapa mineralógico, estudar a composição da atmosfera e servir como meio de comunicação para os aterrissadores de 2003 a 2007. Carregou a sonda Beagle 2 e a enviou para a superfície de Marte. O pouso aconteceu corretamente, mas não foi possível comunicação com a sonda e nenhum dado foi enviado para a Terra. Até 2015 não se sabia o que havia acontecido com a sonda, até que a missão Mars Reconnaissance Orbiter descobriu a sonda intacta na superfície de Marte e detectou o erro que impediu o ativamento completo dos quatro painéis solares, o que impossibilitou o funcionamento da antena de rádio.

A missão da NASA Mars Exploration Rover, também chamada Spirit, lançada em 10 de junho, tinha o objetivo de lançar dois veículos (missão A e B) para pouso e lugares diferentes de Marte. Os rovers eram idênticos fisicamente e carregavam instrumentos sofisticados para análise do clima, de rochas e do solo uma vez que os objetivos da missão eram realizar um estudo mineralógico, estudar a história do clima e da água de Marte. A missão Mars Exploration Rovers B, também chamada Opportunity, foi lançada em 7 de julho pela NASA com os mesmos objetivos da missão A, porém em outra região do planeta.

2005 – Mars Reconnaissance Orbiter (MRO)

Missão da NASA lançada em 12 de agosto, a MRO tinha como objetivo procurar evidências de que a água existiu na superfície de Marte durante algum tempo a partir de análises minerais, poeira e partículas de água, estudos de água subterrânea e monitoramento diário do clima.

2007 – Phoenix

A missão Phoenix foi lançada pela NASA em 4 de agosto com o objetivo de pousar em Marte e pesquisar moléculas de água na região do polo norte do planeta.

2011 – Phobos-Grunt, Yinghuo-1, Mars Science Laboratory

Fobos-Grunt foi uma missão planejada pela Agência Espacial Federal Russa, lançada em 8 de novembro com o objetivo de pousar em Fobos, coletar amostras do solo e voltar para a Terra. Porém uma falha nos motores impossibilitaram a saída da sonda da órbita terrestre e os fragmentos da sonda caíram no sul do oceano Pacífico. A missão Yinghuo-1 seria primeira missão interplanetária da Administração Espacial Nacional da China. Foi lançada e fracassada juntamente com o aterrissador da missão Phobos-Grunt e tinha como objetivo estudar a atmosfera de Marte e seu campo magnético. A missão Mars Science Laboratory (MSL), lançada pela NASA em 26 de novembro tinha como objetivo pousar em Marte levando um jipe robô batizado como Curiosity. Os principais objetivos do robô eram investigar a possibilidade de existência de vida em Marte, estudar o clima e coletar dados para o envio de uma futura missão tripulada a Marte. A comunidade internacional foi responsável pelo fornecimento da maioria dos seus instrumentos, não tendo sido, portanto, um projeto exclusivo dos Estados Unidos.

2013 – Mars Orbiter Mission e MAVEN

Mars Orbiter Mission (MOM), também conhecida como Mangalyaan, lançada em 5 de novembro pela Organização Indiana de Pesquisa Espacial. Tinha como objetivo aprimorar tecnologias para a exploração interplanetária e usar instrumentos científicos para estudar a atmosfera e o solo de Marte a partir de sua órbita. A missão ocorreu com sucesso e a Organização Indiana de Pesquisa Espacial se tornou a quarta agência espacial a conquistar Marte, após o Programa Espacial Soviético, NASA e Agência Espacial Européia. Da sigla em inglês Mars, Atmosphere and Volatile Evolution, MAVEN, a

missão da NASA lançada em 18 de novembro tinha como objetivo explorar a atmosfera de Marte e analisar como a atmosfera e a água do planeta foram perdidos ao longo do tempo.

A ISAS/JAXA planeja mandar uma missão para Marte e suas luas no início dos anos 2020. A missão MMX pretende completar uma ida e volta a Marte, orbitar Fobos e pousar em sua superfície e observar Deimos. O lançamento da missão está previsto para setembro de 2024, a chegada a Marte agosto de 2025, a partida de Marte agosto de 2028 e a chegada de volta na Terra julho de 2029.

O principal objetivo da missão é distinguir entre as duas principais hipóteses sobre a origem de Fobos e Deimos. Uma delas sugere que as luas são asteroides capturados por Marte e a outra propõe que as luas são fragmentos aglomerados de um gigante impacto em Marte. O objetivo secundário da missão é analisar as condições das superfícies das luas e em torno delas e de Marte e a dinâmica global e temporal da atmosfera de Marte, como poeira, gelo, nuvens e vapor de água.

Compreender a origem das luas de Marte pode nos dar indícios de como os planetas em torno do Sol se formaram e, conseqüentemente, em torno de outras estrelas. Caso as luas tenham sido capturadas elas podem fornecer evidências do material que foi espalhado para dentro do Sol pelos planetas gigantes de gás. Tal evidência estabeleceria um grau de parentesco entre as luas e os meteoritos que atingiram a Terra no início e possivelmente forneceram água e outros compostos orgânicos ao nosso planeta. Já a alternativa de Fobos e Deimos serem restos de uma colisão gigante com Marte apresenta a possibilidade das luas serem uma cápsula do tempo para as condições iniciais marcianas e pode revelar detalhes sobre o processo do impacto.

Phobos Sample Return (PhSR) é uma missão que faz parte do programa Mars Robotic Exploration Preparation (MREP), atualmente sob responsabilidade da ESA, cujo objetivo

principal é retornar para Terra uma amostra de mais de 100 g do solo de Phobos após uma fase de caracterização científica da lua e do local de pouso. A partir de tais informações espera-se uma oportunidade para desbloquear os segredos de Fobos e sua formação, além de ser uma missão preliminar preparatória para a missão Mars Sample Return (MSR) incluindo manobras de rendezvous em órbita de Marte e coleta de amostragem com cápsula de retorno para a Terra e recepção das amostras.

A missão está prevista para chegar em Marte em julho de 2025, orbitar Deimos durante 1 mês utilizando trailing orbits e quasi-satellite orbits, 4 meses em torno de Fobos utilizando quasi-satellite orbits e fly-bys, partir de Marte em agosto de 2026 e chegar de volta à Terra em julho de 2027.

A NASA também possui uma missão, ainda que sob estudo preliminar, que objetiva orbitar Fobos, coletar medidas da superfície e da composição química e implantar pequenos robôs na superfície da lua com o objetivo de analisar de forma detalhada as características geológicas microscópicas da lua, além de outras propriedades. A missão também pretende contribuir com o futuro do programa espacial tripulado investigando as possibilidades de uma base tripulada na baixa gravidade de Fobos e possíveis locais para pouso. A missão Phobos Surveyor é uma parceria entre a NASA, a Universidade de Stanford e o Instituto de Tecnologia de Massachusetts.

APÊNDICE B – EXPANSÃO DO POTENCIAL GRAVITACIONAL EM HARMÔNICOS ESFÉRICOS

A partir da expressão geral para a função potencial generalizada U , dada pela Equação (3.20), a aceleração perturbadora, em componentes x , y e z , devido ao potencial gravitacional do corpo central que atua sobre o satélite, em relação ao sistema de coordenadas fixo no corpo central, é dada pelas Equações (B.1), (B.2) e (B.3) (KUGA ET AL., 2011):

$$a_x = \frac{\mu}{r^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a_e}{r}\right)^n (-(n+1)(C1_{n,m} \text{Cos}[m\lambda] + S_{n,m} \text{Sin}[m\lambda])P_{n,m}) \quad \text{B.1}$$

$$a_y = \frac{\mu}{r^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a_e}{r}\right)^n (m \text{Sec}[\phi](-C1_{n,m} \text{Sin}[m\lambda] + S_{n,m} \text{Cos}[m\lambda])P_{n,m}) \quad \text{B.2}$$

$$a_z = \frac{\mu}{r^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a_e}{r}\right)^n ((-n \text{Sin}[\phi] \text{Sec}[\phi]P_{n,m} + (n + m)(\text{Sec}[\phi]P_{n-1,m})) (C1_{n,m} \text{Cos}[m\lambda] + S_{n,m} \text{Sin}[m\lambda])) \quad \text{B.3}$$

As expansões das Equações (B.1), (B.2) e (B.3), até $n = 10$, são apresentadas nas Equações (B.4) a (B.36):

Vale observar que as Equações (B.4) a (B.36) apresentam a expansão para apenas o valor de n adotado, e não o somatório total.

$$a_{x0} = -\frac{\mu C1_{0,0} P_{0,0}}{r^2} \quad \text{B.4}$$

$$a_{x1} = -\frac{2\mu a_e (C1_{1,0} P_{1,0} + P_{1,1} (\text{Cos}[\lambda] C1_{1,1} + \text{Sin}[\lambda] S_{1,1}))}{r^3} \quad \text{B.5}$$

$$a_{x2} = -\frac{3\mu a_e^2}{r^4} ((C1_{2,0} P_{2,0} + P_{2,1} (\text{Cos}[\lambda] C1_{2,1} + \text{Sin}[\lambda] S_{2,1}) + P_{2,2} (\text{Cos}[2\lambda] C1_{2,2} + \text{Sin}[2\lambda] S_{2,2})) \quad \text{B.6}$$

$$a_{x3} = -\frac{4\mu a_e^3}{r^5} (C1_{3,0}P_{3,0} + P_{3,1}(\text{Cos}[\lambda]C1_{3,1} + \text{Sin}[\lambda]S_{3,1}) + P_{3,2}(\text{Cos}[2\lambda]C1_{3,2} + \text{Sin}[2\lambda]S_{3,2}) + P_{3,3}(\text{Cos}[3\lambda]C1_{3,3} + \text{Sin}[3\lambda]S_{3,3})) \quad \text{B.7}$$

$$a_{x4} = -\frac{1}{r^6} 5\mu a_e^4 (C1_{4,0}P_{4,0} + P_{4,1}(\text{Cos}[\lambda]C1_{4,1} + \text{Sin}[\lambda]S_{4,1}) + P_{4,2}(\text{Cos}[2\lambda]C1_{4,2} + \text{Sin}[2\lambda]S_{4,2}) + P_{4,3}(\text{Cos}[3\lambda]C1_{4,3} + \text{Sin}[3\lambda]S_{4,3}) + P_{4,4}(\text{Cos}[4\lambda]C1_{4,4} + \text{Sin}[4\lambda]S_{4,4})) \quad \text{B.8}$$

$$a_{x5} = -\frac{1}{r^7} 6\mu a_e^5 (C1_{5,0}P_{5,0} + P_{5,1}(\text{Cos}[\lambda]C1_{5,1} + \text{Sin}[\lambda]S_{5,1}) + P_{5,2}(\text{Cos}[2\lambda]C1_{5,2} + \text{Sin}[2\lambda]S_{5,2}) + P_{5,3}(\text{Cos}[3\lambda]C1_{5,3} + \text{Sin}[3\lambda]S_{5,3}) + P_{5,4}(\text{Cos}[4\lambda]C1_{5,4} + \text{Sin}[4\lambda]S_{5,4}) + P_{5,5}(\text{Cos}[5\lambda]C1_{5,5} + \text{Sin}[5\lambda]S_{5,5})) \quad \text{B.9}$$

$$a_{x6} = -\frac{1}{r^8} 7\mu a_e^6 (C1_{6,0}P_{6,0} + P_{6,1}(\text{Cos}[\lambda]C1_{6,1} + \text{Sin}[\lambda]S_{6,1}) + P_{6,2}(\text{Cos}[2\lambda]C1_{6,2} + \text{Sin}[2\lambda]S_{6,2}) + P_{6,3}(\text{Cos}[3\lambda]C1_{6,3} + \text{Sin}[3\lambda]S_{6,3}) + P_{6,4}(\text{Cos}[4\lambda]C1_{6,4} + \text{Sin}[4\lambda]S_{6,4}) + P_{6,5}(\text{Cos}[5\lambda]C1_{6,5} + \text{Sin}[5\lambda]S_{6,5}) + P_{6,6}(\text{Cos}[6\lambda]C1_{6,6} + \text{Sin}[6\lambda]S_{6,6})) \quad \text{B.10}$$

$$a_{x7} = -\frac{1}{r^9} 8\mu a_e^7 (C1_{7,0}P_{7,0} + P_{7,1}(\text{Cos}[\lambda]C1_{7,1} + \text{Sin}[\lambda]S_{7,1}) + P_{7,2}(\text{Cos}[2\lambda]C1_{7,2} + \text{Sin}[2\lambda]S_{7,2}) + P_{7,3}(\text{Cos}[3\lambda]C1_{7,3} + \text{Sin}[3\lambda]S_{7,3}) + P_{7,4}(\text{Cos}[4\lambda]C1_{7,4} + \text{Sin}[4\lambda]S_{7,4}) + P_{7,5}(\text{Cos}[5\lambda]C1_{7,5} + \text{Sin}[5\lambda]S_{7,5}) + P_{7,6}(\text{Cos}[6\lambda]C1_{7,6} + \text{Sin}[6\lambda]S_{7,6}) + P_{7,7}(\text{Cos}[7\lambda]C1_{7,7} + \text{Sin}[7\lambda]S_{7,7})) \quad \text{B.11}$$

