

# **USO DE FERRAMENTAS MATEMÁTICAS PARA ESTUDAR CURVAS DE LUZ DE NÚCLEOS ATIVOS DE GALÁXIAS**

**RELATÓRIO FINAL DE PROJETO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA  
(PIBIC/INPE/CNPq)**

**Matheus Willams Duarte Andrade (Universidade Presbiteriana Mackenzie,  
Bolsista PIBIC/CNPq)  
E-mail: matheuswillams2@hotmail.com**

**Luiz Claudio Lima Botti (DAS / CEA / INPE e CRAAM (Centro de Rádio-  
Astronomia e Astrofísica Mackenzie, Orientador)  
E-mail: luizquas@yahoo.com.br**

**Julho de 2018**

## **SUMÁRIO**

<b>1. INTRODUÇÃO</b>	<b>5</b>
<b>2.1 Objetivo</b>	<b>6</b>
<b>3. METODOLOGIA</b>	<b>7</b>
<b>3.1 Análise de Fourier</b>	<b>7</b>
<b>3.2 Transformada de Fourier</b>	<b>7</b>
<b>3.3 Transformada Discreta de Fourier</b>	<b>7</b>
<b>3.4 Transformada Rápida de Fourier</b>	<b>8</b>
<b>3.5 Transformada de Fourier para pontos desigualmente espaçados - Método de Lomb</b>	<b>8</b>
<b>3.6 Análise Wavelet</b>	<b>9</b>
<b>3.7 Escala e Translação</b>	<b>10</b>
<b>3.8 Transformada de Wavelet Contínua</b>	<b>10</b>
<b>3.9 Transformada de Wavelet Discreta</b>	<b>10</b>
<b>4.FLUXOGRAMA</b>	<b>11</b>
<b>5. CURVAS DE LUZ</b>	<b>12</b>
<b>6. CONCLUSÃO</b>	<b>13</b>
<b>7. REFERÊNCIAS</b>	<b>14</b>

## RESUMO

Este trabalho, iniciado em agosto de 2017, tem como objetivo enfatizar a utilização de alguns métodos matemáticos que podem ser aplicados em séries temporais complexas. As primícias do estudo foram direcionadas para o embasamento relativo ao melhor entendimento das Transformadas de Fourier, Wavelets e Periodograma de Lomb-Scargle. Em sequência, passou-se a direcionar o estudo para uma introdução de algumas aplicações dessas ferramentas matemáticas para o estudo do quasar 3C 273. A análise de wavelet é de muita importância para a pesquisa que está sendo realizada e, por isso, é muito utilizada para se estudar a variabilidade em diferentes corpos celestes, singularmente as curvas de luz de AGNs. Após o estudo realizado durante esses primeiros meses de pesquisa foi possível identificar a relação e a particularidade da Transformada Rápida de Fourier, as Wavelets e o algoritmo Lomb-Scargle. Depois de integrado o conhecimento dessas ferramentas, foram feitos estudos com foco em diversas curvas de luz de AGNs sugeridos. O trabalho atual trata do estudo de um “software” para o estudo da Transformada de Fourier para pontos não igualmente espaçados. Para o conjunto de dados do quasar 3C 273, na frequência de 4,8 GHz, tem-se relações entre frequência e amplitude do sinal. Destaca-se as frequências dominantes 0,01144, 0,01822, 0,02437, 0,03520 e 0,04744, obtendo-se os períodos de cerca de 87,4, 54,9, 41,0, 28,4 e 21,1 meses, respectivamente, ou seja, 7,3, 4,6, 3,4, 2,4 e 1,8 anos. A mesma análise é realizada para a frequência de 14,5 GHz, encontrando as frequências 0,00572, 0,01022, 0,01599, 0,02255 e 0,03597 correspondentes aos períodos de aproximadamente 14,6, 8,2, 5,2, 3,7 e 2,3 anos.

## ABSTRACT

This study, which started in August of 2017, aims to emphasize the use of some mathematical methods that can be applied in complex time series. The first part of the study were directed to the basement on the better understanding of the Fourier Transforms, Wavelets and Lomb-Scargle Periodogram. In sequence, direct the study for an introduction of some applications of these mathematical tools for the quasar 3 c 273 study. Wavelet analysis is of great importance to the research that is being performed and so it is widely used to study the variability in different celestial bodies, unusually light curves of AGNs. After the study conducted during those early months of research it was possible to identify the relationship and the peculiarity of the Fast Fourier transform, Wavelets and the Lomb-Scargle algorithm. After the integrated knowledge of these tools, were studies focusing on various light curves of AGNs suggested. The present work deals with the study of a software for the study of Fourier transform to not equally spaced points. To the quasar 3 c 273 's data, the 4.8 GHz frequency, relationships between frequency and amplitude of the signal. We highlight the dominant frequencies 0.01144, 0.02437, 0.03520, 0.01822 and 0.04744, with periods of about 87.4, 54.9, 41.0, 28.4 and 21.1 months, respectively, i.e., 7.3, 4.6, 2.4 and 3.4, 1.8 years. The same analysis is performed to 14.5 GHz frequency, frequencies, 0.01022, 0.00572, 0.02255 and 0.03597 corresponding to the periods of approximately 14.6, 8.2, 5.2, 3.7 and 2.3 years.

