1. Publicação nº	2. Versão	3. Data	5. Distribuição
INPE-2770-PRE/343		*Junho, 1983*	☐ Interna ☒ Externa ☐ Restrita

4. Origem *DIN/DEP* — Programa *MEDEP/NAS*

6. Palavras chaves - selecionadas pelo(s) autor(es)

MODELO ESTOCÁSTICO *PETRÓLEO*
ESTOQUE *OTIMIZAÇÃO SOB INCERTEZA*

7. C.D.U.: *519.216:519.874*

8. Título *INPE-2770-PRE/343*

UM MODELO ESTOCÁSTICO PARA OTIMIZAÇÃO DO CONSUMO E EXPLORAÇÃO DE UM RECURSO NATURAL NÃO-RENOVÁVEL

10. Páginas: *19*

11. Última página: *18*

12. Revisada por

L.A. Vieira Dias

9. Autoria *Armando Zeferino Milioni*
Paulo Renato de Morais

13. Autorizada por

Nelson de Jesus Parada
Diretor

Assinatura responsável

14. Resumo/Notas

Este trabalho está baseado no modelo elaborado por Deshmukh e Pliska, publicado em 1980 na revista "Econometrica", para o problema de explorar e consumir um recurso natural não-renovável de maneira ótima em presença de incertezas. Aqui é apresentado um exemplo simplificado de aplicação deste modelo para o caso da otimização da exploração e consumo do petróleo extraído de reservas brasileiras. Para esta aplicação foi desenvolvido um método de obtenção da solução numérica aproximada para uma equação integro-diferencial que surge no modelo citado. São estudados também os efeitos causados na política ótima de exploração e consumo devido a alterações em parâmetros tais como: custo de extração, preço de petróleo importado, taxa máxima de extração e investimento em exploração.

15. Observações

Este trabalho será submetido para apresentação no XVI Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, a ser realizado em Florianópolis, SC, 10/83.

UM MODELO ESTOCÁSTICO PARA OTIMIZAÇÃO DO CONSUMO E EXPLORAÇÃO DE UM RECURSO NATURAL NÃO-RENOVÁVEL

Armando Zeferino Milioni
Instituto Tecnológico de Aeronáutica

Paulo Renato de Morais
Instituto de Pesquisas Espaciais
Conselho Nacional de Desenvolvimento
Científico e Tecnológico

RESUMO

Este trabalho está baseado no modelo elaborado por Deshmukh e Pliska, publicado em 1980 na revista "Econometrica", para o problema de explorar e consumir um recurso natural não-renovável de maneira ótima em presença de incertezas. Aqui é apresentado um exemplo simplificado de aplicação deste modelo para o caso da otimização da exploração e consumo do petróleo extraído de reservas brasileiras. Para esta aplicação foi desenvolvido um método de obtenção da solução numérica aproximada para uma equação integro-diferencial que surge no modelo citado. São estudados também os efeitos causados na política ótima de exploração e consumo devido a alterações em parâmetros tais como: custo de extração, preço de petróleo importado, taxa máxima de extração e investimento em exploração.

ABSTRACT

This paper is based on Deshmukh and Pliska's model, published in 1980 by Econometrica, for optimally consuming a natural resource and exploring for new sources of supply of that resource, in the presence of uncertainties. Here a simplified application of this model is presented for the case of optimal consumption and exploration of Brazilian oil. In order to apply Deshmukh and Pliska's model, it was necessary to develop a numerical method to obtain an approximate solution to an integro-differential equation. Other problems studied are the effects on the optimal consumption and exploration policies caused by changes in parameters like: oil extraction costs, imported oil prices, maximum rate of oil extraction and investment on exploration for new sources of supply.

1 - INTRODUÇÃO

Este trabalho está baseado no artigo de Deshmukh e Pliska (1980) sobre o caso de um recurso natural que é essencial e que pode ser armazenado sem depreciação ao longo do horizonte de planejamento. Apesar de o recurso não poder ser reproduzido, a quantidade disponível pode ser aumentada pela exploração e procura de novas fontes.

Segundo os autores "o processo de exploração envolve incertezas a respeito do tempo até a descoberta de uma nova jazida, assim como da quantidade de recursos lá existente. Essa incerteza pode ser controlada parcialmente pela intensidade de exploração escolhida pelo decisor. Um grande esforço de exploração é mais dispendioso, mas é mais provável que resulte numa descoberta mais rápida de uma grande quantidade de recurso.