$$a_{x8} = -\frac{1}{r^{10}} 9\mu a_e^8 (C1_{8,0}P_{8,0} + P_{8,1}(\text{Cos}[\lambda]C1_{8,1} + \text{Sin}[\lambda]S_{8,1}) + P_{8,2}(\text{Cos}[2\lambda]C1_{8,2} + \text{Sin}[2\lambda]S_{8,2}) + P_{8,3}(\text{Cos}[3\lambda]C1_{8,3} + \text{Sin}[3\lambda]S_{8,3}) + P_{8,4}(\text{Cos}[4\lambda]C1_{8,4} + \text{Sin}[4\lambda]S_{8,4}) + P_{8,5}(\text{Cos}[5\lambda]C1_{8,5} + \text{Sin}[5\lambda]S_{8,5}) + P_{8,6}(\text{Cos}[6\lambda]C1_{8,6} + \text{Sin}[6\lambda]S_{8,6}) + P_{8,7}(\text{Cos}[7\lambda]C1_{8,7} + \text{Sin}[7\lambda]S_{8,7}) + P_{8,8}(\text{Cos}[8\lambda]C1_{8,8} + \text{Sin}[8\lambda]S_{8,8})) \quad \text{B.12}$$

$$\begin{aligned}
a_{x9} = & -\frac{1}{r^{11}} 10\mu a_e^9 (C_{19,0}P_{9,0} + P_{9,1}(\text{Cos}[\lambda]C_{19,1} + \text{Sin}[\lambda]S_{9,1}) \\
& + P_{9,2}(\text{Cos}[2\lambda]C_{19,2} + \text{Sin}[2\lambda]S_{9,2}) + P_{9,3}(\text{Cos}[3\lambda]C_{19,3} \\
& + \text{Sin}[3\lambda]S_{9,3}) + P_{9,4}(\text{Cos}[4\lambda]C_{19,4} + \text{Sin}[4\lambda]S_{9,4}) \\
& + P_{9,5}(\text{Cos}[5\lambda]C_{19,5} + \text{Sin}[5\lambda]S_{9,5}) + P_{9,6}(\text{Cos}[6\lambda]C_{19,6} \\
& + \text{Sin}[6\lambda]S_{9,6}) + P_{9,7}(\text{Cos}[7\lambda]C_{19,7} + \text{Sin}[7\lambda]S_{9,7}) \\
& + P_{9,8}(\text{Cos}[8\lambda]C_{19,8} + \text{Sin}[8\lambda]S_{9,8}) + P_{9,9}(\text{Cos}[9\lambda]C_{19,9} \\
& + \text{Sin}[9\lambda]S_{9,9}))
\end{aligned} \tag{B.13}$$

$$\begin{aligned}
a_{x10} = & -\frac{1}{r^{12}} 11\mu a_e^{10} (C_{110,0}P_{10,0} + P_{10,1}(\text{Cos}[\lambda]C_{110,1} + \text{Sin}[\lambda]S_{10,1}) \\
& + P_{10,2}(\text{Cos}[2\lambda]C_{110,2} + \text{Sin}[2\lambda]S_{10,2}) \\
& + P_{10,3}(\text{Cos}[3\lambda]C_{110,3} + \text{Sin}[3\lambda]S_{10,3}) \\
& + P_{10,4}(\text{Cos}[4\lambda]C_{110,4} + \text{Sin}[4\lambda]S_{10,4}) \\
& + P_{10,5}(\text{Cos}[5\lambda]C_{110,5} + \text{Sin}[5\lambda]S_{10,5}) \\
& + P_{10,6}(\text{Cos}[6\lambda]C_{110,6} + \text{Sin}[6\lambda]S_{10,6}) \\
& + P_{10,7}(\text{Cos}[7\lambda]C_{110,7} + \text{Sin}[7\lambda]S_{10,7}) \\
& + P_{10,8}(\text{Cos}[8\lambda]C_{110,8} + \text{Sin}[8\lambda]S_{10,8}) \\
& + P_{10,9}(\text{Cos}[9\lambda]C_{110,9} + \text{Sin}[9\lambda]S_{10,9}) \\
& + P_{10,10}(\text{Cos}[10\lambda]C_{110,10} + \text{Sin}[10\lambda]S_{10,10}))
\end{aligned} \tag{B.14}$$

$$a_{y0} = 0 \tag{B.15}$$

$$a_{y1} = \frac{\mu \text{Sec}[\phi] a_e P_{1,1} (-\text{Sin}[\lambda]C_{1,1} + \text{Cos}[\lambda]S_{1,1})}{r^3} \tag{B.16}$$

$$\begin{aligned}
a_{y2} = & \frac{\mu \text{Sec}[\phi] a_e^2}{r^4} (P_{2,1}(-\text{Sin}[\lambda]C_{2,1} + \text{Cos}[\lambda]S_{2,1}) \\
& + 2P_{2,2}(-\text{Sin}[2\lambda]C_{2,2} + \text{Cos}[2\lambda]S_{2,2}))
\end{aligned} \tag{B.17}$$

$$\begin{aligned}
a_{y3} = & \frac{\mu \text{Sec}[\phi] a_e^3}{r^5} (P_{3,1}(-\text{Sin}[\lambda]C_{3,1} + \text{Cos}[\lambda]S_{3,1}) \\
& + 2P_{3,2}(-\text{Sin}[2\lambda]C_{3,2} + \text{Cos}[2\lambda]S_{3,2}) \\
& + 3P_{3,3}(-\text{Sin}[3\lambda]C_{3,3} + \text{Cos}[3\lambda]S_{3,3}))
\end{aligned} \tag{B.18}$$

$$\begin{aligned}
a_{y4} = \frac{1}{r^6} \mu \text{Sec}[\phi] a_e^4 & (P_{4,1}(-\text{Sin}[\lambda]C1_{4,1} + \text{Cos}[\lambda]S_{4,1}) \\
& + 2P_{4,2}(-\text{Sin}[2\lambda]C1_{4,2} + \text{Cos}[2\lambda]S_{4,2}) \\
& + 3P_{4,3}(-\text{Sin}[3\lambda]C1_{4,3} + \text{Cos}[3\lambda]S_{4,3}) \\
& + 4P_{4,4}(-\text{Sin}[4\lambda]C1_{4,4} + \text{Cos}[4\lambda]S_{4,4}))
\end{aligned} \tag{B.19}$$

$$\begin{aligned}
a_{y5} = \frac{1}{r^7} \mu \text{Sec}[\phi] a_e^5 & (P_{5,1}(-\text{Sin}[\lambda]C1_{5,1} + \text{Cos}[\lambda]S_{5,1}) \\
& + 2P_{5,2}(-\text{Sin}[2\lambda]C1_{5,2} + \text{Cos}[2\lambda]S_{5,2}) \\
& + 3P_{5,3}(-\text{Sin}[3\lambda]C1_{5,3} + \text{Cos}[3\lambda]S_{5,3}) \\
& + 4P_{5,4}(-\text{Sin}[4\lambda]C1_{5,4} + \text{Cos}[4\lambda]S_{5,4}) \\
& + 5P_{5,5}(-\text{Sin}[5\lambda]C1_{5,5} + \text{Cos}[5\lambda]S_{5,5}))
\end{aligned} \tag{B.20}$$

$$\begin{aligned}
a_{y6} = \frac{1}{r^8} \mu \text{Sec}[\phi] a_e^6 & (P_{6,1}(-\text{Sin}[\lambda]C1_{6,1} + \text{Cos}[\lambda]S_{6,1}) \\
& + 2P_{6,2}(-\text{Sin}[2\lambda]C1_{6,2} + \text{Cos}[2\lambda]S_{6,2}) \\
& + 3P_{6,3}(-\text{Sin}[3\lambda]C1_{6,3} + \text{Cos}[3\lambda]S_{6,3}) \\
& + 4P_{6,4}(-\text{Sin}[4\lambda]C1_{6,4} + \text{Cos}[4\lambda]S_{6,4}) \\
& + 5P_{6,5}(-\text{Sin}[5\lambda]C1_{6,5} + \text{Cos}[5\lambda]S_{6,5}) \\
& + 6P_{6,6}(-\text{Sin}[6\lambda]C1_{6,6} + \text{Cos}[6\lambda]S_{6,6}))
\end{aligned} \tag{B.21}$$

$$\begin{aligned}
a_{y7} = \frac{1}{r^9} \mu \text{Sec}[\phi] a_e^7 & (P_{7,1}(-\text{Sin}[\lambda]C1_{7,1} + \text{Cos}[\lambda]S_{7,1}) \\
& + 2P_{7,2}(-\text{Sin}[2\lambda]C1_{7,2} + \text{Cos}[2\lambda]S_{7,2}) \\
& + 3P_{7,3}(-\text{Sin}[3\lambda]C1_{7,3} + \text{Cos}[3\lambda]S_{7,3}) \\
& + 4P_{7,4}(-\text{Sin}[4\lambda]C1_{7,4} + \text{Cos}[4\lambda]S_{7,4}) \\
& + 5P_{7,5}(-\text{Sin}[5\lambda]C1_{7,5} + \text{Cos}[5\lambda]S_{7,5}) \\
& + 6P_{7,6}(-\text{Sin}[6\lambda]C1_{7,6} + \text{Cos}[6\lambda]S_{7,6}) \\
& + 7P_{7,7}(-\text{Sin}[7\lambda]C1_{7,7} + \text{Cos}[7\lambda]S_{7,7}))
\end{aligned} \tag{B.22}$$

$$\begin{aligned}
a_{y8} = \frac{1}{r^{10}} \mu \text{Sec}[\phi] a_e^8 & (P_{8,1}(-\text{Sin}[\lambda]C1_{8,1} + \text{Cos}[\lambda]S_{8,1}) \\
& + 2P_{8,2}(-\text{Sin}[2\lambda]C1_{8,2} + \text{Cos}[2\lambda]S_{8,2}) \\
& + 3P_{8,3}(-\text{Sin}[3\lambda]C1_{8,3} + \text{Cos}[3\lambda]S_{8,3}) \\
& + 4P_{8,4}(-\text{Sin}[4\lambda]C1_{8,4} + \text{Cos}[4\lambda]S_{8,4}) \\
& + 5P_{8,5}(-\text{Sin}[5\lambda]C1_{8,5} + \text{Cos}[5\lambda]S_{8,5}) \\
& + 6P_{8,6}(-\text{Sin}[6\lambda]C1_{8,6} + \text{Cos}[6\lambda]S_{8,6}) \\
& + 7P_{8,7}(-\text{Sin}[7\lambda]C1_{8,7} + \text{Cos}[7\lambda]S_{8,7}) \\
& + 8P_{8,8}(-\text{Sin}[8\lambda]C1_{8,8} + \text{Cos}[8\lambda]S_{8,8}))
\end{aligned} \tag{B.23}$$

$$\begin{aligned}
a_{y9} = \frac{1}{r^{11}} \mu \text{Sec}[\phi] a_e^9 & (P_{9,1}(-\text{Sin}[\lambda]C1_{9,1} + \text{Cos}[\lambda]S_{9,1}) \\
& + 2P_{9,2}(-\text{Sin}[2\lambda]C1_{9,2} + \text{Cos}[2\lambda]S_{9,2}) \\
& + 3P_{9,3}(-\text{Sin}[3\lambda]C1_{9,3} + \text{Cos}[3\lambda]S_{9,3}) \\
& + 4P_{9,4}(-\text{Sin}[4\lambda]C1_{9,4} + \text{Cos}[4\lambda]S_{9,4}) \\
& + 5P_{9,5}(-\text{Sin}[5\lambda]C1_{9,5} + \text{Cos}[5\lambda]S_{9,5}) \\
& + 6P_{9,6}(-\text{Sin}[6\lambda]C1_{9,6} + \text{Cos}[6\lambda]S_{9,6}) \\
& + 7P_{9,7}(-\text{Sin}[7\lambda]C1_{9,7} + \text{Cos}[7\lambda]S_{9,7}) \\
& + 8P_{9,8}(-\text{Sin}[8\lambda]C1_{9,8} + \text{Cos}[8\lambda]S_{9,8}) \\
& + 9P_{9,9}(-\text{Sin}[9\lambda]C1_{9,9} + \text{Cos}[9\lambda]S_{9,9}))
\end{aligned} \tag{B.24}$$

