Um modelo markoviano para um sistema flexível de manufatura com capacidade de espera limitada

Márcia Aparecida Monteiro

Paulo Renato de Morais

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE)

Av. dos Astronautas, 1758

12227-010 - São José dos Campos - SP

Resumo

No sistema em estudo tem-se uma Unidade Flexível de Manufatura, uma Linha de Montagem 1 para a produção de peças tipo 1 e uma Linha de Montagem 2 para a produção de peças tipo 2. Considera-se dois tipos de demandas: tipo 1 e tipo 2, cada uma delas com sua própria taxa de chegada e serviço. A unidade flexível e as linhas de montagem possuem áreas de espera com capacidade limitada. Existem custos de rejeição de demandas, custos de espera das demandas nas filas e custos de ociosidade nas linhas de montagem. Num trabalho anterior tratou-se do controle ótimo de chegadas e atendimentos de demandas em função do estado do sistema flexível de manufatura, de modo a minimizar o custo médio esperado a longo prazo, utilizando-se a teoria dos processos markovianos de decisão. Neste trabalho comparam-se dois modelos: um que considera áreas de espera comuns para as demandas na unidade flexível e outro com áreas de espera separadas para cada tipo de demanda. O objetivo é verificar as vantagens e desvantagens de cada um desses tipos de modelo.

1. Introdução

Este trabalho considera um sistema em que uma unidade flexível de manufatura recebe demandas tipo 1 e demandas tipo 2. Se a unidade flexível está ocupada, a demanda é colocada numa fila com capacidade de espera N_1, se for do tipo 1, ou N_2, se for do tipo 2. Essas demandas, tipo 1 e tipo 2, chegam independentemente de acordo com Processos de Poisson com taxas de chegadas respectivas λ_1 e λ_2. Nestes instantes de chegada, uma decisão de aceitar ou rejeitar uma demanda deve ser tomada. A unidade flexível também deve decidir, em instantes em que termina o processamento de uma demanda, que tipo de demanda deve ser atendida em seguida. Após o término de processamento de uma demanda pela unidade flexível, a peça semi-acabada é encaminhada para as linhas específicas: linha de montagem 1 para a produção de peças tipo 1 e linha de montagem 2 para a produção de peças tipo 2. As linhas de montagem 1 e 2 têm capacidade de espera M_1 e M_2, respectivamente.

Os tempos de processamento das demandas tipo 1 e tipo 2 na unidade flexível, linha de montagem 1 e linha de montagem 2 são exponencialmente distribuídos com taxas $\mu_{10}, \mu_{20}, \mu_{11}$ e μ_{22}, respectivamente.

O sistema incorre num custo de rejeição de demandas à taxa α_k, k=1,2, quando uma demanda tipo k é rejeitada, e num custo de perda de produção a taxas γ_1, γ_2 e γ_3, quando a unidade flexível ou a linha de montagem tipo 1 ou a linha de montagem tipo 2 está ociosa, respectivamente. Também, um custo de espera à taxa h.i é incorrido quando houver i demandas esperando ser atendidas numa das filas do sistema.

Num trabalho anterior [1] tratou-se do controle ótimo de chegadas e atendimentos de demandas tipo 1 e tipo 2, em função do estado do sistema, de maneira a minimizar o custo médio por unidade de tempo a longo prazo. Neste trabalho foi considerado que os dois tipos de demanda compartilhavam uma área de espera comum na unidade flexível.

No presente trabalho faz-se uma comparação deste modelo com outro que considera áreas de espera separadas para cada tipo de demanda. O objetivo é verificar as vantagens e desvantagens de cada um desses tipos de modelo.

Tijms [2] estudou o controle de um sistema flexível de manufatura onde não foram levadas em consideração as chegadas de demandas na unidade flexível. Tratou do problema como se sempre existissem demandas esperando pelo atendimento. Assim, os instantes de decisão se restringiram aos instantes de término de atendimento de uma demanda na unidade flexível. Outros trabalhos podem ser encontrados na área: Foschini, Gopinath e Hayes [3], Foschini e Gopinath [4] e Tijms e Eikeboom [5].

No presente trabalho, assume-se que a unidade flexível não pode ficar ociosa se, simultaneamente, existirem demandas tipo k na unidade flexível e a fila na linha de montagem k não estiver no limite de sua capacidade para k=1,2. Também, o serviço de uma demanda tipo k não pode ser iniciado se a fila na linha de montagem k estiver completa, para k=1,2.

A estrutura deste artigo é a seguinte: na seção 2, formula-se o Processo Semi-Markoviano de Decisão para o problema em questão. Na seção 3, descreve-se os tempos e custos esperados entre transições, e as probabilidades de transição. Finalmente, na seção 4, apresentam-se alguns comentários finais.