Além de ser possível aumentar o estoque disponível através da exploração, este estoque pode diminuir devido ao uso. Uma alta taxa de consumo produz uma maior utilidade social imediata (apesar de a uma taxa decrescente), mas também deixa uma menor quantidade de recursos para consumo futuro. Assim, a exploração e o consumo atuais afetam não somente as utilidades e os custos imediatos mas também o estoque futuro, e, consequentemente, todas as decisões futuras. A cada instante do tempo, dada a quantidade conhecida de reservas do recurso, o problema do decisor é determinar as taxas ótimas de exploração e consumo de modo a maximizar o valor esperado descontado da utilidade do consumo menos o custo de exploração sobre um horizonte de planejamento infinito, levando em conta as incertezas envolvidas".

É necessário ressaltar que o modelo formulado por Deshmukh e Pliska (1980) considera algumas hipóteses simplificadoras as quais o tornam mais facilmente tratável tanto do ponto de vista econômico quanto do matemático. As principais delas são as que se seguem:

- A função benefício social pode ser explicitada como a utilidade proveniente do consumo menos o custo gerado pelo esforço de exploração.

- Não há penalidade alguma para o caso de ocorrer completo esgotamento das reservas conhecidas.

- Todo o sistema é considerado invariante no tempo.

- A frequência e a magnitude das descobertas dependem apenas do esforço de exploração, sendo desprezados o efeito aprendizado proveniente das explorações no passado e a crescente dificuldade em conseguir novas descobertas, uma vez que o estoque total é finito.

O método aplicado por Deshmukh e Pliska (1980) para resolver esse problema é baseado em Morais (1977), consistindo em desenvolver um modelo markoviano para o nível de reservas conhecidas e então aplicar a teoria de Processos Markovianos de Decisão para obter os controles ótimos.

Sob certas condições, os autores demonstraram que a função que expressa o benefício social líquido esperado em termos da política de consumo e exploração utilizada, e do nível conhecido de reservas, é a única função contínua que satisfaz uma equação integro-diferencial estocástica de argumento avançado e sua condição inicial.

A importância dessa função decorre do fato de que, através dela, é possível encontrar os parâmetros que determinam qual a política ótima dentre aquelas pertencentes a uma certa classe de políticas de consumo e exploração.

Contudo, a equação acima referida só possui solução explícita conhecida para alguns poucos casos particulares. Assim, o objetivo deste trabalho é utilizar o método de obtenção de solução aproximada daquela equação, desenvolvido por Milioni (1983), fazendo um exemplo simplificado de aplicação do modelo de Deshmukh e Pliska (1980) no qual é considerado o caso de otimização do consumo e exploração do petróleo no Brasil.

Na seção 2 é feita uma revisão bibliográfica de modelos que incorporam o aspecto da incerteza em suas análises relativas à economia de recursos naturais não-renováveis. Na seção 3 é feita uma breve descrição do modelo elaborado por Deshmukh e Pliska (1980), bem como do método de obtenção da sua solução aproximada. Na seção 4 é feita a aplicação prática simplificada para o caso do consumo e exploração do petróleo no Brasil, e na seção 5 são apresentados os resultados obtidos, bem como suas análises.

2 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O tema "Economia de Recursos não-Renováveis" foi introduzido na literatura por Hottelling (1931) através de seu trabalho clássico. Desde então, dada a relevância do assunto, muitos autores vêm se dedicando a ele, usando diferentes métodos de abordagem. Porém, é possível constatar pelos trabalhos já desenvolvidos que, embora haja um consenso sobre a fundamental importância desempenhada pelo aspecto da "incerteza" no problema de administrar dinamicamente um recurso não-renovável, poucos autores têm explicitamente incorporado tal aspecto em suas análises.