## **1. INTRODUÇÃO**

Este trabalho relata as atividades desenvolvidas no projeto de Iniciação Científica “Uso de ferramentas matemáticas para estudar as curvas de luz de núcleos ativos de galáxias”, iniciado em Agosto de 2017, sob orientação do Prof. Dr. Luiz Claudio Lima Botti. Tem como objetivo enfatizar a utilização de alguns métodos matemáticos que podem ser aplicados em séries temporais complexas. As primícias do estudo foram direcionadas para o embasamento relativo ao melhor entendimento das Transformadas de Fourier, Wavelets e Periodograma de Lomb-Scargle. Em sequência, passou-se a direcionar o estudo para uma introdução de algumas aplicações dessas ferramentas matemáticas para o estudo do quasar 3C 273.

As curvas de luz estabelecem formas de apresentar a variabilidade dos quasares e suas componentes variáveis. Nesse trabalho algumas técnicas para análise de curvas de luz são apresentadas, entre elas, o periodograma de Lomb-Scargle e as Transformadas de Wavelet.

## 2.1 OBJETIVOS

O objetivo deste projeto é enfatizar o uso de alguns métodos matemáticos que podem ser aplicados em séries temporais complexas. Para analisar curvas de luz de galáxias (núcleos ativos de galáxia) pretende-se utilizar neste projeto de várias ferramentas matemáticas tais como Transformada Rápida de Fourier, Periodograma de Lomb-Scargle e Wavelet.

A análise de Fourier é na verdade uma análise espectral e consiste em expressar fenômenos periódicos ou não (tais como curvas de luz de AGNs observadas em diferentes frequências) como uma somatória de funções trigonométricas de senos e cossenos. As séries temporais podem ser descritas como um somatório de curvas senoidais, com amplitudes e frequências diferentes. A contribuição de cada curva para a variação total da série é mapeada contra suas frequências produzindo um espectro de frequências (periodograma). A técnica que produz um periodograma de uma série temporal é a análise espectral ou análise de Fourier.

A Transformada de Fourier é um método matemático para análise de série temporal pela qual uma função constituída por somas de funções senoidais é decomposta por suas componentes harmônicas. A Transformada de Fourier localiza as diferentes funções senoidais com diferentes frequências e as respectivas amplitudes que se combinam numa forma de onda arbitrária. Pode-se utilizar um algoritmo chamado Transformada Rápida de Fourier desenvolvido por J.W. Cooley e J.W. Turkey em 1960 para se fazer de uma forma mais rápida esta análise.

A técnica de Fourier não nos dá a indicação do tempo onde ocorreram as componentes espectrais. Em Astrofísica muitas vezes as séries temporais são desigualmente espaçadas devido ao fenômeno ser observado em situações atmosféricas que às vezes não permitem a observação de um AGN numa determinada época ou o instrumento estar eventualmente quebrado na época destinada à observação. Dessa forma foi desenvolvida a Transformada de Fourier para pontos não igualmente espaçados. E para isso foi desenvolvido o conceito proposto por Lomb (1976) e Scargle (1982), conhecido hoje em dia como método de Lomb.

Devido a deficiência dessas técnicas acima descritas não nos fornecerem o tempo exato de quando a periodicidade ocorreu, foi desenvolvida a Análise Wavelet. A ideia básica da análise wavelet é aproximar uma função por uma combinação linear de funções básicas obtendo-se uma boa representação da função original no domínio das frequências e no domínio do tempo.

Para problemas astrofísicos é preferível utilizar a Wavelet de Morlet cuja ideia surgiu na década de 1970 para resolver problemas de análise de sinais com componentes de frequência muito altas em intervalos de tempo muito curtos e frequências muito baixas em intervalos de tempo muito longos (Polikar, 1999).

### 3. METODOLOGIA

Para um melhor desenvolvimento do projeto, inicialmente foram estudados alguns métodos matemáticos e algumas ferramentas foram adotadas. Entre eles estão as Transformadas de Fourier, as Wavelets e o Periodograma de Lomb-Scargle.

