MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA, INOVAÇÕES E COMUNICAÇÕES
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

INTRODUÇÃO À FÍSICA DOS BURACOS NEGROS E A ALGUMAS SOLUÇÕES EXÓTICAS DA RELATIVIDADE GERAL

RELATÓRIO FINAL DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA
(PIBIC/INPE/CNPq)

Mário Raia Neto (Universidade Federal de São Carlos, Bolsista PIBIC/CNPq)
E-mail: mraianeto@gmail.com

Luiz Cláudio Lima Botti (Coordenação/Divisão, Orientador)
E-mail: luizquas@yahoo.com.br

Julho de 2019

SUMÁRIO

1 FORMALISMO MATEMÁTICO

1.1 TENSORES

1.1.1 O CONCEITO DE TENSOR

Suponha que exista um aquecedor em um certo ambiente. Suponha, também, que seja necessário medir a temperatura deste certo ambiente. Um medidor de temperatura, chamado de *termômetro*, é utilizado então para determinar, ponto-a-ponto, como a temperatura deste ambiente –ou espaço– varia com o tempo. Nota-se portanto que em cada ponto do espaço, o termômetro exibe um certo valor de temperatura para um dado valor de tempo, e tal como a vivência diária mostra, ao chegar perto do aquecedor a temperatura aumenta; longe do aquecedor a temperatura diminuí.

Um modelo matemático para quantificar a temperatura em cada ponto do espaço é codificado em termos de uma função que a cada ponto $p \equiv (t, x^1, x^2, x^3)$[1] do espaço associa um valor de temperatura, isto é:

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^{3+1} &\to \mathbb{R} \\ p &\mapsto T(p) \end{aligned}$$

Entretanto, como a escolha das coordenadas que representam os pontos do espaço é totalmente arbitrária, pode-se descrever igualmente bem a função de temperatura com respeito a um outro sistema de coordenadas (t', x'^1, x'^2, x'^3). Fisicamente sabe-se que não importa se a medição da temperatura é feita em termos de um sistema de coordenadas tal como (t, x^1, x^2, x^3) ou (t', x'^1, x'^2, x'^3), o valor real resultante será o mesmo; isso quer dizer que dado um referencial S, com um sistema de coordenadas (x^i) e outro S' com um sistema de coordenadas (x'^i), observadores O e O' em seus referenciais vão medir a mesma temperatura do aquecedor. A ideia acima pode ser traduzida matematicamente como:

$$T'(t', x'^1, x'^2, x'^3) = T(t, x^1, x^2, x^3) \tag{1}$$

[1]Onde (x^1, x^2, x^3) são coordenadas –por exemplo, cartesianas ou esféricas– arbitrárias em um espaço tridimensional.

Por exemplo, suponha que em um referencial S, descrito em termos de coordenadas cartesianas (t, x, y, z), o observador O encontre que a temperatura de um ambiente, em um dado instante de tempo t, seja dada por uma função tal como $T = T_0 e^{-d}$, onde d é a distância:

$$d =: \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} \tag{2}$$

e T_0 é a temperatura inicial. Similarmente, para um outro referencial S', o observador O' medirá, de fato, $T' = T_0 e^{-d'}$.

Agora, considerando um movimento relativo unidimensional na direção do eixo x das abicissas, entre os referenciais, –por exemplo, S' em movimento relativo a S– a temperatura, em um dado instante de tempo t, que O' mede deverá ser igual a medida por O, não importando o estado de movimento:

$$T_0 e^{-d'} = T_0 e^{-\sqrt{(x'-x_0')^2+(y'-y_0')^2+(z'-z_0')^2}} =$$

$$= T_0 e^{-\sqrt{\Delta x'^2+\Delta y'^2+\Delta z'^2}} = T_0 e^{-\sqrt{[(x-v^x t)-(x_0-v^x t)]^2+\Delta y^2+\Delta z^2}} = T_0 e^{-\sqrt{[(x-v^x t-x_0+v^x t)]^2+\Delta y^2+\Delta z^2}} =$$

$$= T_0 e^{-\sqrt{(x-x_0)^2+\Delta y^2+\Delta z^2}} = T_0 e^{-\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}} =$$

$$= T_0 e^{-\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}} = T_0 e^{-d}$$

Logo,

$$T_0 e^{-d'} = T_0 e^{-d} \tag{3}$$

De fato, os dois observadores encontraram funções iguais, que resultam valores reais iguais. Em verdade, o que foi feito, foi então a análise da temperatura de um ambiente com respeito a dois referenciais com coordenadas diferentes, relacionados por uma transformação de coordenadas de dada por uma transformação de Galileo, para um movimento unidimensional:

$$\begin{cases} x' = x - v^x t \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \tag{4}$$

Com essa motivação em mente, de forma intuitiva pode-se dizer que na natureza existem quantidades $\phi'(x^{i'})$ –descrita com respeito a um referencial S' construído a partir de coordenadas[2] $x^{i'}$–, que não se modificam quando ocorre uma mudança de coordenadas de $x^i \to x^{i'}$, isto é:

$$\phi'(x^{i'}) = \phi(x^i) = \phi(x^{i'}) \tag{5}$$

tais quantidades são chamadas de quantidades *escalares* ou *campos escalares* e de forma extremamente intuitiva pode-se pensar que um campo escalar define em cada ponto do espaço considerado, um número. No caso acima, um valor numérico de temperatura em cada ponto.

Contudo, apesar do caráter único do campo escalar, de fato *existem* quantidades que se modificam dada uma transformação de coordenadas. Tal como foi natural o surgimento de toda uma gama de quantidades[3] com a propriedade de (5), é natural o surgimento de quantidades ditas *vetoriais* e *tensoriais* definidas com respeito ao seu "comportamento" mediante a uma transformação de coordenadas.

Sendo assim, considere então o seguinte sistema físico: uma certa pessoa está em repouso com relação a terra[4] girando uniformemente uma esfera de massa m, presa por um fio inextensível de massa desprezível. O modelo clássico deste problema é o do *movimento circular uniforme* (MCU), e do ponto de vista criterioso da análise deste problema, pode-se dizer então que tem-se dois referenciais S e S' respectivamente ligados, a pessoa em repouso em S –o observador O– e a esfera. Inferindo então à analise sistemas de coordenadas para cada referencial, o referencial S está dotado de coordenadas cartesianas $(x^1, x^2) \equiv (x, y)$ e o referencial S' está dotado de coordenadas polares $(x^{1'}, x^{2'}) \equiv (\rho, \theta)$. Logo, existem então dois referenciais distintos cujas coordenadas são distintas porém conectadas conforme as transformações:

$$\begin{cases} x = \rho cos(\theta) \\ y = \rho sin(\theta) \end{cases} \tag{6}$$

das coordenadas polares para as cartesianas, e

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = arctg\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases} \tag{7}$$

das coordenadas cartesianas para as polares, isto é, a transformação inversa de (6).

[2]onde $i = 0, 1, 2, ..., n$ indexa as coordenadas do referencial S', $x^{i'} \equiv (x^{0'}, x^{1'}, ..., x^{n'})$.

[3]Por exemplo, a massa, energia, densidade e temperatura.

[4]Isto é, considerando que a terra é um referencial inercial

Tal mudança de coordenadas (6) permite transcrever todo o movimento da esfera – ligada ao referencial S' cujos vetores de base variam ponto-a-ponto– para o referencial S, onde os vetores são constantes em direção e módulo. Isto é, para construir uma equação de movimento em coordenadas polares, deve-se então verificar como é que os vetores da base polar se transformam:

$$\begin{cases} \mathbf{e}_\rho = \alpha_1 \mathbf{e}_x + \alpha_2 \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_\theta = \beta_1 \mathbf{e}_x + \beta_2 \mathbf{e}_y \end{cases} \tag{8}$$

Para tanto, considera-se então que tanto em S' quanto S os vetores de base podem ser reinterpretados tais como:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} \equiv \mathbf{e}_\rho; \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \equiv \mathbf{e}_\theta$$

e

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \equiv \mathbf{e}_x; \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \equiv \mathbf{e}_y$$

onde $\mathbf{r} =: (\mathbf{r}(u^1, \ldots, u^i + h, u^j) - \mathbf{r}(u^j))$, pois o processo de limite é geral para qualquer referencial com um sistema de coordenadas, com coordenadas $u^j \equiv (u^1, u^2)$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{r}(u^1, \ldots, u^i + h, u^j) - \mathbf{r}(u^j)}{h} =: \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i} \tag{9}$$

Daí, verifica-se que a variação do vetor posição em coordenadas cartesianas, com respeito as coordenadas polares ficam:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} = \frac{\partial}{\partial \rho}(x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y) = \frac{\partial x}{\partial \rho}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \rho}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}$$

e para coordenada θ,

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}(x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y) = \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}$$

E então, as equações (8) ficam:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} = \frac{\partial x}{\partial \rho}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \rho}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \end{cases} \tag{10}$$

O sistema (10) define portanto os coeficientes de (8) e, ainda mais, reescrevendo o sistema (10) como uma equação matricial, tem-se então que,

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} \\ \\ \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \rho} \\ \\ \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \\ \\ \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \end{pmatrix} \tag{11}$$

Por (11) é possível ver que o caráter de transformação dos vetores de base entre de um sistema de coordenadas cartesianas para um outro de coordenadas polares é dado pela matriz chamada *Jacobiana*:

$$\mathfrak{J} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \rho} \\ \\ \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} \tag{12}$$

Ou ainda, redefinindo o símbolo $\mathfrak{J}$,

$$\mathfrak{J} =: \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} \equiv \frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \theta)} \tag{13}$$

Logo, motivados pelo processo acima é possível dizer que uma transformação de coordenadas $(x^i \to x^{i'})$, *induz* uma mudança nos vetores de base, em geral[5], tal como:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^{i'}} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^j} \iff \mathbf{e}'_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} \mathbf{e}_j \tag{14}$$

E de forma inversa, isto é a matriz inversa:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^{i'}} \iff \mathbf{e}_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} \mathbf{e}_{i'} \tag{15}$$

Na mecânica Newtoniana, encontrar a equação de movimento da esfera, permite resolver o problema de determinar em cada instante de tempo t, a posição da esfera.

As equações de movimento em coordenadas cartesianas são então:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\left[a^x \mathbf{e}_x + a^y \mathbf{e}_y\right] \equiv m\left[a^x \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} + a^y \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}\right] \tag{16}$$

Considerando que a massa se transforma tal como um escalar (5), uma mudança de coordenadas de $x^{i'} \to x^i$, induzirá uma mudança nas componentes do vetor aceleração, isto é:

[5] Isto é, para uma dimensão n

$$m\left[a^x\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}+a^y\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}\right]=m\left[a^x\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho}+\frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}\right)+a^y\left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho}+\frac{\partial \theta}{\partial y}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}\right)\right] \tag{17}$$

Escrevendo de forma compacta (17),

$$m\left[a^x\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho}+\frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}\right)+a^y\left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho}+\frac{\partial \theta}{\partial y}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}\right)\right]=m\left[\sum_{j=1}^{2}a^j\left(\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^{i'}}\right)\right] \tag{18}$$

Pode-se perceber então que (18) define o vetor força em coordenadas polares, isto é:

$$\mathbf{F}=m\mathbf{a}=m\left[\sum_{j=1}^{2}a^j\left(\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^{i'}}\right)\right]=m\left[\sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{j=1}^{2}a^j\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}\right)\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^{i'}}\right]=m\mathbf{a}'=\mathbf{F}' \tag{19}$$

Nota-se, portanto que a equação de movimento em coordenadas polares é dada por:

$$\mathbf{F}'=m\mathbf{a}'=m\left[\sum_{i=1}^{2}a^{i'}\mathbf{e}_{i'}\right]=m\left[\sum_{i=1}^{2}a^{i'}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^{i'}}\right]=m\left[\sum_{i=1}^{2}\left(a^j\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}\right)\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^{i'}}\right] \tag{20}$$

A equação (20) fornece as equações do MCU. Entretanto, mais importante do que resolver o MCU, nota-se que as componentes do vetor aceleração *se transformam* tal como:

$$a^{i'}=\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}a^j \tag{21}$$

O comportamento expresso pela análise do MCU acima sugere que, em verdade, não só *o* vetor aceleração *deste* problema em específico exibe esse comportamente, mas sim todas as quantidades vetoriais também satisfazem sob uma mudança de coordenadas. Com essa motivação em mente, diz-se que uma quantidade é um *vetor contravariante* ou *campo vetorial contravariante* se as suas componentes se transformam tal como:

$$V^{i'}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}V^j \tag{22}$$

Por outro lado, considere um outro problema de interesse físico: a taxa de variação espacial de um campo escalar ϕ –como a temperatura em um ambiente– que um observador O mede em um referencial S. Matematicamente, a resposta para esse problema é então o cálculo do gradiente desta função. Ao introduzir um sistema de coordenadas, por exemplo cartesiano

$x^i \equiv (x, y)$, tem-se que o gradiente do campo escalar ϕ é então:

$$\nabla\phi(x^i) = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{e}_y = \sum_{j=1}^{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x^j}\right)\mathbf{e}_j \tag{23}$$

Agora, considerando o mesmo problema porém visto de um outro observador O' em um referencial S', considera-se então uma transformação de coordenadas arbitrária $(x^i \to x^{i'})$. Sendo assim, sabe-se que ϕ se transforma como (5) e que tranformações entre coordenadas não alteram o valor do campo escalar:

$$\phi'(x^{i'}(x^i)) = \phi'(x^i(x^{i'})) = \phi(x^i(x^{i'})) \tag{24}$$

Logo, utilizando a regra da cadeia, as *componentes* do vetor gradiente se transformam tal como:

$$\frac{\partial\phi'(x^i(x^{i'}))}{\partial x^{i'}} = \sum_{j=1}^{2}\frac{\partial\phi}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} \equiv \frac{\partial\phi'}{\partial x^{i'}} = \sum_{j=1}^{2}\frac{\partial\phi}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}}$$

A equação (25) fornece as equações as componentes do gradiente do campo escalar em um outra coordenada. Entretanto, mais importante do que explicitar o problema, nota-se que as componentes do vetor gradiente *se transformam* tal como:

$$\frac{\partial\phi'}{\partial x^{i'}} = \sum_{j=1}^{2}\frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}}\frac{\partial\phi}{\partial x^j} \tag{25}$$

Ou, de forma visualmente mais agradável,

$$(\partial_{i'}\phi') = \sum_{j=1}^{2}\frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}}(\partial_j\phi) \tag{26}$$

O comportamento expresso pelo exemplo acima sugere que, em verdade, não só *as* componentes *deste* vetor em específico exibe esse comportamento, mas sim todas as quantidades ditas *covetoriais* também satisfazem sob uma mudança de coordenadas. Com a motivação, expressa pelo exemplo acima, em mente, diz-se que uma quantidade é um *vetor covariante* ou *campo vetorial covariante* se as suas componentes se transformam tal como:

$$V_{i'} = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}}V_j \tag{27}$$

Por fim, consideremos portanto um outro problema físico: um objeto girando, em um referencial S dotado de coordenadas cartesianas $x^i \equiv (x, y, z)$. Um obsevador O necessita determinar então o momento angular deste objeto.

Sabe-se então que a equação dinâmica para um sistema que envolve, rotações é dada por:

$$\boldsymbol{\tau} = I\boldsymbol{\alpha} \iff \frac{d\mathbf{L}}{dt} = I\frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{28}$$

Onde $\boldsymbol{\tau}$ é o torque resultante do sistema, $\boldsymbol{\alpha}$ é a aceleração angular resultante, $\mathbf{L}$ é o momento angular resultante do sistema, θ é a posição angular, e por fim I é o momento de inércia resultante do sistema. Concluí-se que da lei expressa por (28), no entando considerando o caso onde o vetor $\boldsymbol{\omega}$ –a velocidade angular– e o momento angular são colineares, tem-se que o momento angular do sistema é então:

$$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega} \tag{29}$$

Nota-se que a relação entre o momento angular e a velocidade angular é aparentemente linear e forma uma quantidade análoga ao momento linear de uma partícula $\mathbf{p} = m\boldsymbol{v}$. Entretanto a linearidade da equação (29) é perdida quando os dois vetores não são colineares –isto é para um movimento de rotação mais geral– e então, assumindo essa hipótese sobre a não colinearidade, naturalmente chega-se uma quantidade *tensorial*.

Sendo assim, considera-se então uma outra equação que relaciona o momento angular com o momento linear dada então por:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times (m\boldsymbol{v}) = m(\mathbf{r} \times \boldsymbol{v}) \tag{30}$$

onde a operação $\times$ é o *produto vetorial entre dois vetores*. A relação entre a velocidade tangencial $\boldsymbol{v}$ e velocidade angular, dentro desta nova situação de mais generalidade, é dada por:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \tag{31}$$

Onde $\mathbf{r}$ é o vetor posição do centro do sistema de coordenadas até um certo ponto na superfície do objeto. Daí, utilizando (31) em (30), tem-se que:

$$\mathbf{L} = m(\mathbf{r} \times \boldsymbol{v}) = m[\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})] \tag{32}$$

Utilizando a identidade vetorial $\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) \equiv \boldsymbol{v}\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}\rangle - \boldsymbol{w}\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle$, a equação (32) fica:

$$\mathbf{L} = m(\mathbf{r} \times \boldsymbol{v}) = m[\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})] = m[\boldsymbol{\omega}\langle \mathbf{r}, \mathbf{r}\rangle - \mathbf{r}\langle \mathbf{r}, \boldsymbol{\omega}\rangle] \tag{33}$$

Agora, tal problema está sendo modelado [6], em termos do espaço vetorial Euclidiano $\mathbb{E}^3 \equiv (\mathbb{R}^3, \langle\cdot,\cdot\rangle, \|\cdot\|)$ com *norma* $\|\cdot\|$ *induzida* pelo *produto interno Euclidiano* $\langle\cdot,\cdot\rangle$, isto é:

$$\sqrt{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \equiv \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} v^i v^j} :=\| \boldsymbol{v} \| \tag{34}$$

Como a equção (34) lida apenas com números reais, é possível então definir a *norma ao quadrado* de um vetor:

$$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle = (v^x)^2 + (v^y)^2 + (v^z)^2 \equiv \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} v^i v^j :=\| \boldsymbol{v} \|^2 \equiv v^2 \tag{35}$$

Onde o chamado *delta de Kronecker* δ_{ij}, representa a matriz identidade[7]. Sendo assim, a equação (33) fica, em termos de componentes:

$$L^k = m\left[\omega^k \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} r^i r^j - r^k \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} r^i \omega^j\right] = m\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} r^i r^j \omega^k - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} r^i \omega^j r^k\right] \tag{36}$$

A equação (36) é visualmente não agradável. Sendo assim, existe uma convenção chamada de *convenção de soma de Einstein* ou simplesmente *convenção de soma*, que consiste na seguinte regra: *a cada índice repetido é subentendido um símbolo de somatório*. Os índices que ocorrem no somatório são chamados *índices mudos* ou *índices livres*.

Logo, a expressão (36) fica:

$$L^k = m[\omega^k \delta_{ij} r^i r^j - r^k \delta_{ij} r^i \omega^j] = m[\delta_{ij} r^i r^j \omega^k - \delta_{ij} r^i \omega^j r^k] \tag{37}$$

Como quer-se uma equação que recobre a forma restrita de (29), nota-se que para tanto deve-se "fatorar"as componentes do vetor velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$, isto é as componentes ω^k e ω^j. Entretanto, os índices são diferentes, isso impossibilita tal operação, diretamente. Contudo, existe uma propriedade dos espaços vetoriais que modelam a física, que é a da existência de uma função multilinear chamada de *métrica*[8], dada em componentes pela matriz δ_{ij}, que infere noções geométricas tais como distância e ângulo. Isto é, pode-se inferir que dado um produto interno tem-se uma métrica que define a geometria do espaço. No caso do espaço vetorial Euclidiano $\mathbb{E}^3$, é a chamada métrica Euclidiana dada por (35). Entretanto tal função não é

[6] E em verdade todos os outros acima, ou em $\mathbb{E}^2 \equiv (\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle, \|\cdot\|)$ ou em $\mathbb{E}^3 \equiv \mathbb{E}^3 \equiv (\mathbb{R}^3, \langle\cdot,\cdot\rangle, \|\cdot\|)$

[7] Em verdade, componentes do tensor identidade. Ou ainda, como o espaço é Euclidiano, $\sqrt{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j\rangle v^i v^j} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} v^i v^j}$ pois neste espaço $\mathbb{E}^3$, $\langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j\rangle = 1$ com $i = j$ e $\langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j\rangle = 0$ com $i \neq j$

[8] Essa frase será totalmente explicada e exemplificada nos capítulos sobre Geometria Riemanniana e Cálculo Tensorial

definida apenas com respeito a vetores contravariantes, mas também para vetores covariantes. Sendo assim, a métrica pode atuar da seguinte maneira:

Para vetores Contravariantes:

$$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle = (v^x)^2 + (v^y)^2 + (v^z)^2 \equiv \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} v^i v^j :=\parallel \boldsymbol{v} \parallel^2 \equiv v^2 \tag{38}$$

Para vetores Covariantes:

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle = (u_x)^2 + (u_y)^2 + (v_z)^2 \equiv \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \delta^{ij} u_i u_j :=\parallel \boldsymbol{u} \parallel^2 \equiv u^2 \tag{39}$$

Nota-se que é possível então *abaixar* ou *levantar* índices utilizando a métrica Euclidiana. Por exemplo, dado um vetor contravariante v^j é possível criar o seu vetor covariante[9] da seguinte forma:

$$\sum_{j=1}^{3} v^j \delta_{ji} = v_i \tag{40}$$

Similarmente, dado um vetor covariante v_j é possível criar o seu vetor contravariante, da seguinte forma:

$$\sum_{j=1}^{3} v_j \delta^{ji} = v^i \tag{41}$$

Sabendo disso, a norma de um vetor –covariante ou contravariante– pode ser reescrita como:

$$\sqrt{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} v^i v^j} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \delta^{ij} v_i v_j} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v^i v_i} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} v_j v^j} :=\parallel \boldsymbol{v} \parallel \tag{42}$$

Apartir de agora, será empregada a convenção de soma de Einstein, salvo quando indicado do contrário. Sendo assim, para retirar as componentes do vetor $\boldsymbol{\omega}$, utiliza-se a propriedade (40) do delta de Kronecker[10] para abaixar o índice de ω^k e ω^j, tal como:

[9] Em verdade o seu vetor *dual*; isso será explicado.

[10] Tal delta de Kronecker é uma métrica específica para o espaço Euclidiano, as métricas são funções muito mais gerais; isso também será trabalhado adiante.

$$L^k = m[\delta_{ij} r^i r^j \omega^k - \delta_{ij} r^i \omega^j r^k] = m[\delta_{ij} r^i r^j \delta^{k\ell} \omega_\ell - \delta_{ij} r^i \delta^{j\ell} \omega_\ell r^k] =$$

$$= m[\delta_{ij} r^i r^j \delta^{k\ell} - \delta_{ij} r^i \delta^{j\ell} r^k] \omega_\ell = m[\delta^{k\ell} \delta_{ij} r^i r^j - \delta_{ij} \delta^{j\ell} r^i r^k] \omega_\ell =$$

$$= m[\delta^{k\ell} r_j r^j - \delta_i{}^\ell r^i r^k] \omega_\ell = m[\delta^{k\ell} r^2 - r^\ell r^k] \omega_\ell \implies$$

$$L^k = m[\delta^{k\ell} r^2 - r^\ell r^k] \omega_\ell \tag{43}$$

A expressão em (43) $m[\delta^{k\ell} r^2 - r^\ell r^k]$ é chamado de *Tensor de Inércia*, e é dado por:

$$I^{\ell k} = m[\delta^{k\ell} r^2 - r^\ell r^k] \equiv \sum_{\ell=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} m[\delta^{k\ell} r^2 - r^\ell r^k] \tag{44}$$

Dada (43) pode-se então recobrar uma equação análoga à (29) tal como –em componentes–:

$$L^k = m[\delta^{k\ell} r^2 - r^\ell r^k] \omega_\ell =: I^{\ell k} \omega_\ell \equiv \sum_{\ell=1}^{3} I^{\ell k} \omega_\ell \tag{45}$$

Onde $k = \{1, 2, 3\}$.

Do ponto de vista da *atuação do tensor em um vetor*, isto é, sem levar em conta qualquer sistema de coordenadas, o momento angular pode ser escrito como:

$$\mathbf{L} = \mathfrak{I} \boldsymbol{\omega} \tag{46}$$

Onde $\mathfrak{I}$ é o tensor de inércia.