Por exemplo têm-se os trabalhos de Loury (1978) e Gilbert (1979) que, usando a técnica de programação dinâmica, pesquisaram o caso em que o nível total de reservas é desconhecido, mas pode ser avaliado através de prospecção. MacQueen (1961, 1964) estudou o caso em que o nível conhecido de reservas sofre variações aleatórias em instantes aleatórios que fogem ao controle do planejador. Dasgupta e Heal (1974) trabalharam com a possibilidade do surgimento de uma nova tecnologia que não necessitasse consumir recursos limitados. O avanço tecnológico pode ser parcialmente controlado pelo investimento realizado, mas o prazo para sua disponibilidade prática é aleatório. Na mesma linha, seguiram-se trabalhos de Davison (1978) e Kamien e Schwartz (1978). Finalmente, Deshmukh e Pliska (1980) analisaram o caso em que o nível total de estoque é desconhecido, e o nível disponível comprovado de estoques pode ser aumentado pela descoberta de novas jazidas. A frequência de descobertas, bem como as suas magnitudes, pode ser controlada parcialmente através do emprego de um esforço de exploração decidido pelo planejador. Este último artigo é o principal no qual se baseia este trabalho, e, além de já ter mencionado na Introdução, será analisado mais detalhadamente na sessão seguinte.

3 - FORMULAÇÃO DO MODELO

No trabalho de Morais (1979), que divulgou pesquisas recentes sobre controle de sistemas de armazenamento contínuo em tempo contínuo pela técnica de Processos Markovianos de Decisão, é encontrada a seguinte equação que descreve genericamente sistemas desse tipo:

$$X_t = X_0 + I_t - \int_0^t r(X_u)du \qquad , \ t \geq 0,$$

onde X_t é o nível de estoque no instante t; X_o é o estoque inicial; I_t é a entrada total durante o intervalo [0,t]; e r (X_u) é a taxa de saída no instante u, quando o nível de estoque é X_u. Esta equação diz simplesmente que o nível de estoque no instante t é igual ao estoque inicial mais a entrada total durante [0,t] menos a saída total no mesmo intervalo.

O interesse principal de Morais (1979) está na descrição do comportamento probabilístico do sistema e no controle do nível de estoque através da atuação sobre os parâmetros do processo de entradas e sobre a taxa de saídas r. Sob certas hipóteses sobre essas quantidades, demonstra-se que o processo estocástico $\{X_t; t \geq 0\}$ é um processo de Markov em tempo contínuo e com espaço de estados contínuo.

É admitido que, a cada instante t, o nível de estoque é observado, por exemplo, $X_t = x$, e é selecionada uma ação "a" que especifica a taxa de reabastecimento de estoque, a distribuição da quantidade a reabastecer e a taxa de consumo. Simultaneamente, recebe-se uma recompensa que depende de x e de "a", a qual é continuamente descontada ao longo do tempo, a uma taxa constante. O objetivo é, então, fazer as escolhas das ações de modo a maximizar o valor esperado dessa recompensa, ao longo de um horizonte infinito de planejamento.

A teoria acima foi aplicada por Deshmukh e Pliska (1980) na área de recursos naturais não-renováveis. Nesta aplicação, X_t é o nível comprovado de reservas de um recurso natural não

-renovável, medido em determinado instante de tempo t maior ou igual a 0. Não há distinção entre reservas comprovadas no subsolo e reservas já extraídas e armazenadas.

A cada instante de tempo t um planejador central observa o nível de estoque $X_t = x$ e adota uma política π que consiste em escolher:

$r(x)$ taxa de consumo a ser utilizada com $r(0)=0$ e $r(x) \in C = [0,\bar{r}]$ com $\bar{r} < \infty$.

$p(x)$ esforço de exploração a ser dispendido com $p(x) \in P = [0,\bar{p}]$ com $\bar{p} < \infty$.

Uma política π é chamada admissível se for uma função mensurável de Borel π: $R \to C \times P$, contínua a esquerda.

Seja a medida $\beta(p(x),dy)$ a função que determina a taxa probabilística de descobertas de jazidas de magnitude y com $\beta(p(x),.)$ sendo uma medida de probabilidade e $\beta(.,dy)$ uma função contínua em $p(x)$. Por exemplo:

$$\beta(p(x),dy) = \lambda(p(x))F(dy),$$

onde F é a função de distribuição da variável aleatória Y, dimensão de uma jazida descoberta; e $\lambda(p(x))$ é uma função contínua que determina a taxa probabilística de descobertas. Neste exemplo, o esforço de exploração afeta a taxa de descobertas, mas não as suas magnitudes.