$$\begin{aligned}
a_{y10} = \frac{1}{r^{12}} \mu \text{Sec}[\phi] a_e^{10} & (P_{10,1}(-\text{Sin}[\lambda]C1_{10,1} + \text{Cos}[\lambda]S_{10,1}) \\
& + 2P_{10,2}(-\text{Sin}[2\lambda]C1_{10,2} + \text{Cos}[2\lambda]S_{10,2}) \\
& + 3P_{10,3}(-\text{Sin}[3\lambda]C1_{10,3} + \text{Cos}[3\lambda]S_{10,3}) \\
& + 4P_{10,4}(-\text{Sin}[4\lambda]C1_{10,4} + \text{Cos}[4\lambda]S_{10,4}) \\
& + 5P_{10,5}(-\text{Sin}[5\lambda]C1_{10,5} + \text{Cos}[5\lambda]S_{10,5}) \\
& + 6P_{10,6}(-\text{Sin}[6\lambda]C1_{10,6} + \text{Cos}[6\lambda]S_{10,6}) \\
& + 7P_{10,7}(-\text{Sin}[7\lambda]C1_{10,7} + \text{Cos}[7\lambda]S_{10,7}) \\
& + 8P_{10,8}(-\text{Sin}[8\lambda]C1_{10,8} + \text{Cos}[8\lambda]S_{10,8}) \\
& + 9P_{10,9}(-\text{Sin}[9\lambda]C1_{10,9} + \text{Cos}[9\lambda]S_{10,9}) \\
& + 10P_{10,10}(-\text{Sin}[10\lambda]C1_{10,10} + \text{Cos}[10\lambda]S_{10,10}))
\end{aligned} \tag{B.25}$$

$$a_{z0} = 0 \tag{B.26}$$

$$\begin{aligned}
a_{z1} = \frac{\mu a_e}{r^3} & (C1_{1,0}(\text{Sec}[\phi]P_{0,0} - P_{1,0}\text{Tan}[\phi]) + (\text{Cos}[\lambda]C1_{1,1} \\
& + \text{Sin}[\lambda]S_{1,1})(2\text{Sec}[\phi]P_{0,1} - P_{1,1}\text{Tan}[\phi]))
\end{aligned} \tag{B.27}$$

$$\begin{aligned}
a_{z2} = \frac{1}{r^4} \mu a_e^2 & (2C1_{2,0}(\text{Sec}[\phi]P_{1,0} - P_{2,0}\text{Tan}[\phi]) + (\text{Cos}[\lambda]C1_{2,1} \\
& + \text{Sin}[\lambda]S_{2,1})(3\text{Sec}[\phi]P_{1,1} - 2P_{2,1}\text{Tan}[\phi]) \\
& + (\text{Cos}[2\lambda]C1_{2,2} + \text{Sin}[2\lambda]S_{2,2})(4\text{Sec}[\phi]P_{1,2} \\
& - 2P_{2,2}\text{Tan}[\phi]))
\end{aligned} \tag{B.28}$$

$$\begin{aligned}
a_{z3} = \frac{1}{r^5} \mu a_e^3 & (3C1_{3,0}(\text{Sec}[\phi]P_{2,0} - P_{3,0}\text{Tan}[\phi]) + (\text{Cos}[\lambda]C1_{3,1} \\
& + \text{Sin}[\lambda]S_{3,1})(4\text{Sec}[\phi]P_{2,1} - 3P_{3,1}\text{Tan}[\phi]) \\
& + (\text{Cos}[2\lambda]C1_{3,2} + \text{Sin}[2\lambda]S_{3,2})(5\text{Sec}[\phi]P_{2,2} \\
& - 3P_{3,2}\text{Tan}[\phi]) + (\text{Cos}[3\lambda]C1_{3,3} \\
& + \text{Sin}[3\lambda]S_{3,3})(6\text{Sec}[\phi]P_{2,3} - 3P_{3,3}\text{Tan}[\phi]))
\end{aligned} \tag{B.29}$$

$$\begin{aligned}
a_{z4} = \frac{1}{r^6} \mu a_e^4 & (4C1_{4,0}(\text{Sec}[\phi]P_{3,0} - P_{4,0}\text{Tan}[\phi]) + (\text{Cos}[\lambda]C1_{4,1} \\
& + \text{Sin}[\lambda]S_{4,1})(5\text{Sec}[\phi]P_{3,1} - 4P_{4,1}\text{Tan}[\phi]) \\
& + (\text{Cos}[2\lambda]C1_{4,2} + \text{Sin}[2\lambda]S_{4,2})(6\text{Sec}[\phi]P_{3,2} \\
& - 4P_{4,2}\text{Tan}[\phi]) + (\text{Cos}[3\lambda]C1_{4,3} \\
& + \text{Sin}[3\lambda]S_{4,3})(7\text{Sec}[\phi]P_{3,3} - 4P_{4,3}\text{Tan}[\phi]) \\
& + (\text{Cos}[4\lambda]C1_{4,4} + \text{Sin}[4\lambda]S_{4,4})(8\text{Sec}[\phi]P_{3,4} \\
& - 4P_{4,4}\text{Tan}[\phi]))
\end{aligned} \tag{B.30}$$

$$\begin{aligned}
a_{z5} = \frac{1}{r^7} \mu a_e^5 & (-5\text{Sec}[\phi](-2P_{4,5} + \text{Sin}[\phi]P_{5,5})(\text{Cos}[5\lambda]C1_{5,5} \\
& + \text{Sin}[5\lambda]S_{5,5}) + 5C1_{5,0}(\text{Sec}[\phi]P_{4,0} - P_{5,0}\text{Tan}[\phi]) \\
& + (\text{Cos}[\lambda]C1_{5,1} + \text{Sin}[\lambda]S_{5,1})(6\text{Sec}[\phi]P_{4,1} - 5P_{5,1}\text{Tan}[\phi]) \\
& + (\text{Cos}[2\lambda]C1_{5,2} + \text{Sin}[2\lambda]S_{5,2})(7\text{Sec}[\phi]P_{4,2} \\
& - 5P_{5,2}\text{Tan}[\phi]) + (\text{Cos}[3\lambda]C1_{5,3} \\
& + \text{Sin}[3\lambda]S_{5,3})(8\text{Sec}[\phi]P_{4,3} - 5P_{5,3}\text{Tan}[\phi]) \\
& + (\text{Cos}[4\lambda]C1_{5,4} + \text{Sin}[4\lambda]S_{5,4})(9\text{Sec}[\phi]P_{4,4} \\
& - 5P_{5,4}\text{Tan}[\phi]))
\end{aligned} \tag{B.31}$$

$$\begin{aligned}
a_{z6} = \frac{1}{r^8} \mu a_e^6 & (-6\text{Sec}[\phi](-2P_{5,6} + \text{Sin}[\phi]P_{6,6})(\text{Cos}[6\lambda]C1_{6,6} \\
& + \text{Sin}[6\lambda]S_{6,6}) + 6C1_{6,0}(\text{Sec}[\phi]P_{5,0} - P_{6,0}\text{Tan}[\phi]) \\
& + (\text{Cos}[\lambda]C1_{6,1} + \text{Sin}[\lambda]S_{6,1})(7\text{Sec}[\phi]P_{5,1} - 6P_{6,1}\text{Tan}[\phi]) \\
& + (\text{Cos}[2\lambda]C1_{6,2} + \text{Sin}[2\lambda]S_{6,2})(8\text{Sec}[\phi]P_{5,2} \\
& - 6P_{6,2}\text{Tan}[\phi]) + (\text{Cos}[3\lambda]C1_{6,3} \\
& + \text{Sin}[3\lambda]S_{6,3})(9\text{Sec}[\phi]P_{5,3} - 6P_{6,3}\text{Tan}[\phi]) \\
& + 2(\text{Cos}[4\lambda]C1_{6,4} + \text{Sin}[4\lambda]S_{6,4})(5\text{Sec}[\phi]P_{5,4} \\
& - 3P_{6,4}\text{Tan}[\phi]) + (\text{Cos}[5\lambda]C1_{6,5} \\
& + \text{Sin}[5\lambda]S_{6,5})(11\text{Sec}[\phi]P_{5,5} - 6P_{6,5}\text{Tan}[\phi]))
\end{aligned} \tag{B.32}$$

$$\begin{aligned}
a_{z7} = \frac{1}{r^9} \mu a_e^7 & (-7\text{Sec}[\phi](-2P_{6,7} + \text{Sin}[\phi]P_{7,7})(\text{Cos}[7\lambda]C_{1,7,7} \\
& + \text{Sin}[7\lambda]S_{7,7}) + 7C_{1,7,0}(\text{Sec}[\phi]P_{6,0} - P_{7,0}\text{Tan}[\phi]) \\
& + (\text{Cos}[\lambda]C_{1,7,1} + \text{Sin}[\lambda]S_{7,1})(8\text{Sec}[\phi]P_{6,1} - 7P_{7,1}\text{Tan}[\phi]) \\
& + (\text{Cos}[2\lambda]C_{1,7,2} + \text{Sin}[2\lambda]S_{7,2})(9\text{Sec}[\phi]P_{6,2} \\
& - 7P_{7,2}\text{Tan}[\phi]) + (\text{Cos}[3\lambda]C_{1,7,3} \\
& + \text{Sin}[3\lambda]S_{7,3})(10\text{Sec}[\phi]P_{6,3} - 7P_{7,3}\text{Tan}[\phi]) \\
& + (\text{Cos}[4\lambda]C_{1,7,4} + \text{Sin}[4\lambda]S_{7,4})(11\text{Sec}[\phi]P_{6,4} \\
& - 7P_{7,4}\text{Tan}[\phi]) + (\text{Cos}[5\lambda]C_{1,7,5} \\
& + \text{Sin}[5\lambda]S_{7,5})(12\text{Sec}[\phi]P_{6,5} - 7P_{7,5}\text{Tan}[\phi]) \\
& + (\text{Cos}[6\lambda]C_{1,7,6} + \text{Sin}[6\lambda]S_{7,6})(13\text{Sec}[\phi]P_{6,6} \\
& - 7P_{7,6}\text{Tan}[\phi]))
\end{aligned} \tag{B.33}$$

$$\begin{aligned}
a_{z8} = \frac{1}{r^{10}} \mu a_e^8 & (-8\text{Sec}[\phi](-2P_{7,8} + \text{Sin}[\phi]P_{8,8})(\text{Cos}[8\lambda]C_{1,8,8} \\
& + \text{Sin}[8\lambda]S_{8,8}) + 8C_{1,8,0}(\text{Sec}[\phi]P_{7,0} - P_{8,0}\text{Tan}[\phi]) \\
& + (\text{Cos}[\lambda]C_{1,8,1} + \text{Sin}[\lambda]S_{8,1})(9\text{Sec}[\phi]P_{7,1} - 8P_{8,1}\text{Tan}[\phi]) \\
& + 2(\text{Cos}[2\lambda]C_{1,8,2} + \text{Sin}[2\lambda]S_{8,2})(5\text{Sec}[\phi]P_{7,2} \\
& - 4P_{8,2}\text{Tan}[\phi]) + (\text{Cos}[3\lambda]C_{1,8,3} \\
& + \text{Sin}[3\lambda]S_{8,3})(11\text{Sec}[\phi]P_{7,3} - 8P_{8,3}\text{Tan}[\phi]) \\
& + 4(\text{Cos}[4\lambda]C_{1,8,4} + \text{Sin}[4\lambda]S_{8,4})(3\text{Sec}[\phi]P_{7,4} \\
& - 2P_{8,4}\text{Tan}[\phi]) + (\text{Cos}[5\lambda]C_{1,8,5} \\
& + \text{Sin}[5\lambda]S_{8,5})(13\text{Sec}[\phi]P_{7,5} - 8P_{8,5}\text{Tan}[\phi]) \\
& + 2(\text{Cos}[6\lambda]C_{1,8,6} + \text{Sin}[6\lambda]S_{8,6})(7\text{Sec}[\phi]P_{7,6} \\
& - 4P_{8,6}\text{Tan}[\phi]) + (\text{Cos}[7\lambda]C_{1,8,7} \\
& + \text{Sin}[7\lambda]S_{8,7})(15\text{Sec}[\phi]P_{7,7} - 8P_{8,7}\text{Tan}[\phi]))
\end{aligned} \tag{B.34}$$

$$\begin{aligned}
a_{z9} = \frac{1}{r^{11}} \mu \alpha_e^9 & (-9 \text{Sec}[\phi](-2P_{8,9} + \text{Sin}[\phi]P_{9,9})(\text{Cos}[9\lambda]C_{1,9,9} \\
& + \text{Sin}[9\lambda]S_{9,9}) + 9C_{1,9,0}(\text{Sec}[\phi]P_{8,0} - P_{9,0}\text{Tan}[\phi]) \\
& + (\text{Cos}[\lambda]C_{1,9,1} + \text{Sin}[\lambda]S_{9,1})(10\text{Sec}[\phi]P_{8,1} \\
& - 9P_{9,1}\text{Tan}[\phi]) + (\text{Cos}[2\lambda]C_{1,9,2} \\
& + \text{Sin}[2\lambda]S_{9,2})(11\text{Sec}[\phi]P_{8,2} - 9P_{9,2}\text{Tan}[\phi]) \\
& + 3(\text{Cos}[3\lambda]C_{1,9,3} + \text{Sin}[3\lambda]S_{9,3})(4\text{Sec}[\phi]P_{8,3} \\
& - 3P_{9,3}\text{Tan}[\phi]) + (\text{Cos}[4\lambda]C_{1,9,4} \\
& + \text{Sin}[4\lambda]S_{9,4})(13\text{Sec}[\phi]P_{8,4} - 9P_{9,4}\text{Tan}[\phi]) \\
& + (\text{Cos}[5\lambda]C_{1,9,5} + \text{Sin}[5\lambda]S_{9,5})(14\text{Sec}[\phi]P_{8,5} \\
& - 9P_{9,5}\text{Tan}[\phi]) + 3(\text{Cos}[6\lambda]C_{1,9,6} \\
& + \text{Sin}[6\lambda]S_{9,6})(5\text{Sec}[\phi]P_{8,6} - 3P_{9,6}\text{Tan}[\phi]) \\
& + (\text{Cos}[7\lambda]C_{1,9,7} + \text{Sin}[7\lambda]S_{9,7})(16\text{Sec}[\phi]P_{8,7} \\
& - 9P_{9,7}\text{Tan}[\phi]) + (\text{Cos}[8\lambda]C_{1,9,8} \\
& + \text{Sin}[8\lambda]S_{9,8})(17\text{Sec}[\phi]P_{8,8} - 9P_{9,8}\text{Tan}[\phi]))
\end{aligned}
\tag{B.35}$$