Contudo, uma pergunta natural surge: dado um outro referencial S', com sistema de coordenadas diferente do cartesiano tal como $x^{i'}$, como um observador O em S, mede o momento de inércia? Considere então as compoenentes do tensor de inércia:

$$I^{\ell' k'} = m'[\delta^{k'\ell'} r'^2 - r^{\ell'} r^{k'}] \tag{47}$$

Ora, sabe-se que m' é um escalar e se transforma tal como $m' = m$, r'^2 é um escalar pois é a norma de um vetor, logo, $r'^2 = r^2$. Sabe-se também, como componentes de vetores contravariantes se transformam, isto é:

$$I^{\ell' k'} = m' \left[\delta^{k'\ell'} r'^2 - \frac{\partial x^{\ell'}}{\partial x^i} r^i \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j} r^j \right] \tag{48}$$

A transformação de $\delta^{k'\ell'}$ é dada tal como o seguinte problema: em em referencial S, um observador O mede distância de uma barra, isto é a distância entre os pontos A e B das extremidades de uma barra. Dado um sistema de coordenadas –por exemplo, cartesiano– a distância entre a origem do sistema de coordenadas e o ponto A é dada por um vetor posição $\mathbf{r}_a$, similarmente a distância entre a origem do sistema de coordenadas e o ponto B é dada por um vetor posição $\mathbf{r}_b$. O comprimento do vetor separação $\boldsymbol{\Delta}\mathbf{r} =: (\mathbf{r_b} - \mathbf{r_a})$, fornece então para O o valor do tamanho da barra. Logo:

$$\langle \boldsymbol{\Delta}\mathbf{r}, \boldsymbol{\Delta}\mathbf{r} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} \Delta r^i \Delta r^j =\| \boldsymbol{\Delta}\mathbf{r} \|^2 =: \boldsymbol{\Delta}\mathbf{r}^2 \tag{49}$$

A equação (48) implica então na seguinte expressão:

$$\boldsymbol{\Delta}\mathbf{r}^2 =: \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} \Delta r^i \Delta r^j \tag{50}$$

Em um outro referencial S', com sistema de coordenadas $x^{i'}$, a norma do vertor separação será então:

$$\boldsymbol{\Delta}\mathbf{r}^2 =: \sum_{a=1}^{n} \sum_{b=1}^{n} \delta_{a'b'} \Delta r^{a'} \Delta r^{b'} \tag{51}$$

Como quer-se a transformação de $\delta^{k\ell}$ e não de $\delta_{k\ell}$, considera-se então as normas:

$$\boldsymbol{\Delta}\mathbf{r}^2 =: \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \delta^{ij} \Delta r_i \Delta r_j \tag{52}$$

e no outro referencial S', com sistema de coordenadas $x^{i'}$, a norma do vertor separação será então:

$$\boldsymbol{\Delta}\mathbf{r}^2 =: \sum_{a=1}^{n} \sum_{b=1}^{n} \delta^{a'b'} \Delta r_{a'} \Delta r_{b'} \tag{53}$$

Daí, como a norma é um escalar, pode-se igualar (52) e (53)

$$\boldsymbol{\Delta}\mathbf{r}^2 =: \sum_{a=1}^{n} \sum_{b=1}^{n} \delta^{a'b'} \Delta r_{a'} \Delta r_{b'} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \delta^{ij} \Delta r_i \Delta r_j := \boldsymbol{\Delta}\mathbf{r}^2 \tag{54}$$

Logo sob uma mudança de coordenadas $x^i \to x^{i'}$, sabe-se como vetores covariantes se transformam e então o primeiro membro da equação (49) fica:

$$\Delta\mathbf{r}^2 =: \sum_{a=1}^{n}\sum_{b=1}^{n}\delta^{a'b'}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial x^i}{\partial x^{a'}}\Delta r_i\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial x^j}{\partial x^{b'}}\Delta r_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\delta^{ij}\Delta r_i\Delta r_j := \Delta\mathbf{r}^2 \tag{55}$$

O que implica em:

$$\sum_{a=1}^{n}\sum_{b=1}^{n}\delta^{a'b'}\frac{\partial x^i}{\partial x^{a'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{b'}} = \delta^{ij} \tag{56}$$

Como quer-se a transformação de $\delta^{a'b'}$, isola-se esse delta, utilizando as matrizes inversas jacobianas. Utilizando a convenção de soma, tem-se que:

$$\left(\frac{\partial x^{a'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^{b'}}{\partial x^j}\right)\delta^{a'b'}\frac{\partial x^i}{\partial x^{a'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{b'}} = \left(\frac{\partial x^{a'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^{b'}}{\partial x^j}\right)\delta^{ij} \iff$$

$$\delta^{a'b'}\frac{\partial x^{a'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial x^{a'}}\frac{\partial x^{b'}}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial x^{b'}} = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^{b'}}{\partial x^j}\delta^{ij} \tag{57}$$

Logo, como as matrizes são inversas e, ainda mais, estão sob o mesmo índice, tem-se então que:

$$\frac{\partial x^{a'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial x^{a'}} = 1 \tag{58}$$

$$\frac{\partial x^{b'}}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial x^{b'}} = 1 \tag{59}$$

Daí, a lei de transformação para $\delta^{a'b'}$ é definida como:

$$\delta^{a'b'} = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^{b'}}{\partial x^j}\delta^{ij} \tag{60}$$

Sendo assim, a equação (48) fica:

$$I^{\ell'k'} = m\left[\frac{\partial x^{\ell'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j}\delta^{ij}r^2 - \frac{\partial x^{\ell'}}{\partial x^i}r^i\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j}r^j\right] = m\left[\frac{\partial x^{\ell'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j}\delta^{ij}r^2 - \frac{\partial x^{\ell'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j}r^i r^j\right] \tag{61}$$

Pela equação (61), tem-se que:

$$I^{\ell'k'} = \frac{\partial x^{\ell'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j}\left(m\left[\delta^{ij}r^2 - r^i r^j\right]\right) = \frac{\partial x^{\ell'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j}I^{ij} \tag{62}$$

A equação (62) fornece então o momento de inercia tanto para S quanto para S'. Entretanto, mais importante do que descobrir tais valores, nota-se que as componentes do chamado *tensor de inércia*[11] se transformam tal como:

$$I^{\ell' k'} = \frac{\partial x^{\ell'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j} I^{ij} \tag{63}$$

O comportamento expresso pela análise acima sugere que, em verdade, não só *o* tensor de inércia *deste* problema em específico exibe esse comportamento, mas sim todas as quantidades ditas, *tensoriais* também satisfazem sob uma mudança de coordenadas. Com essa motivação em mente, diz-se que uma quantidade é um *Tensor contravariante de ordem 2* ou *campo tensorial contravariante de ordem 2* se as suas componentes se transformam tal como:

$$T^{\ell' k'} = \frac{\partial x^{\ell'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j} T^{ij} \tag{64}$$

Nota-se portanto que sob a análise de simples problemas de interesse físico, a ocorrência de campos escalares, vetoriais e tensoriais é verificada.

Um outro problema de interesse físico, é com respeito a formulação da teoria relatívistica da gravitação. Tal interação é então codificada dentro da grande equação tensorial deste projeto, isto é, as Equações de Campo de Einstein:

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu} =: G^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T^{\mu\nu} \tag{65}$$

Onde cada quantidade com dois índices, se transforma tal como um tensor contravariante de ordem 2. Mais ainda, tais quantidades tensoriais, traduzem matematicamente o Princípio da Relatividade Geral de Einstein, no qual a física deve ser a mesma em todos os referenciais.

A outra grande quantidade tensorial deste projeto, é então a generalização da equação (34). A quantidade (34) lança mão de uma geometria tridimensional, plana, cuja geometria é, dito a grosso modo, dada por uma matriz:

$$\delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{66}$$

Entretanto, a análise tanto das questões físicas sobre a interação gravitacional, buracos negros e as soluções exóticas, faz-se necessário uma generalização para geometrias cujo *tensor métrico* é geral tal como:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{00}(x^i) & g_{01}(x^i) & g_{02}(x^i) & \dots & g_{0n}(x^i) \\ g_{10}(x^i) & g_{11}(x^i) & g_{12}(x^i) & \dots & g_{1n}(x^i) \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ g_{n0}(x^i) & g_{n1}(x^i) & g_{n2}(x^i) & \dots & g_{nn}(x^i) \end{pmatrix} \tag{67}$$

[11] Antes da equação (62) o chamado tensor de inércia era apenas um nome para a quantidade, mas agora define-se o que de fato é uma quantidade tensorial em física

e varia ponto-a-ponto em uma outra generalização geométrica do espaço $\mathbb{E}^3$, chamada de *Variedade Diferenciável*.

A própria estrutura geométrica da Teoria da Relatividade Geral (TRG) é baseada na dita *Geometria Riemanniana*, na qual o surgimento de tensores é natural. E ainda mais, por esse arcabouço matemático define-se com precisão que significa o *espaço-tempo*, que é, o constructo geométrico da Física Clássica, em particular da própria TRG.

1.1.2 ÁLGEBRA MULTILINEAR

Dado o conceito intuitivo do que são os tensores, é necessário, contudo, formalizar -e definir- o *objeto matemático abstrato* chamado de *Tensor*. A formalização é necessária devido ao fato de que mesmo a física clássica, em especial a Teoria da Relatividade Geral, utilizando largamente objetos escalares, vetoriais e tensoriais com respeito explícito a um *sistemas de coordenadas* previamente definido e a atuação de uma mudança de coordenadas, algumas noções são melhor entendidas com o emprego do aspecto abstrato dos tensores. Por exemplo, a matriz (67) definida como tensor métrico forma, em verdade, as componentes de todo um objeto abstrato chamado de *Tensor métrico* dado como:

$$\mathbf{g} = g_{\mu\nu}\mathbf{e}^{\mu} \otimes \mathbf{e}^{\nu} \tag{68}$$

O objeto (68) pode então ser entendido como *mapa bilinear* que atua em dois vetores contravariantes que resulta em uma quantidade escalar:

$$\begin{aligned} \mathbf{g} : \mathfrak{V} \times \mathfrak{W} &\to \mathbb{K} \\ (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) &\mapsto \mathbf{g}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) =: ds^2 \end{aligned}$$

Onde $\mathfrak{V}$ e $\mathfrak{W}$ são espaços vetoriais e $\mathbb{K}$ é um corpo de escalares, em geral $\mathbb{K} \equiv \mathbb{R}$. Nota-se então que o escalar que o tal tensor métrico $\mathbf{g}$ fornece é o elemento de linha de alguma geometria específica em um dado sistema de coordenadas.

Considerando, por exemplo, as componentes do tensor de inércia (47), em um dado sistema de coordenadas $x^{i'}$ o objeto abstrato $\mathfrak{I}$, que é o tensor de inércia, pode ser escrito como:

$$\mathfrak{I} = I'^{\ell k}\mathbf{e}'_{\ell} \otimes \mathbf{e}'_{k} = \Big(m'[\delta^{k'\ell'}r'^2 - r^{\ell'}r^{k'}]\Big)\mathbf{e}'_{\ell} \otimes \mathbf{e}'_{k} \tag{69}$$

O objeto (69) pode então ser entendido como *mapa linear* que atua em um vetores covariantes que resulta em uma quantidade vetorial:

$$\begin{aligned} \mathfrak{I} : \mathfrak{V}^* &\to \mathbb{K} \\ \boldsymbol{\omega} &\mapsto \mathfrak{I}\boldsymbol{\omega} =: \mathbf{L} \end{aligned}$$

Onde $\mathfrak{V}^*$ é o espaço vetorial *Dual* de $\mathfrak{V}$ e $\mathbb{K}$ é um corpo de escalares, em geral $\mathbb{K} \equiv \mathbb{R}$. Nota-se então que o vetor que o tal tensor de inércia $\mathfrak{I}$ fornece é momento angular de uma partícula no referencial S' dado um sistema de coordenadas $x^{i'}$ e, mais ainda, o vetor pertencente ao espaço vetorial $\mathfrak{V}^*$ é o próprio vetor velocidade angular.

Sendo assim, em geral um tensor pode ser entendido como um *mapa multilinear* que é aplicado em vetores contravariantes e covariantes e que fornece escalares:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} : \mathfrak{V} \times ... \times \mathfrak{V} \times \mathfrak{V}^* \times ... \times \mathfrak{V}^* &\rightarrow \mathbb{K} \\ (\boldsymbol{v}^1, ..., \boldsymbol{v}^n, \mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_m) &\mapsto \mathbf{T}(\boldsymbol{v}^1, ..., \boldsymbol{v}^n, \mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_m) \end{aligned}$$

Onde o escalar $\mathbf{T}(\boldsymbol{v}^1, ..., \boldsymbol{v}^n, \mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_m)$ é dado como:

$$\mathbf{T}(\boldsymbol{v}^1, ..., \boldsymbol{v}^n, \mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_m) = \mathbf{T}(v^1 \boldsymbol{e}_{v^1}, ..., v^n \boldsymbol{e}_{v^n}, f_1 \boldsymbol{e}^{f_1}, ..., f_m \boldsymbol{e}^{f_m}) =$$

$$= \mathbf{T}(\boldsymbol{e}_{v^1}, ..., \boldsymbol{e}_{v^n}, \boldsymbol{e}^{f_1}, ..., \boldsymbol{e}^{f_m}) v^1 \cdot ... \cdot v^n \cdot f_1 \cdot ... \cdot f_m = T^{v^1 ... v^n}{}_{f_1 ... f_m} v^1 \cdot ... \cdot v^n \cdot f_1 \cdot ... \cdot f_m$$

$$\mathbf{T}(\boldsymbol{v}^1, ..., \boldsymbol{v}^n, \mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_m) = T^{v^1 ... v^n}{}_{f_1 ... f_m} v^1 \cdot ... \cdot v^n \cdot f_1 \cdot ... \cdot f_m \tag{70}$$

Note que a equação (70) é uma quantidade escalar pois $T^{v^1 ... v^n}{}_{f_1 ... f_m}$ é o tensor $\mathbf{T}$ que atua nos vetores de base, isto é, $\mathbf{T}(\boldsymbol{e}_{v^1}, ..., \boldsymbol{e}_{v^n}, \boldsymbol{e}^{f_1}, ..., \boldsymbol{e}^{f_m})$, e $v^1 \cdot ... \cdot v^n \cdot f_1 \cdot ... \cdot f_m$ são produtos das componentes dos vetores contravariantes $\boldsymbol{v}^1, ..., \boldsymbol{v}^n$ e vetores covariantes $\mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_m$.

Agora, os objetos ditos e utilizados acima, tais como "espaço vetorial", "espaço vetorial dual", "mapa bilinear"e "mapa linear", necessitam de definição precisa. Ainda mais, a própria simbologia $\boldsymbol{e}_a \otimes \boldsymbol{e}_b$ ou $\boldsymbol{e}^a \otimes \boldsymbol{e}^b$, bem como a noção abstrata dada por (70), são noções ainda imprecisas. A formalização necessária reside no campo da *Álgebra Multilinear*.

Para tanto, é necessário então começar com as estruturas algébricas mais básicas para fundamentar o conceito de *Vetor*.

1.1.2.1 ESPAÇOS VETORIAIS

Definição 1. : Seja $\mathbb{A}$ um conjunto de elementos munido de uma operação $\star$. A operação $\star$ é dita **fechada**, ou o conjunto $\mathbb{A}$ é fechado para a operação $\star$ se,e somente se, ao operarmos com $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{A} \times ... \times \mathbb{A}$ tal que $\star(a_1, ..., a_n) = a_1 \star, ..., \star a_n$, o elemento $a_1 \star, ..., \star a_n = a_k$ ainda $\in \mathbb{A}$. Em símbolos, temos:

$$\begin{aligned} \star : \mathbb{A} \times ... \times \mathbb{A} &\rightarrow \mathbb{A} \\ (a_1, ..., a_n) &\mapsto \star(a_1, ..., a_n) \end{aligned}$$

Definição 2. : Seja $\mathbb{A}$ um conjunto de elementos. Uma **operação binária fechada** é uma função (de duas variáveis) que leva um elemento $(a, b) \in \mathbb{A} \times \mathbb{A}$ (domínio) a um único elemento

$\mathfrak{b}_f(a, b) \in \mathbb{A}$ (imagem).

$$\begin{aligned} \mathfrak{b}_f : \mathbb{A} \times \mathbb{A} &\to \mathbb{A} \\ (a, b) &\mapsto \mathfrak{b}_f(a, b) \end{aligned}$$

Exemplo 1:

1. Operação de *Soma Usual* (Adição de números Reais):
   A soma usual de números Reais, denotada por: $+_{\mathbb{R}}$, é uma operação binária que leva um elemento $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ a um elemento $\mathbb{R}$, com a seguinte "regra":

$$\begin{aligned} +_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (\alpha, \beta) &\mapsto +_{\mathbb{R}}(\alpha, \beta) =: \alpha +_{\mathbb{R}} \beta \end{aligned}$$

2. Operação de *Produto Usual* (Multiplicação de números Reais):
   O produto usual de números Reais, denotado por: $\cdot_{\mathbb{R}}$, é uma operação binária que leva um elemento $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ a um elemento de $\mathbb{R}$, com a seguinte "regra":

$$\begin{aligned} \cdot_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (\alpha, \beta) &\mapsto \cdot_{\mathbb{R}}(\alpha, \beta) =: \alpha \cdot_{\mathbb{R}} \beta \end{aligned}$$

Logo, com o conjunto dos $\mathbb{R}$ e as operações $+_{\mathbb{R}}$ e $\cdot_{\mathbb{R}}$, sabe-se que se $\alpha \equiv 2$ e $\beta \equiv 3$, então $\alpha +_{\mathbb{R}} \beta \equiv 2 +_{\mathbb{R}} 3 = 5$ e $\alpha \cdot_{\mathbb{R}} \beta \equiv 2 \cdot_{\mathbb{R}} 3 = 6$.

De fato, tanto a soma usual quanto o produto usual, são operações bem definidas e que funcionam sempre dentro dos números Reais. A soma e o produto usual só são "usuais", no sentido que a maioria de nós conhece e usa, pois são operações com a característica de **satisfazer propriedades** e essas propriedades nós aprendemos desde o primeiro contato com a matemática elementar.

Seja então a operação $+_{\mathbb{R}}$. Esta operação satisfaz algumas propriedades que junto com sua definição, nos mostra como operar com qualquer elemento sobre o conjunto dos $\mathbb{R}$:

1. (Associatividade): $\alpha +_{\mathbb{R}} (\beta +_{\mathbb{R}} \gamma) = (\alpha +_{\mathbb{R}} \beta) +_{\mathbb{R}} \gamma \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$
2. (Comutatividade): $\alpha +_{\mathbb{R}} \beta = \beta +_{\mathbb{R}} \alpha \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
3. (Existência de elemento neutro): $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \exists\, 0_{\mathbb{R}} \mid \alpha +_{\mathbb{R}} 0_{\mathbb{R}} = \alpha = 0_{\mathbb{R}} +_{\mathbb{R}} \alpha$
   Este elemento será chamado *elemento neutro para a soma* e em $\mathbb{R}, 0_{\mathbb{R}} = 0$.
4. (Existência de Elemento Contrário [oposto]): $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \exists -\alpha \mid \alpha +_{\mathbb{R}} (-\alpha) = 0_{\mathbb{R}} = -\alpha +_{\mathbb{R}} \alpha$
   O elemento $-\alpha$ é chamado de *elemento oposto de* x ou *elemento inverso aditivo de* α e em $\mathbb{R}, -\alpha = -1 \cdot_{\mathbb{R}} \alpha$.

Note que assim está bem definida a operação de soma e,ainda mais, temos propriedades de como operar com ela com elementos dos Reais. Veja também que as propriedades 3. e 4. necessitam de 2. para tornar a soma usual do modo que conhecemos e usamos, se não fosse assim, a soma não seria "usual", mas sim outra operação satisfazendo outras propriedades (não sendo comutativa).

Para o Produto Usual, também há de satisfazer propriedades. Seja então a operação $\cdot_{\mathbb{R}}$, esta operação satisfaz algumas propriedades que, junto com sua definição, nos mostra como operar com qualquer elemento sobre o conjunto dos $\mathbb{R}$:

1. (Associatividade): $\alpha \cdot_{\mathbb{R}} (\beta \cdot_{\mathbb{R}} \gamma) = (\alpha \cdot_{\mathbb{R}} \beta) \cdot_{\mathbb{R}} \gamma \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$
2. (Comutatividade): $\alpha \cdot_{\mathbb{R}} \beta = \beta \cdot_{\mathbb{R}} \alpha \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
3. (Existência de elemento neutro): $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\exists\ 1_{\mathbb{R}} \mid \alpha \cdot_{\mathbb{R}} 1_{\mathbb{R}} = \alpha = 1_{\mathbb{R}} \cdot_{\mathbb{R}} \alpha$ Este elemento será chamado *elemento neutro para o produto usual* e em $\mathbb{R}$, $1_{\mathbb{R}} = 1$.
4. (Existência de Elemento Contrário [inverso]): Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, existe um elemento de $\mathbb{R}$ que denotaremos por α^{-1} tal que $\alpha \cdot_{\mathbb{R}} \alpha^{-1} = 1_{\mathbb{R}} = \alpha^{-1} \cdot_{\mathbb{R}} \alpha$. O elemento α^{-1} é chamado de *elemento inverso de* α ou *elemento inverso multiplicativo de* α e em $\mathbb{R}$, $\alpha^{-1} = \dfrac{1}{\alpha}$. $\forall \alpha \neq 0 \in \mathbb{R}$

Tal como a soma usual, tem-se que as propriedades 3. e 4., dependem de 2., para tornar o produto "usual"do modo que conhecemos e operamos.

Existe, ainda mais, uma propriedade que as operações de soma usual e produto usual devem satisfazer: a propriedade da *distributividade*.

1. (Distributividade): $(\alpha + \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

Note que, de certa forma, essa propriedade unifica a soma usual e o produto usual. O ponto central no caso destes exemplos de operações é: dado o conjunto dos $\mathbb{R}$, definimos *sobre ele* ou o *munimos* de certas operações binárias. Essas operações devem satisfazer propriedades para serem válidas. Se qualquer propriedade não for satisfeita, as operações definidas acima não serão mais usuais.

Entretanto, a questão sobre o que significa uma estrutura algébrica é algo importante e deve ser exposto em termos gerais, afim de compreendermos melhor o espaço vetorial e a álgebra em geral.

Sendo assim, é natural operarmos com números reais e, além disso, definimos na seção anterior duas operações que satisfaziam propriedades; usualmente, então, temos como algo trivial operar no conjunto dos reais com tais operações, afinal, operar com números reais com as operações acima definidas nos exemplos é algo que temos contato desde muito tempo.

Entretanto, além de conjuntos numéricos, podemos operar sobre outros objetos, tais como matrizes, polinômios, funções, sequências, dentre outros. Dito de outra forma, pode-se definir operações, que satisfazem certas propriedades, sobre outros conjuntos de elementos e se esses elementos destes conjuntos satisfizerem as "regras das operações"definidas, podemos classificar todos estes elementos distintos sobre o mesmo arcabouço teórico.

Porém, algo interessante de se observar é que, por exemplo,a operação *produto usual* não necessariamente satisfará as mesmas propriedades quando operamos sobre matrizes (o produto desdes elementos não é comutativo), sendo assim existem diversos tipos de operações satisfazem outras propriedades.

Sendo assim, com todas essas ideias em mente, uma *Estrutura Algébrica* é o nome que é dado a um conjunto com uma ou diversas operações definidas sobre ele, por exemplo:

Exemplo 2:

1. O conjunto dos números reais munido de soma e produto usual, é uma estrutura algébrica: $(\mathbb{R}, +_{\mathbb{R}}, \cdot_{\mathbb{R}})$
2. O conjunto das matrizes $\mathcal{M}$ munido com a soma de matrizes $(+)$ e o produto de matrizes $(\cdot)$ é uma estrutura algébrica: $\mathfrak{M} \equiv [\mathcal{M}, (+), (\cdot)]$
3. O conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ com a operação de soma: $+_{\mathbb{Z}}$, é também uma estrutura algébrica: $(\mathbb{Z}, +_{\mathbb{Z}})$

Com o conceito de operação e operação binária definidos, bem como a noção do que é uma estrutura algébrica, pode-se prosseguir para o estudo da estrutura "fundamental"no contexto de álgebra multilinear e tensores: *O Espaço Vetorial.*

Para tanto, parte-se então da noção de *Corpo*:

Definição 3. : Dado um conjunto numérico não vazio $\mathbb{K}$, duas operações binárias $+_{\mathbb{K}}$ e $\cdot_{\mathbb{K}}$, fechadas; chama-se **Corpo** a estrutura algébrica: $(\mathbb{K}, +_{\mathbb{K}}, \cdot_{\mathbb{K}})$ se, e somente se, as operações satisfizerem:

Para $+_{\mathbb{K}}$:

1. (Associatividade): $\alpha +_{\mathbb{K}} (\beta +_{\mathbb{K}} \gamma) = (\alpha +_{\mathbb{K}} \beta) +_{\mathbb{K}} \gamma \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$
2. (Comutatividade): $\alpha +_{\mathbb{K}} \beta = \beta +_{\mathbb{K}} \alpha \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$
3. (Existência de elemento neutro): $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \exists!\ 0_{\mathbb{K}} \mid \alpha +_{\mathbb{K}} 0_{\mathbb{K}} = \alpha = 0_{\mathbb{K}} +_{\mathbb{K}} \alpha$
4. (Existência de elemento contrário): Para cada $\alpha \in \mathbb{K}, \exists!\ (-\alpha) \mid \alpha +_{\mathbb{K}} (-\alpha) = 0_{\mathbb{K}} = (-\alpha) +_{\mathbb{K}} \alpha$

Para $\cdot_{\mathbb{K}}$:

1. (Associatividade): $\alpha \cdot_{\mathbb{K}} (\beta \cdot_{\mathbb{K}} \gamma) = (\alpha \cdot_{\mathbb{K}} \beta) \cdot_{\mathbb{K}} \gamma \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$
2. (Comutatividade): $\alpha \cdot_{\mathbb{K}} \beta = \beta \cdot_{\mathbb{K}} \alpha \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$
3. (Existência de elemento neutro): $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \exists!\ 0_{\mathbb{K}} \mid \alpha \cdot_{\mathbb{K}} 0_{\mathbb{K}} = \alpha = 0_{\mathbb{K}} \cdot_{\mathbb{K}} \alpha$
4. (Existência de elemento contrário): Para cada $\alpha \in \mathbb{K}, \exists\ (-\alpha) \mid \alpha \cdot_{\mathbb{K}} (-\alpha) = 0_{\mathbb{K}} = (-\alpha) \cdot_{\mathbb{K}} \alpha$

Ainda mais, para $+_{\mathbb{K}}$ e $\cdot_{\mathbb{K}}$, existe ainda uma outra propriedade denominada *Distributividade* que é:

1. (Distributividade): $\alpha +_{\mathbb{K}} (\beta \cdot_{\mathbb{K}} \gamma) = \alpha +_{\mathbb{K}} \beta \cdot_{\mathbb{K}} \alpha +_{\mathbb{K}} \gamma \quad \forall a, b, c \in \mathbb{K}$

Sendo assim, um Corpo consiste de um conjunto $\mathbb{K}$ e duas operações binárias,fechadas, que satisfazem as propriedades acima.

Uma questão importante e interessante é notar que o Corpo será uma estrutura sobre um conjunto numérico. Assim sendo, temos um conceito que generaliza os corpos sobre os conjuntos usuais como $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$: um conjunto de *escalares*. O escalar é nada mais que um elemento de um conjunto numérico munido de operações. Os espaços vetoriais serão sempre construídos sobre um corpo de escalares $\mathbb{K}$.

Definição 4. : Um $\mathbb{K}$-*Espaço Vetorial*, *Espaço Vetorial sobre o corpo* $\mathbb{K}$, ou simplesmente *Espaço Vetorial*, é uma quádrupla:

$$\mathfrak{V}(\mathbb{K}) \equiv \mathfrak{V} \equiv (\mathcal{V}, (\mathbb{K}, +_{\mathbb{K}}, \cdot_{\mathbb{K}}), \boxplus_{\mathfrak{V}}, \boxdot_{\mathfrak{V}})$$

Onde $\mathcal{V}$ é um conjunto não vazio de elementos, $(\mathbb{K}, +_{\mathbb{K}}, \cdot_{\mathbb{K}})$ é um corpo; $\boxplus_{\mathfrak{V}}$ e $\boxdot_{\mathfrak{V}}$ duas operações binárias chamadas, respectivamente, de *soma de vetores* e *multiplicação por escalar*.