Seja ainda $u[r(x)]$ a função contínua que determina o benefício social gerado pelo consumo realizado à taxa $r(x)$, e $h(p(x))$ a função contínua que determina o custo ocasionado quando se usa um esforço de exploração $p(x)$.

A cada política π é associada uma função que é chamada retorno esperado descontado $v(z)$, que corresponde ao retorno líquido obtido com a adoção da política π e quando $X_0 = z$, continuamente descontado a uma taxa α constante.

Então:

$$v(z) = E\left\{\int_0^\infty \exp(-\alpha t)[u(r(X_t))-h(p(X_t))]dt \,\middle|\, X_0=z\right\}, \quad z\geq 0. \tag{1}$$

A obtenção da forma funcional explícita de v(z) a partir da Definição 1 constitui-se normalmente numa difícil tarefa. Assim sendo, uma alternativa possível é a utilização do teorema de Deshmukh e Pliska (1980) que se segue.

TEOREMA 1 - v(z) é a única função limitada, absolutamente contínua em $(0, \infty)$, com derivada a esquerda v'(z) contínua a esquerda e com v'(z)r(z) limitada em $(0, \infty)$ que satisfaz:

$$\alpha v(z) = u(r(z))-h(p(z))-v'(z)r(z) + \int_0^\infty [v(z+y)-v(y)]\beta(p(z),dy), \quad z>0 \tag{2}$$

sujeita à condição inicial:

$$v(0) = -h(p(0)+ \int_0^\infty [v(y)-v(0)]\beta(p(0),dy). \tag{3}$$

Uma das principais vantagens desse teorema vem a ser a de que se, devido a algum fundamento, houver motivos que levam a crer que, para certas funções h(.), u(.) e $\pi(r(.), p(.))$, o retorno esperado descontado v(z) é de uma forma funcional específica, então é possível verificar se essa suspeita é procedente ou não, testando-a no teorema acima.

A Equação 2 vem a ser uma equação integro-diferencial estocástica de argumento avançado, para a qual só se conhece solução exata para alguns poucos casos particulares. Contudo, o trabalho de Milioni (1983) apresentou dois métodos de obtenção da solução aproximada para casos mais gerais. Assim, aqui será usado este resultado de Milioni para elaborar um exemplo simplificado de apli cação desse modelo no qual é analisado o caso do consumo e exploração do petróleo no Brasil.

O método desenvolvido por Milioni (1983) é baseado na aproximação de $r(x)$ por uma série de segmentos de reta do tipo $K_i x$. Milioni concluiu então que se a medida $\beta(p(x),dy)$ for do tipo:

$$\beta(p(x),dy) = \lambda(p(x))\mu \exp(-\mu y)dy$$

e se $u[r(x)]$ for uma função polinomial de qualquer grau n inteiro positivo, então $v(z)$ poderá ser aproximada por uma série de segmentos de funções polinomiais do mesmo grau. Ou seja, se:

$$u[r(x)] = a_0+a_1 r(x) + a_2[r(x)]^2 + \dots + a_n[r(x)]^n,$$

então $v(z)$ será do tipo:

$$v_i(z) = A_{i,0} + A_{i,1} z + \dots + A_{i,n} z^n, \quad x_{i-1} < x < x_i,$$

onde os coeficientes A_{ij} são dados por:

$$A_{i,j} = (1/\alpha+jK_i)[a_j K_i^j + \sum_{k=1}^{n-j} A_{i,j+k}\lambda_i(j+k)!/(\mu^k j!)],$$

com $i = 1, 2, \dots, m$, onde m é o número de retas do feixe $K_i x$ que são utilizadas para aproximar $r(x)$, e $j = 0, 1, \dots, n$, onde n é o grau da função polinomial $u[r(x)]$.

Apesar de constatar que a forma funcional de $v(z)$ acima não é solução exata para $v(z)$, Milioni (1983) concluiu, analítica e numericamente, que trata-se de uma boa aproximação.

4 - O PROBLEMA

Aqui é estudado o caso da otimização do consumo e exploração do petróleo no Brasil tomando 1980 como ano base ou de referência. Isto quer dizer que, neste exemplo, o final de 1980 é o momento no qual é tomada a decisão sobre a política $\pi(r(x), p(x))$ a ser adotada a partir de 1981 de forma a maximizar $v(z)$, valor esperado do retorno, descontado continuamente a uma taxa constante ao longo de um horizonte infinito de planejamento.