$$\begin{aligned}
a_{z10} = \frac{1}{r^{12}} \mu \alpha_e^{10} & (-10 \text{Sec}[\phi](-2P_{9,10} + \text{Sin}[\phi]P_{10,10})(\text{Cos}[10\lambda]C_{1,10,10} \\
& + \text{Sin}[10\lambda]S_{10,10}) + 10C_{1,10,0}(\text{Sec}[\phi]P_{9,0} - P_{10,0}\text{Tan}[\phi]) \\
& + (\text{Cos}[\lambda]C_{1,10,1} + \text{Sin}[\lambda]S_{10,1})(11\text{Sec}[\phi]P_{9,1} \\
& - 10P_{10,1}\text{Tan}[\phi]) + 2(\text{Cos}[2\lambda]C_{1,10,2} \\
& + \text{Sin}[2\lambda]S_{10,2})(6\text{Sec}[\phi]P_{9,2} - 5P_{10,2}\text{Tan}[\phi]) \\
& + (\text{Cos}[3\lambda]C_{1,10,3} + \text{Sin}[3\lambda]S_{10,3})(13\text{Sec}[\phi]P_{9,3} \\
& - 10P_{10,3}\text{Tan}[\phi]) + 2(\text{Cos}[4\lambda]C_{1,10,4} \\
& + \text{Sin}[4\lambda]S_{10,4})(7\text{Sec}[\phi]P_{9,4} - 5P_{10,4}\text{Tan}[\phi]) \\
& + 5(\text{Cos}[5\lambda]C_{1,10,5} + \text{Sin}[5\lambda]S_{10,5})(3\text{Sec}[\phi]P_{9,5} \\
& - 2P_{10,5}\text{Tan}[\phi]) + 2(\text{Cos}[6\lambda]C_{1,10,6} \\
& + \text{Sin}[6\lambda]S_{10,6})(8\text{Sec}[\phi]P_{9,6} - 5P_{10,6}\text{Tan}[\phi]) \\
& + (\text{Cos}[7\lambda]C_{1,10,7} + \text{Sin}[7\lambda]S_{10,7})(17\text{Sec}[\phi]P_{9,7} \\
& - 10P_{10,7}\text{Tan}[\phi]) + 2(\text{Cos}[8\lambda]C_{1,10,8} \\
& + \text{Sin}[8\lambda]S_{10,8})(9\text{Sec}[\phi]P_{9,8} - 5P_{10,8}\text{Tan}[\phi]) \\
& + (\text{Cos}[9\lambda]C_{1,10,9} + \text{Sin}[9\lambda]S_{10,9})(19\text{Sec}[\phi]P_{9,9} \\
& - 10P_{10,9}\text{Tan}[\phi]))
\end{aligned}
\tag{B.36}$$

A partir da Equações (3.21) a (3.23), são calculados os polinômios de Legendre e os polinômios associados de Legendre para grau e ordem até 10, em função da latitude ϕ e da longitude λ . A Tabela B.1 apresenta os polinômios de Legendre e os polinômios associados de Legendre para grau e ordem de 0 a 5 e a Tabela B.2 para grau e ordem de 6 a 10.

Tabela B.1. Polinômios de Legendre (de $n = 0$ a $n = 5$)

| | $n = 0$ | $n = 1$ | $n = 2$ | $n = 3$ | $n = 4$ | $n = 5$ |
|---------|---------|----------------------------|------------------------------------|--|--|--|
| $m = 0$ | 1 | $P_{1,0} = s$ | $P_{2,0} = \frac{1}{2}(-1 + 3s^2)$ | $P_{3,0} = \frac{1}{2}s(-3 + 5s^2)$ | $P_{4,0} = \frac{1}{8}(3 - 30s^2 + 35s^4)$ | $P_{5,0} = \frac{1}{8}s(15 - 70s^2 + 63s^4)$ |
| $m = 1$ | | $P_{1,1} = \sqrt{1 - s^2}$ | $P_{2,1} = 3s\sqrt{1 - s^2}$ | $P_{3,1} = \frac{3}{2}\sqrt{1 - s^2}(-1 + 5s^2)$ | $P_{4,1} = \left(\frac{5}{2}s\sqrt{1 - s^2}(-3 + 7s^2)\right)$ | $P_{5,1} = \left(\frac{15}{8}\sqrt{1 - s^2}(1 - 14s^2 + 21s^4)\right)$ |
| $m = 2$ | | | $P_{2,2} = 3 - 3s^2$ | $P_{3,2} = -15s(-1 + s^2)$ | $P_{4,2} = \left(-\frac{15}{2}(1 - 8s^2 + 7s^4)\right)$ | $P_{5,2} = \left(-\frac{105}{2}(s - 4s^3 + 3s^5)\right)$ |
| $m = 3$ | | | | $P_{3,3} = 15(1 - s^2)^{3/2}$ | $P_{4,3} = (105s(1 - s^2)^{3/2})$ | $P_{5,3} = \left(\frac{105}{2}(1 - s^2)^{3/2}(-1 + 9s^2)\right)$ |
| $m = 4$ | | | | | $P_{4,4} = (105(-1 + s^2)^2)$ | $P_{5,4} = (945s(-1 + s^2)^2)$ |
| $m = 5$ | | | | | | $P_{5,5} = (945(1 - s^2)^{5/2})$ |

Tabela B.2. Polinômios de Legendre (de $n = 6$ a $n = 10$)

| | $n = 6$ | $n = 7$ | $n = 8$ | $n = 9$ | $n = 10$ |
|---------|--|---|--|---|---|
| $m = 0$ | $P_{6,0}$ $= \left(\frac{1}{16}(-5 + 21s^2(5 - 15s^2 + 11s^4))\right)$ | $P_{7,0}$ $= \left(\frac{1}{16}s(-35 + 315s^2 - 693s^4 + 429s^6)\right)$ | $P_{8,0}$ $= \left(\frac{1}{128}(35 - 1260s^2 + 6930s^4 - 12012s^6 + 6435s^8)\right)$ | $P_{9,0}$ $= \left(\frac{1}{128}s(315 + 11s^2(-420 + 13s^2(126 - 180s^2 + 85s^4)))\right)$ | $P_{10,0}$ $= \left(\frac{1}{256}(-63 + 11s^2(315 + 13s^2(-210 + 630s^2 - 765s^4 + 323s^6)))\right)$ |
| $m = 1$ | $P_{6,1}$ $= \left(\frac{21}{8}s\sqrt{1-s^2}(5 - 30s^2 + 33s^4)\right)$ | $P_{7,1}$ $= \left(\frac{7}{16}\sqrt{1-s^2}(-5 + 135s^2 - 495s^4 + 429s^6)\right)$ | $P_{8,1}$ $= \left(\frac{9}{16}s\sqrt{1-s^2}(-35 + 11s^2(35 - 91s^2 + 65s^4))\right)$ | $P_{9,1}$ $= \left(\frac{45}{128}\sqrt{1-s^2}(7 + 11s^2(-28 + 182s^2 - 364s^4 + 221s^6))\right)$ | $P_{10,1}$ $= \left(\frac{55}{128}s\sqrt{1-s^2}(63 + 13s^2(-84 + 378s^2 - 612s^4 + 323s^6))\right)$ |
| $m = 2$ | $P_{6,2}$ $= \left(-\frac{105}{8}(-1 + s^2)(1 - 18s^2 + 33s^4)\right)$ | $P_{7,2}$ $= \left(-\frac{63}{8}s(-1 + s^2)(15 - 110s^2 + 143s^4)\right)$ | $P_{8,2}$ $= \left(-\frac{315}{16}(-1 + s^2)(-1 + 33s^2 - 143s^4 + 143s^6)\right)$ | $P_{9,2}$ $= \left(-\frac{495}{16}s(-1 + s^2)(-7 + 91s^2 - 273s^4 + 221s^6)\right)$ | $P_{10,2}$ $= \left(-\frac{495}{128}(-1 + s^2)(7 + 13s^2(-28 + 210s^2 - 476s^4 + 323s^6))\right)$ |
| $m = 3$ | $P_{6,3}$ $= \left(\frac{315}{2}s(1 - s^2)^{3/2}(-3 + 11s^2)\right)$ | $P_{7,3}$ $= \left(\frac{315}{8}(1 - s^2)^{3/2}(3 - 66s^2 + 143s^4)\right)$ | $P_{8,3}$ $= \left(\frac{3465}{8}s(1 - s^2)^{3/2}(3 - 26s^2 + 39s^4)\right)$ | $P_{9,3}$ $= \left(\frac{3465}{16}(1 - s^2)^{3/2}(-1 + 39s^2 - 195s^4 + 221s^6)\right)$ | $P_{10,3}$ $= \left(\frac{6435}{16}s(1 - s^2)^{3/2}(-7 + 105s^2 - 357s^4 + 323s^6)\right)$ |
| $m = 4$ | $P_{6,4}$ $= \left(\frac{945}{2}(-1 + s^2)^2(-1 + 11s^2)\right)$ | $P_{7,4}$ $= \left(\frac{3465}{2}s(-1 + s^2)^2(-3 + 13s^2)\right)$ | $P_{8,4}$ $= \left(\frac{10395}{8}(-1 + s^2)^2(1 - 26s^2 + 65s^4)\right)$ | $P_{9,4}$ $= \left(\frac{135135}{8}(-1 + s^2)^2(s - 10s^3 + 17s^5)\right)$ | $P_{10,4}$ $= \left(\frac{45045}{16}(-1 + s^2)^2(-1 + 45s^2 - 255s^4 + 323s^6)\right)$ |
| $m = 5$ | $P_{6,5}$ $= (10395s(1 - s^2)^{5/2})$ | $P_{7,5}$ $= \left(\frac{10395}{2}(1 - s^2)^{5/2}(-1 + 13s^2)\right)$ | $P_{8,5}$ $= \left(\frac{135135}{2}s(1 - s^2)^{5/2}(-1 + 5s^2)\right)$ | $P_{9,5}$ $= \left(\frac{135135}{8}(1 - s^2)^{5/2}(1 - 30s^2 + 85s^4)\right)$ | $P_{10,5}$ $= \left(\frac{135135}{8}s(1 - s^2)^{5/2}(15 - 170s^2 + 323s^4)\right)$ |
| $m = 6$ | $P_{6,6}$ $= (-10395(-1 + s^2)^3)$ | $P_{7,6}$ $= (-135135s(-1 + s^2)^3)$ | $P_{8,6}$ $= \left(-\frac{135135}{2}(-1 + s^2)^3(-1 + 15s^2)\right)$ | $P_{9,6}$ $= \left(-\frac{675675}{2}s(-1 + s^2)^3(-3 + 17s^2)\right)$ | $P_{10,6}$ $= \left(-\frac{675675}{8}(-1 + s^2)^3(3 - 102s^2 + 323s^4)\right)$ |

| | | | | | |
|----------|--|--|--|---|--|
| $m = 7$ | | $P_{7,7}$ $= (135135(1 - s^2)^{7/2})$ | $P_{8,7}$ $= (2027025s(1 - s^2)^{7/2})$ | $P_{9,7}$ $= (\frac{2027025}{2}(1 - s^2)^{7/2}(-1 + 17s^2))$ | $P_{10,7}$ $= (\frac{11486475}{2}s(1 - s^2)^{7/2}(-3 + 19s^2))$ |
| $m = 8$ | | | $P_{8,8}$ $= (2027025(-1 + s^2)^4)$ | $P_{9,8}$ $= (34459425s(-1 + s^2)^4)$ | $P_{10,8}$ $= (\frac{34459425}{2}(-1 + s^2)^4(-1 + 19s^2))$ |
| $m = 9$ | | | | $P_{9,9}$ $= (34459425(1 - s^2)^{9/2})$ | $P_{10,9}$ $= (654729075s(1 - s^2)^{9/2})$ |
| $m = 10$ | | | | | $P_{10,10}$ $= (-654729075(-1 + s^2)^5)$ |