A soma de vetores é definida como:

$$\begin{aligned} \boxplus_{\mathfrak{V}} : \mathcal{V} \times \mathcal{V} &\to \mathcal{V} \\ (v, u) &\mapsto \boxplus_{\mathfrak{V}}(v, u) \equiv v \boxplus_{\mathfrak{V}} u \end{aligned}$$

E a multiplicação por escalar é definida como:

$$\begin{aligned} \boxdot_{\mathfrak{V}} : \mathbb{K} \times \mathcal{V} &\to \mathcal{V} \\ (\alpha, v) &\mapsto \boxdot_{\mathfrak{V}}(\alpha, v) \equiv \alpha \boxdot_{\mathfrak{V}} u \end{aligned}$$

Ainda mais, cada uma delas detém também uma sequência de propriedades, que devem ser satisfeitas:

Para $\boxplus_{\mathfrak{V}}$:

1. (Associatividade): $v \boxplus_{\mathfrak{V}} (u \boxplus_{\mathfrak{V}} w) = (v \boxplus_{\mathfrak{V}} u) \boxplus_{\mathfrak{V}} w \quad \forall v, u, w \in \mathcal{V}$
2. (Comutatividade): $v \boxplus_{\mathfrak{V}} u = u \boxplus_{\mathfrak{V}} v \quad \forall v, u \in \mathcal{V}$
3. (Existência de elemento neutro): $\forall v \in \mathcal{V}$, $\exists!\ 0_{\mathfrak{V}} \mid v \boxplus_{\mathfrak{V}} 0_{\mathfrak{V}} = v = 0_{\mathfrak{V}} \boxplus_{\mathfrak{V}} v$
4. (Existência de elemento contrário): Para cada $v \in \mathcal{V}$, $\exists!(-v) \mid v \boxplus_{\mathfrak{V}} (-v) = 0_{\mathfrak{V}} = (-v) \boxplus_{\mathfrak{V}} v$

Para $\boxdot_{\mathfrak{V}}$:

1. $\alpha \boxdot_{\mathfrak{V}} (v \boxplus_{\mathfrak{V}} u) = \alpha \boxdot_{\mathfrak{V}} v \boxplus_{\mathfrak{V}} \alpha \boxdot_{\mathfrak{V}} u \quad \forall v, u \in \mathcal{V}$ e $\forall \alpha \in \mathbb{K}$
2. $(\alpha +_{\mathbb{K}} \beta) \boxdot_{\mathfrak{V}} v = \alpha \boxdot_{\mathfrak{V}} v \boxplus_{\mathfrak{V}} \beta \boxdot_{\mathfrak{V}} v \quad \forall v \in \mathcal{V}$ e $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$
3. $(\alpha \cdot_{\mathbb{K}} \beta) \boxdot_{\mathfrak{V}} v = \alpha \boxdot_{\mathfrak{V}} (\beta \boxdot_{\mathfrak{V}} v) \quad \forall v \in \mathcal{V}$ e $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$
4. $1_{\mathbb{K}} \boxdot_{\mathfrak{V}} v = v \quad \forall v \in \mathcal{V}$ e $1_{\mathbb{K}} \in \mathbb{K}$

Sendo assim, quando temos uma quádrupla como a acima definida, temos uma estrutura de espaço vetorial para o conjunto de elementos $\mathcal{V}$. Ainda mais, os elementos de $\mathfrak{V}$ são chamados de *Vetores*.

Definição 5. : Dado um conjunto espaço vetorial $\mathfrak{V}$ e um subconjunto $\beta = \{\boldsymbol{e}_1, ..., \boldsymbol{e}_n\} \subset \mathfrak{V}$ de vetores. Se tais vetores de β forem *Linearmente Independentes* e *Gerarem* todo o espaço $\mathfrak{V}$, então tais vetores constituem uma *Base* para o espaço vetorial.

Dada então uma base de vetores, é possível escrever um vetor como uma *combinação linear* de vetores de base tal como:

$$\mathbf{V} = \sum_{i=1}^{n} v^i \boldsymbol{e}_i = v^1 \boldsymbol{e}_1 \boxplus_{\mathfrak{V}} ... \boxplus_{\mathfrak{V}} v^n \boldsymbol{e}_n \tag{71}$$

Onde v^i são as *componentes* do vetor $\mathbf{V}$ dada a base β; A partir de (71) pode-se conceber uma propriedade do mesmo vetor com respeito a bases diferentes: sob uma mudança de vetores de base (ou mais geralmente, sob uma *mudança de coordenadas*), tais vetores se modificam unicamente mediante uma matriz denominada *matriz mudança de base*. Sendo assim, dada uma base $\beta = \{\boldsymbol{e}_1, ..., \boldsymbol{e}_n\} \subset \mathfrak{V}$ e outra $\gamma = \{\boldsymbol{e}'_1, ..., \boldsymbol{e}'_n\} \subset \mathfrak{V}$, os vetores de base se modificam tal como:

$$\mathbf{V} = \sum_{i=1}^{n} v^i \boldsymbol{e}_i = \sum_{i=1}^{n} v'^i \boldsymbol{e}'_i = \mathbf{V} \iff$$

$$\iff \mathbf{V} = \sum_{j=1}^{n} v'^j \boldsymbol{e}'_j = \sum_{j=1}^{n} v'^j \Big(\sum_{i=1}^{n} M^i{}_j \boldsymbol{e}_i \Big) \implies$$

$$\boldsymbol{e}'_i = \sum_{i=1}^{n} M^i{}_j \boldsymbol{e}_i \tag{72}$$

Onde $M^i{}_j$ é a matriz mudança de base entre as bases γ e β. Agora, (72) *induz* uma *lei de trasformação* para as componentes do vetor $\mathbf{V}$ com respeito as bases γ e β, isto é:

$$\mathbf{V} = \sum_{i=1}^{n} v^i \boldsymbol{e}_i = \sum_{i=1}^{n} v'^i \boldsymbol{e}'_i = \mathbf{V} \iff$$

$$\iff \mathbf{V} = \sum_{j=1}^{n} v'^j \boldsymbol{e}'_j = \sum_{j=1}^{n} v'^j \Big(\sum_{i=1}^{n} M^i{}_j \boldsymbol{e}_i \Big) \iff$$

$$\iff \mathbf{V} = \sum_{j=1}^{n} v'^j \boldsymbol{e}'_j = \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{n} M^i{}_j v'^j \Big) \boldsymbol{e}_i = \sum_{i=1}^{n} v^i \boldsymbol{e}_i \implies$$

$$v^i = \sum_{j=1}^{n} M^i{}_j v'^j \tag{73}$$

A equação (73) é chamada *lei de transformação de componentes* do vetor $\mathbf{V}$ com respeito a base γ para a base β.

Nota-se que a matriz de mudança de base ou *Matriz de transformação* detém a seguinte propriedade : *o produto de uma matriz de transformação* $\mathrm{M}^{i}{}_{j}$, da base γ para β, *por uma matriz de transformação* $\mathrm{M}^{j}{}_{i}$, da base β para γ, *resulta em uma matriz identidade.* Isto é,

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{M}^{i}{}_{j}\mathrm{M}^{k}{}_{i} = \mathrm{Id} \tag{74}$$

Com a propriedade (74) tem-se que as matrizes de transformação são ditas *inversas ou invertíveis*. Sendo assim, pode-se reescrever (73) tal como:

$$v'^{j} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{M}^{j}{}_{i} v^{i} \tag{75}$$

Induzindo a lei de transformação das componentes do vetor $\mathbf{V}$ escritas na base β para γ.

1.1.2.2 ESPAÇOS VETORIAIS DUAIS

Dada então a estrutura algébrica de espaço vetorial $\mathfrak{V}$, existem outros objetos que podem ser definidos a partir da mesma. Tais objetos generalizam o conceito de uma função f tal como:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{K} &\to \mathbb{K} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

Onde $\mathbb{K}$ é um corpo, em geral o corpo dos $\mathbb{R}$. Entretanto, a generalização da função f ocorre não tão somente entre corpos, mas sim entre espaços vetoriais, isto é, existe um certo objeto $\mathbf{L}$ definido como:

$$\begin{aligned} \mathbf{L} : \mathfrak{V} &\to \mathfrak{W} \\ \boldsymbol{v} &\mapsto \mathbf{L}[\boldsymbol{v}] \end{aligned}$$

O objeto $\mathbf{L}$ é chamado de *Transformação Linear*, e satisfaz as seguintes propriedades:

1. $\mathbf{L}[\boldsymbol{v} \boxplus_{\mathfrak{V}} \boldsymbol{w}] = \mathbf{L}[\boldsymbol{v}] \boxplus_{\mathfrak{W}} \mathbf{L}[\boldsymbol{w}] \quad \forall \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathfrak{V}$

2. $\mathbf{L}[\alpha \boxdot_{\mathfrak{V}} \boldsymbol{v}] = \alpha \boxdot_{\mathfrak{W}} \mathbf{L}[\boldsymbol{v}] \quad \forall \boldsymbol{v} \in \mathfrak{V}$ e $\forall \alpha \in \mathbb{K}$

Tais objetos são então aplicados em vetores e resultam em modificações nestes vetores. Por exemplo, a transformação denominada de *Reflexão em torno do eixo x* é dada como:

$$\begin{aligned} \mathbf{Re}_x : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto \mathbf{Re}_x[(x, y)] \end{aligned}$$

Onde $\mathbf{Re}_x[(x, y)] =: (x, -y)$.

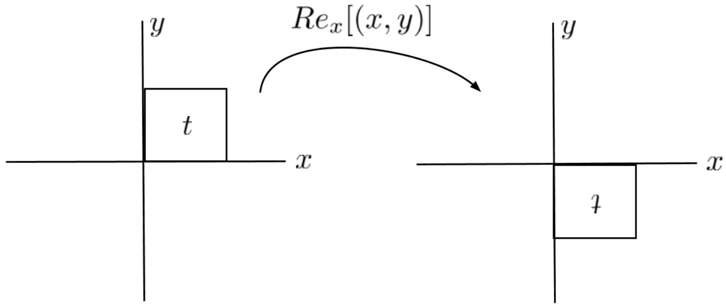

Figura 1: Transformação de Reflexão ao redor do eixo x.
Fonte: Acervo do autor

Tal transformação ocorre então em todos os vetores do $\mathbb{R}^2$, que por sua vez são *isomorfos* a pontos no plano; tal modificação dada pela transformação nos pontos do objeto levam a outros pontos definidos por $(x, -y)$.

Agora, dada uma tranformação linear, considera-se então o *conjunto de todas as transformações lineares* dado por:

$$\mathcal{L}(\mathfrak{V}, \mathfrak{W}) = \Big\{ \mathbf{L} \in \mathcal{L}(\mathfrak{V}, \mathfrak{W}) \mid \mathbf{L} : \mathfrak{V} \to \mathfrak{W} \Big\}$$

Tal conjunto forma um espaço vetorial no qual as operações são definidas para operar com tranformações lineares. As operações são definidas então tais como:

$$\begin{array}{rll} \boxplus_{\mathfrak{Lin}} : \mathcal{L} \times \mathcal{L} & \to \mathcal{L} \\ (\mathbf{R}, \mathbf{C}) & \mapsto \mathbf{R} \boxplus_{\mathfrak{Lin}} \mathbf{C} \end{array}$$

$$\begin{array}{rll} \boxdot_{\mathfrak{Lin}} : \mathbb{K} \times \mathcal{L} & \to \\ (\alpha, \mathbf{R}) & \mapsto \alpha \boxdot_{\mathfrak{Lin}} \mathbf{R} \end{array}$$

Sendo assim, o conjunto $\mathcal{L}(\mathfrak{V}, \mathfrak{W})$, conjuntamente com as operações $\boxplus_{\mathfrak{Lin}}$ e $\boxdot_{\mathfrak{Lin}}$, formam o *Espaço Vetorial das Transformações Lineares*:

$$\mathfrak{Lin} = \Big[\mathcal{L}(\mathfrak{V}, \mathfrak{W}), (\mathbb{K}, +_{\mathbb{K}}, \cdot_{\mathbb{K}}), \boxplus_{\mathfrak{Lin}}, \boxdot_{\mathfrak{Lin}} \Big]$$

De agora em diante as transformações lineares serão chamadas de *Mapas Lineares*. Dado então o espaço vetorial dos mapas lineares, $\mathfrak{Lin}$, considera-se um subconjunto de $\mathcal{L}(\mathfrak{V}, \mathfrak{W})$ dado por:

$$\mathcal{L}(\mathfrak{V}, \mathbb{K}) = \Big\{ \boldsymbol{\omega} \in \mathcal{L}(\mathfrak{V}, \mathbb{K}) \mid \boldsymbol{\omega} : \mathfrak{V} \to \mathbb{K} \Big\}$$

Tal subconjunto é formado, claro, por mapas lineares com a particularidade de que quando o mapa $\boldsymbol{\omega}$ atua em um vetor de $\mathfrak{V}$ a imagem deste mapa é tão somente um escalar. Tais objetos são chamados de *Funcionais Lineares* ou *Covetores*. Isto é:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} : \mathfrak{V} &\to \mathbb{K} \\ \boldsymbol{v} &\mapsto \boldsymbol{\omega}[\boldsymbol{v}] \in \mathbb{K} \end{aligned}$$

E, tal como o espaço vetorial $\mathfrak{Lin}$, o conjunto de todos os covetores pode ser elevado a categoria de espaço vetorial por operações definidas em $\mathfrak{Lin}$. Tal espaço vetorial é chamado de Espaço Vetorial *Dual* de $\mathfrak{V}$

$$\mathfrak{V}^* = \left[\mathcal{L}(\mathfrak{V}, \mathbb{K}), (\mathbb{K}, +_{\mathbb{K}}, \cdot_{\mathbb{K}}), \boxplus_{\mathfrak{Lin}}, \boxdot_{\mathfrak{Lin}}\right]$$

Talvez o grande exemplo de funcional linear da física, é a própria *Ação*, a qual é definida como:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} : \mathfrak{C}[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] &\to \mathbb{R} \\ \mathbf{L} &\mapsto \mathbf{S}[\mathrm{L}] \end{aligned}$$

Onde $\mathfrak{C}[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ é o espaço vetorial das funções contínuas no intervalo $[a, b]$ e $\mathbf{S}[\mathrm{L}]$ é definida como:

$$\mathbf{S}[\mathrm{L}] =: \int_b^a \mathrm{L} dx \tag{76}$$

e onde L é a função *Lagrangiana*.

Agora, tal como um vetor $\boldsymbol{v} \in \mathfrak{V}$ pode ser expresso tal como (71), é possível expandir um covetor $\boldsymbol{\omega} \in \mathfrak{V}^*$ como combinação linear de *covetores de base*, isto é, existe um dado conjunto γ^* de covetores que são linearmente independentes e geral todo o espaço $\mathfrak{V}^*$.

Ora, sendo assim, dada uma base $\beta = \left\{\boldsymbol{e}_1, ..., \boldsymbol{e}_n\right\}$ de $\mathfrak{V}$, existe então uma base $\beta^* = \left\{\boldsymbol{e}^1, ..., \boldsymbol{e}^n\right\}$ de $\mathfrak{V}^*$. Logo, dada uma base $\beta = \left\{\boldsymbol{e}_1, ..., \boldsymbol{e}_i, ..., \boldsymbol{e}_n\right\}$ de $\mathfrak{V}$, a $\beta^* = \left\{\boldsymbol{e}^1, ..., \boldsymbol{e}^j, ..., \boldsymbol{e}^n\right\}$ é composta por funcionais lineares que detém a seguinte estrutura matemática:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}^j : \mathfrak{V} &\to \mathbb{K} \\ \boldsymbol{e}_i &\mapsto \boldsymbol{e}^j[\boldsymbol{e}_i] \end{aligned}$$

Onde $\boldsymbol{e}^j[\boldsymbol{e}_i]$ é dado por

$$\boldsymbol{e}^j[\boldsymbol{e}_i] =: \begin{cases} 1 \iff i = j \\ 0 \iff i \neq j \end{cases} \tag{77}$$

Tais funcionais $\boldsymbol{e}^j$ constituem uma base para o espaço dual $\mathfrak{V}^*$. Então, dado um funcional $\boldsymbol{\Omega}$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega} : \mathfrak{V} &\to \mathbb{K} \\ \boldsymbol{v} &\mapsto \boldsymbol{\Omega}[\boldsymbol{v}] \end{aligned}$$

Sendo assim, sabendo do fato exposto por (77), o funcional linear $\boldsymbol{\Omega}$ é escrito como combinação linear dos funcionais de base (SCHAUM):

$$\boldsymbol{\Omega} = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \boldsymbol{e}^i \tag{78}$$

Agora, tal como os vetores, os covetores também detém componentes. Tais componentes são então os escalares ω_i; tais escalares são explícitos com respeito a uma dada base dual β^*. Uma propriedade de tais componentes é que dada uma base γ^* e outra, β^*, os covetores de base vão se modificar unicamente mediante uma matriz denominada *matriz mudança de base* da base β^* para γ^* e vão induzir uma lei de transformação análoga a (75), dada por:

$$\omega'_j = \sum_{i=1}^{n} G^i{}_j \omega_i \tag{79}$$

Onde ω'_j são as componentes do covetor $\boldsymbol{\Omega}$ na base γ^* e ω_i são as componentes do covetor $\boldsymbol{\Omega}$ na base β^*.

1.1.2.3 O ESPAÇO BIDUAL

Dado um espaço vetorial dual de $\mathfrak{V}$, é possível criar um outro espaço vetorial chamado espaço vetorial *Bidual de* $\mathfrak{V}$ que é definido como o espaço dual do espaço dual de $\mathfrak{V}$, que consiste de todos os funcionais lineares (ou covetores) em $\mathfrak{V}^*$:

$$\mathfrak{V}^{**} = \left[\mathcal{L}(\mathfrak{V}, \mathbb{K})^*, (\mathbb{K}, +_{\mathbb{K}}, \cdot_{\mathbb{K}}), \boxplus_{\mathfrak{Lin}}, \boxdot_{\mathfrak{Lin}}\right]$$

Agora, os espaços vetoriais tratados até agora são todos ditos de *dimensão finita*, isto é, existe uma base com um número finito de elementos. Tais espaços de dimensão finita detém uma propriedade de que um espaço vetorial de dimensão finita $\mathfrak{V}$ e o seu espaço bidual $\mathfrak{V}^{**}$ são ditos *Isomorfos* (COELHO), isto é $\mathfrak{V} \approx \mathfrak{V}^{**}$. Intuitivamente isso quer dizer eles são "iguais"e que elementos de um espaço são "equivalentes"aos do outro. A importância deste fato matemático, é que agora um vetor pode ser visto como um covetor atuando em covetores mas que é de fato, também, um elemento de um espaço $\mathfrak{V}$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} : \mathfrak{V}^* &\to \mathbb{K} \\ \boldsymbol{\omega} &\mapsto \boldsymbol{v}[\boldsymbol{\omega}] \end{aligned}$$

E a principal grande propriedade desta particularidade é que:

$$\boldsymbol{v}[\boldsymbol{\omega}] = \boldsymbol{\omega}[\boldsymbol{v}] \tag{80}$$

Os elementos do espaço bidual são chamados de vetores *biduais* ou simplesmente *vetores* pois, os elementos de tais espaços $\mathfrak{V}$ e $\mathfrak{V}^{**}$ não tem diferença alguma devido ao caráter de serem espaços vetoriais isomorfos.

1.1.2.4 MAPAS MULTILINEARES

A seção 2.1.2.1, 2.1.2.2 e a particularidade de 2.1.2.3, foram então definidas as noções formais do que é um vetor, um mapa linear e um covetor e, de agora em diante, por questões de terminologia usual, um vetor (ou vetor bidual) $\boldsymbol{v} \in \mathfrak{V}$ será chamado de *Vetor Contravariante* e um covetor $\boldsymbol{\omega} \in \mathfrak{V}^*$ será chamado de *Vetor Covariante*.

Agora, suponha que seja necessário calcular o trabalho ao longo de um caminho ℓ.

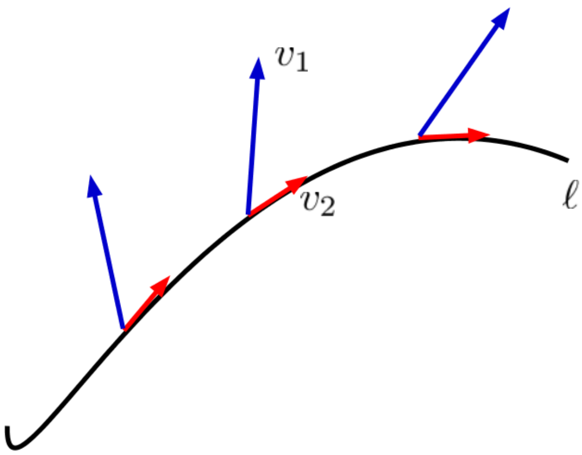

Figura 2: Trabalho ao longo de um caminho ℓ.
Fonte: Acervo do autor

Onde $v_1 = \mathsf{F}$, é a força no ponto e $v_2 = \mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$ é o vetor diferencial da secção do caminho ℓ. O trabalho é então definido como (MOYSES):

$$W =: \int_{\ell(x_0)=a}^{\ell(x_1)=b} \left\langle \mathsf{F}, \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} \right\rangle \tag{81}$$

Nota-se portanto a ocorrência do chamado *produto escalar*. O produto escalar é um caso particular de um objeto chamado de *Produto Interno*. O produto interno é um novo tipo de objeto que generaliza of funcionais lineares, devido ao fato de que tal objeto atua em dois vetores resultanto em um escalar (o trabalho é um escalar, por exemplo).

Um produto interno é então chamado de *Funcional Bilinear*, onde é definido como:

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathfrak{V} \times \mathfrak{V} &\to \mathbb{K} \\ (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) &\mapsto \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle \end{aligned}$$

Tal que $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle$ detém as seguintes propriedades (HOFFMANN):

1. $\langle \boldsymbol{v} \boxplus_{\mathfrak{V}} \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \rangle = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle +_{\mathbb{K}} \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \rangle$

2. $\langle v, w \boxplus_{\mathfrak{V}} h \rangle = \langle v, w \rangle +_{\mathbb{K}} \langle v, h \rangle$
3. $\langle \alpha \boxdot_{\mathfrak{V}} v, w \rangle = \alpha \cdot_{\mathbb{K}} \langle v, w \rangle$
4. $\langle v, \alpha \boxdot_{\mathfrak{W}} w \rangle = \alpha \cdot_{\mathbb{K}} \langle v, w \rangle$
5. $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle^*$
6. $\langle v, v \rangle \geq 0_{\mathbb{K}}$
7. $\langle v, w \rangle = 0_{\mathbb{K}} \iff v = 0_{\mathbb{K}}$

Onde $\langle w, v \rangle^*$ é o complexo conjugado de $\langle w, v \rangle$. Logo, tal Funcional Bilinear deve ser linear em cada coordenada e a multiplicação por escalar deve ser independente sobre qual vetor está multiplicando.