Este estudo ficará restrito a uma única classe de políticas, ou seja, não são feitas comparações entre diversas classes de políticas, e sim apenas buscados os parâmetros que maximizam $v(z)$ para a classe estudada.

São feitas também as seguintes hipóteses:

$$\begin{aligned} \beta(p(x),dy) &= \lambda(p(x))F(dy) \\ \lambda(p(x)) &= a + bp(x) \\ F(dy) &= \mu\exp(-\mu y)dy \end{aligned}$$

o que equivale a admitir que o esforço de exploração só afeta a taxa de descobertas, e essa atuação dá-se linearmente. Ainda, a distribuição da variável aleatória Y, magnitude de uma jazida descoberta, é admitida ser exponencial negativa.

É necessária então a determinação dos parâmetros λ e μ, o que é feito com o auxílio da Tabela 1.

TABELA 1

DADOS HISTÓRICOS

Ano	I.G.P.	I.Expl.	I.Dfl.	Tot.D.	N.C.D.
66	38.2	124	90	10.7	2
67	25.0	164	95	24.5	1
68	25.5	233	108	13.3	1
69	20.1	312	120	14.0	3
70	19.3	442	142	10.3	2
71	19.5	451	121	9.9	1
72	15.7	616	144	0.7	0
73	15.5	855	172	5.9	2
74	34.5	1508	226	7.3	3
75	29.4	2290	265	11.0	2
76	46.3	4229	335	24.7	1
77	38.8	5186	296	47.3	6
78	40.8	6148	249	16.3	0
79	77.2	11969	274	29.6	1
80	89.0	21907	265	22.9	2

FONTES: I.G.P. - Boletim do Banco Central do Brasil
I.Expl. - Relatório da Petrobrás
Tot.D. - IPEA
N.C.D. - IPEA

SIGLA	SIGNIFICADO	UNIDADE
I.G.P.	Índice Geral de Preços	%
I.Expl.	Investimento em Exploração	10^6 Cr$
I.Dfl.	Investimento Deflacionado	10^6 u.m.
Tot.D.	Total de Petróleo Descoberto	10 m^3
N.C.D.	Número de Campos Descobertos	unidades

As informações contidas nas colunas 2 e 3, respectivamente, Índice Geral de Preços e Investimento em Exploração realizado no Brasil, geram a informação contida na coluna 4, ou seja, Investimento em Exploração Deflacionado a partir de 1965, medido em unidades monetárias (u.m.) que representam o valor de um cruzeiro em qualquer instante de tempo, deflacionado até 1965.

Na coluna 5 é mostrada a quantidade total de petróleo descoberto em cada ano, e na coluna 6, Número de Campos Descobertos, são expostos os valores relativos ao total de unidades de campos petrolíferos descobertos por ano, definindo "campo petrolífero" como uma região delimitada e demarcada, que não se interseccione com outras regiões e cujo potencial de reservas esteja definitivamente avaliado.

Com essa informação da coluna 6, com aquela contida na coluna 4, e com a utilização da técnica de ajuste de curvas por mínimos quadrados é possível obter:

$$\lambda(p) = 1.1231 + 0.0037p, \tag{4}$$

com a ressalva que tal resultado só é válido para p pertencente ao intervalo [90,335], que é a faixa na qual se situam os dados utilizados para a obtenção de $\lambda(p)$.

Com as informações contidas nas colunas 5 e 6 é possível estimar o parâmetro μ que, no caso da variável aleatória exponencial negativa, é igual ao inverso da média. Portanto, se Y é a magnitude de cada campo descoberto, então $\mu = 1/E(Y)$, onde

$$E[Y] = \text{Vol.Tot.Descoberto} \;/\; \text{Núm. de Campos Descobertos};$$

logo, $E[Y]$ = Soma da coluna 5 / Soma da coluna 6 = 9.3 e, portanto, $\mu = 0.108$.

Resta ainda serem definidos:

α	- Taxa anual de descontos.
$r(x)$	- Taxa de consumo de petróleo extraído das reservas nacionais.
$p(x)$	- Esforço de exploração do petróleo nacional.
$h(p(x))$	- Custo devido ao esforço de exploração realizado.
$u[r(x)]$	- Utilidade proveniente do consumo.