Substituindo nas Equações (B.4) a (B.36) os polinômios de Legendre e os polinômios associados de Legendre calculados e apresentados nas Tabelas B.1 e B.2, obtemos as Equações B.37 a B.69:

$$a_{x0} = -\frac{\mu C_{10,0}}{r^2} \quad \text{B.37}$$

$$a_{x1} = -\frac{1}{r^3} 2\mu a_e (\sin[\phi] C_{1,0} + \sqrt{\cos[\phi]^2} (\cos[\lambda] C_{1,1} + \sin[\lambda] S_{1,1})) \quad \text{B.38}$$

$$a_{x2} = -\frac{1}{2r^4} 3\mu a_e^2 ((-1 + 3\sin[\phi]^2) C_{2,0} + 6\sqrt{\cos[\phi]^2} \sin[\phi] (\cos[\lambda] C_{2,1} + \sin[\lambda] S_{2,1}) + 6\cos[\phi]^2 (\cos[2\lambda] C_{2,2} + \sin[2\lambda] S_{2,2})) \quad \text{B.39}$$

$$a_{x3} = \frac{1}{r^5} 2\mu a_e^3 (\frac{1}{2} (1 + 5\cos[2\phi]) \sin[\phi] C_{3,0} - 3\sqrt{\cos[\phi]^2} (-1 + 5\sin[\phi]^2) (\cos[\lambda] C_{3,1} + \sin[\lambda] S_{3,1}) - 30\cos[\phi]^2 \sin[\phi] (\cos[2\lambda] C_{3,2} + \sin[2\lambda] S_{3,2}) - 30(\cos[\phi]^2)^{3/2} (\cos[3\lambda] C_{3,3} + \sin[3\lambda] S_{3,3})) \quad \text{B.40}$$

$$\begin{aligned}
a_{x4} = \frac{1}{8r^6} 5\mu a_e^4 & ((-3 + 30\sin[\phi]^2 - 35\sin[\phi]^4)C1_{4,0} + 10\sqrt{\cos[\phi]^2}(-1 \\
& + 7\cos[2\phi])\sin[\phi](\cos[\lambda]C1_{4,1} + \sin[\lambda]S_{4,1}) \\
& + 30\cos[\phi]^2(-5 + 7\cos[2\phi])(\cos[2\lambda]C1_{4,2} \\
& + \sin[2\lambda]S_{4,2}) - 840(\cos[\phi]^2)^{3/2}\sin[\phi](\cos[3\lambda]C1_{4,3} \\
& + \sin[3\lambda]S_{4,3}) - 840\cos[\phi]^4(\cos[4\lambda]C1_{4,4} \\
& + \sin[4\lambda]S_{4,4}))
\end{aligned} \tag{B.41}$$

$$\begin{aligned}
a_{x5} = \frac{1}{4r^7} 3\mu a_e^5 & (\sin[\phi](-15 + 70\sin[\phi]^2 - 63\sin[\phi]^4)C1_{5,0} \\
& - 15\sqrt{\cos[\phi]^2}(1 - 14\sin[\phi]^2 + 21\sin[\phi]^4)(\cos[\lambda]C1_{5,1} \\
& + \sin[\lambda]S_{5,1}) + 105\cos[\phi]^2(-5\sin[\phi] \\
& + 3\sin[3\phi])(\cos[2\lambda]C1_{5,2} + \sin[2\lambda]S_{5,2}) \\
& - 420(\cos[\phi]^2)^{3/2}(-1 + 9\sin[\phi]^2)(\cos[3\lambda]C1_{5,3} \\
& + \sin[3\lambda]S_{5,3}) - 7560\cos[\phi]^4\sin[\phi](\cos[4\lambda]C1_{5,4} \\
& + \sin[4\lambda]S_{5,4}) - 7560(\cos[\phi]^2)^{5/2}(\cos[5\lambda]C1_{5,5} \\
& + \sin[5\lambda]S_{5,5}))
\end{aligned} \tag{B.42}$$

$$\begin{aligned}
a_{x6} = \frac{1}{16r^8} 7\mu a_e^6 & ((5 - 21\sin[\phi]^2(5 - 15\sin[\phi]^2 + 11\sin[\phi]^4))C1_{6,0} \\
& - 42\sqrt{\cos[\phi]^2}\sin[\phi](5 - 30\sin[\phi]^2 \\
& + 33\sin[\phi]^4)(\cos[\lambda]C1_{6,1} + \sin[\lambda]S_{6,1}) - 210\cos[\phi]^2(1 \\
& - 18\sin[\phi]^2 + 33\sin[\phi]^4)(\cos[2\lambda]C1_{6,2} + \sin[2\lambda]S_{6,2}) \\
& + 1260(\cos[\phi]^2)^{3/2}(-5 \\
& + 11\cos[2\phi])\sin[\phi](\cos[3\lambda]C1_{6,3} + \sin[3\lambda]S_{6,3}) \\
& + 3780\cos[\phi]^4(-9 + 11\cos[2\phi])(\cos[4\lambda]C1_{6,4} \\
& + \sin[4\lambda]S_{6,4}) \\
& - 166320(\cos[\phi]^2)^{5/2}\sin[\phi](\cos[5\lambda]C1_{6,5} \\
& + \sin[5\lambda]S_{6,5}) - 166320\cos[\phi]^6(\cos[6\lambda]C1_{6,6} \\
& + \sin[6\lambda]S_{6,6}))
\end{aligned} \tag{B.43}$$

$$\begin{aligned}
a_{x7} = & \frac{1}{2r^9} \mu a_e^7 (\text{Sin}[\phi](35 - 315\text{Sin}[\phi]^2 + 693\text{Sin}[\phi]^4 \\
& - 429\text{Sin}[\phi]^6)C_{17,0} - 7\sqrt{\text{Cos}[\phi]^2}(-5 + 135\text{Sin}[\phi]^2 \\
& - 495\text{Sin}[\phi]^4 + 429\text{Sin}[\phi]^6)(\text{Cos}[\lambda]C_{17,1} + \text{Sin}[\lambda]S_{7,1}) \\
& - \frac{63}{4}\text{Cos}[\phi]^2(109 - 132\text{Cos}[2\phi] \\
& + 143\text{Cos}[4\phi])\text{Sin}[\phi](\text{Cos}[2\lambda]C_{17,2} + \text{Sin}[2\lambda]S_{7,2}) \\
& - 630(\text{Cos}[\phi]^2)^{3/2}(3 - 66\text{Sin}[\phi]^2 \\
& + 143\text{Sin}[\phi]^4)(\text{Cos}[3\lambda]C_{17,3} + \text{Sin}[3\lambda]S_{7,3}) \\
& + 13860\text{Cos}[\phi]^4(-7 + 13\text{Cos}[2\phi])\text{Sin}[\phi](\text{Cos}[4\lambda]C_{17,4} \\
& + \text{Sin}[4\lambda]S_{7,4}) - 83160(\text{Cos}[\phi]^2)^{5/2}(-1 \\
& + 13\text{Sin}[\phi]^2)(\text{Cos}[5\lambda]C_{17,5} + \text{Sin}[5\lambda]S_{7,5}) \\
& - 2162160\text{Cos}[\phi]^6\text{Sin}[\phi](\text{Cos}[6\lambda]C_{17,6} + \text{Sin}[6\lambda]S_{7,6}) \\
& - 2162160(\text{Cos}[\phi]^2)^{7/2}(\text{Cos}[7\lambda]C_{17,7} + \text{Sin}[7\lambda]S_{7,7}))
\end{aligned}
\tag{B.44}$$

$$\begin{aligned}
a_{x8} = & \frac{1}{128r^{10}} 9\mu a_e^8 ((-35 + 1260\text{Sin}[\phi]^2 - 6930\text{Sin}[\phi]^4 \\
& + 12012\text{Sin}[\phi]^6 - 6435\text{Sin}[\phi]^8)C_{18,0} \\
& - 72\sqrt{\text{Cos}[\phi]^2}\text{Sin}[\phi](-35 + 11\text{Sin}[\phi]^2(35 - 91\text{Sin}[\phi]^2 \\
& + 65\text{Sin}[\phi]^4))(\text{Cos}[\lambda]C_{18,1} + \text{Sin}[\lambda]S_{8,1}) \\
& - 315\text{Cos}[\phi]^2(-8 + 11(11 \\
& + 13\text{Cos}[4\phi])\text{Sin}[\phi]^2)(\text{Cos}[2\lambda]C_{18,2} + \text{Sin}[2\lambda]S_{8,2}) \\
& - 55440(\text{Cos}[\phi]^2)^{3/2}\text{Sin}[\phi](3 - 26\text{Sin}[\phi]^2 \\
& + 39\text{Sin}[\phi]^4)(\text{Cos}[3\lambda]C_{18,3} + \text{Sin}[3\lambda]S_{8,3}) \\
& - 20790\text{Cos}[\phi]^4(99 - 156\text{Cos}[2\phi] \\
& + 65\text{Cos}[4\phi])(\text{Cos}[4\lambda]C_{18,4} + \text{Sin}[4\lambda]S_{8,4}) \\
& + 4324320(\text{Cos}[\phi]^2)^{5/2}(-3 \\
& + 5\text{Cos}[2\phi])\text{Sin}[\phi](\text{Cos}[5\lambda]C_{18,5} + \text{Sin}[5\lambda]S_{8,5}) \\
& + 4324320\text{Cos}[\phi]^6(-13 + 15\text{Cos}[2\phi])(\text{Cos}[6\lambda]C_{18,6} \\
& + \text{Sin}[6\lambda]S_{8,6}) \\
& - 259459200(\text{Cos}[\phi]^2)^{7/2}\text{Sin}[\phi](\text{Cos}[7\lambda]C_{18,7} \\
& + \text{Sin}[7\lambda]S_{8,7}) - 259459200\text{Cos}[\phi]^8(\text{Cos}[8\lambda]C_{18,8} \\
& + \text{Sin}[8\lambda]S_{8,8}))
\end{aligned}
\tag{B.45}$$

$$\begin{aligned}
a_{x9} = \frac{1}{64r^{11}} 5\mu a_e^9 & (-\text{Sin}[\phi](315 + 11\text{Sin}[\phi]^2(-420 + 13\text{Sin}[\phi]^2(126 \\
& - 180\text{Sin}[\phi]^2 + 85\text{Sin}[\phi]^4)))\text{C}1_{9,0} - 45\sqrt{\text{Cos}[\phi]^2}(7 \\
& + 11\text{Sin}[\phi]^2(-28 + 182\text{Sin}[\phi]^2 - 364\text{Sin}[\phi]^4 \\
& + 221\text{Sin}[\phi]^6))(\text{Cos}[\lambda]\text{C}1_{9,1} + \text{Sin}[\lambda]\text{S}_{9,1}) \\
& - 3960\text{Cos}[\phi]^2\text{Sin}[\phi](-7 + 91\text{Sin}[\phi]^2 - 273\text{Sin}[\phi]^4 \\
& + 221\text{Sin}[\phi]^6)(\text{Cos}[2\lambda]\text{C}1_{9,2} + \text{Sin}[2\lambda]\text{S}_{9,2}) \\
& - 27720(\text{Cos}[\phi]^2)^{3/2}(-1 + 39\text{Sin}[\phi]^2 - 195\text{Sin}[\phi]^4 \\
& + 221\text{Sin}[\phi]^6)(\text{Cos}[3\lambda]\text{C}1_{9,3} + \text{Sin}[3\lambda]\text{S}_{9,3}) \\
& - 135135\text{Cos}[\phi]^4(66\text{Sin}[\phi] - 45\text{Sin}[3\phi] \\
& + 17\text{Sin}[5\phi])(\text{Cos}[4\lambda]\text{C}1_{9,4} + \text{Sin}[4\lambda]\text{S}_{9,4}) \\
& - 2162160(\text{Cos}[\phi]^2)^{5/2}(1 - 30\text{Sin}[\phi]^2 \\
& + 85\text{Sin}[\phi]^4)(\text{Cos}[5\lambda]\text{C}1_{9,5} + \text{Sin}[5\lambda]\text{S}_{9,5}) \\
& + 21621600\text{Cos}[\phi]^6(-11 \\
& + 17\text{Cos}[2\phi])\text{Sin}[\phi](\text{Cos}[6\lambda]\text{C}1_{9,6} + \text{Sin}[6\lambda]\text{S}_{9,6}) \\
& + 64864800(\text{Cos}[\phi]^2)^{7/2}(-15 \\
& + 17\text{Cos}[2\phi])(\text{Cos}[7\lambda]\text{C}1_{9,7} + \text{Sin}[7\lambda]\text{S}_{9,7}) \\
& - 4410806400\text{Cos}[\phi]^8\text{Sin}[\phi](\text{Cos}[8\lambda]\text{C}1_{9,8} \\
& + \text{Sin}[8\lambda]\text{S}_{9,8}) - 4410806400(\text{Cos}[\phi]^2)^{9/2}(\text{Cos}[9\lambda]\text{C}1_{9,9} \\
& + \text{Sin}[9\lambda]\text{S}_{9,9}))
\end{aligned}$$