Em verdade, o produto interno acima pavimenta o caminha para uma classe muito mais geral de objetos ditos *Mapas Multilineares*. Considere, por exemplo, o seguinte mapa:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} : \mathfrak{V} \times \mathfrak{W} &\to \mathfrak{U} \\ (v, w) &\mapsto \mathbf{B}(v, w) \in \mathfrak{U} \end{aligned}$$

Onde $\mathfrak{V} \times \mathfrak{W}$ é um espaço vetorial e $\mathfrak{U}$ um outro espaço vetorial, todos tão somente de dimensão finita. O mapa $\mathbf{B}$ é dito *Mapa Bilinear* se, e somente se, satisfizer as seguintes propriedades:

1. $\mathbf{B}[v \boxplus_{\mathfrak{V}} u, w] = \mathbf{B}[(v, w)] \boxplus_{\mathfrak{U}} \mathbf{B}[(u, w)]$
2. $\mathbf{B}[v, w \boxplus_{\mathfrak{W}} h] = \mathbf{B}[(v, w)] \boxplus_{\mathfrak{U}} \mathbf{B}[(v, h)]$
3. $\mathbf{B}[\alpha \boxdot_{\mathfrak{V}} v, w] = \alpha \boxdot_{\mathbb{U}} \mathbf{B}[v, w]$
4. $\mathbf{B}[v, \alpha \boxdot_{\mathfrak{W}} w] = \alpha \boxdot_{\mathbb{U}} \mathbf{B}[v, w]$

Considerando então o conjunto de todos os mapas bilineares:

$$\mathcal{L}_2(\mathfrak{V} \times \mathfrak{W}; \mathfrak{U}) = \Big\{ \mathbf{B} \in \mathcal{L}_2(\mathfrak{V} \times \mathfrak{W}; \mathfrak{U}) \mid \mathbf{B} : \mathfrak{V} \times \mathfrak{W} \to \mathfrak{U} \Big\}$$

É então possível ser mostrado que tal conjunto forma um espaço vetorial de dimensão finita. Sendo assim, mapas bilineares tal como o produto interno formam, de forma mais restrita, também um espaço vetorial chamado de *Espaço Vetorial dos funcionais bilineares*, dado como a quádrupla:

$$\mathfrak{Lin}_2 = \big[(\mathcal{L}_2(\mathfrak{V} \times \mathfrak{W})), (\mathbb{K}, +_{\mathbb{K}}, \cdot_{\mathbb{K}}), \boxplus_{\mathfrak{Lin}_2}, \boxdot_{\mathfrak{Lin}_2} \big]$$

Onde $\boxplus_{\mathfrak{Lin}_2}, \boxdot_{\mathfrak{Lin}_2}$ são as operações que são definidas para operar sobre os elementos de $\mathcal{L}_2(\mathfrak{V} \times \mathfrak{W}; \mathfrak{U})$. Ainda mais, tais objetos são descritos tais como:

$$\begin{aligned} \mathbf{b} : \mathfrak{V} \times \mathfrak{W} &\to \mathfrak{K} \\ (v, w) &\mapsto \mathbf{b}(v, w) \in \mathfrak{K} \end{aligned}$$

Onde $\mathfrak{V} \times \mathfrak{W}$ é um espaço vetorial e $\mathbb{K}$ é o corpo. O mapa $\mathbf{b}$ é dito *Funcional Bilinear* se, e somente se, satisfizer as seguintes propriedades:

1. $\mathbf{b}[\boldsymbol{v} \boxplus_{\mathfrak{V}} \mathbf{u}, \boldsymbol{w}] = \mathbf{b}[(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})] +_{\mathbb{K}} \mathbf{b}[(\mathbf{u}, \boldsymbol{w})]$
2. $\mathbf{b}[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \boxplus_{\mathfrak{W}} \mathbf{h}] = \mathbf{b}[(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})] +_{\mathbb{K}} \mathbf{B}[(\boldsymbol{v}, \mathbf{h})]$
3. $\mathbf{b}[\alpha \boxdot_{\mathfrak{V}} \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}] = \alpha \cdot_{\mathbb{K}} \mathbf{B}[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}]$
4. $\mathbf{b}[\boldsymbol{v}, \alpha \boxdot_{\mathfrak{W}} \boldsymbol{w}] = \alpha \cdot_{\mathbb{K}} \mathbf{b}[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}]$

A generalização dos mapas bilineares e funcionais bilineares leva a base da álgebra multilinear ao perceber que um mapa dito *Mapa Multilinear* é definido como:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Psi} : \mathfrak{V}^1 \times ... \times \mathfrak{V}^n &\to \mathfrak{W} \\ (\boldsymbol{v}^1, ..., \boldsymbol{v}^n) &\mapsto \boldsymbol{\Psi}[(\boldsymbol{v}^1, ..., \boldsymbol{v}^n)] \in \mathfrak{W} \end{aligned}$$

Onde $\mathfrak{V}^1 \times ... \times \mathfrak{V}^n$ é um espaço vetorial e $\mathfrak{W}$ um outro espaço vetorial, todos tão somente de dimensão finita. O mapa $\boldsymbol{\Psi}$ é dito *Mapa Multilinear* se, e somente se, satisfizer as seguintes propriedades:

1. $\boldsymbol{\Psi}[(\boldsymbol{v}^1, ..., \alpha \boxdot_{\mathfrak{V}^i} \boldsymbol{v}^i + \beta \boxdot_{\mathfrak{W}^j} \boldsymbol{w}^j, ..., \boldsymbol{v}^n)] = \Big(\alpha \boxdot_{\mathfrak{W}} \boldsymbol{\Psi}[(\boldsymbol{v}^1, ..., \boldsymbol{v}^i, ..., \boldsymbol{v}^n)]\Big) \boxplus_{\mathfrak{W}} \Big(\beta \boxdot_{\mathfrak{W}^j} \boldsymbol{\Psi}[(\boldsymbol{v}^1, ..., \boldsymbol{w}^j, ..., \boldsymbol{v}^n)]\Big)$

Considerando então o conjunto de todos os mapas mutilineares:

$$\mathcal{L}_n(\mathfrak{V}^1 \times ... \times \mathfrak{V}^n; \mathfrak{W}) = \Big\{\boldsymbol{\Psi} \in \mathcal{L}_n(\mathfrak{V}^1 \times ... \times \mathfrak{V}^n; \mathfrak{W}) \mid \boldsymbol{\Psi} : \mathfrak{V}^1 \times ... \times \mathfrak{V}^n \to \mathfrak{W}\Big\}$$

É então possível ser mostrado (ROMAM) que tal conjunto forma um espaço vetorial de dimensão finita. Agora, se $\mathfrak{W}$ for tal que $\mathfrak{W} = \mathbb{K}$, então o mapa multilinear $\boldsymbol{\Psi}$ é dito *Forma Multilinear* ou *Funcional Multilinear*, isto é:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\psi} : \mathfrak{V}^1 \times ... \times \mathfrak{V}^n &\to \mathbb{K} \\ (\boldsymbol{v}^1, ..., \boldsymbol{v}^n) &\mapsto \boldsymbol{\psi}[(\boldsymbol{v}^1, ..., \boldsymbol{v}^n)] \in \mathbb{K} \end{aligned}$$

1.1.3 O PRODUTO TENSORIAL

Sabendo então o que são vetores contravariantes vetores covariantes, mapas multilineares e formas multilineares, considera-se, por simplicidade, dois seguintes espaços vetoriais $\mathfrak{V}$ e $\mathfrak{W}$, e um outro $\mathfrak{T}$; bem como o seguinte mapa:

$$\begin{aligned} \otimes : \mathfrak{V} \times \mathfrak{W} &\to \mathfrak{T} \\ (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) &\mapsto \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w} \end{aligned}$$

Tal mapa $\otimes$ é definido como aquele que detém a propriedade da a bilinearidade:

1. $(\mathbf{v} \boxplus_{\mathfrak{V}} \mathbf{u}) \otimes \mathbf{w} = (\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}) \boxplus_{\mathfrak{T}} (\mathbf{u} \otimes \mathbf{w})$
2. $\mathbf{v} \otimes (\mathbf{w} \boxplus_{\mathfrak{W}} \mathbf{h}) = (\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}) \boxplus_{\mathfrak{T}} (\mathbf{v} \otimes \mathbf{h})$
3. $(\alpha \boxdot_{\mathfrak{V}} \mathbf{v}) \otimes \mathbf{w} = \alpha \boxdot_{\mathfrak{T}} \mathbf{v} \otimes \mathbf{w}$
4. $\mathbf{v} \otimes (\alpha \boxdot_{\mathfrak{W}} \mathbf{w}) = \alpha \boxdot_{\mathfrak{T}} \mathbf{v} \otimes \mathbf{w}$

Logo, $\otimes$ é um mapa bilinear. Ainda mais, considera-se um mapa bilinear $\mathbf{b}$, qualquer. Com tudo isso, quer-se definir agora, formalmente, a noção de *Tensor*. Os tensores definem uma noção geral de produto entre espaços vetoriais, tal como a soma direta define uma noção de *Soma entre espaços vetoriais*. Sendo assim considera-se o seguinte teorema:

Teorema 1. : Sejam $\mathfrak{V}$ $\mathfrak{W}$ espaços vetoriais. Existe então um espaço vetorial $\mathfrak{T}$ conjuntamente com a operação $\otimes$, ambos satisfazendo então a seguinte propriedade:

1. Se $\mathfrak{U}$ é um espaço vetorial e se $\mathbf{b}$ é um mapa bilinear qualquer tal que $\mathbf{b} : \mathfrak{V} \times \mathfrak{W} \to \mathfrak{U}$ então existe, de fato, um *isomorfismo* L:

$$\begin{aligned} \mathsf{L} : \mathfrak{T} &\to \mathfrak{U} \\ (\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}) &\mapsto \mathsf{L}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}) \end{aligned}$$

tal que, para todos os pares $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ a equação abaixo é satisfeita:

$$\mathbf{b}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathsf{L}\Big(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}\Big) \tag{82}$$

O teorema 1 não será demonstrado, mas a grande conclusão é a de que os tensores são elementos de um espaço vetorial denominado de *Produto Tensorial*[12]:

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{V} \otimes \mathfrak{W}$$

e tal espaço vetorial é isomorfo a um espaço $\mathfrak{U}$ qualquer. Isso permite concluir que, sob o efeito do teorema 1, é possível identificar os tensores com espaços vetoriais dos mapas multilineares levando a definição de tensor apresentada em (70). Por outro lado, a construção do produto tensorial pelo teorema 1 garante que tal espaço exista e ainda mais permite que sua construção seja feita utilizando bases dos dois espaços vetoriais $\mathfrak{V}$ $\mathfrak{W}$ e a operação $\otimes$, levando a descrição de tensor como combinação linear dos produtos tensoriais das bases $\beta = \mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n$ de $\mathfrak{V}$ e $\gamma = \mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_m$ de $\mathfrak{W}$:

$$\mathsf{T} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{m} t^{k\ell} \big(\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_\ell\big) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{m} t^{k\ell} \mathbf{e}_{k\ell} \tag{83}$$

Os elementos $\big(\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_\ell\big) = \mathbf{e}_{k\ell}$ são Linearmente independentes e geral o espaço $\mathfrak{V} \otimes \mathfrak{W}$.

[12] A operação $\otimes$ também se chama produto tensorial.

Agora, ao identificar $\mathfrak{U} = \mathfrak{Lin}_2$ (por exemplo), então os mapas multilineares $\phi : \mathfrak{V} \times \mathfrak{W} \to \mathfrak{X}$ podem ser vistos como tensores, isto é os espaços $\mathfrak{Lin}_2 \approx \mathfrak{V} \otimes \mathfrak{W}$, são isomorfos.

1.1.4 ÁLGEBRA TENSORIAL

Sabendo então que um tensor pode ser visto como um mapa multilinear então, define-se alguns tipos de tensores:

Definição 6. : Dado o espaço vetorial $\mathfrak{V}$ e um corpo $\mathbb{K}$. Um *Escalar* ou um $(0,0)-$*tensor* (ou ainda, um *Tensor de ordem 0*) é definido como sendo o mapa:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\phi} : \mathbb{K} &\to \mathbb{K} \\ x &\mapsto \boldsymbol{\phi}(x) \end{aligned}$$

Definição 7. : Dados os espaços vetoriais $\mathfrak{V}^1 \times ... \times \mathfrak{V}^p = \times_{i=1}^{p}(V^i)$ e um corpo $\mathbb{K}$. Um *Tensor Covariante* ou um $(0,q)-$*tensor* (ou ainda, um *Tensor de ordem q*) é definido como sendo o mapa:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} : \mathfrak{V}^1 \times ... \times \mathfrak{V}^p &\to \mathbb{K} \\ (\boldsymbol{v}^1, ..., \boldsymbol{v}^q) &\mapsto \mathbf{T}[(\boldsymbol{v}^1, ..., \boldsymbol{v}^p)] \end{aligned}$$

Definição 8. : Dados os espaços vetoriais $(\mathfrak{V}^*)^1 \times ... \times (\mathfrak{V}^*)^q = \times_{i=1}^{q}(V^i)^*$ e um corpo $\mathbb{K}$. Um *Tensor Contravariante* ou um $(p,0)-$*tensor* (ou ainda, um *Tensor de ordem p*) é definido como sendo o mapa:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} : (\mathfrak{V}^*)^1 \times ... \times (\mathfrak{V}^*)^q &\to \mathbb{K} \\ (\boldsymbol{\omega}_1, ..., \boldsymbol{\omega}_p) &\mapsto \mathbf{T}[(\boldsymbol{\omega}_1, ..., \boldsymbol{\omega}_p)] \end{aligned}$$

Definição 9. : Dados os espaços vetoriais $\times_{i=1}^{p}(V^i) \times \times_{i=1}^{q}(V^i)^*$ e um corpo $\mathbb{K}$. Um *Tensor Misto* ou um $(p,q)-$*tensor* (ou ainda, um *Tensor de ordem p,q*) é definido como sendo o mapa:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} : \times_{i=1}^{p}(V^i) \times \times_{i=1}^{q}(V^i)^* &\to \mathbb{K} \\ (\boldsymbol{v}^1, ..., \boldsymbol{v}^q, \boldsymbol{\omega}_1, ..., \boldsymbol{\omega}_p) &\mapsto \mathbf{T}[(\boldsymbol{v}^1, ..., \boldsymbol{v}^q, \boldsymbol{\omega}_1, ..., \boldsymbol{\omega}_p)] \end{aligned}$$

Pelo teorema 1 e pelas definições 7 , 8 e 9, com respeito a combinação linear das bases os tensores ficam definidos como:

Definição 10. : Dados os espaços vetoriais $\times_{i=1}^{q}(V^i)^*$ e um corpo $\mathbb{K}$. Um *Tensor Covariante* ou um $(0,q)-$*tensor* é definido como sendo o elemento do espaço produto tensorial $\mathfrak{T}^0{}_q =$

$\mathfrak{V}^{1*} \otimes ... \otimes \mathfrak{V}^{q*} = \bigotimes_{i=1}^{q} V^{i*}$:

$$\mathsf{T} = \sum_{\nu_1=1}^{q} \cdots \sum_{\nu_q=1}^{q} t_{\nu_1,\dots,\nu_q} \left(\boldsymbol{e}^{\nu_1} \otimes ... \otimes \boldsymbol{e}^{\nu_q} \right) \tag{84}$$

Definição 11. : Dados os espaços vetoriais $\times_{i=1}^{q}(V^i)$ e um corpo $\mathbb{K}$. Um *Tensor Contrvariante* ou um $(p,0)-$*tensor* é definido como sendo o elemento do espaço produto tensorial $\mathfrak{T}^p{}_0 = \mathfrak{V}^1 \otimes ... \otimes \mathfrak{V}^p = \bigotimes_{i=1}^{p} V^i$:

$$\mathsf{T} = \sum_{\mu_1=1}^{p} \cdots \sum_{\mu_p=1}^{p} t^{\mu_1,\dots,\mu_p} \left(\boldsymbol{e}_{\mu_1} \otimes ... \otimes \boldsymbol{e}_{\mu_p} \right) \tag{85}$$

Definição 12. : Dados os espaços vetoriais Dados os espaços vetoriais $\times_{i=1}^{p}(V^i) \times \times_{i=1}^{q}(V^i)^*$ e um corpo $\mathbb{K}$. Um *Tensor Misto* ou um $(p,q)-$*tensor* é definido como sendo o elemento do espaço produto tensorial $\mathfrak{T}^p{}_q = \mathfrak{V}^1 \otimes ... \otimes \mathfrak{V}^p \bigotimes \mathfrak{V}^{1*} \otimes ... \otimes \mathfrak{V}^{q*} = \bigotimes_{i=1}^{p} V^i \otimes \bigotimes_{i=1}^{q}(V^i)^*$:

$$\mathsf{T} = \sum_{\mu_1=1}^{p} \cdots \sum_{\mu_p=1}^{p} \sum_{\nu_1=1}^{q} \cdots \sum_{\nu_q=1}^{q} t^{\mu_1,\dots,\mu_p}{}_{\nu_1,\dots,\nu_q} \left(\boldsymbol{e}_{\mu_1} \otimes ... \otimes \boldsymbol{e}_{\mu_p} \otimes \boldsymbol{e}^{\nu_1} \otimes ... \otimes \boldsymbol{e}^{\nu_q} \right) \tag{86}$$

A grande propriedade dos tensores reside então no fato de que tais objetos quando utilizados como mapas multilineares, fornecem escalares. Por outro lado, ao aplicar um tensor (0,2) em dois vetores, tem-se que, por exemplo,:

$$\mathsf{T}[(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})] = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} t_{ij} \boldsymbol{e}^i \otimes \boldsymbol{e}^j \right) [(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} t_{ij} v^k w^\ell \boldsymbol{e}^i(\boldsymbol{e}_k) \boldsymbol{e}^j(\boldsymbol{e}_\ell) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} t_{ij} v^k w^\ell \delta^i_k \delta^j_\ell = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} t_{k\ell} v^k w^\ell$$

1.1.4.1 MUDANÇA DE COORDENADAS

Tal como um vetor, as compomentes $t^{\mu_1,\dots,\mu_p}{}_{\nu_1,\dots,\nu_q}$dos tensores também se tranformam de uma maneira "previsível"mediante a uma mudança de base. De fato, a definição do objeto tensor pelo "comportamento"da sob uma mudança de base (isto é, de coordenadas) foi históricamente a mais utilizada e foi a primeira a ser encontrada (ELON). Sendo assim, as bases de cada um dos três tipos tensores se transformam mediante a um vetor e induzem, cada um dos vetores de base, as transformações características das componentes dos tensores.

Logo, utilizando a convenção de soma de Einstein, as componentes de um tensor covariante se transformam como:

$$t'_{\nu'_1,\ldots,\nu'_q} = M^{i_1}_{\nu'_1} \cdots M^{i_q}_{\nu'_q} t_{i_1,\ldots,i_q} \tag{87}$$

Já, as componentes dos tensores contravariantes se transformam tal como:

$$t'^{\nu'_1,\ldots,\nu'_p} = M^{\nu'_1}_{i_1} \cdots M^{\nu'_p}_{i_p} t^{i_1,\ldots,i_p} \tag{88}$$

E as componentes dos tensores mistos exibem o comportamento tal como:

$$t'^{\mu'_1,\ldots,\mu'_p}{}_{\nu_1,\ldots,\nu_q} = M^{\mu'_1}_{i_1} \cdots M^{\mu'_p}_{i_p} M^{j_1}_{\nu'_1} \cdots M^{j_q}_{\nu'_q} t^{i_1,\ldots,i_p}{}_{j_1,\ldots,j_q} \tag{89}$$

1.1.4.2 OPERAÇÕES COM TENSORES

Definidos precisamente o que de fato são tensores, é necessário portanto definir claramente como operar com tais objetos. As operações de *Soma* e *Produto* são definidas tais como:

Definição 13. : Dados dois tensores T e S, a *Soma* $\mathsf{T} \boxplus \mathsf{S}$ de dois tensores é definida como a soma das componentes dos tensores:

$$(\mathsf{T} \boxplus \mathsf{S})^{i_1,\ldots,i_p}{}_{j_1,\ldots,j_q} =: t^{i_1,\ldots,i_p}{}_{j_1,\ldots,j_q} + s^{i_1,\ldots,i_p}{}_{j_1,\ldots,j_q}$$

Definição 14. : Dados dois tensores T e S, o *Produto* $\mathsf{T} \boxdot \mathsf{S}$ de dois tensores é definido como o produto tensorial dos tensores T e S que por sua vez é definido como o produto das componentes dos tensores:

$$\mathsf{T} \boxdot \mathsf{S} =: (\mathsf{T} \otimes \mathsf{S})^{i_1,\ldots,i_p}{}_{j_1,\ldots,j_q} =: t^{i_1,\ldots,i_p}{}_{j_1,\ldots,j_q} s^{i_1,\ldots,i_p}{}_{j_1,\ldots,j_q}$$

Definição 15. : Dado um tensor T, o *Produto por Escalar* $\alpha \cdot \mathsf{T}$é definido como o produto de α pelas componentes de T:

$$\alpha\mathsf{T} =: (\alpha\mathsf{T})^{i_1,\ldots,i_p}{}_{j_1,\ldots,j_q} =: \alpha t^{i_1,\ldots,i_p}{}_{j_1,\ldots,j_q}$$

Definição 16. : Dado um tensor S, a *Contração* é uma operação que reduz a ordem do tensor tal como:

$$\begin{array}{rl} C_{a,b}() : \bigotimes_{i=1}^{p} V^i \otimes \bigotimes_{i=1}^{q} (V^i)^* & \rightarrow \bigotimes_{i=1}^{p-1} V^i \otimes \bigotimes_{i=1}^{q-1} (V^i)^* \\ \mathbf{T} & \mapsto C_{a,b}(\mathbf{S}) \end{array}$$

Onde $C_{a,b}(\mathbf{S})$ é define o chamado *tensor contraído*:

$$C_{a,b}(\mathbf{S}) = C_{a,b}\left(t^{\mu_1,\ldots,a,\ldots,\mu_p}{}_{\nu_1,\ldots,b,\ldots,\nu_q} (\boldsymbol{e}_{\mu_1} \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{e}_a \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{e}_{\mu_p} \otimes \boldsymbol{e}^{\nu_1} \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{e}^b \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{e}^{\nu_q}) \right) =$$

$$= t^{\mu_1,\ldots,a,\ldots,\mu_p}{}_{\nu_1,\ldots,a,\ldots,\nu_q} (\boldsymbol{e}_{\mu_1} \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{e}_{\mu_p} \otimes \boldsymbol{e}^{\nu_1} \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{e}^{\nu_q}) \implies$$

$$C_{a,b}(\mathbf{S}) =: \mathbf{T} = t^{\mu_1,\ldots,a,\ldots,\mu_p}{}_{\nu_1,\ldots,a,\ldots,\nu_q} (\boldsymbol{e}_{\mu_1} \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{e}_{\mu_p} \otimes \boldsymbol{e}^{\nu_1} \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{e}^{\nu_q}) \tag{90}$$

A contração, ingenuamente falando, faz índices a e b ficarem iguais para atribuir um símbolo de somatório nestes índices; isso reduz a ordem do tensor.

Agora, com a operação de contração é possível definir a *Multiplicação contraída*, que é uma operação que reduz a ordem de produtos de tensores:

Definição 17. : Dados dois tensores $\mathbf{T}$ e $\mathbf{S}$, respectivamente de ordem (r,s) e (p,q). A *Multiplicação Contraída* ou *Contração entre dois tensores* $C_{a,b}(\mathbf{T} \otimes \mathbf{S})$ de dois tensores é definida como o tensor pertencente ao espaço:

$$C_{a,b}(\mathbf{T} \otimes \mathbf{S}) \in \mathfrak{T}^{(r+p)-1}{}_{(s+q)-1}$$

Por exemplo (ROMANO), dados $\mathbf{T} = t^{aj}{}_h \boldsymbol{e}_a \otimes \boldsymbol{e}_j \otimes \boldsymbol{e}^h$ e $\mathbf{S} = s^l{}_b \boldsymbol{e}_l \otimes \boldsymbol{e}^b$ a contração entre esses tensores é tal que:

$$C_{a,b}(\mathbf{T} \otimes \mathbf{S}) \iff C_{a,b}\left(t^{aj}{}_h \boldsymbol{e}_a \otimes \boldsymbol{e}_j \otimes \boldsymbol{e}^h \bigotimes s^l{}_b \boldsymbol{e}_l \otimes \boldsymbol{e}^b \right) = \left(t^{aj}{}_h s^l{}_a \right) \boldsymbol{e}_a \otimes \boldsymbol{e}_j \otimes \boldsymbol{e}^h \bigotimes \boldsymbol{e}_l \otimes \boldsymbol{e}^a =$$

$$= \left(t^{aj}{}_h s^l{}_a \right) \boldsymbol{e}_j \otimes \boldsymbol{e}^h \otimes \boldsymbol{e}_l \bigotimes \boldsymbol{e}_a \otimes \boldsymbol{e}^a = \left(t^{aj}{}_h s^l{}_a \right) \boldsymbol{e}_j \otimes \boldsymbol{e}^h \otimes \boldsymbol{e}_l = \left(a^{jl}{}_h \right) \boldsymbol{e}_j \otimes \boldsymbol{e}^h \otimes \boldsymbol{e}_l$$

Sendo assim, dadas tais operações, a álgebra dos tensores está bem definida, bem como o objeto abstrato conhecido como tensor.

1.2 VARIEDADES

1.2.1 CONCEITO DE VARIEDADE

Suponha então que um pequeno corpo (como uma formiga) esteja efetuando um movimento vinculado tão somente a superfície de uma bola esférica, onde o raio R da bola é muito maior que o comprimento total h da formiga. Se pudessemos colocar uma pequena câmera na formiga, enquanto ela está passeando pela superfície da bola, na tela do monitor no qual a gravação estaria sendo transmitida, iríamos ver um horizonte plano. Entretanto, sabe-se que a bola na qual a formiga está andando é visualmente uma superfície curva. Algo semelhante ocorre conosco quando olhamos para o horizonte na praia e não conseguimos enxergar a curvatura da Terra. No entanto, sabe-se que ao atingirmos certa altura (por exemplo a altura média da estação espacial internacional) veremos claramente o aspecto curvo do nosso planeta.

O fato geométrico por trás dessas diferenças de perspectivas advém então de algumas noções da teoria das variedades. O que o ocorre conosco e com a formiga é devido ao fato de que em uma vizinhança de pontos muito pequena da terra (digamos a praia onde se está observando o horizonte) ou em uma vizinhança de pontos muito pequena da bola (a região da ordem de grandeza do comprimento total da formiga), tal superfície esférica é aproximadamente *plana*.

Uma *Variedade*, a grosso modo, nada mais é do que um conjunto X que localmente "se parece"com um espaço $\mathbb{R}^n$. No caso da Terra e da bola tal conjunto é o conjunto $\mathbb{S}^2$, que dado um ponto p neste conjunto, *localmente* (isso é, em alguma vizinhança deste ponto), nada é diferente do que um espaço $\mathbb{R}^2$.

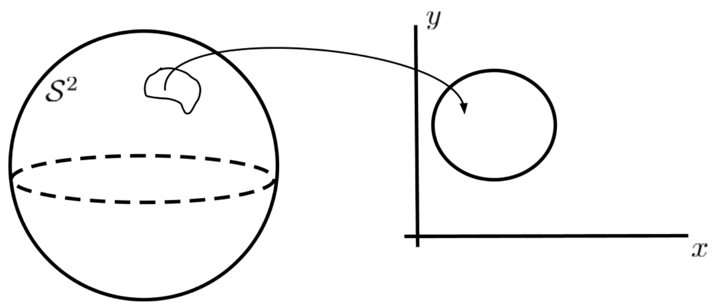

Figura 3: Ilustração da superfície $\mathbb{S}^2$.
Fonte: Acervo do autor.

Sob outro aspecto, as variedades *generalizam* os espaços $\mathbb{R}^n$ pois, são objetos matemáticos que não necessitam de um "espaço de dimensão maior para existir". Por exemplo, a superfície esférica $\mathbb{S}^2$ é comumente *mergulhada*(ELON) em um espaço de dimensão maior $\mathbb{R}^3$; a geometria das coordenadas esféricas ocorre por conta disso, mas é inegável que uma base de vetores não modifica direção,sentido e intensidade em um espaço $\mathbb{R}^3$, no entanto uma base fixada na superfície esférica varia ponto a ponto.

Em verdade a teoria da variedades oferece um arcabouço matemático preciso para tratar de espaços mais gerais sem a necessidade de, por exemplo, uma intuição geométrica visual; existe, por exemplo, a superfície esférica $\mathbb{S}^2$ e o *espaço* esférico $\mathbb{S}^2$ no qual a geometria já não é de fato plana e Euclidiana.

O *espaço-tempo* é uma variedade 4-dimensional diferenciável, a grosso modo e a Teoria da Relatividade Geral (TRG) é construída com este arcabouço. Mais ainda, dentro desta teoria é possível definir o que é um espaço curvo ou não, estudando a curvatura local de uma variedade definida com certa geometria; físicamente, é isso que se entende por gravidade no âmbito clássico (HAWKING).

1.2.2 VARIEDADES DIFERENCIÁVEIS

1.2.2.1 UM COMENTÁRIO SOBRE ESPAÇOS TOPOLÓGICOS

Dada então a introdução intuitiva do que é uma variedade, é necessário então definir precisamente o que é tal estrutura. A estrutura matemática fundamental é chamada de *Espaço Topológico*. Um espaço topológico é um conjunto de elementos X conjuntamente com uma estrutura denominada topologia $\mathcal{T}_X$. Por questões de completude um conjunto X será dito um espaço topológico $(X, \mathcal{T}_X)$ se, e só se satisfizer as seguintes propriedades:

1. O conjunto vazio $\{\}$ conjuntamente com o próprio conjunto X fazem parte do conjunto $\mathcal{T}_X$ (a topologia).
2. A união de qualquer subconjunto da topologia $\mathcal{T}_X$ é de fato membro também da topologia
3. A intersecção finita de subconjuntos da topologia $\mathcal{T}_X$ é de fato membro também da topologia

A necessidade de tal estrutra se dá pelo fato da necessidade de tornar precisa a ideia de continuidade, espaços topológicos criam essa noção. Por exemplo, na ideia intuitiva, foi dito que "localmente"$\mathbb{S}^2$ se "parecia"com um espaço $\mathbb{R}^2$, em verdade isso se traduz matematicamente sobre funções *contínuas biunívocas* que levam os pontos de um subconjunto $U \subset \mathbb{S}^2$ para um subconjunto $D \subset \mathbb{R}^n$. Tais funções são ditas *homeomorfismos* e se sustentam por conta da estrutura de espaço topológico.