$\bar{r}$ - Máxima taxa de consumo do petróleo nacional devido às restrições técnicas quanto à capacidade de extração.

$\bar{p}$ - Máximo esforço de exploração devido às restrições orçamentárias da Petrobrás.

z - X_0 = Nível comprovado de reservas.

$\Pi(r(x),p(x))$ - Política de consumo e exploração a ser utilizada.

São feitas então as seguintes hipóteses:

$$\begin{cases} \alpha = 12\% \text{ ao ano (Obs. 1)} \\ h(p(x)) = p(x) \text{ (Obs. 2)} \\ \bar{r} = 10.9 \times 10^6 m^3 \text{ (Fonte: IPEA)} \\ \bar{p} = 330 \times 10^6 \text{ u.m. (Obs. 1)} \\ z = 200 \times 10^6 m^3 \text{ (Fonte: IPEA)} \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} u(r(x)) = r(x)\ (Cimp - Cnac) \text{ (Obs. 3)} \\ Cimp = \text{Preço médio do } m^3 \text{ de petróleo importado em 1980} \\ Cnac = \text{Custo de extração e industrialização do } m^3 \text{ de petróleo retirado de reservas nacionais} \\ Cimp = US\$\ 192.47 \text{ (Fonte: IPEA)} \\ Cnac = US\$\ 157.25 \text{ (Obs. 1)} \\ \text{Valor médio de 1 Dólar em 1980} = Cr\$50.00 = 1.143 \text{ u.m.} \\ \text{Portanto: } Cimp = 220 \text{ u.m. e } Cnac = 180 \text{ u.m.} \end{cases} \tag{6}$$

$$\Pi(r(x),p(x)) = \begin{cases} p(x) = p = \text{constante, portanto } h(p(x)) = p \\ r(x) = \begin{cases} K_1, & 0 < x < x^* \text{ (Obs. 4)} \\ K_2, & x^* \leq x \end{cases} \\ \quad \text{com } K_1 < K_2 \leq \bar{r}. \end{cases}$$

OBSERVAÇÕES:

1. Estimado por impossibilidade de obtenção de dados reais.
2. É possível fazer $h(p(x)) = p(x)$, uma vez que $p(x)$ está definido em unidades monetárias (ver Tabela 1).
3. É suposto que a utilidade gerada pelo consumo de 1 m^3 de petróleo nacional é igual à economia em dólares decorrente do fato de não ser necessária a importação de igual quantidade de petróleo do exterior.

4. Tal política implica que o esforço de exploração será sempre constante, e a taxa de consumo será constante por intervalos, ou seja, é constante e igual a K_2 enquanto o nível de estoque for superior a x^*, e constante e igual a $K_1 (< K_2)$ se o nível de estoque for inferior a x^*. Para efeito de cálculos, foi considerado $K_1 = 7 \times 10^6 m^3$ e $x^* = 50 \times 10^6 m^3$, o que implica considerar que, quando o nível de estoque cair a menos do que $50 \times 10^6 m^3$, é aplicado um racionamento de aproximadamente 35% na taxa de consumo de petróleo nacional, em relação à taxa máxima de consumo $\bar{r}$.

Agora, sob as hipóteses formuladas, são variados os parâmetros K_2 e p de forma a procurar o par que maximiza o retorno esperado descontado $v(z)$. Os resultados (resumidos) podem ser encontrados na Tabela 2, na qual:

$v(z)$ = Retorno esperado descontado obtido por aproximação (em 10^6u.m.).

TABELA 2

RESULTADOS NUMÉRICOS

p	K_2	v(z)	p	K_2	v(z)
90	7.0	3853	200	7.0	3400
90	8.0	4153	200	8.0	3730
90	9.0	4430	200	9.0	4035
90	10.0	4689	200	10.0	4319
90	10.5	4811	200	10.5	4453
90	10.9	4906	200	10.9	4557
100	7.0	3811	330	7.0	2863
100	8.0	4114	330	8.0	3228
100	9.0	4395	330	9.0	3567
100	10.0	4655	330	10.0	3882
100	10.5	4778	330	10.5	4030
100	10.9	4874	330	10.9	4146

5 - ANÁLISE DOS RESULTADOS

Pela observação da Tabela 2 é possível constatar que o retorno esperado é máximo (e igual a 4906×10^6u.m.), quando são utilizados o menor esforço de exploração e o máximo valor de K_2, ou seja:

$$p = 90 \times 10^6 \text{u.m.} \quad e \quad K_2 = 10.9 \times 10^6 m^3$$

Portanto, dessas informações seria possível concluir que v(z) é máximo quando consome-se à taxa máxima que permite a restrição $\bar{r}$, e realiza-se o menor esforço possível de exploração. Contudo, tais resultados são questionáveis, em virtude de algumas simplificações existentes no modelo.