B.46

$$\begin{aligned}
a_{x10} = & \frac{1}{256r^{12}} 11\mu a_e^{10} (-(-63 + 11\sin[\phi]^2(315 + 13\sin[\phi]^2(-210 \\
& + 630\sin[\phi]^2 - 765\sin[\phi]^4 + 323\sin[\phi]^6)))C_{10,0} \\
& - 110\sqrt{\cos[\phi]^2}\sin[\phi](63 + 13\sin[\phi]^2(-84 \\
& + 378\sin[\phi]^2 - 612\sin[\phi]^4 \\
& + 323\sin[\phi]^6))(\cos[\lambda]C_{10,1} + \sin[\lambda]S_{10,1}) \\
& - 990\cos[\phi]^2(7 + 13\sin[\phi]^2(-28 + 210\sin[\phi]^2 \\
& - 476\sin[\phi]^4 + 323\sin[\phi]^6))(\cos[2\lambda]C_{10,2} \\
& + \sin[2\lambda]S_{10,2}) - 102960(\cos[\phi]^2)^{3/2}\sin[\phi](-7 \\
& + 105\sin[\phi]^2 - 357\sin[\phi]^4 \\
& + 323\sin[\phi]^6)(\cos[3\lambda]C_{10,3} + \sin[3\lambda]S_{10,3}) \\
& + \frac{45045}{2} \cos[\phi]^4(-858 + 1485\cos[2\phi] - 918\cos[4\phi] \\
& + 323\cos[6\phi])(\cos[4\lambda]C_{10,4} + \sin[4\lambda]S_{10,4}) \qquad \qquad \qquad \text{B.47} \\
& - 4324320(\cos[\phi]^2)^{5/2}\sin[\phi](15 - 170\sin[\phi]^2 \\
& + 323\sin[\phi]^4)(\cos[5\lambda]C_{10,5} + \sin[5\lambda]S_{10,5}) \\
& - 2702700\cos[\phi]^6(585 - 884\cos[2\phi] \\
& + 323\cos[4\phi])(\cos[6\lambda]C_{10,6} + \sin[6\lambda]S_{10,6}) \\
& + 735134400(\cos[\phi]^2)^{7/2}(-13 \\
& + 19\cos[2\phi])\sin[\phi](\cos[7\lambda]C_{10,7} + \sin[7\lambda]S_{10,7}) \\
& + 2205403200\cos[\phi]^8(-17 \\
& + 19\cos[2\phi])(\cos[8\lambda]C_{10,8} + \sin[8\lambda]S_{10,8}) \\
& - 167610643200(\cos[\phi]^2)^{9/2}\sin[\phi](\cos[9\lambda]C_{10,9} \\
& + \sin[9\lambda]S_{10,9}) \\
& - 167610643200\cos[\phi]^{10}(\cos[10\lambda]C_{10,10} \\
& + \sin[10\lambda]S_{10,10}))
\end{aligned}$$

$$a_{y0} = 0 \quad \text{B.48}$$

$$a_{y1} = \frac{\mu\sqrt{\cos[\phi]^2}\sec[\phi]a_e(-\sin[\lambda]C1_{1,1} + \cos[\lambda]S_{1,1})}{r^3} \quad \text{B.49}$$

$$a_{y2} = \frac{1}{r^4} 3\mu a_e^2 (-2\cos[\phi]\sin[2\lambda]C1_{2,2} + 2\cos[2\lambda]\cos[\phi]S_{2,2} + \sqrt{\cos[\phi]^2}(-\sin[\lambda]C1_{2,1} + \cos[\lambda]S_{2,1})\tan[\phi]) \quad \text{B.50}$$

$$a_{y3} = \frac{1}{2r^5} 3\mu a_e^3 (10\sin[2\phi](-\sin[2\lambda]C1_{3,2} + \cos[2\lambda]S_{3,2}) + \sqrt{\cos[\phi]^2}(-30\cos[\phi]\sin[3\lambda]C1_{3,3} + \cos[\lambda](-5\cos[\phi] + 4\sec[\phi])S_{3,1} + 30\cos[3\lambda]\cos[\phi]S_{3,3} + \sin[\lambda]C1_{3,1}(\sec[\phi] - 5\sin[\phi]\tan[\phi]))) \quad \text{B.51}$$

$$a_{y4} = \frac{1}{2r^6} 5\mu a_e^4 (3\cos[\phi](-5 + 7\cos[2\phi])(\sin[2\lambda]C1_{4,2} - \cos[2\lambda]S_{4,2}) + 168\cos[\phi]^3(-\sin[4\lambda]C1_{4,4} + \cos[4\lambda]S_{4,4}) + \sqrt{\cos[\phi]^2}(-3 + 7\sin[\phi]^2)(-\sin[\lambda]C1_{4,1} + \cos[\lambda]S_{4,1})\tan[\phi] + 126(\cos[\phi]^2)^{3/2}(-\sin[3\lambda]C1_{4,3} + \cos[3\lambda]S_{4,3})\tan[\phi]) \quad \text{B.52}$$

$$a_{y5} = \frac{1}{8r^7} 15\mu a_e^5 (\sqrt{\cos[\phi]^2}\sec[\phi](1 - 14\sin[\phi]^2 + 21\sin[\phi]^4)(-\sin[\lambda]C1_{5,1} + \cos[\lambda]S_{5,1}) + 14\cos[\phi](-5\sin[\phi] + 3\sin[3\phi])(\sin[2\lambda]C1_{5,2} - \cos[2\lambda]S_{5,2}) - 2016\cos[\phi]^3\sin[\phi](\sin[4\lambda]C1_{5,4} - \cos[4\lambda]S_{5,4}) + 2520(\cos[\phi]^2)^{5/2}\sec[\phi](-\sin[5\lambda]C1_{5,5} + \cos[5\lambda]S_{5,5}) + 84(\cos[\phi]^2)^{3/2}(\sin[3\lambda]C1_{5,3} - \cos[3\lambda]S_{5,3})(\sec[\phi] - 9\sin[\phi]\tan[\phi])) \quad \text{B.53}$$

$$\begin{aligned}
a_{y6} = \frac{1}{8r^8} 21\mu a_e^6 & \left(\frac{1}{4} (-5)\text{Cos}[\phi](35 - 60\text{Cos}[2\phi] \right. \\
& + 33\text{Cos}[4\phi])(\text{Sin}[2\lambda]\text{C1}_{6,2} - \text{Cos}[2\lambda]\text{S}_{6,2}) \\
& + 360\text{Cos}[\phi]^3(-9 + 11\text{Cos}[2\phi])(\text{Sin}[4\lambda]\text{C1}_{6,4} \\
& - \text{Cos}[4\lambda]\text{S}_{6,4}) - 23760\text{Cos}[\phi]^5(\text{Sin}[6\lambda]\text{C1}_{6,6} \\
& - \text{Cos}[6\lambda]\text{S}_{6,6}) + \sqrt{\text{Cos}[\phi]^2}(5 - 30\text{Sin}[\phi]^2 \\
& + 33\text{Sin}[\phi]^4)(-\text{Sin}[\lambda]\text{C1}_{6,1} + \text{Cos}[\lambda]\text{S}_{6,1})\text{Tan}[\phi] \\
& + 180(\text{Cos}[\phi]^2)^{3/2}(-3 + 11\text{Sin}[\phi]^2)(-\text{Sin}[3\lambda]\text{C1}_{6,3} \\
& + \text{Cos}[3\lambda]\text{S}_{6,3})\text{Tan}[\phi] \\
& + 19800(\text{Cos}[\phi]^2)^{5/2}(-\text{Sin}[5\lambda]\text{C1}_{6,5} \\
& \left. + \text{Cos}[5\lambda]\text{S}_{6,5})\text{Tan}[\phi] \right)
\end{aligned} \tag{B.54}$$

$$\begin{aligned}
a_{y7} = \frac{1}{16r^9} 7\mu a_e^7 & (\sqrt{\text{Cos}[\phi]^2}\text{Sec}[\phi](-5 + 135\text{Sin}[\phi]^2 - 495\text{Sin}[\phi]^4 \\
& + 429\text{Sin}[\phi]^6)(-\text{Sin}[\lambda]\text{C1}_{7,1} + \text{Cos}[\lambda]\text{S}_{7,1}) - \frac{9}{4}(109 \\
& - 132\text{Cos}[2\phi] + 143\text{Cos}[4\phi])\text{Sin}[2\phi](\text{Sin}[2\lambda]\text{C1}_{7,2} \\
& - \text{Cos}[2\lambda]\text{S}_{7,2}) + 270(\text{Cos}[\phi]^2)^{3/2}\text{Sec}[\phi](3 - 66\text{Sin}[\phi]^2 \\
& + 143\text{Sin}[\phi]^4)(-\text{Sin}[3\lambda]\text{C1}_{7,3} + \text{Cos}[3\lambda]\text{S}_{7,3}) \\
& + 7920\text{Cos}[\phi]^3(-7 + 13\text{Cos}[2\phi])\text{Sin}[\phi](\text{Sin}[4\lambda]\text{C1}_{7,4} \\
& - \text{Cos}[4\lambda]\text{S}_{7,4}) + 59400(\text{Cos}[\phi]^2)^{5/2}\text{Sec}[\phi](-1 \\
& + 13\text{Sin}[\phi]^2)(-\text{Sin}[5\lambda]\text{C1}_{7,5} + \text{Cos}[5\lambda]\text{S}_{7,5}) \\
& - 1853280\text{Cos}[\phi]^5\text{Sin}[\phi](\text{Sin}[6\lambda]\text{C1}_{7,6} - \text{Cos}[6\lambda]\text{S}_{7,6}) \\
& + 2162160(\text{Cos}[\phi]^2)^{7/2}\text{Sec}[\phi](-\text{Sin}[7\lambda]\text{C1}_{7,7} \\
& \left. + \text{Cos}[7\lambda]\text{S}_{7,7})) \right)
\end{aligned} \tag{B.55}$$

$$\begin{aligned}
a_{y8} = \frac{1}{16r^{10}} 9\mu a_e^8 & \left(\frac{35}{16} \text{Cos}[\phi] (-210 + 385 \text{Cos}[2\phi] - 286 \text{Cos}[4\phi]) \right. \\
& + 143 \text{Cos}[6\phi] (\text{Sin}[2\lambda] \text{C}_{1,8,2} - \text{Cos}[2\lambda] \text{S}_{8,2}) \\
& - 1155 \text{Cos}[\phi]^3 (99 - 156 \text{Cos}[2\phi]) \\
& + 65 \text{Cos}[4\phi] (\text{Sin}[4\lambda] \text{C}_{1,8,4} - \text{Cos}[4\lambda] \text{S}_{8,4}) \\
& + 360360 \text{Cos}[\phi]^5 (-13 + 15 \text{Cos}[2\phi]) (\text{Sin}[6\lambda] \text{C}_{1,8,6} \\
& - \text{Cos}[6\lambda] \text{S}_{8,6}) - 28828800 \text{Cos}[\phi]^7 (\text{Sin}[8\lambda] \text{C}_{1,8,8} \\
& - \text{Cos}[8\lambda] \text{S}_{8,8}) + \sqrt{\text{Cos}[\phi]^2} (-35 + 11 \text{Sin}[\phi]^2 (35 \\
& - 91 \text{Sin}[\phi]^2 + 65 \text{Sin}[\phi]^4)) (-\text{Sin}[\lambda] \text{C}_{1,8,1} \\
& + \text{Cos}[\lambda] \text{S}_{8,1}) \text{Tan}[\phi] + 2310 (\text{Cos}[\phi]^2)^{3/2} (3 - 26 \text{Sin}[\phi]^2 \\
& + 39 \text{Sin}[\phi]^4) (-\text{Sin}[3\lambda] \text{C}_{1,8,3} + \text{Cos}[3\lambda] \text{S}_{8,3}) \text{Tan}[\phi] \\
& + 600600 (\text{Cos}[\phi]^2)^{5/2} (-1 + 5 \text{Sin}[\phi]^2) (-\text{Sin}[5\lambda] \text{C}_{1,8,5} \\
& + \text{Cos}[5\lambda] \text{S}_{8,5}) \text{Tan}[\phi] \\
& + 25225200 (\text{Cos}[\phi]^2)^{7/2} (-\text{Sin}[7\lambda] \text{C}_{1,8,7} \\
& + \text{Cos}[7\lambda] \text{S}_{8,7}) \text{Tan}[\phi] \left. \right)
\end{aligned} \tag{B.56}$$