1.2.2.2 VARIEDADES

Considere então um subconjunto $U \subset (X, \mathcal{T}_X)$ do espaço topológico, e um homeomorfismo ϕ, tal que:

$$\begin{aligned} \phi : U \subset (X, \mathcal{T}_X) &\to \mathbb{R}^n \\ p &\mapsto \phi(p) \end{aligned}$$

Onde $\phi(p) =: \left\{x^1(p), ..., x^n(p)\right\} \equiv x^\mu(p)$. Tal conjunto U é a ideia intuitiva de vizinhança e se chama *vizinhança coordenada* e tal homeomorfismo é denominado $\phi(p)$ *função coordenada*. Tais estruturas conjuntas em uma única dupla:

$$(U, \phi(p))$$

foram uma o que é chamado de *carta*, ou *sistema de coordenadas local diferenciável*. Sendo assim, usando cartas pode-se descrever cada parte local (isto é em cada ponto p do espaço topológico) do espaço topológico. E de fato, isso é feito com uma coleção finita de cartas $(U_\alpha, \phi(p)_\alpha)$ que satisfazem algumas propriedades:

1. Toda o espaço topologico pode ser coberto pelas vizinhanças U_α: $(X, \mathcal{T}_X) = \cup_\alpha U_\alpha$
2. Se $\phi(p)_\alpha$ e $\phi(p)_\beta$ são dois homeomorfismos então em regiões tais que ocorre $U_\alpha \cap U_\beta$, com $U_\alpha \cap U_\beta \neq \{\}$ então as funções ditas de *transição*,

$$\phi(p)_\alpha \circ \phi(p)_\beta^{-1}$$

E

$$\phi(p)_\beta \circ \phi(p)_\alpha^{-1}$$

São de classe C^∞.

Sendo assim as cartas são "costuradas"com funções de transição classe C^∞ (isto é, funções infinitamente diferenciáveis). Isso quer dizer, formalmente, que a transição entre um sistema de coordenadas para outro é feito de maneira diferenciável. A figura mostra a representação pictórica deste maquinário.

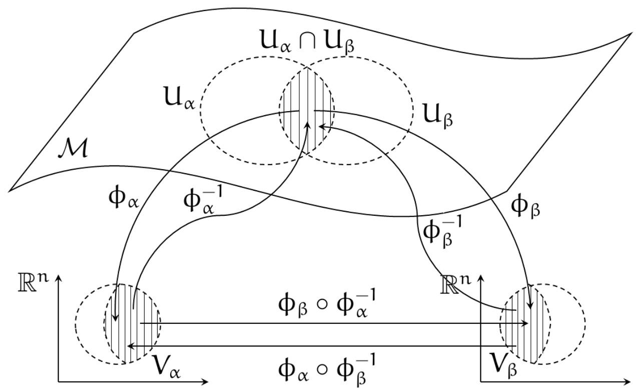

Figura 4: Transição entre sistema de coordenadas. Fonte: Acervo do autor.

Sendo assim, tais coleções de cartas que satisfazem as propriedades acima, são chamadas de *Atlas Diferenciáveis*. Logo, com tais estruturas define-se o que são variedades.

Definição 18. : Uma Variedade Diferenciável $\mathcal{M}$, é um espaço topológico $(X, \mathcal{T}_X)$, conjuntamente com um Atlas Diferenciável $(U_\alpha, \phi(p)_\alpha)$:

$$\mathcal{M} = \left[(X, \mathcal{T}_X), (U_\alpha, \phi(p)_\alpha)\right]$$

1.2.3 ESPAÇO TANGENTE

Definido o espaço, os vetores são os objetos naturais para tratar do movimento. Em espaços gerais como em variedades diferenciáveis, vetores são dados a partir de curvas. O motivo de tal maquinário é que o aspecto geométrico de um vetor tal como dado em $\mathbb{R}^n$ se perde, pelo fato de que os espaços $\mathbb{R}^n$ são reconhecidos apenas localmente em torno de um ponto. Sendo assim, ponto a ponto da variedade, existem espaços ditos *Tangentes* onde, e somente onde, os vetores podem ser definidos.

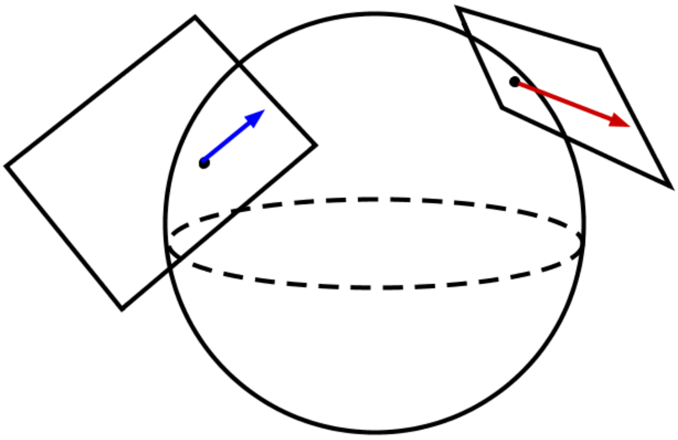

Figura 5: Espaços Tangentes e vetores. Fonte: Acervo do autor.

Tais vetores são construídos considerando então uma curva $\gamma(\gamma)$ na variedade.

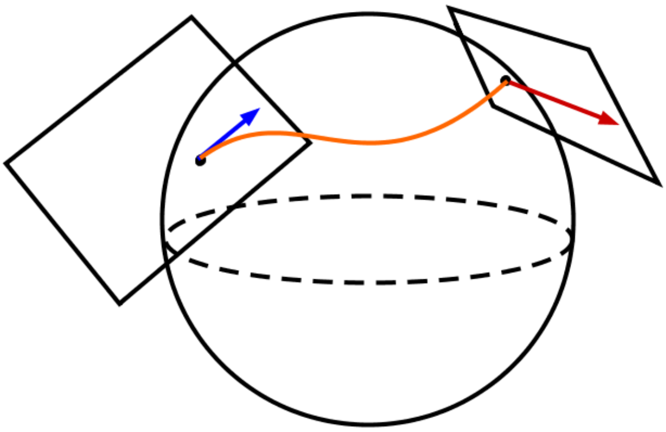

Figura 6: Curva, espaços Tangentes e vetores. Fonte: Acervo do autor.

Dado então um sistema de coordenadas $(U_i, \phi(p)_i)$ a curva detém um valor:

$$(\phi(p)_i \circ \gamma)(\lambda) = x^i(\lambda) \tag{91}$$

Sendo assim, compõe-se a curva γ com uma função f:

$$(f \circ \gamma)(\lambda) = f[\gamma(\lambda)] \tag{92}$$

E então, para definir um vetor tangente a curva no ponto, deriva-se (92):

$$\frac{d}{d\lambda}[(f \circ \gamma)(\lambda)] = \frac{d}{d\lambda}[f[\gamma(\lambda)]] \tag{93}$$

Pela regra da cadeia (93) fica,

$$\frac{d}{d\lambda}[f[\gamma(\lambda)]] = \frac{\partial f(x^i)}{\partial x^i}\frac{dx^i(\lambda)}{d\lambda} \tag{94}$$

O fato é que, a expressão (94) pode ser vista como um mapa que atua em funções:

$$\left[\frac{d}{d\lambda}\right]f = \left[\frac{dx^i(\lambda)}{d\lambda}\frac{\partial}{\partial x^i}\right]f \tag{95}$$

E então como f é arbitrária, os operadores

$$\frac{d}{d\lambda} = \frac{dx^i(\lambda)}{d\lambda}\frac{\partial}{\partial x^i} \tag{96}$$

são vetores tangentes a curva γ no ponto dado. Agora, utilizando a ideia dada por (96), diz-se que um *Vetor Contravariante* é um objeto dado pela combinação linear:

$$\mathbf{V} = v^i\frac{\partial}{\partial x^i} \tag{97}$$

Os vetores (operadores) $\frac{\partial}{\partial x^i}$ são linearmente independentes e geram um espaço denominado de Espaço Tangente à Variedade no ponto p: $T_p(\mathcal{M})$.

Dado então um vetor de $T_p(\mathcal{M})$, suas componentes se transformam como um vetor contravariante:

$$v^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}v^j \tag{98}$$

Onde agora as matrizes jacobianas são explicadas pelo fato de que são de fato as matrizes de trasnformações entre coordenadas nas regiões $U_\alpha \cap U_\beta$.

1.2.4 ESPAÇO COTANGENTE

Dado então um espaço tangente à variedade no ponto p $T_p(\mathcal{M})$, existe naturalmente o seu dual $T_p(\mathcal{M})^*$. Tal espaço define então os vetores covariantes os quais são dados mediante o seguinte procedimento: dada uma função f, faz-se então o produto interno de df por um vetor tangente $d/d\lambda$:

$$\left\langle df, \frac{d}{d\lambda}\right\rangle = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x^i}dx^i, \frac{dx^i(\lambda)}{d\lambda}\frac{\partial}{\partial x^i}\right\rangle =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{dx^i(\lambda)}{d\lambda}\left\langle dx^i, \frac{\partial}{\partial x^i}\right\rangle = \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{dx^i(\lambda)}{d\lambda}$$

Logo, nota-se que dx^i é de fato uma base. E tais diferenciais são de fato as bases de $T_p(\mathcal{M})^*$.

.

2 RELATIVIDADE GALILEANA

2.1 A RELATIVIDADE DE GALILEO

O princípio da relatividade (PR) é uma proposição que a física bem estabelecida considera como verdade de antemão para tratar do movimento de um sistema, com respeito a classe dos referenciais inerciais. Do ponto de vista da TRE, o princípio da relatividade é uma extensão para os sistemas físicos de qualquer caráter (e.g. eletromagnéticos). Como a história da física mostra, o PR remete à épocas anteriores à Lorentz,Poincaré e Einstein, em verdade este princípio é anterior à TRE, tendo como formulação conceitual, dada por Galileo, e solidificação matemática com as teorias Newtoniana, Lagragiana e Hamiltoniana dos sistemas puramente mecânicos.

Princípio da Relatividade de Galileo (PRG)*: As leis da mecânica são as mesmas em todos os referenciais inerciais.

O conteúdo físico deste princípio reside em perceber que ao considerar as equações que descrevem o sistema físico em questão e os processos experimentais realizados para testar a teoria, em dois referenciais inerciais distintos as equações detém a mesma forma e os processos experimentais exibem o mesmo resultado.

Uma outra maneira de analisar o funcionamento deste princípio é considerar a seguinte situação: suponha um observador $\mathcal{O}$ em repouso com relação ao referencial S —S está em repouso com relação ao referencial da Terra— e um outro observador $\mathcal{O}'$ em repouso com relação a um referencial S$'$ —em movimento retilíneo e uniforme com relação a Terra—. Nesta configuração S e S$'$ são referenciais inerciais legítimos e $\mathcal{O}$ e $\mathcal{O}'$ são ditos *observadores inerciais*.

Agora, suponha que ambos os observadores inerciais, estejam efetuando uma experiência idêntica de queda livre com respeito ao seus respectivos referenciais. O PR mostra que como os dois referenciais são inerciais —mesmo ocorrendo um movimento relativo entre os referenciais— não existe nenhuma diferença físicamente, se a queda livre de um corpo é feita em S ou em S$'$. Sendo assim, como as situações físicas são idênticas, o observador $\mathcal{O}'$ não percebe nenhum tipo de perturbação no experimento, logo ele não pode dizer se está em repouso ou em movimento retilíneo com respeito a S, isto é, não existe um referencial inercial privilegiado ou *absoluto*.

Matematicamente, o princípio da relatividade se traduz em uma transformação, linear, de coordenadas chamada de *Transformações de Galileo* (TG). Essas transformações mostram como "passar"de um referencial S para um S$'$ com velocidade uniforme $\vec{v}$ (em relação a S). Considerando a configuração *standard*, isto é:

A configuração *standard* de referenciais inerciais: é dada da seguinte maneira:

1) consideramos coordenadas cartesianas para os dois referenciais.

2) Os eixos x, y, z e x', y', z' são paralelos, respectivamente, entre si.

3) O movimento de S' em relação a S é dado apenas na direção do eixo x e com velocidade $\vec{v}' = v_{x'}\vec{e}_{x'}$ constante.

4) Adotamos a convenção de que a velocidade $\vec{v}'$ tem sentido positivo se houver movimento ao longo de valores positivos do eixo x de S ($x > 0$).

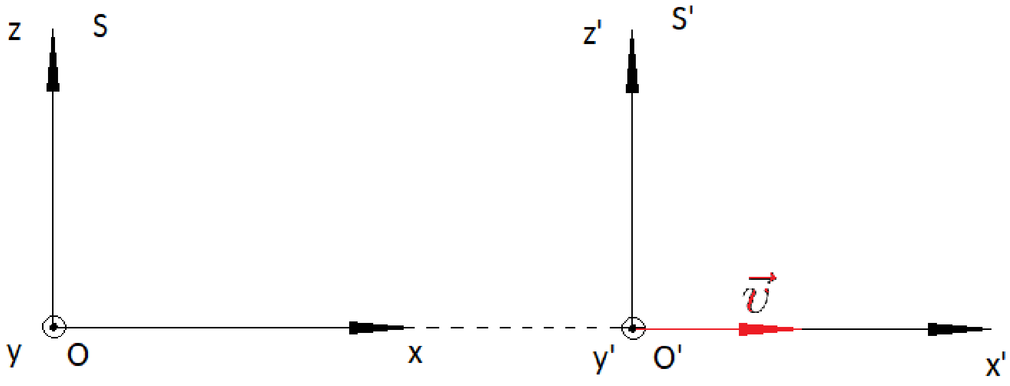

Figura 7: Configuração *standard*

O tempo, de acordo com a mecânica Newtoniana, é assumido como sendo o mesmo para os dois referenciais —meramente um parâmetro—, logo qualquer consideração de sincronização dos relógios que cada observador carrega para marcar o tempo,[13] em S e S', mostra que a premissa newtoniana sobre a não transformação dos tempos com respeito ao movimento relativo entre os referenciais mostra que o tempo é universal, isto é $t' = t$. Sendo assim, qualquer processo periódico —que eventualmente gera o conceito de relógio—, marca o tempo em taxas iguais; o tempo não depende do estado de movimento entre os referenciais. As TG são então:

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \tag{99}$$

E as transformações inversas são (passando o termo $-vt$ para o primeiro membro da

[13] Isso pode ocorrer pois $t' = t + \alpha$, isto é, pode ocorrer uma dessincronização nos tempos. Mas a configuração *standard* assume que $\alpha = 0$

equação):

$$\begin{cases} x = x' + vt \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases} \tag{100}$$

Considere agora dois pontos separados por uma distância dx, e um intervalo de tempo dt[14] em S e dx', dt' de acordo com as coordenadas de S'. Logo, supunha que no referencial S uma partícula percorre dx em um intervalo de tempo dt, isto é, tem velocidade $v_x = dx/dt$ e, respectivamente, no referencial S' uma partícula percorre dx' em um intervalo de tempo dt', isto é, tem velocidade $v_x = dx'/dt'$. De acordo com as TG, temos que:

$$v'_{x'} = \frac{dx'}{dt'} = \frac{d}{dt}[x - vt] = [\frac{d}{dt}(x) - \frac{d}{dt}(vt)] = v_x - V \implies$$

$$v'_{x'} = v_x - V \tag{101}$$

E a adição inversa é feita por:

$$v_x = v'_{x'} + V \tag{102}$$

O termo V é a velocidade relativa entre os referenciais S e S'. A lei da adição de velocidades é retirada diretamente das TG para descrever a situação física de como é a velocidade relativa entre partículas[15]. Por exemplo, dois carros estão se movendo, cada um, com velocidade uniforme de $60km/h$ (com relação a terra) em direção um ao outro. Bem, existem então o referencial S, do carro A e o referencial S', do carro B. Os observadores inerciais $\mathcal{O}$ e $\mathcal{O}'$ estão em repouso com relação aos respectivos referenciais.

Logo, a velocidade com que o observador $\mathcal{O}$ enxerga o outro, $\mathcal{O}'$, vindo em sua direção de é de:

$$-60km/h = 60km/h - V = 120km/h$$

Com o PRG as TG, as leis de Newton e a lei da adição de velocidades, temos todo o arcabouço teórico elementar para descrever a mecânica em baixas velocidades. Mais ainda, as TG formam o grupo de simetria da mecânica Newtoniana, ou ainda, as equações de Newton são

[14]Note que existe uma diferença entre d e d, respectivamente, a notação é reservada para a operação de derivação e a outra para quantidades chamadas infinitesimais.

[15]Como o movimento é unidimensional e na configuração *standard* temos que a velocidade relativa é dada sobre a reta paralela a direção das velocidades resultantes.

invariantes perante as TG e a teoria de Newton é uma teoria *covariante* frente as TG.

2.2 INVARIÂNCIA DE COMPRIMENTOS PELAS TRANFORMAÇÕES DE GALILEO

Considere que em S o observador $\mathcal{O}$ está em repouso e efetua uma medição de uma barra rígida Σ, com uma régua π. O tamanho da barra é definido pela distância do ponto A de uma extremidade da régua até a outra extremidade da régua, o ponto B (isto é, o próprio comprimento da régua):

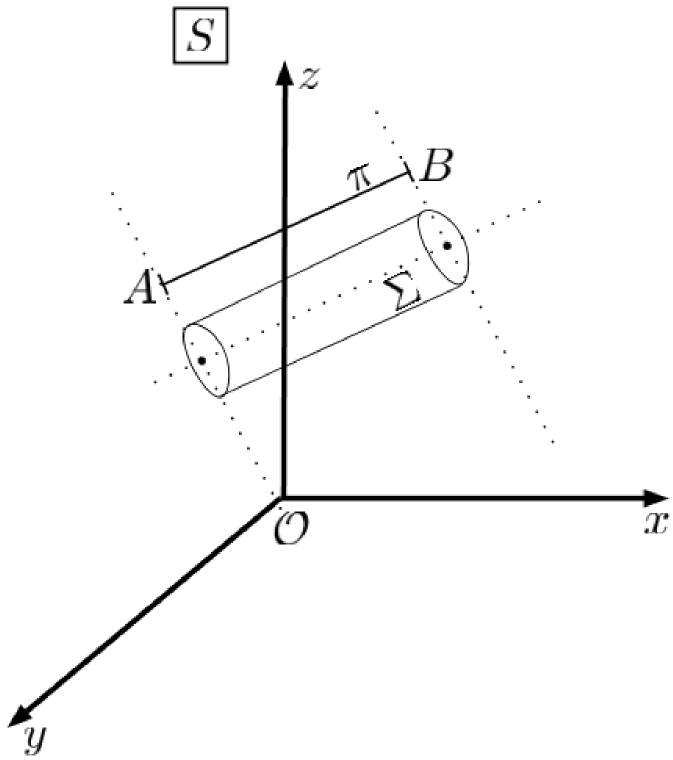

Figura 8: Barra rígida e régua

O comprimento $\Delta\ell$ da régua então é definido pela norma do vetor separação:

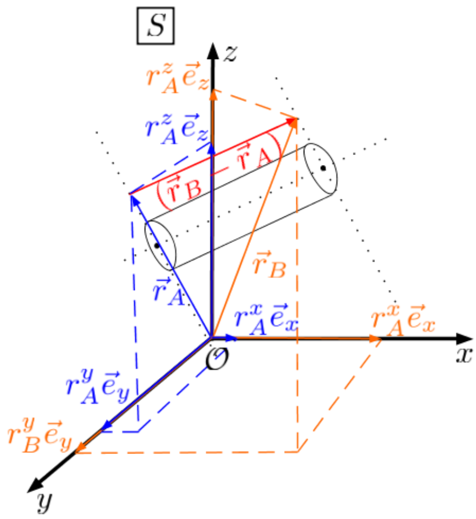

Figura 9: Vetor separação no qual a norma é o comprimento da régua π.

$$\Delta\ell =: \|(\vec{r}_{\mathrm{B}} - \vec{r}_{\mathrm{A}})\| \equiv \|\Delta\vec{r}_{\mathrm{AB}}\| =: \sqrt{\langle \Delta\vec{r}_{\mathrm{AB}}, \Delta\vec{r}_{\mathrm{AB}} \rangle} \tag{103}$$

A equação (95) calcula então o comprimento da régua, que por sua vez nos mostra o tamanho da barra rígida. Mais ainda, pelas TG podemos verificar que de fato os comprimentos são invariantes.

Para tanto, considere um outro referencial inercial S' e observador $\mathcal{O}'$, a mesma barra Σ, a régua π o referencial S e seu observador $\mathcal{O}$. O referencial S' está em movimento e a configuração não precisa, necessariamente, ser a *standard*.

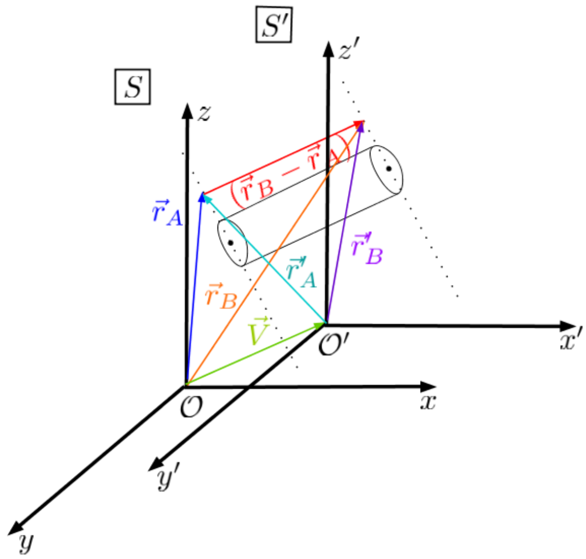

Figura 10: Referenciais inerciais em movimento relativo fora da configuração *standard*, medindo a barra rígida cada um com seus vetores posição.

Agora, com essa configuração de referenciais apresentada, vemos que devemos considerar transformações mais gerais que as apresentadas em (91) e (92), pelo simples motivo que a velocidade relativa é agora uma quantidade vetorial. Sendo assim (91) fica:

$$\vec{r'} = \vec{r} \boxplus_{\mathbb{E}^3} [-\vec{V}t] \implies \begin{cases} x' = x - v^x t \\ y' = y - v^y t \\ z' = z - v^z t \\ t = t' \end{cases} \tag{104}$$

E as transformações inversas ficam:

$$\vec{r} = \vec{r'} \boxplus_{\mathbb{E}^3} \vec{V}t \implies \begin{cases} x = x' + v^x t \\ y = y' + v^y t \\ z = z' + v^z t \\ t' = t \end{cases} \tag{105}$$

Sendo assim, o comprimento da régua que o observador $\mathcal{O}$ mede , no referencial S é:

$$\|\Delta\vec{r}_{AB}\| = \sqrt{[(x_B - x_A)]^2 + [(y_B - y_A)]^2 + [(z_B - z_A)]^2} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} \implies$$
$$\implies \|\Delta\vec{r}_{AB}\|^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_B - z_A)^2$$

Analogamente, o comprimento da régua que o observador $\mathcal{O}'$ mede , no referencial S' é:

$$\left\|\Delta\vec{r'}_{AB}\right\| = \sqrt{[(x'_B - x'_A)]^2 + [(y'_B - y'_A)]^2 + [(z'_B - z'_A)]^2} =$$
$$\sqrt{\Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2} \implies$$
$$\implies \left\|\Delta\vec{r'}_{AB}\right\|^2 = \Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2 = (x'_B - x'_A)^2 + (y'_A - y'_B)^2 + (z'_B - z'_A)^2$$

Se aplicarmos as TG , teremos então que:

$$\left\|\Delta\vec{r'}_{AB}\right\|^2 = \Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2 = [(x'_B - x'_A)]^2 + [(y'_B - y'_A)]^2 + [(z'_B - z'_A)]^2 =$$
$$= \{[(x_B - v^x t) - (x_A - v^x t)]\}^2 + \{[(y_A - v^y t) - (y_B - v^y t)]\}^2 + \{[(z_B - v^z t) - (z_A - v^z t)]\}^2 =$$
$$= (x_B - v^x t - x_A + v^x t)^2 + (y_A - v^y t - y_B + v^y t)^2 + (z_B - v^z t - z_A + v^z t)^2 =$$
$$= (x_B - x_A)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_B - z_A)^2 = \|\Delta\vec{r}_{AB}\|^2 \qquad \square$$

Sendo assim vemos que comprimentos são invariantes por TG,

$$\left\|\Delta\vec{r'}_{AB}\right\|^2 = \|\Delta\vec{r}_{AB}\|^2 \equiv \Delta\ell'^2 = \Delta\ell^2 \tag{106}$$

Físicamente, a equação (98) mostra que não importa o sistema de coordenadas utilizado, orientações de eixos, qualquer tipo de configuração imposta. Existe uma coisa que não diz respeito a toda a *estrutura métrica* do espaço: o comprimento expresso pelo intervalo de distância entre os pontos A e B é um número, um *invariante* por TG.

Considere agora que a distância entre os pontos A e B seja infinitesimal. Logo, a régua mostrará quantidades infinitesimais para qualquer observador que utiliza-la para medir distâncias.