2. Um Modelo Semi-Markoviano de Decisão

O problema de otimização para o sistema em estudo pode ser modelado como um Processo Semi-Markoviano de Decisão. Os instantes de decisão são os instantes de chegadas de demandas tipo k, k=1,2, na unidade flexível, término de atendimento na unidade flexível e término de atendimento nas linhas de montagem 1 e 2.

O espaço de estados do processo é:

$$S = \{\ s = (i_1, i_2, q, i_1', i_2', k) \,/\, i_1 = 0,1,\ldots,N_1;\ i_2 = 0,1,\ldots,N_2;\ q=0,1,2;\ i_1'=0,1,\ldots,M_1;\ i_2'=0,1,\ldots,M_2;\ k=1,2,3,4,5,6\ \}$$

onde o estado s é tal que existem i_1 demandas tipo 1 na unidade flexível, i_2 demandas tipo 2 na unidade flexível, i_1' demandas tipo 1 na linha de montagem 1 e i_2' demandas tipo 2 na linha de montagem 2; ainda, a unidade flexível está atendendo uma demanda tipo 1 ou tipo 2 se q=1 ou q=2, respectivamente, e está ociosa se q=0 no instante imediatamente anterior à tomada de decisão. Se k=1,2, significa que houve a chegada de uma demanda tipo k; se k=3,4, significa que houve o término de atendimento de uma demanda tipo 1 ou tipo 2 na unidade flexível, respectivamente; se k=5,6,significa que houve um término de atendimento nas linhas de montagem 1 e 2, respectivamente. As ações possíveis são :

$$a = \begin{cases} 0 & \text{se rejeita a demanda que chega na unidade flexível} \\ 1 & \text{se aceita a demanda que chega na unidade flexível} \\ 2 & \text{se nenhum atendimento de demanda tipo1 é inicializado na unidade flexível} \\ 3 & \text{se um atendimento de demanda tipo1 é inicializado na unidade flexível} \\ 4 & \text{se um atendimento de demanda tipo2 é inicializado na unidade flexível} \\ 5 & \text{se deixa o sistema como está} \end{cases}$$

Seja A(s) o conjunto de ações possíveis no estado $s = (i_1, i_2, q, i_1', i_2', k)$. Para controlar o sistema, consideram-se políticas estacionárias, que são funções f: $S \rightarrow A(s)$ tal que se o estado observado no instante de decisão é $s \in S$ então uma única ação $f(s) \in A(s)$ é escolhida. Para obter uma política estacionária f que minimize o custo médio por unidade de tempo do sistema a longo prazo, uma alternativa é a utilização do Algoritmo de Iteração de Valores descrito a seguir (ver Tijms (1986, p.190)).

Dado que em um instante de decisão o sistema está no estado $s \in S$ e a ação $a \in A(s)$ foi escolhida, definem-se: $\tau_s(a)$ como o tempo esperado até o próximo instante de decisão; $P_{st}(a)$ como a probabilidade que no próximo instante de decisão o estado seja t; e $c_s(a)$ como o custo esperado incorrido até o próximo instante de decisão.

PASSO 1: Escolher $V_0(s)$ tal que $0 \leq V_0(s) \leq \min_{a \in A(s)} \in \{c_s(a)/.\ \tau_s(a)\}$ para todo s. Fazer n = 1.

PASSO 2: Calcular a função $V_n(s)$, $s \in S$, a partir de:

$$V_n(s) = \min_{a \in A(s)} \left[\frac{c_s(a)}{\tau_s(a)} + \frac{\tau}{\tau_s(a)} \sum_{t \in S} p_{st}(a)\, V_{n-1}(t) + \left\{ 1 - \frac{\tau}{\tau_s(a)} \right\} V_{n-1}(s) \right]$$

e determinar f(n) como uma política estacionária cujas ações minimizam o lado direito da expressão acima, onde τ é um valor escolhido no intervalo $0 < \tau < \min_{\substack{a \in A(s) \\ s \in S}} \tau_s(a)$.

PASSO 3: Calcular os limites

$$m_n = \min_{t \in S} \{ V_n(t) - V_{n-1}(t) \} \quad \text{e} \quad M_n = \max_{t \in S} \{ V_n(t) - V_{n-1}(t) \}.$$

O algoritmo é interrompido com a política f(n) quando $0 \leq (M_n - m_n) \leq \varepsilon m_n$, onde ε é um número pré-especificado. Caso contrário, deve-se ir para o passo 4.

PASSO 4: n := n + 1 e voltar ao passo 2.