Neste caso, fica evidente pela definição da função utilidade (Equação 6) que a utilidade só aumenta quando for aumentada a taxa de consumo, que é limitada, por razões técnicas, ao valor $\bar{r}$. Por sua vez, é importante ressaltar que $\bar{r}$ é muito pequeno se comparado ao nível inicial de reservas comprovadas. Assim sendo, a realização de um esforço de exploração maior, ainda que provoque um aumento na frequência de descobertas, com consequente aumento do nível de estoque, acarretará apenas maiores custos, sem provocar aumento na utilidade associada ao consumo, que não poderá aumentar devido às razões técnicas já mencionadas.

Mais ainda, fica nítido também que um aumento no esforço de exploração p(x) provoca um aumento muito pequeno na frequência de descobertas de novas jazidas $\lambda(p(x))$ (Equação 4). Em contrapartida, aumentar p(x) implica aumentar identicamente o custo associado à exploração h(p(x)) (Equação 5).

Essas considerações explicam o resultado obtido, ou seja, o valor máximo para o retorno esperado descontado foi obtido quando se utilizaram o mínimo esforço de exploração possível e a máxima taxa de consumo.

Alguns dos problemas mencionados podem ser contornados pela introdução de alterações nas hipóteses formuladas. Assim, suponha-se inicialmente que a restrição técnica que limita a taxa de consumo é superior à real, por exemplo:

$$\bar{r} = 40 \times 10^6 m^3.$$

Tal hipótese em nada altera a conclusão anterior, ou seja, é novamente constatado que o retorno esperado descontado é máximo (nesse caso igual a 8928 x 10^6 u.m.) quando explora-se à taxa mínima ($\bar{p}$ = 90 x 10^6 u.m.) e consome-se à taxa máxima possível (K_2 = = 40 x 10^6 m^3). O maior retorno obtido neste caso poderia conduzir à conclusão que seria vantajoso aumentar a capacidade atual de extração de petróleo nacional. Há que se lembrar, entretanto, que tal conclusão decorre de uma análise feita sob a hipótese de que não há penalidades quanto ao aumento na taxa de consumo, ou seja, não há penalidades para a exaustão das reservas nacionais.

Desta forma, é conveniente analisar a influência de um efeito penalizador de consumo a taxas muito elevadas, como por exemplo a incorporação em u[r(x)] de um termo de segunda ordem em r(x) com coeficiente negativo.

Seja então, por exemplo, a seguinte forma funcional para a função utilidade:

$$u[r(x)] = 40r(x) - 0.36[r(x)]^2.$$

O coeficiente do termo de primeira ordem foi calculado, como no exemplo anterior, como a diferença entre o custo de consumir um m^3 de petróleo importado e um m^3 de petróleo proveniente de jazidas nacionais, e o termo de segunda ordem, arbitrado, foi colocado com a intenção de penalizar uma taxa excessivamente elevada de consumo de petróleo nacional, pelo motivo estratégico da total dependência do petróleo exterior caso ocorra a exaustão das reservas nacionais.

Resolvendo esse novo problema pelo método de obtenção de v(z) por aproximação, conclui-se então que v(z) é máximo (e igual a 5379 x 10^6u.m.) quando:

$$p = 90 \times 10^6 \text{u.m.} \qquad \text{e} \qquad K_2 = 37 \times 10^6 m^3.$$

ou seja, a taxa de consumo que maximiza o retorno esperado descontado não é mais igual a $\bar{r}$, embora permaneça idêntica a conclusão relativa ao esforço de exploração a ser utilizado. Também é possível observar que houve uma diminuição do retorno máximo em relação ao caso em que não há penalidades no consumo.