Sendo assim, podemos definir a seguinte quantidade:

$$\Delta\ell^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{107}$$

A equação (99) chama-se elemento de linha, e está escrita conforme as coordenadas cartesianas escolhidas. De forma mais compacta escrevemos:

$$d\ell^2 = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\delta_{ij}dx^i dx^j \tag{108}$$

2.3 MECÂNICA NEWTONIANA

As TG traduzem o conceito de relatividade do movimento e quando aplicadas as equações de Newton. A tradução matemática da frase "os processos mecânicos tem a mesma forma nos dois referenciais"reside então aplicação das TG na segunda lei de Newton. Expressa nas coordenadas do referencial S, temos:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2}$$

e, agora, nas coordenadas do referencial S':

$$\vec{F}' = m\vec{a}' = m\frac{d^2\vec{x}'}{dt'^2}$$

Pelo PR temos necessariamente que:

$$\vec{F}' = m\vec{a}' = m\frac{d^2\vec{x}'}{dt'^2} = \vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} \implies$$

$$\vec{F}' = \vec{F} \tag{109}$$

Agora, com as TG é possível mostrar matematicamente que isso é verdade:

$$\begin{cases} F'_{x'} = ma'_{x'} = m\frac{d^2x'}{dt'^2} = m\frac{d^2}{dt^2}[x - vt] = m[\frac{d^2}{dt^2}(x) - \frac{d^2}{dt^2}(vt)] = m[a_x - 0] = ma_x = F_x \\ F'_{y'} = ma'_{y'} = m\frac{d^2y'}{dt'^2} = m\frac{d^2y}{dt^2} = ma_y = F_y \\ F'_{z'} = ma'_{z'} = m\frac{d^2z'}{dt'^2} = m\frac{d^2z}{dt^2} = ma_z = F_z \end{cases}$$

Logo, $\vec{F}' = \vec{F}$ $\square$

3 GRAVITAÇÃO NEWTONIANA

3.1 LEI DA GRAVITAÇÃO UNIVERSAL

A interação gravitacional fora muito bem explicada pela quantidade vetorial chamada *Força Gravitacional*:

$$\vec{F}_g = -G\frac{mM}{\|(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\|^2}\hat{r} \tag{110}$$

onde G é a constante gravitacional de Newton. O vetor força gravitacional é uma quantidade proveniente da teoria Newtoniana do movimento. Essa quantidade encerra o que é chamada de *Lei da Gravitação Universal de Newton*. A lei da gravitação universal nos diz que uma partícula pontual dotada de massa M, no ponto 1 exerce uma força $\vec{F}_g$, atrativa, que varia com o inverso do quadrado da distância, em uma outra partícula de massa m, no ponto 2. Sua universalidade reside no fato de que todas as partículas dotadas de massa, satisfazem a equação acima, ou ainda, produzem naturalmente essa força.

A partir da equação (102), define-se o campo gravitacional produzido pela partícula dotada de massa M:

$$\frac{\vec{F}_g}{m} =: \vec{g} \tag{111}$$

Essa quantidade definida é a mediadora da força gravitacional entre as partículas m e M, isto é a massa M produz um campo mediador da interação descrita pela lei da gravitação universal. De fato todas as partículas massivas produzem a quantidade que media a interação gravitacional pelo universo: o campo gravitacional $\vec{g}$. Com essa descrição, a noção de "força a distância"é substituída pela noção de campo mediador desta interação.

Agora, como a Força Gravitacional produzida pela massa M é uma força conservativa, tem-se que a equação (102) pode ser reescrita em termos de uma função potencial chamada de

Potencial Gravitacional Φ:

$$\vec{F}_g = -m\vec{\nabla}\Phi(\vec{r}_2) \tag{112}$$

E então, utilizando a noção de campo gravitacional definida acima, temos diretamente que:

$$\vec{g} = -\vec{\nabla}\Phi(\vec{r}_2) \tag{113}$$

Como $\vec{g}$ é um campo radial, ele detém apenas variações com respeito à distância r, e isso implica que (4) é pode ser escrita como:

$$\vec{g} = -\vec{\nabla}\Phi(\vec{r}_2) = -\frac{\partial \Phi}{\partial r}\hat{r} = -\frac{GM}{\|(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\|^2}\hat{r} \tag{114}$$

Integrando (106), obtém-se:

$$\Phi = -\frac{GM}{\|(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\|} \tag{115}$$

De modo geral, o potencial é bem mais complicado pois M não necessariamente é pontual, a massa geradora de campo pode estar distribuída ao longo de um volume, o que implica que o potencial gravitacional é devido a um contínuo de massa distribuída ao longo de um volume:

$$\Phi = -G \iiint_V \frac{\rho(\vec{r})}{\|(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\|} dV \tag{116}$$

3.2 EQUAÇÕES DE CAMPO PARA O POTENCIAL GRAVITACIONAL

Com a noção de campo gravitacional devido a uma massa M, pode-se calcular o fluxo deste campo através de uma superfície S que encerra esta massa geradora de campo :

$$I = \oiint_S \langle \vec{g}, \vec{n} \rangle dS \tag{117}$$

O produto escalar pode ser calculado como:

$$\langle \vec{g}, \vec{n} \rangle = |\vec{g}|\,|\vec{n}|\cos(\theta) = \frac{-GM\cos(\theta)}{\|(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)\|^2} \tag{118}$$

Então, o fluxo resulta em:

$$I = \oiint_S \langle \vec{g}, \vec{n} \rangle dS = -GM \oiint_S \frac{\cos(\theta)}{\|(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)\|^2} dS = -GM \oiint_S d\Omega \tag{119}$$

onde $d\Omega =: \dfrac{\cos(\theta)}{\|(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)\|^2} dS$ é o elemento de angulo sólido.

A integração sobre o angulo sólido é igual a 4π, por isso, o fluxo fica então:

$$I = -GM \oiint_S d\Omega = -GM4\pi \tag{120}$$

O significado físico do que foi feito diz respeito ao conceito das linhas de campo do campo gravitacional,gerado pela massa m, que passam pela superfície que encerra M. Essas linhas tem a mesma direção do campo gravitacional, e por isso nos mostram sua intensidade.

Sendo assim, tem-se:

$$\oiint_S \langle \vec{g}, \vec{n} \rangle dS = -4\pi GM \tag{121}$$

O resultado desta combinação de equações leva então à lei de campo fundamental da gravitação (de forma análoga ao campo elétrico gerado por uma carga pontual), a chamada *lei de gauss para a gravitação*. A interpretação física por trás de (113) reside em perceber que o campo gravitacional $\vec{g}$ é gerado por uma massa (ou carga gravitacional, ou ainda massa gravitacional) M.

Por outro lado, ao considerar uma distribuição contínua de matéria, a quantidade $-4\pi GM$ deverá ser integrada sobre um volume:

$$M = \rho(x, y, z)dV \implies -4\pi G \iiint_V \rho(\vec{r})dV \tag{122}$$

Sendo assim, é possível escrever:

$$\oiint_S \langle \vec{g}, \vec{n} \rangle dS = \iiint_V -4\pi G\rho(\vec{r})dV \tag{123}$$

Porém, ao utilizar o teorema da divergência, tem-se:

$$\oiint_S \langle \vec{g}, \vec{n} \rangle dS = \iiint_V \nabla \cdot \vec{g} dV \tag{124}$$

E assim,

$$\iiint_V \nabla \cdot \vec{g} \; dV = \iiint_V -4\pi G \rho(\vec{r}) dV \implies \iiint_V \left[\nabla \cdot \vec{g} + 4\pi G \rho(\vec{r}) \right] dV = 0 \tag{125}$$

Da equação (117), concluí-se a forma diferencial da lei de gauss para a gravitação, ou ainda, as equações de campo para a interação gravitacional:

$$\nabla \cdot \vec{g} = -4\pi G \rho(\vec{r}) \tag{126}$$

A equação (118) é uma equação de campo em termos de quantidades vetoriais. Quase sempre é mais conveniente efetuarmos cálculos em termos de quantidades totalmente escalares, que no caso da gravitação é possível devido a presença da função potencial que emerge da natureza do campo ser conservativo. Sendo assim,:

$$\nabla \cdot \vec{g} = \nabla \cdot (-\vec{\nabla} \Phi) - 4\pi G \rho(\vec{r}) \tag{127}$$

Utilizando o fato da identidade matemática de que $\nabla \cdot (\vec{\nabla} f) = \nabla^2 f$, temos então que as equações de campo ficam definidas para o potencial gravitacional:

$$\nabla^2 \Phi(\vec{r}) = -4\pi G \rho(\vec{r}) \tag{128}$$

A equação (120) é a *equação de Poisson* para o potencial gravitacional, e ela nos diz que dada uma distribuição de matéria ρ, ela altera o potencial gravitacional do espaço. Similarmente,dado um determinado potencial gravitacional, podemos nos perguntar que distribuição de matéria ρ que o gera.

Considerando agora uma região onde $\rho(\vec{r}) = 0$, obtemos as chamadas *equações de vácuo* da gravitação Newtoniana, dadas pela *equação de Laplace*:

$$\nabla^2 \Phi(\vec{r}) = 0 \tag{129}$$

O significado físico da equação (120) é então a de mostrar quais são os potenciais para uma região *afastada* da distribuição de matéria.

4 RELATIVIDADE ESPECIAL

4.1 FUNDAMENTOS DA RELATIVIDADE ESPECIAL

Com o advento da teoria eletromagnética de Maxwell a unificação da ótica geométrica com a eletricidade e magnetismo se deu pelas soluções ondulatórias das equações que relacionam os campos elétrico e magnético. As equações que descrevem a relação destes campos são as chamadas equações de Maxwell[16]:

$$\begin{cases} \langle \vec{\nabla}, \vec{E}(x,y,z,t) \rangle = \dfrac{1}{\epsilon_0}\rho_e(x,y,z,t) & (112.1) \\ \langle \vec{\nabla}, \vec{B}(x,y,z,t) \rangle = 0 & (112.2) \\ \vec{\nabla} \times \vec{E}(x,y,z,t) = -\dfrac{\partial}{\partial t}\vec{B}(x,y,z,t) & (112.3) \\ \vec{\nabla} \times \vec{B}(x,y,z,t) = \mu_0\Big[\vec{J} + \epsilon_0 \dfrac{\partial}{\partial t}\vec{E}(x,y,z,t)\Big] & (112.4) \end{cases} \tag{130}$$

O conteúdo físico das equações (112) diz respeito a leitura de cada uma das 4 equações. (112.1) nos conta que densidades de carga elétrica geram campos elétricos, (112.2) nos diz respeito a inexistência de cargas magnéticas monopolares[17]. (112.3) mostra que variações temporais no campo magnético gera campos elétricos. Por fim, (112.4) nos diz respeito aos geradores de campo magnético além do dipolo. Um campo magnético pode ser produzido por uma densidade de corrente $\vec{J}$, por uma variação temporal do campo elétrico, e pela contribuição conjunta destes dois fenômenos.

Conjuntamente com as relações entre os campos elétricos e magnéticos, temos também a relação newtoniana (Equações diferenciais da 2ª Lei) de uma partícula carregada em interação com uma região dotada campo elétrico e magnético. Essa equação de movimento é denominada *Força de Lorentz*[18]:

[16] Escritas em coordenadas cartesianas,em um meio que não contém matéria além das fontes de carga e densidades de corrente e com o sistema SI de unidades.

[17] O jeito "natural"macroscópico de produção do campo magnético vem com o dipolo magnético. Isto é, macroscopicamente o campo magnético é gerado por, ao menos, um dipolo.

[18] Em regimes não relatívísticos

$$\vec{F}_{\mathcal{L}} = \vec{F}_e \boxplus_{\mathbb{E}^3} \vec{F}_m = q\left[\vec{E} \boxplus_{\mathbb{E}^3} \left(\vec{v} \times \vec{B}\right)\right]^* \tag{131}$$

Sendo assim, com as equações (112) e (113) temos toda a mecânica de uma partícula massiva, carregada, em interação com os campos elétricos e magnéticos[19].

O desenvolvimento do eletromagnetismo surge no final do século XIX e diferentemente das equações de newton, as equações de Maxwell não formam uma teoria covariante frente as TG e não são invariantes sobre as TG. De fato, como as TG traduzem o PRG, até então não existia um princípio de relatividade que englobasse satisfatóriamente o eletromagnetismo, isto é, existia o PRG e a mecânica newtoniana, e a recente teoria eletromagnética, mas a aplicação das TG nas equações de Maxwell não implicava em invariância e então o eletromagnetismo abria margem para ser uma teoria não covariante pelo único grupo de simetria existente na época. Ainda mais, do ponto de vista conceitual como a teoria newtoniana era extremamente bem fundamentada a comunidade científica não considerava que o PRG estava errado.

O fato é, o PRG e as TG são conceitos que a própria teoria eletromagnética não adimite fundamentalmente e, mais ainda, a fim de tornar a teoria eletromagnética covariante é necessário um outro princípio da relatividade mais geral[20] e novas transformações entre referenciais para verificar a invariância das equações.

4.1.1 TRANSFORMAÇÕES DE LORENTZ

As transformações entre coordenadas (e portanto entre os referenciais em movimento relativo) que sustentam matematicamente o PRE são as transformações de Lorentz. Os fenômenos vistos até agora foram derivados fundamentalmente assumindo a constância da velocidade da luz. Por ela foi possível notar as quantidades relativas com respeito ao tempo e comprimento, bem como a noção relativa de simultaneidade.

Entretanto, assumindo as TL, esses efeitos surgem naturalmente de forma que não é preciso apelar para exemplos intuitivos. De fato, os argumentos que lançaram mão da geometria Euclideana não são válidos dentro da própria TRE, a geometria da TRE não é fundamentalmente Euclideana, mas sim uma geometria mais geral denominada *geometria Lorenztiana*.

A partir dos postulados da TRE, pode-se derivar as TL. O primeiro postulado —o PRE— nos diz que as leis da física, e portanto suas equações, detém a mesma forma para todos os referenciais inerciais. Uma propriedade deste postulado é que com respeito as transformações

[19]Para apresentar um panorama mais rigoroso vale a pena comentar que existe a necessidade da existência da conservação da carga elétrica pela equação de continuidade.

[20]Na realidade a teoria eletromagnética não tem sua forma totalmente covariante até a introdução da relatividade especial com o formalismo *quadri-vetorial*, entretanto o princípio de relatividade que Einstein propôs como postulado, implica na TRE. Então, com a TRE em mãos, Minkowski, em 1906, cria o arcabouço matemático que tornou possível o desenvolvimento do eletromagnetismo covariante.

inversas devemos simplesmente trocar ν por $-\nu$ [21] (FARAONI). Já, para o segundo postulado, existe uma consequência que diz respeito a própria característica do espaço físico; o segundo postulado instaura a *isotropia do espaço*. É possível tratar matematicamente do conceito de isotropia, entretanto no que concerne a derivação das TL, diz-se que a isotropia do espaço é resultado do fato de que em todas as direções a velocidade da luz detém o mesmo valor de c (FARAONI).

]

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - \nu t) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\Big(t - \dfrac{\nu}{c^2}x\Big) \end{cases} \tag{132}$$

E as transformações inversas são:

$$\begin{cases} x = \gamma(x' + \nu t') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma\Big(t' + \dfrac{\nu}{c^2}x'\Big) \end{cases} \tag{133}$$

As TL são as tranformações corretas paras os fenômenos relativísticos. E sob o aspecto dos domínios de validade das teorias físicas, elas devem levar as TG no limite de baixas velocidades.

Sendo assim, deve-se considerar um limite para baixas velocidades onde $|\ \nu\ | << c \iff \frac{|\nu|}{c} << 1 \equiv \beta << 1 \implies \beta \approx 0$. Daí,

$$\lim_{\beta \to 0} \gamma(\beta) = \lim_{\frac{|\nu|}{c} \to 0} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\nu^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = 1 \tag{134}$$

Logo, quando $|\ \nu\ | << c$ -isto é, sob o processo de limite da teoria-, temos que, o fator gamma de lorentz é igual a 1. Essa aproximação de fato recupera as TG, e consequentemente o PRG e a física Newtoniana.

[21] Esse argumento foi utilizado implicitamente nas TG. Contudo, devido a simplicidade envolvida na forma matemática da transformações, foi considerado apenas o argumento matemático de somar o termo $(-\nu t)$ em ambos os membros das equações.

É possível, a partir dos postulados da TRE, chegar nas TL. Sendo assim, primeiro considera-se então a configuração standard de referenciais inerciais S e S' em coordenadas cartesianas. Isso pode ser assumido como uma mera simplificação matemática para trabalhar com hipóteses matemáticas mais simples -afinal é claro que isso torna o problema geral em algo unidimensional-, entretanto o PVL corrobora fisicamente com essa hipótese pois um dos conteúdos "sutis"que o PVL carrega é com respeito a *isotropia do espaço* devido ao fato da velocidade da luz ser uma constante. Por conta dessa constância os referênciais inerciais enxergam a velocidade da luz constante em todas as direções, isto é, nenhuma direção é privilegiada. Sendo assim, com o segundo postulado chega-se a conclusão de que as transformações devem ser lineares.

Conjuntamente com o PVL, como existe um movimento espacial relativo entre os referenciais inercias é razoável supor que a transformação espacial (afinal não sabemos se ou não as tranformações dos tempos serão afetadas) que se procura deve ter uma forma tal que:

$$x' = \mathfrak{G}(x - vt) \tag{135}$$

Utilizando o PRE, as transformações inversas devem ter "a mesma forma"; logo:

$$x = \mathfrak{G}(x' + vt') \tag{136}$$

Nota-se que para derivar as transformações corretas, basta determinar o fator multiplicativo $\mathfrak{G}$.

Ainda mais, nota-se que as transformações procuradas devem recuperar as TG no limite onde $| v | << c$. Logo, $\mathfrak{G} = 1 \iff \frac{|v|}{c} \to 0$. Daí, tem-se que:

$$x' = (x - vt) \tag{137}$$

$$x = (x' + vt') \tag{138}$$

Sendo assim, percebe-se que $\mathfrak{G} =: \mathfrak{G}(\frac{|v|}{c}) \equiv \mathfrak{G}(\beta)$.

Vale a pena destacar que devido as hipóteses feitas, os movimentos nas direções dos eixos y' e y, z' e z, são nulos, daí:

$$y' = y$$

e

$$z' = z$$

As hipóteses feitas até agora foram com respeito ao espaço. O tempo não é assumido, a priori, como sendo transformado tal como:

$$t' = t$$

Logo, é necessário relacionar coordenadas espaciais com temporais para invertigarmos se existe, de fato, uma transformação temporal.

Para tanto, considere então que na configuração standard um pouso de luz (i.e. uma onda eletromagnética) ocorra em $t = t' = 0$. Existe então o movimento relativo entre os referenciais; S' se move com velocidade v em relação a S, e o pulso de luz, claro, com velocidade c para ambos os referenciais. Em S um observador $\mathcal{O}$, em repouso, observa uma frente de onda esférica resultante da propagação do pulso; a frente de onda percorreu uma distâcia igual ao raio de ct:

$$R^2 = c^2t^2 = x^2 + y^2 + z^2 \tag{139}$$

Utilizando o PRE (e o PVL), a equação deve ter a mesma forma e descrever a mesma lei física, em todos os referenciais inerciais. Logo, o observador $\mathcal{O}'$ em S' ve a frente de onda esférica se propagar com raio igual ct':

$$R^2 = c^2t'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 \tag{140}$$

Mas, se sabe que:

$$y' - y = 0$$

e

$$z' - z = 0$$

$$R^2 = c^2t^2 = x^2 \tag{141}$$

$$R^2 = c^2t'^2 = x'^2 \tag{142}$$

Ou ainda:

$$R^2 = c^2t^2 = x^2 \iff R = \sqrt{c^2t^2} = \sqrt{x^2} \iff R = ct = x \tag{143}$$

$$R^2 = c^2t'^2 = x'^2 \iff R = \sqrt{c^2t'^2} = \sqrt{x'^2} \iff R = ct' = x' \tag{144}$$

Sendo assim, tem-se que:

$$x' = ct' \iff \mathfrak{G}(x - vt) = ct' \iff$$

Utilizando e daí, tem-se que:

$$\iff \mathfrak{G}(ct - vt) = \mathfrak{G}c\Big(t - \frac{v}{c}t\Big) \iff$$

$$t' = \mathfrak{G}\Big(t - \frac{v}{c}t\Big) \tag{145}$$

Ainda mais, tem-se que:

$$x = ct \iff \mathfrak{G}(x' + vt') = ct \iff$$

$$\iff \mathfrak{G}(ct' - vt') = \mathfrak{G}c\Big(t' - \frac{v}{c}t'\Big) \iff$$

$$\iff \mathfrak{G}\Big(c + v\Big)t' \iff$$

$$t = \mathfrak{G}\Big(c + v\Big)t' \tag{146}$$

Agora, tem-se que:

$$x = \mathfrak{G}\Big[x' + v\mathfrak{G}\Big(t - \frac{v}{c}t\Big)\Big] \tag{147}$$

Mas,

$$x = ct = \mathfrak{G}\Big[x' + v\mathfrak{G}\Big(t - \frac{v}{c}t\Big)\Big] \iff$$

$$\iff ct = \mathfrak{G}\Big\{\big[\mathfrak{G}(x - vt)\big] + v\mathfrak{G}\Big(t - \frac{v}{c}t\Big)\Big\} \iff$$

$$\iff ct = \mathfrak{G}^2\Big\{(x - vt) + \Big(vt - \frac{v^2}{c}t\Big)\Big\} \iff$$

$$\iff ct = \mathfrak{G}^2\Big(vt - \frac{v^2}{c}t\Big) \iff$$

$$\Longleftrightarrow \; ct = \mathfrak{G}^2\Big(x - \frac{v^2}{c}t\Big) \; \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \; \frac{ct}{ct} = 1 = \mathfrak{G}^2\Big(\frac{1}{ct}x - \frac{1}{ct}\frac{v^2}{c}t\Big) \; \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \; 1 = \mathfrak{G}^2\Big(\frac{x}{ct} - \frac{v^2}{c^2}\Big) \; \Longleftrightarrow$$

Logo,

$$\Longleftrightarrow \; 1 = \mathfrak{G}^2\Big(\frac{ct}{ct} - \frac{v^2}{c^2}\Big) \; \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \; 1 = \mathfrak{G}^2\Big(1 - \frac{v^2}{c^2}\Big) \; \Longleftrightarrow$$

E por fim, encontra-se $\mathfrak{G}$:

$$\Longleftrightarrow \; \mathfrak{G}(\beta) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Sendo assim, $\mathfrak{G}(\beta)$ define propriamente o chamado *fator de Lorentz* ou *fator gamma*, que é escrito como:

$$\mathfrak{G}(\beta) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} := \gamma(\beta) \equiv \gamma \tag{148}$$

Agora, com o fator multiplicativo $\mathfrak{G}$ encontrado, i.e. $\mathfrak{G} = \gamma$, resta descobrir as transformações espaciais e temporais. Note que o que foi feito até agora, foi para determinar $\mathfrak{G}$, para agora determinar-se as transformações.

Com respeito as coordenadas espaciais:

$$x' = \gamma(x - vt) \tag{149}$$

e a transformação inversa:

$$x = \gamma(x' + vt') \tag{150}$$

Com respeito a coordenada temporal:

$$x = \gamma\Big\{\Big[\gamma(x - vt)\Big] + vt'\Big\} = \gamma^2(x - vt) + \gamma vt' =$$

$$= \gamma^2 x - \gamma^2 vt + \gamma vt' \implies$$

$$\implies (1 - \gamma^2)x = -\gamma^2 vt + v\gamma t' \iff$$

$$\iff t' = \frac{(1-\gamma^2)x + \gamma^2 vt}{\gamma v} = \frac{x - \gamma^2 x + \gamma^2 vt}{\gamma v} =$$

$$= \frac{x}{\gamma v} - \frac{\gamma(x + vt)}{v} = \frac{x}{\gamma v} - \frac{\gamma x}{v} + \gamma t = \frac{x}{v}\Big(\frac{1}{\gamma} - \gamma\Big) + \gamma t =$$

$$= \frac{x}{v}\Big(\frac{1-\gamma^2}{\gamma}\Big) + \gamma t \implies$$

$$t' = \frac{x}{v}\Big(\frac{1-\gamma^2}{\gamma}\Big) + \gamma t \tag{151}$$

Note que já existe uma equação de transformação para o t', entretanto é conveniente melhorar a expressão.

O fator:

$$\Big(\frac{1-\gamma^2}{\gamma}\Big)$$

pode ser reescrito, tal que:

$$\frac{1 - \Big[\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\Big]^2}{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}$$

Daí,

$$\frac{1 - \Big[\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\Big]^2}{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}} = \Big(1 - \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}\Big)\sqrt{\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}} =$$

$$= \Big[\frac{\Big(1-\frac{v^2}{c^2}\Big) - 1}{1-\frac{v^2}{c^2}}\Big]\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}(-\frac{v^2}{c^2})}{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{-\frac{v^2}{c^2}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}} = -\gamma\frac{v^2}{c^2}$$

Logo,

$$\left(\frac{1-\gamma^2}{\gamma}\right) = -\gamma\frac{v^2}{c^2} \tag{152}$$

Sendo assim, tem-se que:

$$t' = \frac{x}{v}\left(\frac{1-\gamma^2}{\gamma}\right) + \gamma t = \frac{x}{v}\left(-\gamma\frac{v^2}{c^2}\right) + \gamma t =$$

$$= -\gamma\frac{xv}{c^2} + \gamma t \implies$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \tag{153}$$

e a transformação inversa:

$$t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right) \tag{154}$$

$\square$

4.1.2 CONSEQUÊNCIAS DAS TRANSFORMAÇÕES DE LORENTZ

É imediato, dadas as TL, derivar a dilatação do tempo, contração de comprimentos e a relatividade da simultaneidade, pois todos esses efeitos decorrem simplesmente da análise da mudança dos referênciais. Do ponto de vista físico, esses efeitos ocorrem devido basicamente a constância da velocidade da luz e do princípio da relatividade; matematicamente, como foi dito, esses dois postulados tomam sentido dentro das TL.

Considere então dois referenciais inerciais S e S', e observadores $\mathcal{O}$ e $\mathcal{O}'$, respectivamente em repouso ao próprio referencial e posicionados na origem. O observador $\mathcal{O}'$ mede então uma barra de comprimento ℓ_0 —que está em repouso em S'—, cujo comprimento é a distância do ponto inicial, x_0', da barra ao ponto final da barra x'. Logo, tem-se que o *comprimento próprio* é definido (unidimensionalmente) como:

$$\ell_0 =: \parallel x' - x_0' \parallel = \sqrt{(x' - x_0')^2} = \mid x' - x_0' \mid = x' - x_0' \tag{155}$$

Sendo assim, para um observador $\mathcal{O}$ em S, devido ao movimento relativo entre S e S', o observador inercial $\mathcal{O}$ vai medir cada extremidade relacionada com as TL. Entretanto é crucial notar que essa medida de comprimento é dada em um mesmo tempo t, pois a medida de comprimento é basicamente medir dois pontos separados espacialmente ao mesmo tempo[22] . Logo,

$$x' - x_0' = \gamma\Big(x - vt\Big) - \gamma\Big(x_0 - vt\Big) \iff$$

$$\iff x' - x_0' = \gamma\Big[\Big(x - x_0 + vt - vt\Big)\Big] \iff$$

$$\iff x' - x_0' = \gamma\Big[\Big(x - x_0\Big)\Big] \iff$$

$$\iff (x' - x_0')\gamma^{-1} = \Big(x - x_0\Big) \iff$$

$$(x' - x_0')\gamma^{-1} = \Big(x - x_0\Big) \equiv \ell_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \ell \tag{156}$$

Mais uma vez, considera-se então dois referenciais inerciais S e S', e observadores $\mathcal{O}$ e $\mathcal{O}'$, respectivamente em repouso ao próprio referencial e posicionados na origem. Em S', o observador $\mathcal{O}'$ mede o tempo[23] de dois eventos separados apenas temporalmente (isto é, que ocorrem no mesmo local x') com um relógio —isto é, existe um relógio em repouso com respeito ao referencial S'—. Agora, um observador $\mathcal{O}$, em repouso em S, mede também o tempo com um relógio. Sendo assim, o tempo registrado nos relógios de S, que detém movimento relativo com respeito a S' será relacionado pelas as TL.