$$\begin{aligned}
a_{y9} = \frac{1}{128r^{11}} 45\mu a_e^9 & \left(\sqrt{\text{Cos}[\phi]^2} \text{Sec}[\phi] (7 + 11 \text{Sin}[\phi]^2 (-28 \right. \\
& + 182 \text{Sin}[\phi]^2 - 364 \text{Sin}[\phi]^4 \\
& + 221 \text{Sin}[\phi]^6)) (-\text{Sin}[\lambda] \text{C}_{1,9,1} + \text{Cos}[\lambda] \text{S}_{9,1}) + \frac{11}{4} (-166 \\
& + 403 \text{Cos}[2\phi] - 234 \text{Cos}[4\phi] \\
& + 221 \text{Cos}[6\phi]) \text{Sin}[2\phi] (\text{Sin}[2\lambda] \text{C}_{1,9,2} - \text{Cos}[2\lambda] \text{S}_{9,2}) \\
& + 1848 (\text{Cos}[\phi]^2)^{3/2} \text{Sec}[\phi] (-1 + 39 \text{Sin}[\phi]^2 \\
& - 195 \text{Sin}[\phi]^4 + 221 \text{Sin}[\phi]^6) (-\text{Sin}[3\lambda] \text{C}_{1,9,3} \\
& + \text{Cos}[3\lambda] \text{S}_{9,3}) - 12012 \text{Cos}[\phi]^3 (66 \text{Sin}[\phi] - 45 \text{Sin}[3\phi] \\
& + 17 \text{Sin}[5\phi]) (\text{Sin}[4\lambda] \text{C}_{1,9,4} - \text{Cos}[4\lambda] \text{S}_{9,4}) \\
& + 240240 (\text{Cos}[\phi]^2)^{5/2} \text{Sec}[\phi] (1 - 30 \text{Sin}[\phi]^2 \\
& + 85 \text{Sin}[\phi]^4) (-\text{Sin}[5\lambda] \text{C}_{1,9,5} + \text{Cos}[5\lambda] \text{S}_{9,5}) \\
& + 2882880 \text{Cos}[\phi]^5 (-11 \\
& + 17 \text{Cos}[2\phi]) \text{Sin}[\phi] (\text{Sin}[6\lambda] \text{C}_{1,9,6} - \text{Cos}[6\lambda] \text{S}_{9,6}) \\
& + 20180160 (\text{Cos}[\phi]^2)^{7/2} \text{Sec}[\phi] (-1 \\
& + 17 \text{Sin}[\phi]^2) (-\text{Sin}[7\lambda] \text{C}_{1,9,7} + \text{Cos}[7\lambda] \text{S}_{9,7}) \\
& - 784143360 \text{Cos}[\phi]^7 \text{Sin}[\phi] (\text{Sin}[8\lambda] \text{C}_{1,9,8} - \text{Cos}[8\lambda] \text{S}_{9,8}) \\
& + 882161280 (\text{Cos}[\phi]^2)^{9/2} \text{Sec}[\phi] (-\text{Sin}[9\lambda] \text{C}_{1,9,9} \\
& + \text{Cos}[9\lambda] \text{S}_{9,9}) \left. \right)
\end{aligned} \tag{B.57}$$

$$\begin{aligned}
a_{y10} = \frac{1}{128r^{12}} 55\mu a_e^{10} & (-18\cos[\phi](7 + 13\sin[\phi]^2(-28 + 210\sin[\phi]^2 \\
& - 476\sin[\phi]^4 + 323\sin[\phi]^6))(\sin[2\lambda]C_{10,2} \\
& - \cos[2\lambda]S_{10,2}) + 819\cos[\phi]^3(-858 + 1485\cos[2\phi] \\
& - 918\cos[4\phi] + 323\cos[6\phi])(\sin[4\lambda]C_{10,4} \\
& - \cos[4\lambda]S_{10,4}) - 147420\cos[\phi]^5(585 - 884\cos[2\phi] \\
& + 323\cos[4\phi])(\sin[6\lambda]C_{10,6} - \cos[6\lambda]S_{10,6}) \\
& + 160392960\cos[\phi]^7(-17 + 19\cos[2\phi])(\sin[8\lambda]C_{10,8} \\
& - \cos[8\lambda]S_{10,8}) - 15237331200\cos[\phi]^9(\sin[10\lambda]C_{10,10} \\
& - \cos[10\lambda]S_{10,10}) + \sqrt{\cos[\phi]^2}(63 + 13\sin[\phi]^2(-84 \\
& + 378\sin[\phi]^2 - 612\sin[\phi]^4 \\
& + 323\sin[\phi]^6))(-\sin[\lambda]C_{10,1} + \cos[\lambda]S_{10,1})\tan[\phi] \\
& + 2808(\cos[\phi]^2)^{3/2}(-7 + 105\sin[\phi]^2 - 357\sin[\phi]^4 \\
& + 323\sin[\phi]^6)(-\sin[3\lambda]C_{10,3} + \cos[3\lambda]S_{10,3})\tan[\phi] \\
& + 196560(\cos[\phi]^2)^{5/2}(15 - 170\sin[\phi]^2 \\
& + 323\sin[\phi]^4)(-\sin[5\lambda]C_{10,5} + \cos[5\lambda]S_{10,5})\tan[\phi] \\
& + 93562560(\cos[\phi]^2)^{7/2}(-3 \\
& + 19\sin[\phi]^2)(-\sin[7\lambda]C_{10,7} + \cos[7\lambda]S_{10,7})\tan[\phi] \\
& + 13713598080(\cos[\phi]^2)^{9/2}(-\sin[9\lambda]C_{10,9} \\
& + \cos[9\lambda]S_{10,9})\tan[\phi])
\end{aligned} \tag{B.58}$$

$$a_{z0} = 0 \tag{B.59}$$

$$\begin{aligned}
a_{z1} = \frac{1}{r^3} \mu a_e & (\cos[\phi]C_{1,0} - \sqrt{\cos[\phi]^2}(\cos[\lambda]C_{1,1} \\
& + \sin[\lambda]S_{1,1})\tan[\phi])
\end{aligned} \tag{B.60}$$

$$\begin{aligned}
a_{z2} = \frac{1}{r^4} 3\mu a_e^2 & (\cos[\phi]\sin[\phi]C_{2,0} \\
& + \sqrt{\cos[\phi]^2}\cos[2\phi]\sec[\phi](\cos[\lambda]C_{2,1} + \sin[\lambda]S_{2,1}) \\
& - \sin[2\phi](\cos[2\lambda]C_{2,2} + \sin[2\lambda]S_{2,2}))
\end{aligned} \tag{B.61}$$

$$\begin{aligned}
a_{z3} = \frac{1}{8r^5} 3\mu a_e^3 & ((\text{Cos}[\phi] - 5\text{Cos}[3\phi])C1_{3,0} + 10(\text{Cos}[\phi] \\
& + 3\text{Cos}[3\phi])(\text{Cos}[2\lambda]C1_{3,2} + \text{Sin}[2\lambda]S_{3,2}) \\
& + 2\sqrt{\text{Cos}[\phi]^2}(\text{Cos}[\lambda](7 + 15\text{Cos}[2\phi])C1_{3,1} + (7 \\
& + 15\text{Cos}[2\phi])\text{Sin}[\lambda]S_{3,1} - 60\text{Cos}[\phi]^2(\text{Cos}[3\lambda]C1_{3,3} \\
& + \text{Sin}[3\lambda]S_{3,3}))\text{Tan}[\phi])
\end{aligned} \tag{B.62}$$

$$\begin{aligned}
a_{z4} = \frac{1}{16r^6} 5\mu a_e^4 & ((2\text{Sin}[2\phi] - 7\text{Sin}[4\phi])C1_{4,0} + 4\sqrt{\text{Cos}[\phi]^2}(\text{Cos}[2\phi] \\
& - 7\text{Cos}[4\phi])\text{Sec}[\phi](\text{Cos}[\lambda]C1_{4,1} + \text{Sin}[\lambda]S_{4,1}) \\
& + 12(2\text{Sin}[2\phi] + 7\text{Sin}[4\phi])(\text{Cos}[2\lambda]C1_{4,2} + \text{Sin}[2\lambda]S_{4,2}) \\
& + 336\text{Cos}[\phi]\sqrt{\text{Cos}[\phi]^2}(-1 + 2\text{Cos}[2\phi])(\text{Cos}[3\lambda]C1_{4,3} \\
& + \text{Sin}[3\lambda]S_{4,3}) - 1344\text{Cos}[\phi]^3\text{Sin}[\phi](\text{Cos}[4\lambda]C1_{4,4} \\
& + \text{Sin}[4\lambda]S_{4,4}))
\end{aligned} \tag{B.63}$$

$$\begin{aligned}
a_{z5} = \frac{1}{128r^7} 15\mu a_e^5 & ((2\text{Cos}[\phi] - 7\text{Cos}[3\phi] + 21\text{Cos}[5\phi])C1_{5,0} \\
& - 28(-2\text{Cos}[\phi] + 3(\text{Cos}[3\phi] + 5\text{Cos}[5\phi]))(\text{Cos}[2\lambda]C1_{5,2} \\
& + \text{Sin}[2\lambda]S_{5,2}) + 336\sqrt{\text{Cos}[\phi]^2}(-1 \\
& + 15\text{Cos}[2\phi])\text{Sin}[2\phi](\text{Cos}[3\lambda]C1_{5,3} + \text{Sin}[3\lambda]S_{5,3}) \\
& + 4032\text{Cos}[\phi]^3(-3 + 5\text{Cos}[2\phi])(\text{Cos}[4\lambda]C1_{5,4} \\
& + \text{Sin}[4\lambda]S_{5,4}) - 16\sqrt{\text{Cos}[\phi]^2}(29 + 21\text{Sin}[\phi]^2(-6 \\
& + 5\text{Sin}[\phi]^2))(\text{Cos}[\lambda]C1_{5,1} + \text{Sin}[\lambda]S_{5,1})\text{Tan}[\phi] \\
& - 40320(\text{Cos}[\phi]^2)^{5/2}(\text{Cos}[5\lambda]C1_{5,5} \\
& + \text{Sin}[5\lambda]S_{5,5})\text{Tan}[\phi])
\end{aligned} \tag{B.64}$$

$$\begin{aligned}
a_{z6} = \frac{1}{256r^8} 21\mu a_e^6 & ((5\text{Sin}[2\phi] - 12\text{Sin}[4\phi] + 33\text{Sin}[6\phi])C1_{6,0} \\
& + 2\sqrt{\text{Cos}[\phi]^2}(5\text{Cos}[2\phi] - 24\text{Cos}[4\phi] \\
& + 99\text{Cos}[6\phi])\text{Sec}[\phi](\text{Cos}[\lambda]C1_{6,1} + \text{Sin}[\lambda]S_{6,1}) \\
& - 10(-17\text{Sin}[2\phi] + 12\text{Sin}[4\phi] \\
& + 99\text{Sin}[6\phi])(\text{Cos}[2\lambda]C1_{6,2} + \text{Sin}[2\lambda]S_{6,2}) \\
& + 1440\text{Cos}[\phi]\sqrt{\text{Cos}[\phi]^2}(-7 + 14\text{Cos}[2\phi] \\
& - 11\text{Cos}[4\phi])(\text{Cos}[3\lambda]C1_{6,3} + \text{Sin}[3\lambda]S_{6,3}) \\
& + 2880\text{Cos}[\phi]^3(-47\text{Sin}[\phi] + 33\text{Sin}[3\phi])(\text{Cos}[4\lambda]C1_{6,4} \\
& + \text{Sin}[4\lambda]S_{6,4}) + 126720\text{Cos}[\phi]^3\sqrt{\text{Cos}[\phi]^2}(-2 \\
& + 3\text{Cos}[2\phi])(\text{Cos}[5\lambda]C1_{6,5} + \text{Sin}[5\lambda]S_{6,5}) \\
& - 760320\text{Cos}[\phi]^5\text{Sin}[\phi](\text{Cos}[6\lambda]C1_{6,6} + \text{Sin}[6\lambda]S_{6,6}))
\end{aligned} \tag{B.65}$$

$$\begin{aligned}
a_{z7} = \frac{1}{1024r^9} 7\mu a_e^7 & ((25\text{Cos}[\phi] - 81\text{Cos}[3\phi] + 165\text{Cos}[5\phi] \\
& - 429\text{Cos}[7\phi])C1_{7,0} + 18(75\text{Cos}[\phi] - 171\text{Cos}[3\phi] \\
& + 55\text{Cos}[5\phi] + 1001\text{Cos}[7\phi])(\text{Cos}[2\lambda]C1_{7,2} \\
& + \text{Sin}[2\lambda]S_{7,2}) + 720\text{Cos}[\phi]\sqrt{\text{Cos}[\phi]^2}(-523 \\
& + 396\text{Cos}[2\phi] - 1001\text{Cos}[4\phi])\text{Sin}[\phi](\text{Cos}[3\lambda]C1_{7,3} \\
& + \text{Sin}[3\lambda]S_{7,3}) - 31680\text{Cos}[\phi]^3(81 - 148\text{Cos}[2\phi] \\
& + 91\text{Cos}[4\phi])(\text{Cos}[4\lambda]C1_{7,4} + \text{Sin}[4\lambda]S_{7,4}) \\
& + 380160\text{Cos}[\phi]^3\sqrt{\text{Cos}[\phi]^2}(-29 \\
& + 91\text{Cos}[2\phi])\text{Sin}[\phi](\text{Cos}[5\lambda]C1_{7,5} + \text{Sin}[5\lambda]S_{7,5}) \\
& + 9884160\text{Cos}[\phi]^5(-5 + 7\text{Cos}[2\phi])(\text{Cos}[6\lambda]C1_{7,6} \\
& + \text{Sin}[6\lambda]S_{7,6}) - 64\sqrt{\text{Cos}[\phi]^2}(-275 + 2385\text{Sin}[\phi]^2 \\
& - 5049\text{Sin}[\phi]^4 + 3003\text{Sin}[\phi]^6)(\text{Cos}[\lambda]C1_{7,1} \\
& + \text{Sin}[\lambda]S_{7,1})\text{Tan}[\phi] \\
& - 138378240(\text{Cos}[\phi]^2)^{7/2}(\text{Cos}[7\lambda]C1_{7,7} \\
& + \text{Sin}[7\lambda]S_{7,7})\text{Tan}[\phi])
\end{aligned}$$