Admitindo agora que alterações na economia mundial provocaram um novo aumento no preço do petróleo, alterando os parâmetros da função utilidade que agora premia com maior intensidade o consumo de petróleo proveniente de reservas nacionais, por exemplo:

$$u[r(x)] = 42r(x) - 0.36[r(x)]^2,$$

e resolvendo então o problema sob essa nova configuração, os novos parâmetros ótimos encontrados são:

$$p = 90 \times 10^6 \text{u.m.} \qquad \text{e} \qquad K_2 = 38 \times 10^6 \text{m}^3,$$

fornecendo um retorno $v(z)$ igual a 5825×10^6 u.m. Ou seja, houve um aumento no nível ótimo de consumo de petróleo proveniente de jazidas nacionais na ausência de racionamento, como era de se esperar, devido ao aumento do custo de petróleo importado. Houve ainda um aumento no retorno $v(z)$ com relação ao caso anterior, uma vez que agora o consumo de 1 m^3 de petróleo nacional implica uma maior utilidade.

Em seguida é analisado o caso em que a relação entre p e $\lambda(p)$ é mais forte do que a que consta na Equação 4, por exemplo:

$$\lambda(p) = 1.1231 + 0.007p.$$

Sob essa nova hipótese, e supondo uma função utilidade novamente do tipo:

$$u[r(x)] = 40r(x) - 0.36[r(x)]^2,$$

para que seja máximo o valor do retorno esperado descontado, é necessário que:

$$p = 97 \times 10^6 \text{u.m.} \qquad \text{e} \qquad K_2 = 37 \times 10^6 \text{m}^3,$$

fornecendo um retorno v(z) igual a 5750 x 10^6u.m.

Fica nítido agora que o nível ótimo de esforço de exploração não mais é o nível mínimo. É provável que um estudo com dados históricos mais remotos provasse que a relação entre p e $\lambda(p)$ aproxima-se mais dessa última hipótese do que a que foi considerada na Equação 4.

Da mesma forma, o problema poderia ser analisado caso houvesse alterações no custo de exploração, na frequência de descobertas, na penalização do aumento exagerado do consumo, no valor crítico do nível de reservas a partir do qual há racionamento, na política de consumo e exploração, etc.

Finalmente, resta acrescentar que, embora este trabalho dedique-se a uma aplicação prática na área de recursos naturais não-renováveis, o modelo estudado é genérico, podendo também ser usado nas áreas de controle de filas, estoques, etc.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

DASGUPTA, P.; HEAL, G.M. The optimal depletion of exhaustible resources. *The Review of Economic Studies, 41:*3-29, 1974.

DAVISON, R. Optimal depletion of an exhaustible resource with research and development towards an alternative technology. *The Review of Economic Studies, 45:*354-367, 1978.

DESHMUKH, S.D.; PLISKA, S.R. Optimal consumption and exploration of nonrenewable resources under uncertainty. *Econometrica, 49*(1):177-200, 1980.

GILBERT, R. Optimal depletion of an uncertain stock. *The Review of Economic Studies, 46:*47-57, 1979.

HOTELLING, H. The economics of exhaustible resources. *Journal of Political Economy, 39:*135-175, 1931.

KAMIEN, M.I.; SCHWARTZ, N.I. Optimal exhaustible resource with endogenous technical change. *The Review of Economic Studies, 45:*179-196, 1978.

LOURY, G.C. The optimal exploration of an unknown reserve. *The Review of Economic Studies, 45:*621-636, 1978.

MACQUEEN, J.B. A problem in survival. *Annals of Mathematical Statistics, 32:*605-609, 1961.

——— A problem in making resources last. *Management Science, 11:*341-347, 1964.

MILIONI, A.Z. *Um modelo estocástico para otimização do consumo e exploração de um recurso natural não-renovável.* Tese de Mestrado em Pesquisa Operacional. São José dos Campos, ITA, 1983.

MORAIS, P.R. *Optimal control of a storage system.* Doctoral Thesis in Operations Research. Evanston, IL, Northwestern University, 1977.

——— Controle ótimo de sistemas de armazenamento. In: Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, XII, São Paulo, 1979. *Anais.* São Paulo, Sociedade Brasileira de Pesquisa Operacional, 1979. v. II, p. 571-584.