Logo, tem-se que,

$$t_1 = \gamma\Big(t_1' + \frac{v}{c^2}x'\Big)$$

[22]Visto a necessidade de medir um bloquinho de ferro com uma régua, a medida é feita com o $0[cm]$ da régua em uma extremidade e o valor $N[cm]$ na outra. Essa medida de distância ocorre no instante que o observador olha os valores e os anota, definindo o comprimento do bloquinho. Do ponto de vista matemático isso quer dizer que a medida de comprimento espacial exige dois eventos separados espacialmente e que ocorrem no mesmo tempo; isto é, eventos simultâneos separados espacialmente.

[23]É claro que neste referencial S' todos os relógios estão sincronizados com o do observador na origem

e

$$t_2 = \gamma\Big(t_2' + \frac{v}{c^2}x'\Big)$$

Daí, o intervalo de tempo medido por S deste mesmo evento, será:

$$t_2 - t_1 = \gamma\Big[\Big(t_2' + \frac{v}{c^2}x'\Big) - \Big(t_1' + \frac{v}{c^2}x'\Big)\Big] \iff$$

$$\iff t_2 - t_1 = \gamma\Big[\Big(t_2' - t_1' + \frac{v}{c^2}x' - \frac{v}{c^2}x'\Big)\Big] \iff$$

$$\iff t_2 - t_1 = \gamma\Big(t_2' - t_1'\Big) \iff$$

$$(t_2 - t_1) = \gamma\Big(t_2' - t_1'\Big) \equiv \Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{157}$$

Sendo assim, o intervalo de tempo do processo medido pelo experimentador no referencial do laboratório S será de Δt. Note que esse intervalo de tempo é maior que o tempo $\Delta t'$. Isso significa que o intervalo de tempo que o experimentador mede para o processo que ocorre em um referencial em movimento é maior comparado ao intervalo de tempo medido por um relógio em repouso com respeito ao referencial no qual o processo está, também, em repouso. Se o intervalo de tempo do processo "precisa de mais tempo"para se acabar em um referencial em movimento [24], então de acordo com S, os relógios de S' "marcham"mais devagar e logo o tempo passa mais devagar no referencial S'. O movimento relativo afeta a marcha dos relogios. Por isso o tempo é "dilatado"no referencial S' (com respeito a medição dos relógios de S que exibem claramente Δt).

4.1.2.1 TEMPO PRÓPRIO

As quantidades medidas em seu referencial de repouso são comumente chamadas de quantidades *próprias*. Sendo assim, tanto ℓ_0 quando $\Delta t' \equiv \Delta\tau$ são quantidades próprias. Respectivamente são chamadas de *Comprimento próprio* e *Tempo próprio*.

O tempo próprio entre dois eventos pode ser definido como o $\Delta t'$ da equação (65). Agora, nota-se que são intervalos de tempo entre dois eventos apenas, separados por uma distância média. Se, agora, os intervalos de tempo forem muito pequenos, isto é, quantidades

[24] Intervalo de tempo medido pelos relógios do referencial S

infinitesimais a equação (65) torna-se:

$$d\tau = dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

A grosso modo, é possível então inferir um processo de integração nos dois membros da equação e descobrir o tempo próprio *total* entre eventos:

$$\int_{\tau_1}^{\tau_n} d\tau = \int_{t_1}^{t_n} dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \iff$$

$$\Delta\tau = \int_{t_1}^{t_n} dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \tag{158}$$

4.2 CONSIDERAÇÕES CINEMÁTICAS

Assumindo a configuração standard e coordenadas cartesianas, tem-se que os valores escalares da velocidade são suficientes. A velocidade é dada então, como o quociente do intervalo entre os pontos espaciais pelo intervalo de tempo. Em S (em repouso) a velocidade (componentes) é, portanto,

$$\begin{cases} \bar{v}^x = \frac{\Delta x}{\Delta t} \\ \bar{v}^y = \frac{\Delta y}{\Delta t} \\ \bar{v}^z = \frac{\Delta z}{\Delta t} \end{cases} \tag{159}$$

Agora, as velocidades da equação (151) são velocidades médias. De forma a obter a velocidade instantânea um processo de limite é necessário. Logo,

$$\begin{cases} v^x = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} =: \frac{dx}{dt} \\ v^y = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} =: \frac{dy}{dt} \\ v^z = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} =: \frac{dz}{dt} \end{cases} \tag{160}$$

A transformação de velocidades de S para S' irá acontecer mediante as TL, logo o conceito Galileano de "soma de velocidades"não é mais válido. Aplicando as TL em (152), tem-se que,

$$v'^x = \lim_{\Delta t' \to 0} \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\gamma\Big(\Delta x - \parallel \vec{V} \parallel \Delta t\Big)}{\gamma\Big(\Delta t - \frac{\|\vec{V}\|}{c^2}\Delta x\Big)} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\gamma\Big(\frac{\Delta x}{\Delta t} - \parallel \vec{V} \parallel \frac{\Delta t}{\Delta t}\Big)}{\gamma\Big(\frac{\Delta t}{\Delta t'} - \frac{\|\vec{V}\|}{c^2}\frac{\Delta x}{\Delta t}\Big)} = \frac{v^x - V}{1 - \frac{V}{c^2}v^x}$$

Similarmente, as outras coordenadas também sofrem modificação se comparadas a adição de velocidades Galileana:

$$v'^y = \lim_{\Delta t' \to 0} \frac{\Delta y'}{\Delta t'} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\gamma\Big(\Delta t - \frac{\|\vec{V}\|}{c^2}\Delta x\Big)} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{\Delta x}{\Delta t}}{\gamma\Big(\frac{\Delta t}{\Delta t} - \frac{\|\vec{V}\|}{c^2}\frac{\Delta x}{\Delta t}\Big)} = \frac{v^y}{\gamma\Big(1 - \frac{V}{c^2}v^x\Big)}$$

e por fim para a coordenada z,

$$v'^z = \lim_{\Delta t' \to 0} \frac{\Delta z'}{\Delta t'} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\gamma\Big(\Delta t - \frac{\|\vec{V}\|}{c^2}\Delta x\Big)} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{\Delta x}{\Delta t}}{\gamma\Big(\frac{\Delta t}{\Delta t} - \frac{\|\vec{V}\|}{c^2}\frac{\Delta x}{\Delta t}\Big)} = \frac{v^z}{\gamma\Big(1 - \frac{V}{c^2}v^x\Big)}$$

Sendo assim, as tranformações de velocidades entre S e S' (isto é, de $S \to S'$) são:

$$\begin{cases} u'^x = \frac{u^x - V}{1 - \frac{V}{c^2}u^x} \\ u'^y = \frac{u^y}{\gamma\Big(1 - \frac{V}{c^2}u^x\Big)} \\ u'^z = \frac{u^z}{\gamma\Big(1 - \frac{V}{c^2}u^x\Big)} \end{cases} \tag{161}$$

A quantidade $\parallel \vec{V} \parallel \equiv V$ é a velocidade relativa entre os referenciais. No caso da configuração standard a velocidade relativa não é um vetor, mas simplesmente uma velocidade escalar devido ao fato de que o referencial S' se movimenta sob o eixo dos x de S, isto é, a velocidade em S' é paralela ao eixo x de S.

Ainda mais, é necessário pontuar que o fator gamma é um fator dependente de V, isto é, $\gamma \equiv \gamma(V)$.

O processo de limite utilizado foi escolhido para tornar a definição mais precisa do ponto de vista das quantidades $\Delta x'$ e $\Delta t'$, afinal a velocidade é definida como o limite do quociente de Newton $\Delta x'/\Delta t'$. Na realidade o cálculo é muito mais simples se simplesmente efetuarmos as derivadas das TL.

As tranformações inversas são então,

$$\begin{cases} u^x = \frac{u'^x + V}{1+\frac{V}{c^2}u'^x} \\ u^y = \frac{u'^y}{\gamma\left(1+\frac{V}{c^2}u'^x\right)} \\ u^z = \frac{u'^z}{\gamma\left(1+\frac{V}{c^2}u'^x\right)} \end{cases} \tag{162}$$

Uma outra notação para a transformação de velocidades é então[25]:

$$u^i =: \frac{dx^i}{dt} = \frac{dx^i}{dt'}\frac{dt'}{dt} \tag{163}$$

pois, note que, na transformação de $S' \to S$ tem-se que,

$$dx = \gamma(dx' + v dt')$$

$$dy = \gamma(dy' + v dt')$$

$$dz = \gamma(dz' + v dt')$$

E para o tempo,

$$dt = \gamma\Big(dt' + \frac{v}{c^2}dx'\Big) = \gamma\Big(1 + \frac{v}{c^2}\frac{dx'}{dt'}\Big)dt' = \gamma\Big(1 + \frac{v}{c^2}u'^x\Big)dt' \implies$$

$$dt = \gamma\Big(dt' + \frac{v}{c^2}dx'\Big) \tag{164}$$

Sabendo que a transformação do tempo é dada por $t' = \gamma(t - vx/c^2)$, é possível escrever a forma diferencial como:

[25] Onde os índices latinos variam de $i = \{1, 2, 3\} \equiv \{x, y, z\}$

$$dt' = \gamma\Big(dt - \frac{v}{c^2}dx\Big)$$

A forma diferencial (156) para as transformação da coordenada temporal define então:

$$\frac{dt}{dt'} =: \gamma\Big(1 + \frac{v}{c^2}u'^x\Big) \tag{165}$$

E portanto o inverso define,

$$\frac{dt'}{dt} =: \frac{1}{\gamma\Big(1 + \frac{v}{c^2}u'^x\Big)} \tag{166}$$

Logo, o conjunto de equações (155) fica:

$$u^x =: \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dt'}\frac{dt'}{dt} = \left\{\frac{d}{dt'}[\gamma(x' + vt')]\right\}\left\{\frac{1}{\gamma\Big(1 + \frac{v}{c^2}u'^x\Big)}\right\} =$$

$$= \left\{\left[\gamma\left(\frac{d}{dt'}x' + v\frac{d}{dt'}t'\right)\right]\right\}\left\{\frac{1}{\gamma\Big(1 + \frac{v}{c^2}u'^x\Big)}\right\} = \left\{\gamma(u'^x + v)\right\}\left\{\frac{1}{\gamma\Big(1 + \frac{v}{c^2}u'^x\Big)}\right\} =$$

$$= \frac{u'^x + v}{\gamma\Big(1 + \frac{v}{c^2}u'^x\Big)}$$

$$u^y =: \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dt'}\frac{dt'}{dt} = \left\{\frac{d}{dt'}[y']\right\}\left\{\frac{1}{\gamma\Big(1 + \frac{v}{c^2}u'^x\Big)}\right\} = \frac{u'^y}{\gamma\Big(1 + \frac{v}{c^2}u'^x\Big)}$$

$$u^z =: \frac{dz}{dt} = \frac{dy}{dt'}\frac{dt'}{dt} = \left\{\frac{d}{dt'}[z']\right\}\left\{\frac{1}{\gamma\Big(1 + \frac{v}{c^2}u'^x\Big)}\right\} = \frac{u'^y}{\gamma\Big(1 + \frac{v}{c^2}u'^x\Big)}$$

Logo, a equação (155) é uma notação compacta para as transformações de velocidade.

4.2.0.1 ADIÇÃO DE VELOCIDADES

Por questões de Completude, em posse das transformações de velocidade, existe ainda uma outra interpretação para as equações dadas em (150). Tais equações podem ser vistas como as componentes da velocidade $\vec{u}$ das duas velocidades colineares (por conta da configuração standard) $\vec{v}$ (velocidade relativa do referencial S') e $\vec{u'}$ (velocidade de um corpo em movimento com relação ao referencial S'. Logo as equações (70) são chamadas de *adição de velocidades* (de S' e u').

Ainda mais, é possível ver que as equações de velocidade relativística se reduzem às componentes da resultante de soma de velocidades dada pela Relatividade de Galileo. Analisa-se, portanto, o limite Newtoniano $|\vec{v}| << c$:

$$\lim_{\beta\to 0} u^x \equiv \lim_{\beta\to 0} \frac{u'^x + V}{1 + \frac{V}{c^2}u'^x} = \frac{u'^x + V}{1 + 0u'^x} = u'^x + V$$

$$\lim_{\beta\to 0} u^y = \lim_{\beta\to 0} \frac{u'^y}{\gamma\left(1 + \frac{V}{c^2}u'^y\right)} = \frac{u'^y + V}{1 + 0u'^x} = u'^y$$

$$\lim_{\beta\to 0} u^z = \lim_{\beta\to 0} \frac{u'^z}{\gamma\left(1 + \frac{V}{c^2}u'^z\right)} = \frac{u'^z + V}{1 + 0u'^x} = u'^z$$

Por fim, é interessante notar o *limite ultra-relativístico*, isto é, aquele no qual as componentes da velocidade em S sofrem efeitos relativísticos apreciáveis. Sendo assim, analisa-se o limite onde $u'^x \to c$:

$$\lim_{u'^x\to c} u^x \equiv \lim_{u'^x\to c} \frac{u'^x + V}{1 + \frac{V}{c^2}u'^x} = \frac{c + V}{1 + \frac{V}{c^2}c} = \frac{V}{c} = \frac{c + V}{\frac{c+V}{c}} = \frac{c^2 + Vc}{c + V} = c$$

Nota-se então que na direção do movimento, a velocidade de u^x não ultrapassa c. Isso quer dizer que mesmo que em S exista uma velocidade u^x com velocidades próximas a da luz, mesmo assim a velocidade máxima permitida também é c, tal como o PVL postula.

4.2.1 TRANFORMAÇÕES DE ACELERAÇÃO

É comum dizer que a TRE "não lida com acelerações". Isso se deve muito provavelmente a motivos históricos, pois Einstein desenvolveu a equivalência entre referenciais acelerados e referenciais em queda livre em um campo gravitacional, após a TRE. Em verdade o nome "especial"decorre do fato de que 10 anos após 1905 Einstein formulou a Teoria da Relatividade Geral (TRG) estabelecendo uma nova classe de referenciais inerciais chamados de *referenciais em queda-livre*. Sendo assim, é um erro dizer que a TRE só lida com referenciais inerciais. Em verdade a física em referenciais não-inerciais na TRE é uma generalização dentro da própria teoria —tal como ocorre na mecânica newtoniana— e contém aplicações físicas. O aparente "problema"dos referenciais não-inerciais na TRE aparece em sobre como formular uma teoria relativística do campo gravitacional e sobre como é a estrutura geométrica quando consideramos efeitos gravitacionais, e não simplesmente que a TRE "não lida com acelerações".

Logo, tal como a velocidade, é possível obter as transformações para a aceleração, de algum corpo, medidas em diferentes referenciais inerciais por observadores $\mathcal{O}$ e $\mathcal{O}'$ em, respectivamente, S e S′. O procedimento é claro: tomar a derivada da velocidade.

Sendo assim, considerando a a transformação de $S' \rightarrow S$, tem-se que as equações de velocidade ficam:

$$u^x = \frac{u'^x + v}{1 + \frac{vu'^x}{c^2}} = [u'^x + v]\left[1 + \frac{vu'^x}{c^2}\right]^{-1}$$

$$u^y = \frac{u'^y}{\gamma\left(1 + \frac{vu'^x}{c^2}\right)} = u'^y\left[\gamma\left(1 + \frac{vu'^x}{c^2}\right)\right]^{-1}$$

$$u^z = \frac{u'^z}{\gamma\left(1 + \frac{vu'^x}{c^2}\right)} = u'^z\left[\gamma\left(1 + \frac{vu'^x}{c^2}\right)\right]^{-1}$$

Tomando a diferencial das velocidades, tem-se:

$$du^x = \frac{d(u'^x + v)}{1 + \frac{vu'^x}{c^2}} + [u'^x + v]\left[d\left(1 + \frac{vu'^x}{c^2}\right)\right]^{-1} =$$

$$= \left(du'^x + dv\right)\left(1 + \frac{vu'^x}{c^2}\right) - \left[1 + \frac{vu'^x}{c^2}\right]^{-2} d\left(1 + \frac{vu'^x}{c^2}\right)\left(vu'^x\right) =$$

$$= \frac{du'^x}{1 + \frac{vu'^x}{c^2}} - \left[\frac{u'^x + v}{\left(1 + \frac{vu'^x}{c^2}\right)^2}\frac{vdu'^x}{c^2}\right] = \left\{\frac{1}{1 + \frac{vu'^x}{c^2}} - \left[\frac{u'^x + v}{\left(1 + \frac{vu'^x}{c^2}\right)^2}\frac{v}{c^2}\right]\right\}du'^x =$$

$$= \frac{du'^x}{\gamma^2\left(1 + \frac{vu'^x}{c^2}\right)^2}$$

Observação:

$$\left\{\frac{1}{1 + \frac{vu'^x}{c^2}} - \left[\frac{u'^x + v}{\left(1 + \frac{vu'^x}{c^2}\right)^2}\frac{v}{c^2}\right]\right\} = \frac{\left(1 + \frac{vu'^x}{c^2}\right)c^2 - u'^x v - v^2}{\left(1 + \frac{vu'^x}{c^2}\right)^2 c^2} =$$

$$= \frac{\left(c^2 + vu'^x - vu'^x - v^2\right)}{\left(1 + \frac{vu'^x}{c^2}\right)^2 c^2} =$$

$$= \frac{(c^2 - v^2)}{\left(\frac{c^2 + vu'^x}{c^2}\right)^2 c^2} = \frac{c^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{c^2\left(\frac{c^2 + vu'^x}{c^2}\right)^2} = \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(\frac{c^2 + vu'^x}{c^2}\right)^2} = \frac{1}{\gamma^2\left(\frac{c^2 + vu'^x}{c^2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{\gamma^2\left(1 + \frac{vu'^x}{c^2}\right)^2}$$

Note que,

- $$1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

- $$\gamma^{-1} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}$$

Logo,

$$\gamma^{-2} = 1 - \frac{v^2}{c^2} = \left(\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right)^2 = \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)^2}$$

Daí, sabendo que a transformação do tempo é dada por $t = \gamma(t' + vx'/c^2)$ e que de sua forma diferencial,tem-se que a componente x da aceleração fica,

$$\frac{du^x}{dt} = \frac{\frac{du'^x}{\gamma^2\left(1+\frac{vu'^x}{c^2}\right)^2}}{\gamma dt' + \gamma dx' \frac{v}{c^2}} = \frac{du'^x}{\left[\gamma^2\left(1 + \frac{vu'^x}{c^2}\right)^2\right]\left[\gamma dt' + \gamma dx' \frac{v}{c^2}\right]} =$$

$$= \frac{du'^x}{\left[\gamma^2\left(1 + \frac{vu'^x}{c^2}\right)^2\right]\left[\gamma\left(1 + u'^x \frac{v}{c^2}\right)dt'\right]} = \frac{du'^x/dt'}{\gamma^3\left(1 + \frac{vu'^x}{c^2}\right)^2\left(1 + \frac{u'^x v}{c^2}\right)} =$$

$$\frac{du'^x/dt'}{\gamma^3\left(1 + \frac{u'^x v}{c^2}\right)^3} = \frac{a'^x}{\gamma^3\left(1 + \frac{u'^x v}{c^2}\right)^3}$$

Para u^y, a forma diferencial fica,

$$du^y = \frac{du'^y}{\left[\gamma\left(1 + \frac{vu'^x}{c^2}\right)\right]} - \left[\frac{1}{\gamma\left(1 + \frac{vu'^x}{c^2}\right)^2}\frac{du'^x v}{c^2}\right]u'^y =$$

$$= \frac{du'^y}{\left[\gamma\left(1 + \frac{vu'^x}{c^2}\right)\right]} - \frac{1}{\gamma\left(1 + \frac{vu'^x}{c^2}\right)^2}\frac{u'^y du'^x v}{c^2} \implies$$

$$\Longrightarrow \frac{du^x}{dt} = \left[\frac{1}{\gamma\left(1+\frac{vu'^x}{c^2}\right)dt'}\right]\left[\frac{du'^y}{\left[\gamma\left(1+\frac{vu'^x}{c^2}\right)\right]} - \frac{1}{\gamma\left(1+\frac{vu'^x}{c^2}\right)^2}\frac{u'^y du'^x v}{c^2}\right] =$$

$$= \frac{a'^y}{\gamma^2\left(1+\frac{vu'^x}{c^2}\right)^2} - \frac{a'^x}{\gamma^2\left(1+\frac{vu'^x}{c^2}\right)^3}\frac{u'^y v}{c^2} \iff$$

$$\iff a^y = \frac{1}{\gamma^2\left(1+\frac{vu'^x}{c^2}\right)^3}\left[\left(1+\frac{vu'^x}{c^2}\right)a'^y + \frac{u'^y v}{c^2}a'^x\right]$$

Para u^z, a forma diferencial fica,

$$du^z = \frac{du'^z}{\left[\gamma\left(1+\frac{vu'^x}{c^2}\right)\right]} - \left[\frac{1}{\gamma\left(1+\frac{vu'^x}{c^2}\right)^2}\frac{du'^x v}{c^2}\right]u'^y =$$

$$= \frac{du'^z}{\left[\gamma\left(1+\frac{vu'^x}{c^2}\right)\right]} - \frac{1}{\gamma\left(1+\frac{vu'^x}{c^2}\right)^2}\frac{u'^z du'^x v}{c^2} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{du^z}{dt} = \left[\frac{1}{\gamma\left(1+\frac{vu'^x}{c^2}\right)dt'}\right]\left[\frac{du'^z}{\left[\gamma\left(1+\frac{vu'^x}{c^2}\right)\right]} - \frac{1}{\gamma\left(1+\frac{vu'^x}{c^2}\right)^2}\frac{u'^z du'^x v}{c^2}\right] =$$

$$= \frac{a'^z}{\gamma^2\left(1+\frac{vu'^x}{c^2}\right)^2} - \frac{a'^x}{\gamma^2\left(1+\frac{vu'^x}{c^2}\right)^3}\frac{u'^z v}{c^2} \iff$$

$$\iff a^z = \frac{1}{\gamma^2\left(1+\frac{vu'^x}{c^2}\right)^3}\left[\left(1+\frac{vu'^x}{c^2}\right)a'^z + \frac{u'^z v}{c^2}a'^x\right]$$

Sendo assim o conjunto de transformações para as acelerações, de $S' \to S$ é então:

$$\begin{cases} a^x = \frac{1}{\gamma^3\left(1+\frac{u'^x v}{c^2}\right)^3}a'^x \\ a^y = \frac{1}{\gamma^2\left(1+\frac{vu'^x}{c^2}\right)^3}\left[\left(1+\frac{vu'^x}{c^2}\right)a'^y + \frac{u'^y v}{c^2}a'^x\right] \\ a^z = \frac{1}{\gamma^2\left(1+\frac{vu'^x}{c^2}\right)^3}\left[\left(1+\frac{vu'^x}{c^2}\right)a'^z + \frac{u'^z v}{c^2}a'^x\right] \end{cases} \tag{167}$$

De (159) nota-se que em geral as transformações de aceleração não recobrem a propriedade de serem invariantes sobre as TL. Na mecânica Newtoniana, essa propriedade (agora com respeito as TG) é a base da teoria. Mas na TRE não existe um contraponto.

5 RELATIVIDADE GERAL

As equações de campo de Einstein (ECE)[26] são,atualmente, a forma mais adequada para tratar da interação gravitacional, dadas pelas equações (29);

$$G_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \tag{168}$$

onde G é a constante gravitacional de Newton. As equações (29) são formadas por duas partes: o primeiro membro à esquerda,$G_{\mu\nu}$, trata de toda a informação geométrica do espaço-tempo. O segundo membro à direita,$T_{\mu\nu}$ trata de toda a informação acerca da distribuição de matéria-energia do espaço. Com a igualdade entre os tensores $G_{\mu\nu}$ e $T_{\mu\nu}$, pode-se então codificar o que entende-se por interação gravitacional: Uma mudança na geometria do espaço-tempo dada uma distribuição de matéria-energia. Por outro lado, dada uma distribuição de matéria-energia pode-se estudar quais geometrias satisfazem tal distribuição.

As soluções que satisfazem as equações são chamadas funções métricas[27]:

$$g = g_{\mu\nu}dx^{\mu} \otimes dx^{\nu} \tag{169}$$

Ou ainda, expressas pelo elemento de linha (ou primeira forma fundamental na geometria Riemanniana):

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} \tag{170}$$

As funções métricas (de agora em diante chamadas apenas de métricas), definem quais serão, de fato, as geometrias do espaço-tempo. Dada uma métrica, é possível então verificar sua validade como solução, por meio das equações de Einstein e definir todo o movimento de partículas com ou sem massa, em um espaço-tempo por meio das equações geodésicas:

$$u^{\alpha}\nabla_{\alpha}u^{\mu} = u^{\alpha}\left(\partial_{\alpha}u^{\mu} + \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}u^{\beta}\right) = 0 \tag{171}$$

[26]Einstein (1915)
[27]Note que a métrica de Minkowski,(25), é uma solução

onde $\nabla_\alpha u^\mu$ é a derivada covariante da 4-velocidade e as quantidades de três índices ${\Gamma^\mu}_{\alpha\beta}$ são chamados símbolos de Christoffel de tipo 1, ou ,a grosso modo, símbolos de conexão. Por convenção temos então que os símbolos de Christoffel são dados por (WEINBERG,1972):

$$ {\Gamma^\mu}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} \Big(\partial_\beta g_{\sigma\alpha} + \partial_\alpha g_{\sigma\beta} - \partial_\sigma g_{\alpha\beta} \Big) \tag{172} $$

É possível ainda reescrever as equações (22) da seguinte forma:

$$ R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \Big(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} {T^\mu}_\mu g_{\mu\nu} \Big) \tag{173} $$

Com as equações de Einstein reescritas como em (27) tem-se que, quando o tensor energia-momentum é nulo, isto é, quando não existe a presença de energia, chaga-se as *Equações de Campo de Einstein no Vácuo* (um análogo da equação de Poisson para gravitação Newtoniana)

$$ T_{\mu\nu} = 0 \implies \frac{8\pi G}{c^4} \Big(0 - \frac{1}{2} 0 g_{\mu\nu} \Big) \implies $$

$$ R_{\mu\nu} = 0 \tag{174} $$

6 CONDIÇÕES DE ENERGIA

Conforme,Alcubierre (2008), nada pode ser dito, a princípio, sobre a viabilidade física das soluções das equações de campo com respeito as propriedades da matéria que é fonte do campo gravitacional, pois é possível que qualquer espaço-tempo seja uma solução das equações de campo simplesmente definindo um tensor energia-momentum na forma:

$$ T_{\mu\nu} := G_{\mu\nu} \frac{c^4}{8\pi G} \tag{175} $$

A partir da definição dada por (36), em geral encontra-se tensores energia-momentum que correspondem a conteúdos de matéria não realísticos.