3. Determinação dos tempos e custos esperados entre transições e das probabilidades de transição

Nesta seção, obtém-se as quantidades τ_s (a), $P_{st}(a)$ e $c_s(a)$, que são necessárias para a utilização do algoritmo de iteração de valores descrito no item anterior.

Para o cálculo do tempo esperado entre transições, suponha que o sistema está no estado s = (i_1, i_2, q, i_1', i_2', k) e a ação a∈A(s) foi escolhida. Então o tempo entre transições é o mínimo entre o tempo até a chegada de uma demanda tipo k (exponencial com parâmetro λ_k) e os tempos até o término de atendimento de uma demanda tipo k, k=1,2, na unidade flexível, linha de montagem 1 e linha de montagem 2 (exponencialmente distribuídos com taxas $\mu_{10}, \mu_{20}, \mu_{11}$ e μ_{22} respectivamente).

Logo,

$$\tau_s\,(a)=1/(\lambda_1+\lambda_2+\mu_{10}\delta(i_1\,,i_1',q)+\mu_{20}\delta(i_2,\,i_2',q)+\mu_{11}\delta(i_1')+\mu_{22}\delta(i_2')),$$

onde

$$\delta(i_1,\,i_1',q) = \begin{cases} 1 & \text{para } i_1 \geq 1,\ i_1' < M_1 \text{ e } q = 1, \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

$$\delta(i_2,\,i_2',q) = \begin{cases} 1 & \text{para } i_2 \geq 1,\ i_2' < M_2 \text{ e } q = 2, \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

$$\delta(i_k') = \begin{cases} 1 & \text{para } i_k' \geq 1 \text{ e } k = 1,\,2, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Para um exemplo do cálculo das probabilidades de transição, suponha que o sistema está no estado s=(0,0,0,1,0,2) e que a ação a=0 foi tomada. Ou seja, há apenas uma demanda tipo 1 sendo atendida na linha de montagem 1, houve a chegada de uma demanda tipo 2 na unidade flexível e a ação tomada foi rejeitar esta chegada. Então, até o próximo instante de observação poderá ocorrer a chegada uma demanda tipo k na unidade flexível, isto é, o estado tornar-se t=(0,0,0,1,0,k) com $P_{st}(0) = \lambda_k/(\lambda_1+\lambda_2+\mu_{11})$, k=1,2, ou poderá ocorrer o término de atendimento de uma demanda tipo 1 na linha de montagem 1, isto é, o estado tornar-se t=(0,0,0,0,0,5) com $P_{st}(0) = \mu_{11}/(\lambda_1+\lambda_2+\mu_{11})$. De maneira análoga, calculam-se as outras probabilidades de transição.

O custo esperado entre decisões, $c_s(a)$, leva em conta todos os custos em que o sistema incorre. As expressões para os custos são:

$$c_s(0) = \alpha_k + \quad (\gamma_1\,(1-\delta(i_1, i_2\,, i_1', i_2')) + \gamma_2\,(1-\delta(i_1')) + \gamma_3\,(1-\delta((\,i_2')) + h_1\ i_1 + h_2\ i_2 + h_1\ 'i_1' + h_2\ '\,i_2'\,')\ *\ \tau_s\ (0) \qquad \text{para k=1,2,}$$

$$c_s(1) = (\gamma_1 + \quad \gamma_3\,(1-\delta(\,i_2')) + h_1\ (i_1+1) + h_2\ i_2 + h_1\ 'i_1' + h_2\ '\,i_2'\,)\ *\ \tau_s\ (1) \qquad \text{para k=1 e } i_1' = M_1,$$

$$c_S(1) = (\gamma_2 (1 - \delta(i_1')) + \gamma_3 (1-\delta(i_2')) + h_1 (i_1 + 1) + h_2 i_2 + h_1' i_1' + h_2' i_2') * \tau_S (1)$$

para $k=1$ e $i_1' < M_1$,

$$c_S(1) = (\gamma_1 + \gamma_2 (1-\delta(i_1')) + h_1 i_1 + h_2 (i_2 + 1) + h_1' i_1' + h_2' i_2') * \tau_S (1)$$ para $k=2$ e $i_2' = M_2$,

$$c_S(1) = \gamma_2 (1 - \delta(i_1')) + \gamma_3 (1-\delta(i_2')) + h_1 i_1 + h_2 (i_2 + 1) + h_1' i_1' + h_2' i_2') * \tau_S (1)$$

para $k=2$ e $i_2' < M_2$,

$$c_S(2) = (\gamma_1 + \gamma_2 (1-\delta(i_1')) + \gamma_3 (1-\delta(i_2')) + h_1 i_1 + h_2 i_2 + h_1' i_1' + h_2' i_2') * \tau_S (2)$$