B.66

$$\begin{aligned}
a_{z8} = \frac{1}{2048r^{10}} 9\mu a_e^8 & ((70\text{Sin}[2\phi] - 154\text{Sin}[4\phi] + 286\text{Sin}[6\phi] \\
& - 715\text{Sin}[8\phi])C1_{8,0} + 4\sqrt{\text{Cos}[\phi]^2}(35\text{Cos}[2\phi] \\
& - 154\text{Cos}[4\phi] + 429\text{Cos}[6\phi] \\
& - 1430\text{Cos}[8\phi])\text{Sec}[\phi](\text{Cos}[\lambda]C1_{8,1} + \text{Sin}[\lambda]S_{8,1}) \\
& + 280(16\text{Sin}[2\phi] - 22\text{Sin}[4\phi] \\
& + 143\text{Sin}[8\phi])(\text{Cos}[2\lambda]C1_{8,2} + \text{Sin}[2\lambda]S_{8,2}) \\
& + 36960\text{Cos}[\phi]\sqrt{\text{Cos}[\phi]^2}(-21 + 42\text{Cos}[2\phi] \\
& - 39\text{Cos}[4\phi] + 26\text{Cos}[6\phi])(\text{Cos}[3\lambda]C1_{8,3} + \text{Sin}[3\lambda]S_{8,3}) \\
& - 147840\text{Cos}[\phi]^3(138\text{Sin}[\phi] - 117\text{Sin}[3\phi] \\
& + 65\text{Sin}[5\phi])(\text{Cos}[4\lambda]C1_{8,4} + \text{Sin}[4\lambda]S_{8,4}) \\
& + 7687680\text{Cos}[\phi]^3\sqrt{\text{Cos}[\phi]^2}(-11 + 19\text{Cos}[2\phi] \\
& - 10\text{Cos}[4\phi])(\text{Cos}[5\lambda]C1_{8,5} + \text{Sin}[5\lambda]S_{8,5}) \\
& + 92252160\text{Cos}[\phi]^5(-9\text{Sin}[\phi] \\
& + 5\text{Sin}[3\phi])(\text{Cos}[6\lambda]C1_{8,6} + \text{Sin}[6\lambda]S_{8,6}) \\
& + 461260800\text{Cos}[\phi]^5\sqrt{\text{Cos}[\phi]^2}(-3 \\
& + 4\text{Cos}[2\phi])(\text{Cos}[7\lambda]C1_{8,7} + \text{Sin}[7\lambda]S_{8,7}) \\
& - 3690086400\text{Cos}[\phi]^7\text{Sin}[\phi](\text{Cos}[8\lambda]C1_{8,8} \\
& + \text{Sin}[8\lambda]S_{8,8}))
\end{aligned}$$

B.67

$$\begin{aligned}
a_{z9} = \frac{1}{32768r^{11}} & 45\mu a_e^9 ((98\cos[\phi] + 11(-28\cos[3\phi] + 52\cos[5\phi] \\
& - 91\cos[7\phi] + 221\cos[9\phi]))C_{1,0} + 88(98\cos[\phi] \\
& - 252\cos[3\phi] + 260\cos[5\phi] + 91\cos[7\phi] \\
& - 1989\cos[9\phi])(\cos[2\lambda]C_{1,2} + \sin[2\lambda]S_{9,2}) \\
& + 14784\cos[\phi]\sqrt{\cos[\phi]^2}(-202 + 793\cos[2\phi] \\
& - 390\cos[4\phi] + 663\cos[6\phi])\sin[\phi](\cos[3\lambda]C_{1,3} \\
& + \sin[3\lambda]S_{9,3}) + 384384\cos[\phi]^3(-198 + 375\cos[2\phi] \\
& - 298\cos[4\phi] + 153\cos[6\phi])(\cos[4\lambda]C_{1,4} \\
& + \sin[4\lambda]S_{9,4}) + 7687680\cos[\phi]^3\sqrt{\cos[\phi]^2}(172\cos[2\phi] \\
& - 3(41 + 51\cos[4\phi]))\sin[\phi](\cos[5\lambda]C_{1,5} \\
& + \sin[5\lambda]S_{9,5}) - 92252160\cos[\phi]^5(65 - 108\cos[2\phi] \\
& + 51\cos[4\phi])(\cos[6\lambda]C_{1,6} + \sin[6\lambda]S_{9,6}) \\
& + 369008640\cos[\phi]^5\sqrt{\cos[\phi]^2}(-71 \\
& + 153\cos[2\phi])\sin[\phi](\cos[7\lambda]C_{1,7} + \sin[7\lambda]S_{9,7}) \\
& + 12546293760\cos[\phi]^7(-7 + 9\cos[2\phi])(\cos[8\lambda]C_{1,8} \\
& + \sin[8\lambda]S_{9,8}) - 256\sqrt{\cos[\phi]^2}(623 + 11\sin[\phi]^2(-812 \\
& + 3094\sin[\phi]^2 - 4316\sin[\phi]^4 \\
& + 1989\sin[\phi]^6))(\cos[\lambda]C_{1,1} + \sin[\lambda]S_{9,1})\tan[\phi] \\
& - 225833287680(\cos[\phi]^2)^{9/2}(\cos[9\lambda]C_{1,9} \\
& + \sin[9\lambda]S_{9,9})\tan[\phi]
\end{aligned}$$

B.68

$$\begin{aligned}
a_{z10} = & \frac{1}{65536r^{12}} 55\mu a_e^{10} ((294\text{Sin}[2\phi] + 13(-48\text{Sin}[4\phi] + 81\text{Sin}[6\phi] \\
& - 136\text{Sin}[8\phi] + 323\text{Sin}[10\phi]))C_{1_{10,0}} \\
& + 2\sqrt{\text{Cos}[\phi]^2}(294\text{Cos}[2\phi] + 13(-96\text{Cos}[4\phi] \\
& + 243\text{Cos}[6\phi] - 544\text{Cos}[8\phi] \\
& + 1615\text{Cos}[10\phi]))\text{Sec}[\phi](\text{Cos}[\lambda]C_{1_{10,1}} + \text{Sin}[\lambda]S_{10,1}) \\
& + 18(1666\text{Sin}[2\phi] + 13(-208\text{Sin}[4\phi] + 171\text{Sin}[6\phi] \\
& + 136\text{Sin}[8\phi] - 1615\text{Sin}[10\phi]))(\text{Cos}[2\lambda]C_{1_{10,2}} \\
& + \text{Sin}[2\lambda]S_{10,2}) + 7488\text{Cos}[\phi]\sqrt{\text{Cos}[\phi]^2}(-1617 \\
& + 3234\text{Cos}[2\phi] - 3136\text{Cos}[4\phi] + 2686\text{Cos}[6\phi] \\
& - 1615\text{Cos}[8\phi])(\text{Cos}[3\lambda]C_{1_{10,3}} + \text{Sin}[3\lambda]S_{10,3}) \\
& + 104832\text{Cos}[\phi]^3(-4917\text{Sin}[\phi] + 4455\text{Sin}[3\phi] \\
& - 3349\text{Sin}[5\phi] + 1615\text{Sin}[7\phi])(\text{Cos}[4\lambda]C_{1_{10,4}} \\
& + \text{Sin}[4\lambda]S_{10,4}) + 6289920\text{Cos}[\phi]^3\sqrt{\text{Cos}[\phi]^2}(-572 \\
& + 1045\text{Cos}[2\phi] - 748\text{Cos}[4\phi] \\
& + 323\text{Cos}[6\phi])(\text{Cos}[5\lambda]C_{1_{10,5}} + \text{Sin}[5\lambda]S_{10,5}) \\
& - 12579840\text{Cos}[\phi]^5(5278\text{Sin}[\phi] - 3859\text{Sin}[3\phi] \\
& + 1615\text{Sin}[5\phi])(\text{Cos}[6\lambda]C_{1_{10,6}} + \text{Sin}[6\lambda]S_{10,6}) \\
& + 1710858240\text{Cos}[\phi]^5\sqrt{\text{Cos}[\phi]^2}(-135 + 218\text{Cos}[2\phi] \\
& - 95\text{Cos}[4\phi])(\text{Cos}[7\lambda]C_{1_{10,7}} + \text{Sin}[7\lambda]S_{10,7}) \\
& + 10265149440\text{Cos}[\phi]^7(-193\text{Sin}[\phi] \\
& + 95\text{Sin}[3\phi])(\text{Cos}[8\lambda]C_{1_{10,8}} + \text{Sin}[8\lambda]S_{10,8}) \\
& + 780151357440\text{Cos}[\phi]^7\sqrt{\text{Cos}[\phi]^2}(-4 \\
& + 5\text{Cos}[2\phi])(\text{Cos}[9\lambda]C_{1_{10,9}} + \text{Sin}[9\lambda]S_{10,9}) \\
& - 7801513574400\text{Cos}[\phi]^9\text{Sin}[\phi](\text{Cos}[10\lambda]C_{1_{10,10}} \\
& + \text{Sin}[10\lambda]S_{10,10}))
\end{aligned}$$

B.69

APÊNDICE C – COEFICIENTES DOS HARMÔNICOS ESFÉRICOS DE MARTE

A Tabela C.1 apresenta os coeficientes dos harmônicos esféricos de Marte até grau e ordem 5 e as incertezas nos coeficientes. Os valores para os coeficientes até grau e ordem 80 podem ser encontrados em <https://bowie.gsfc.nasa.gov/926/MARS/GGM2BC80.SHA>.

Tabela C.1. Coeficientes dos harmônicos esféricos de Marte

| n | m | Cnm | Snm | Incerteza no Cnm | Incerteza no Snm |
|---|---|-------------------------|-------------------------|------------------------|------------------------|
| 2 | 0 | -8,7450547081842009E-04 | 0,0000000000000000E+00 | 1,2103113782184000E-10 | 0,0000000000000000E+00 |
| 2 | 1 | 1,3938449166781359E-10 | 1,7044280642328221E-10 | 7,3039927797648007E-11 | 7,3266295432547008E-11 |
| 2 | 2 | -8,4177519807822603E-05 | 4,9605348841412452E-05 | 3,3991945147726000E-11 | 3,4592569163869000E-11 |
| 3 | 0 | -1,1886910646015641E-05 | 0,0000000000000000E+00 | 9,8471786784139995E-11 | 0,0000000000000000E+00 |
| 3 | 1 | 3,9053442315700724E-06 | 2,5139324037413419E-05 | 7,1449688816484996E-11 | 7,2254867814010005E-11 |
| 3 | 2 | -1,5863411026265399E-05 | 8,4857987158792132E-06 | 5,9676026032878996E-11 | 5,9797382572260005E-11 |
| 3 | 3 | 3,5338541142774030E-05 | 2,5113984262622799E-05 | 3,9949037676474000E-11 | 4,0462374542868001E-11 |
| 4 | 0 | 5,1257987175465586E-06 | 0,0000000000000000E+00 | 1,0329911830041000E-10 | 0,0000000000000000E+00 |
| 4 | 1 | 4,2271575054702128E-06 | 3,7413215027228718E-06 | 9,3004765290544999E-11 | 9,4423002643425008E-11 |
| 4 | 2 | -1,0253884110275679E-06 | -8,9622951629187374E-06 | 7,3213784191804998E-11 | 7,3314619138911000E-11 |
| 4 | 3 | 6,4461288728918093E-06 | 2,7297790313231990E-07 | 5,0594702258703002E-11 | 5,1248160693008003E-11 |
| 4 | 4 | 9,6384334824044650E-08 | 1,2861361694339760E-05 | 2,9964623548633001E-11 | 3,0045838133870998E-11 |
| 5 | 0 | -1,7242068505338999E-06 | 0,0000000000000000E+00 | 1,0935027490925000E-10 | 0,0000000000000000E+00 |
| 5 | 1 | 4,9155252614409601E-07 | 2,1179750719200639E-06 | 1,0291694202540000E-10 | 1,0455199159658000E-10 |
| 5 | 2 | -4,3015486989529303E-06 | -1,1283599363068411E-06 | 8,8105287844057999E-11 | 8,7282038965633995E-11 |
| 5 | 3 | 3,3106878341316730E-06 | 2,3024139448590119E-07 | 6,8215826754134999E-11 | 6,8675139409518995E-11 |
| 5 | 4 | -4,6889658986047850E-06 | -3,2997722093047299E-06 | 5,0256560862804000E-11 | 4,9993069474561002E-11 |
| 5 | 5 | -4,3640801168293771E-06 | 3,8656154098344251E-06 | 3,2926957261939999E-11 | 3,2808375832549997E-11 |