Sendo assim, deve-se impor certos critérios a cerca do conteúdo de matéria, chamados de *condições de energia*. De forma geral, existem 3 principais condições de interesse, para o presente trabalho, que devem ser satisfeitas: *Weak Energy Condition* (WEC) , *Strong Energy Condition* (SEC) e *Null Energy Condition* (NEC) (ALCUBIERRE,2008). Essas condições são relacionadas com o tensor energia-momentum e com o tensor de Ricci das seguintes formas:

- *Weak Energy Condition*: $T_{\mu\nu}v^{\mu}v^{\nu} \geq 0 \implies \rho \geq 0$
- *Strong Energy Condition*: $R_{\mu\nu}v^{\mu}v^{\nu} \geq 0 \implies \rho + \sum_{\mathcal{A}} p_{\mathcal{A}} \geq 0$
- *Null Energy Condition*: $R_{\mu\nu}k^{\mu}k^{\nu} \geq 0 \implies \rho + p_{\mathcal{A}}$

Onde $p_{\mathcal{A}}$ são as pressões principais, $\mathcal{A} \in \{1, 2, 3\}$ é um conjunto de índices que denota as componentes das pressões principais,ρ é a densidade de energia e v^{γ} e k^{γ} são,respectivamente, vetores tipo-tempo e tipo-luz.

A WEC, infere que a densidade de energia vista por todos os observadores deve ser não negativa para todos os observadores tipo-tempo; a SEC infere que a densidade de energia mais a soma das pressões principais deve ser não negativa para todos os observadores tipo-tempo. Por fim, a NEC impõe que a densidade de energia mais qualquer uma das pressões principais deve ser não negativa, para qualquer observador tipo-luz (ALCUBIERRE,2008).

A título de ilustração, para um tensor energia-momentum de um *fluido perfeito*, dado por:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u^{\mu}u^{\nu} + g_{\mu\nu}p \tag{176}$$

Onde p é a pressão, ρ a desidade de energia e u^{γ} é a $4-velocidade$ do observador. As condições de energia implicam que a matéria deve satisfazer (ALCUBIERRE,2008):

- $T_{\mu\nu}v^{\mu}v^{\nu} \geq 0 \implies \rho \geq 0$
- $R_{\mu\nu}v^{\mu}v^{\nu} \geq 0 \implies (\rho + 3p) \geq 0$
- $R_{\mu\nu}k^{\mu}k^{\nu} \geq 0 \implies \rho + p \geq 0$

7 BURACOS NEGROS

Uma classe de soluções que satisfazem as equações de Einstein na forma:

$$R_{\mu\nu} = 0 \tag{177}$$

São chamadas de *soluções de vácuo*. Os Buracos Negros são soluções que satisfazem as equações acima. A relatividade geral produz duas soluções que satisfazem as equações acima e que geram buracos negros : a *solução de Schwarzschild*, e a *solução de Kerr*.

7.1 BURACOS NEGROS DE SCHWARZSCHILD

Em 1916 Schwarzschild conseguiu resolver analiticamente as Equações de Campo de Einstein no vácuo, para uma geometria estática,esfericamente simétrica, sem momentum angular e sem carga elétrica e magnética.

Essa geometria revelou então qual deveria ser o aspecto do espaço-tempo exterior de um corpo esférico, tal como uma estrela ou um planeta.

A métrica de Schwarzschild é então:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\phi^2) \tag{178}$$

Onde G é a constante gravitacional de Newton e M pode ser interpretada como a massa.

Nota-se que quando $r \to \infty$ a métrica de Schwarzschild torna-se igual a métrica de Minkowski, isto é, a métrica é *assintóticamente plana*. Isso significa que o espaço-tempo é plano uma distância afastada da fonte de curvatura. Abaixo,na figura 11, está um gráfico que mostra as trajetórias tipo-luz e uma trajetória tipo-tempo[28]:

[28]A representação dos pequenos cones de luz tem um apenas a didático para enfatizar o fato de que nas coordenadas de Schwarzschild, a inclinação das retas que definem o cone de luz, muda de foma contínua. Quando $r \to \infty$ as retas que definem o cone de luz detém inclinação de $\frac{\pi}{4}$, isto é, igual a situação em um espaço-tempo plano.

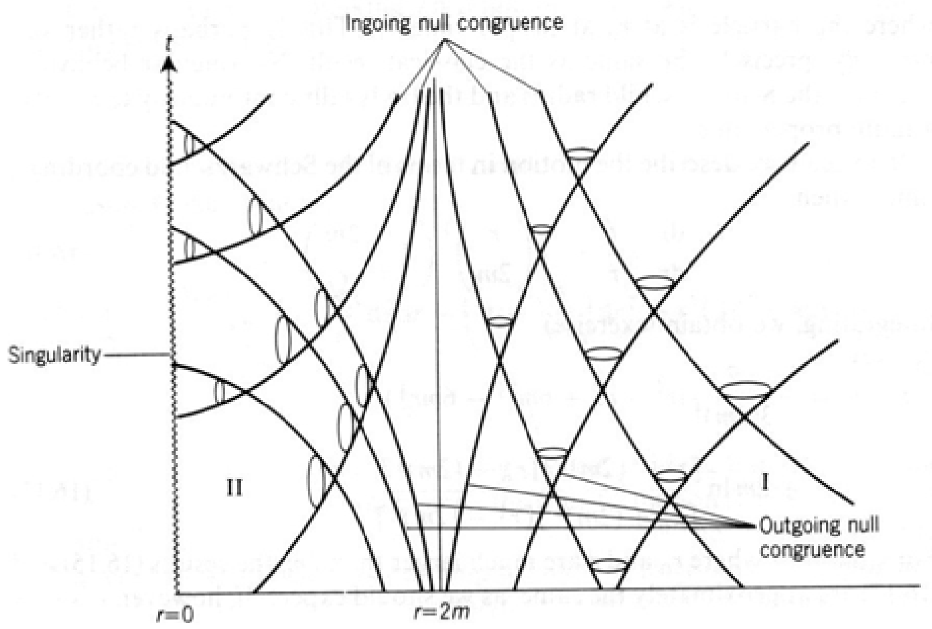

Figura 11: Trajetória tipo-luz nas coordenadas de Schwarzschild. Fonte: extraído de (D'INVERNO,2014)

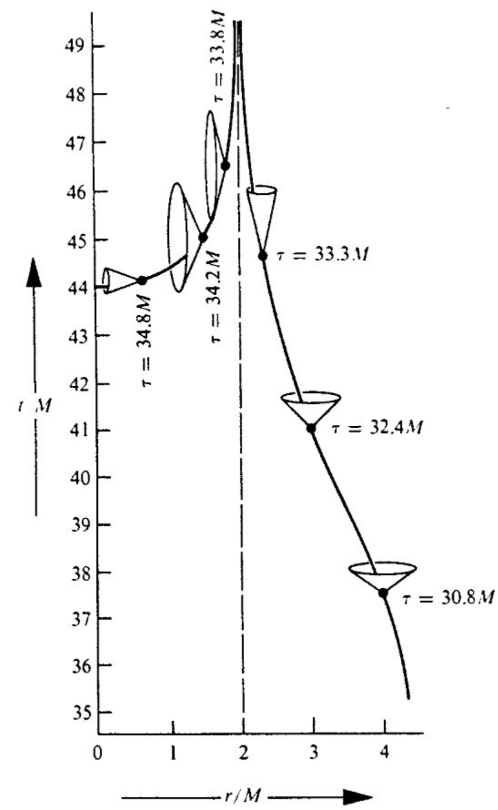

Figura 12: Trajetória tipo-tempo nas coordenadas de Schwarzschild. Fonte: extraído de (D'INVERNO,2014)

Nota-se que existem dois pontos interessantes com respeito à métrica de Schwarzschild, quando $r = \frac{2GM}{c^2}$ e $r = 0$. Nestes pontos, temos que a métrica exibe um *comportamento singular*. A métrica de Schwarzschild exibe,de fato, um comportamento singular real apenas em $r = 0$. Em verdade, basicamente, existem dois tipos de singularidade: as *singularidades coordenadas* e as *singularidades físicas*,Hartle (2014), e essa distinção reside no fato de que singularidades coordenadas são passíveis de remoção por transformações de coordenadas, isto é, por um número suficiente de transformações de coordenadas, chega-se a um sistema de coordenadas onde é possível ter um comportamento regular das trajetórias tipo-tempo e tipo-luz na vizinhança do ponto anteriormente singular; singularidades físicas não são possíveis de serem removidas do espaço-tempo por transformações de coordenadas. A superfície $r = \frac{2GM}{c^2}$, nas coordenadas de Schwarzschild, é um ponto singular de grande interesse, esse ponto chama-se *Horizonte de Eventos*.

É possível remover o caráter singular de $r = \frac{2GM}{c^2}$ com o auxílio da métrica de Kruskal-Szekeres[29] (CARROLL,2003):

$$ds^2 = \frac{32G^3M^3}{r} e^{-r/2GM}\big(- dT^2 + dR^2\big) + r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2) \tag{179}$$

Sendo assim, dada a métrica de Kruskal-Szekeres, é possível produzir o *diagrama de Kruskal* para a solução de Schwarschild. Esse diagrama permite tratar de forma mais clara o espaço-tempo de Schwarzschild com respeito às trajetórias tipo-tempo e tipo-luz, pois diferentemente das coordenadas de Schwarzschild, o raios de luz que definem a abertura dos cones de luz permanecem,em todos os pontos do espaço-tempo, a um ângulo de $\frac{\pi}{4}$.

[29]aqui faz-se o uso de $c = 1$

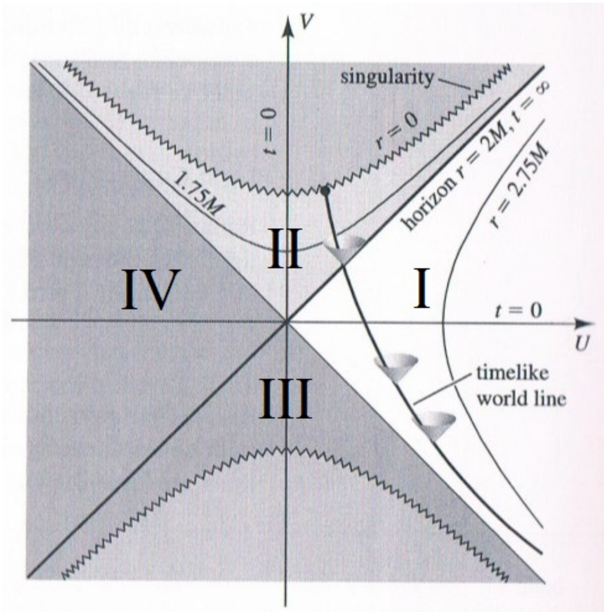

Figura 13: Diagrama de Kruskal-Szekeres

Utilizando a métrica (33),verifica-se que o gráfico é qualitativamente diferente do produzido pela solução de Schwarschild. As superfícies de valores contantes de r são hipérboles e as de t constante são retas. Entretanto, o caráter das coordenadas temporais e espaciais da métrica após região delimitada pela a superfície $r = \frac{2GM}{c^2}$, continua o mesmo: o futuro causal permanece sempre direcionado ao ponto $r = 0$. Nota-se ainda que, exatamente em $r = \frac{2GM}{c^2}$, a superfície é tipo-luz.

O espaço-tempo de Schwarzschild,visto com as coordenadas de Kruskal, produz quatro regiões do espaço-tempo: I e IV assintoticamente planas; II e III que são regiões interiores ao horizonte de eventos. A região II é chamada de *buraco negro* e a região III é chamada de *buraco branco*.

7.2 BURACOS NEGROS DE KERR

Em 1963 Kerr[30] encontrou uma solução das equações de campo de Einstein para uma simetria não mais esférica, mas sim axial. Essa solução introduz o momentum angular nos corpos esféricos modelados pela métrica de Schwarzschild. Essa métrica chama-se *métrica de Kerr* e é dada por[31] (CARROLL,2003):

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}\right)dt^2 - \frac{2Ma\sin^2(\theta)}{\rho^2}[dtd\phi + d\phi dt] +$$

[30]Kerr (1963)

[31]Nesta métrica, utilizamos as unidades naturais $c = G = 1$

$$+\frac{\rho^2}{\Delta}dr^2+\rho^2 d\theta^2+\frac{\sin^2(\theta)}{\rho^2}\Big[(r^2+a^2)^2-a^2\Delta\sin^2(\theta)\Big]d\phi^2 \tag{180}$$

Onde Δ e ρ são as seguintes funções

$$\Delta(r)=r^2-2GMr+a^2 \tag{181}$$

$$\rho^2(r,\theta)=r^2+a^2\cos^2(\theta) \tag{182}$$

$$a=\frac{J}{M} \tag{183}$$

Onde J é o momentum angular

7.3 BURACOS NEGROS COM CARGA

É possível ainda adicionar o campo eletromagnético nas equações de campo de Einstein. Ao fazer tal consideração, chaga-se duas outras soluções que geram buracos negros: a *solução de Reissner-Nordström* e a *solução de Kerr-Newman*. Respectivamente a solução estática com carga elétrica e magnética e a solução com momentum angular com carga elétrica e magnética (CARROLL,2003).

Sendo assim, as equações de campo consideram um tensor energia-momentum não nulo dado por:

$$T_{\mu\nu}=F_{\mu\gamma}F_{\nu}{}^{\gamma}-\frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\gamma\delta}F^{\gamma\delta} \tag{184}$$

Onde $F_{\mu\gamma}$ é o *Tensor Eletromagnético* dado por:

$$F_{\mu\gamma}=\begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & -B_y \\ E_x/c & B_z & 0 & -B_z \\ E_x/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Logo, as equações de campo de Einstein ficam:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}\Big[F_{\mu\gamma}F_{\nu}{}^{\gamma} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\gamma\delta}F^{\gamma\delta}\Big] \tag{185}$$

A primeira solução que envolve o campo eletromagnético e as equações de campo de Einstein, é a solução de Reissner-Nordström. Essa solução é uma solução estática e esfericamente simétrica, e por conta do tensor energia momentum ser não nulo mas não envolver nenhum outro campo além do eletromagnético, essa solução pode ser chamada de solução de *Eletrovácuo*.

A métrica de Reissner-Nordström é[32]:

$$ds^2 = -\Sigma dt^2 + \Sigma^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + sin^2(\theta)d\phi^2) \tag{186}$$

Onde

$$\Sigma = \Big(1 - \frac{2GM}{r} + \frac{G(Q^2+P^2)}{r^2}\Big) \tag{187}$$

e Q é a carga elétrica e P a carga magnética.

De modo similar, existe ainda a solução de Kerr-Newman que define um buraco negro com rotação e carga elétrica e magnética. Utilizando a métrica de Kerr, é possível determinar a métrica de Kerr-Newman (CARROLL,2003):

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GMr - G(Q^2+P^2)}{\rho^2}\right)dt^2 - \frac{2GMr - G(Q^2+P^2)asin^2(\theta)}{\rho^2}\Big(dtd\phi + d\phi dt\Big) +$$
$$+ \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \frac{sin^2(\theta)}{\rho^2}\Big[(r^2+a^2)^2 - a^2\Delta sin^2(\theta)\Big]d\phi^2 \tag{188}$$

Onde Δ e ρ são as seguintes funções (CARROLL,2003):

$$\Delta(r) = r^2 - 2GMr - G(Q^2+P^2) + a^2 \tag{189}$$

$$\rho^2(r,\theta) = r^2 + a^2cos^2(\theta) \tag{190}$$

[32]com $c = 1$

$$a = \frac{J}{M} \tag{191}$$

Onde J é o momentum angular.

8 ALGUMAS SOLUÇÕES EXÓTICAS DA RELATIVIDADE GERAL

8.1 WORMHOLES

Com os buracos negros de Schwarzschild, é possível chegar a conclusão de que na solução evidenciada pelo diagrama de Kruskal, existe uma espécie de conexão entre as duas regiões assintoticamente planas. O método para chegar a essa conclusão é então considerar *cortes* com respeito a uma das coordenadas angulares juntamente com a técnica matemática de mergulho de superfícies (CARROLL,2003):

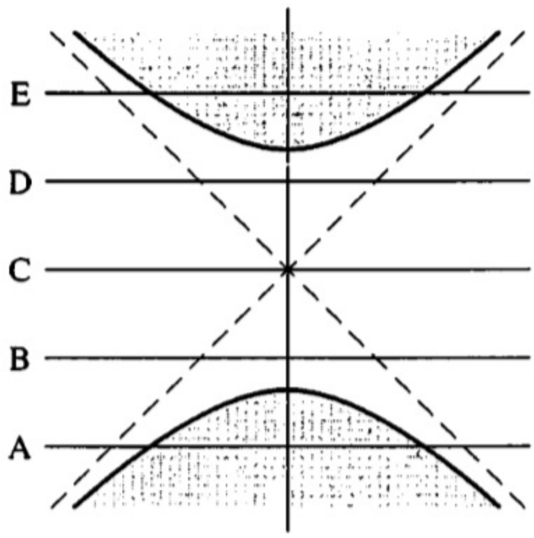

Figura 14: Cortes no Diagrama de Kruskal (CARROLL,2003)

O que correspondem ao seguinte *diagrama de mergulho*

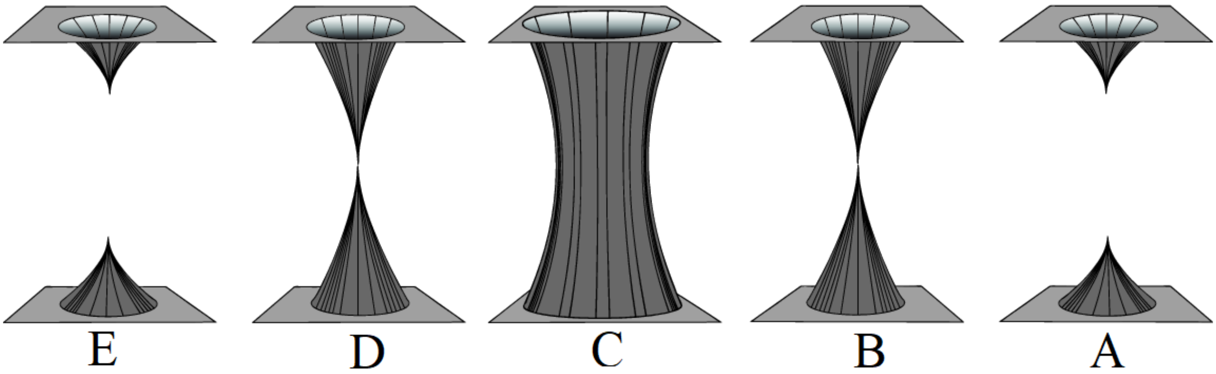

Figura 15: Superfícies correspondentes aos cortes no Diagrama de Kruskal (CARROLL,2003)

Entretanto, no caso de Schwarzschild, os dois universos estão causalmente desconectados, isto é, a formação do wormhole não adimite curvas tipo-tempo transitarem entre as duas regiões assintoticamente planas. Conforme,Michael,Morris e Thorne (1988), é possível definir uma métrica sobre a qual é possível construir um wormhole dito *atravesável*:

$$ds^2 = -e^{2\Phi(r)}dt^2 + \left(1 - b(r)/r\right)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + sin^2(\theta)d\phi^2) \qquad (192)$$

Onde $\Phi(r)$ e $b(r)$ são funções arbitrárias da coordenada radial r (MICHAEL.S, MORRIS and THORNE,1988).

8.2 WARPDRIVE DE ALCUBIERRE

Uma das grandes conclusões da TRE é a de que nada pode transitar mais rápido do que a luz. Por outro lado, na TRG o fato é válido apenas localmente. Sendo assim, em 1994 o físico mexicano Miguel Alcubierre explorou a possibilidade de uma geometria capaz de levar informação (um astronauta e uma nave por exemplo) de forma a garantir que localmente o observador se mova dentro do cone de luz (e por tanto com velocidade menor que a da luz) mas o espaço-tempo se comporte de tal maneira que seja possível transitar grandes distâncias em um intervalo de tempo arbitrariamente pequeno (ALCUBIERRE,1994).

A métrica que Alcubierre propôs utiliza o formalismo $3+1$ da relatividade geral,onde,a grosso modo, ocorre uma divisão no espaço-tempo quadridimensional em hipersuperfícies tipo-espaço,curvas, tridimensionais e no tempo (unidimensinal); indicado na figura 16.

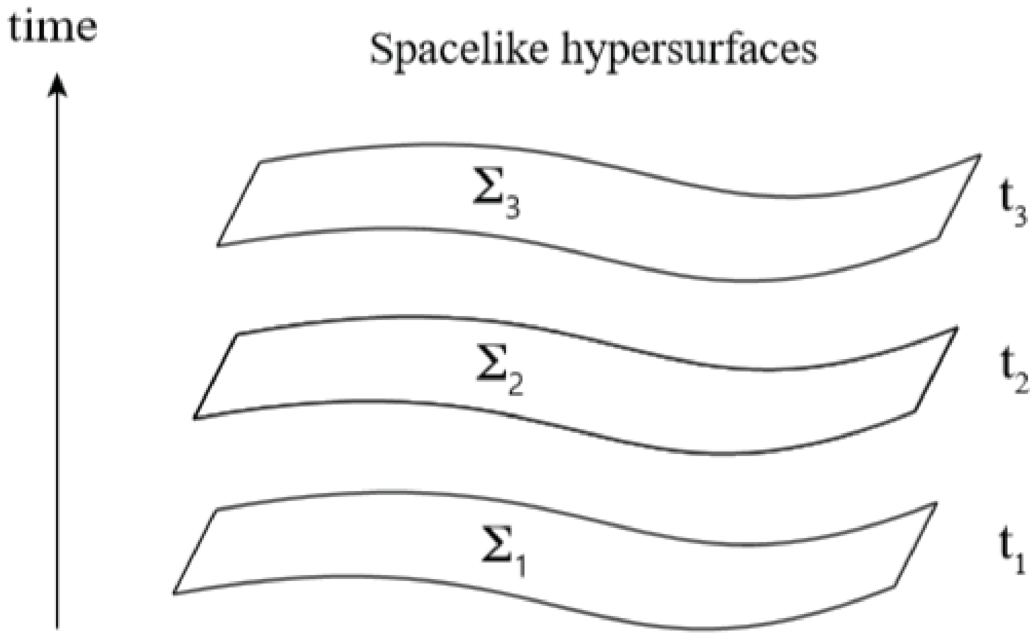

Figura 16: Divisão do espaço-tempo no formalismo $3 + 1$. Fonte: extraído de (ALCUBIERRE,2008)

Conforme,Alcubierre (2008), o tensor métrico neste formalismo fica:

$$ds^2 = -d\tau^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu =$$

$$= -(\alpha^2 - \beta_i\beta^i)dt^2 + 2\beta_i dx^i dt + \gamma_{ij}dx^i dx^j \tag{193}$$

Onde algumas quantidades particulares deste formalismo são: β_i o *shift vector* que relaciona as coordenadas espaciais nas diferentes hipersuperfícies tipo-espaço e α é a *função de lapso* que relaciona os intervalos de tempo próprio entre as hipersupefícies tipo-espaço (ALCUBIERRE,2008).

A métrica proposta por Alcubierre é:

$$ds^2 = -dt^2 + \left(dx - \nu_s f(r_s(t))dt\right)^2 + dy^2 + dz^2 \tag{194}$$

9 REFERÊNCIAS

ALCUBIERRE.M; **An Introduction to 3+1 Numerical Relativity**. 2.ed. Oxford University Press: Cambridge,2008.

ALCUBIERRE.M; **Warpdrives: Hyper-fast travel within general relativity**,Classical and Quantum Gravity,v.11,n.5,p.L73,1994.

CARROLL.S; **Spacetime and Geometry**. 1.ed. Pearson: Chicago,2003.

CHARLES W.M; THORNE.S.K; WHEELER.J.A; KAISER.I.D; **Gravitation**. 2.ed. San Francisco: Clarendon Press,2017.

D'INVERNO.R; **Introducing Einstein's Relativity**. 1.ed. New York: Princeton University Press,1992.

EINSTEIN,A; **On the Electrodynamics of Moving Bodies**,Annalen der Physik,v.17,n.322,p.891–921,1905.

EINSTEIN,A; **The Field Equations of Gravitation**,Preussische Akademie der Wissenschaften,p.844–847,1915.

HARTLE.J; **Gravity: An Introduction to Einstein's General Relativity**. 2.ed.Pearson: Santa Barbara,2014.

MICHAEL.S, MORRIS and THORNE.K.S.; **Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel: a tool for teaching general relativty**,Am.J.Phys,v.56,n.5,p.395,1988.

SARD.R.D.; **Relativistic Mechanics: special relativity and classical particle dynamics**. 1.ed.Benjamin,INC: New York,1970.

SCHWARZSCHILD.K; **Relativistic Mechanics: special relativity and classical particle dynamics**. 1.ed.Benjamin,INC: New York,1970.

WEINBERG.S.; **Gravitation and Cosmology: principles and applications of general theory of relativity** . 1.ed.New York: Wiley,1972.

EINSTEIN, A. **Zur Elektrodynamik bewegter Körper**, Ann.Phys., vol 17, p.891, 1905.

EINSTEIN, A. **Zur Elektrodynamik bewegter Körper**, Ann.Phys., vol 17, p.891, 1905.

FARAONI, V. **Special Relativity**, Springer, 2013.