para $k=3,4$,

$$c_S(3) = (\gamma_2 (1 - \delta(i_1')) + \gamma_3 (1 - \delta(i_2')) + h_1 i_1 + h_2 i_2 + h_1' i_1' + h_2' i_2') * \tau_S (3)$$

para $k=3,4$,

$$c_S(4) = (\gamma_2 (1 - \delta(i_1')) + \gamma_3 (1 - \delta(i_2')) + h_1 i_1 + h_2 i_2 + h_1' i_1' + h_2' i_2') * \tau_S (4)$$

para $k=3,4$,

$$c_S(5) = (\gamma_1 (1 - \delta(i_1, i_2, i_1', i_2')) + \gamma_2 (1-\delta(i_1')) + \gamma_3 (1-\delta(i_2')) + h_1 i_1 + h_2 i_2 + h_1' i_1' + h_2' i_2') * \tau_S (5)$$ para $k = 5,6$.

$$\text{onde} \quad \delta(i_1, i_2, i_1', i_2') = \begin{cases} 1 & \text{para } i_1 \geq 1,\ i_2 \geq 1,\ i_1' < M_1 \text{ e } i_2' < M_2, \\ 1 & \text{para } i_1 = 0,\ i_2 \geq 1 \text{ e } i_2' < M_2, \\ 1 & \text{para } i_1 \geq 1,\ i_2 = 0 \text{ e } i_1' < M_1, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

4. Resultados numéricos

Para a implementação do Algoritmo de Iteração de Valores desenvolveu-se um programa na linguagem Pascal. Utilizou-se um microcomputador 386 para a obtenção dos resultados apresentados a seguir. Os dados de entrada foram:

$M_1=2$, $M_2=2$,

$\lambda_1=2{,}5$, $\lambda_2=1{,}2$, $\mu_{10}=2$, $\mu_{20}=1{,}3$, $\mu_{11}=1{,}5$, $\mu_{22}=1{,}4$,

$\alpha_1=40$, $\alpha_2=32$, $\gamma_1=45$, $\gamma_2=40$, $\gamma_3=33$, $h_1=11$, $h_2=7$, $h_1'=9$, $h_2'=8$ e

$\varepsilon=10^{-5}$.

Considerando uma área de espera comum para as demandas na unidade flexível, para $N=4$, $M_1=2$ e $M_2=2$, obteve-se $g^* = 198{,}50$

Considerando áreas de espera separadas para cada tipo de demanda na unidade flexível,

- para N_1 =3, N_2 =1, obteve-se g* = 206,90

- para N_1 =1, N_2 =3, obteve-se g* = 198,50

- para N_1 =2, N_2 =2, obteve-se g* = 199,15

- para N_1 =0, N_2 =4, obteve-se g* = 201,97

- para N_1 =4, N_2 =0, obteve-se g* = 250,62

5. Comentários finais

O objetivo do trabalho foi, usando uma abordagem de modelamento por Processo Semi-Markoviano de Decisão, comparar dois modelos de filas e verificar as vantagens e desvantagens de cada um deles.

Para todos os conjuntos de dados observados, os resultados obtidos mostraram que a separação em duas filas não melhora o desempenho do sistema. No entanto, dada a complexidade do modelo não foi possível demonstrar este fato.

Em estudos posteriores pretende-se analisar o comportamento das áreas de espera nas linhas de montagem 1 e 2 para outros tipos de filas.

5. Bibliografia

[1] Monteiro, M.A., Morais, P.R., 'Controle do Processo de Chegadas e Atendimentos em um Sistema Flexível de Manufatura', Anais do XXIV Simpósio Brasileiro de Pesquisa Pesquisa Operacional, Salvador, BA, 25 a 27 de novembro de 1992.

[2] Tijms, H.C. 'Stochastic Modelling and Analysis: A Computational Approach', Wiley, New York, 1986.

[3] Foschini, G.J., Gopinath, B., Hayes, J.F., 'Optimum Allocation of Servers to Two Types of Competing Customers', IEEE Trans. Commun., V. Com-29, n°. 7, 1051-1055, 1981.

[4] Foschini, G.J., Gopinath, B. 'Sharing Memory Optimally', IEEE Trans. Commun., V. Com-31, n°. 3, 353-360, 1983.

[5] Tijms, H.C., Eikeboom, A.M. 'A Simple Technique in Markovian Control with Applications to Resource Allocation in Communication Networks', Operat. Res. Letters, V. 5, n°. 1, 25-32, 1986.