#### 3.1 Análise de Fourier

A análise de Fourier de uma série temporal constitui-se da ideia de apresentar uma determinada função, levando-se em consideração fenômenos periódicos, como uma somatória de funções trigonométricas. Tais ideias foram criticadas por diversas vezes por grandes matemáticos da época como Laplace, Legendre e Lagrange, devido a falta de precisão. A análise de Fourier tem por objetivo determinar a amplitude em função da frequência, com o objetivo de construir uma série discreta de frequências partindo-se de uma série atemporal, para cada onda senoidal que compõe o sinal analisado.

Um dos princípios fundamentais da análise de Fourier é que um sinal periódico  $h(t)$  de período  $2L$ , definido no intervalo  $[-L, L]$  pode ser expresso como uma somatória:

$$h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)] \quad (1)$$

onde  $a_n$  e  $b_n$  são coeficientes associados às amplitudes,  $n$  é um inteiro indexado à frequência  $\omega_n$ , dado por  $\omega_n = \frac{n\pi}{L}$

#### 3.2 Transformada de Fourier

Método utilizado para analisar séries temporais, consistindo na decomposição de uma função de somas senoidais em suas componentes harmônicas. Identifica diferentes funções senoidais com diferentes frequências e suas respectivas amplitudes, combinadas em um modelo de onda arbitrária.

#### 3.3 Transformada Discreta de Fourier

O modelo de análise obtido pela transformada discreta de Fourier é congênere ao modelo da transformada contínua. Enquanto a DFT (Transformada Discreta de Fourier) é utilizada como método prático para analisar sinais reais coletados por instrumentos reais através de medições periódicas (amostragem de sinal), a CFT (Transformada de Fourier) é normalmente aplicável no desenvolvimento e solução na analítica de equações algébricas. (GASTALDI, 2016, p. 49)

Para uma análise correta do sinal amostrado, a frequência de amostragem deve ser ao menos duas vezes mais alta que a frequência do sinal amostrado. Isso constitui-se no critério de Nyquist.

### 3.4 Transformada Rápida de Fourier

O método para calcular a transformada discreta de Fourier a partir da expressão

$$F_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{*i2\pi n \frac{k}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} f_k W^{kn}, n = 0, \dots, N - 1 \quad (2)$$

utiliza  $N^2$  produtos entre números complexos e  $N(N - 1)$  somas, apresentando assim complexidade computacional  $O(N^2)$ .

Com a utilização da transformada rápida de Fourier, ela pode ser calculada utilizando  $O(N \log_2(N))$  operações. Um dos algoritmos muito utilizados é o radix-2 FFT, que determina que  $N$  deve ser continuamente divisível por 2, logo um DFT com o tamanho  $N$  de dados pode ser apresentada como a soma de duas transformadas discretas de Fourier, cada um com tamanho de  $\frac{N}{2}$ , onde  $N$  é um inteiro múltiplo de 2, caso  $N$  não atenda ao pedido, é completado com uma sequência de zeros. Esse processo é realizado até que seja alcançada uma DFT de somente dois pontos. Essa transformada permite transformar sinais que dependem do tempo em sinais que dependem da frequência, ou seja, é possível transformar um sinal em seus componentes de frequência.

### 3.5 Transformada de Fourier para pontos desigualmente espaçados

#### Método de Lomb

Consiste em avaliar dados, somente no tempo  $t$ , em que foram realmente medidos. Nos dados existem  $N$  pontos  $h_i = h(t)_i, i = 1, \dots, N$ . De início encontra-se a média e a variância dos dados, utilizando-se as seguintes fórmulas:

$$\bar{h} = \frac{1}{N} \sum_1^N h_i \quad (3)$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{N-1} \sum_1^N (h_i - \bar{h})^2 \quad (4)$$

Onde pode-se definir o periodograma normalizado de Lomb por

$$P_N(\omega) \equiv \frac{1}{2\sigma^2} \left\{ \frac{[\sum_j (h_j - \bar{h}) \cos \omega(t_j - \tau)]^2}{\sum_j \cos^2 \omega(t_j - \tau)} + \frac{[\sum_j (h_j - \bar{h}) \sin \omega(t_j - \tau)]^2}{\sum_j \sin^2 \omega(t_j - \tau)} \right\} \quad (5)$$

onde  $\tau$  é definido pela relação:

$$\tan(2\omega\tau) = \frac{\sum_j \sin 2\omega t_j}{\sum_j \cos 2\omega t_j} \quad (6)$$



A constante  $\tau$  é uma compensação que faz com que  $P_N(\omega)$  seja independente dos desvios causados por qualquer  $t_i$ . A escolha dessa constante é que faz o resultado desse método ser superior ao FFT, onde, ao invés de atuar no intervalo de tempo, atua nos dados por ponto, evitando assim, erro na análise de dados irregulares.

### 3.6 Análise Wavelet

Essa análise surgiu em meados dos anos 80, a partir de trabalhos desenvolvidos por um grupo de pesquisadores franceses, onde a palavra wavelet é derivada do francês “ondelette”, diminutivo de onda. Essa análise consiste em aproximar uma determinada função por uma combinação linear de funções básicas, obtendo através disso uma representação da função original, no domínio das frequências e no domínio temporal. O desenvolvimento do processo de análise wavelet possui como principais componentes o espectro wavelet local (mapa wavelet) e o espectro wavelet global, onde estão contidos os resultados da periodicidade associados à variabilidade, no caso do objeto em questão, a periodicidade do quasar 3C 273. (ROCHA, 2015)

Ao final dos anos 70, Morlet tratava um problema de análise de sinais que possuía componentes de frequências altas em intervalos de tempo muito curtos e também em baixas frequências com intervalos de tempo altos. Uma STFT (Transformada Rápida de Fourier) era capaz de analisar qualquer componente de alta frequência utilizando largas janelas ou analisar componentes de frequências baixas utilizando janelas estreitas (Wideband Frequency Analysis), mas não ambas simultaneamente. Tal motivo fez com que Morlet tivesse a ideia de utilizar funções-janela diferentes para analisar bandas de frequência diferentes. Tais funções aumentam o tempo, reduzindo a frequência, dessa forma a função calcula a baixa frequência contida no sinal, e diminuem o tempo, aumentando a frequência, enquanto calcula a alta frequência contida no sinal. À princípio, a teoria de Morlet foi alvo de muitas críticas, mas com a ajuda do físico teórico de mecânica quântica Alex Grossmann, este formalizou a transformada de Wavelet em sua forma contínua (POLIKAR, 1999).

Uma função representando uma onda é normalmente definida como uma função oscilante no tempo ou no espaço, como uma senóide. A principal diferença entre essas análises é que a análise de Fourier consiste em decompor, em senos e cossenos de várias frequências, um sinal, enquanto a análise de Wavelet é a decomposição de um sinal através de escalas (dilatação e compressão) e translações de uma dada wavelet original. A transformada de wavelet pode se distinguir entre:

- Transformada wavelet contínua;
- Transformada wavelet discreta;
  - Sistemas discretos redundantes e;
  - Wavelets com base ortonormal.

Das propriedades das funções wavelets:

- A expansão wavelet dá a localização tempo-frequência do sinal;
- No caso discreto, o cálculo dos coeficientes do sinal pode ser feito eficazmente. Boa parte é calculada com  $O(N)$  operações, ou seja, o número de adições e

multiplicações aumenta linearmente com o número de elementos do sinal analisado;

- As expansões em wavelets permite uma descrição local mais precisa e uma melhor separação das características do sinal;
- As wavelets são ajustáveis e adaptáveis, pois existem muitas famílias e outras podem ser criadas, facilitando sua utilização em vários tipos de sinais.

### 3.7 Escala e Translação

Escala significa dilatar ou comprimir uma função. Fatores de escalas maiores fazem a dilatação da wavelet e fatores de escalas menores fazem a compressão. A translação de uma wavelet significa adiantar ou atrasar o seu início.

### 3.8 Transformada de Wavelet Contínua

É definida como uma integral de uma convolução entre o sinal analisado  $f(t)$  e uma wavelet conhecida como wavelet-mãe, expressa por:

$$W(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\psi_{a,b}dt \quad (7)$$

em que os parâmetros  $a$  e  $b$  variam continuamente em  $\mathbb{R}$ , com  $a \neq 0$ , e

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (8)$$

sendo que  $a \in \mathbb{R}^+$  e  $b \in \mathbb{R}$ . As funções  $\psi_{a,b}$  são chamadas wavelets-filhas e são geradas a partir de dilatações e translações da wavelet-mãe  $\psi(t)$ .

O termo do denominador  $\sqrt{a}$ , corresponde a um fator de normalização da energia de cada wavelet de forma a manter a mesma energia da wavelet-mãe.

A transformada wavelet contínua é a integral de definição do sinal multiplicado pelas versões de escala e translação da wavelet-mãe. Tal processo produz coeficientes wavelet que são funções da escala e posição.

### 3.9 Transformada de Wavelet Discreta

É a transformada correspondente à transformada contínua de wavelet para funções discretas. É utilizada para analisar sinais digitais, e também na compressão de imagens digitais. Nessa transformada os parâmetros de dilatação e translação não variam continuamente, mas sim discretamente. Essa transformada é similar à transformada discreta de Fourier, porém os valores discretos são relacionados aos parâmetros de escala “ $a$ ” e de translação “ $b$ ”. Fazendo “ $a$ ” da forma  $2^{-s}$  e “ $b$ ” da forma  $k2^{-s}$ , onde  $k, s \in \mathbb{Z}$ , obtendo-se a equação:

$$W(k2^{-s}, 2^{-s}) = 2^{s/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\psi(2^s t - k)dt, \text{ podendo ser escrita como: } \quad (9)$$

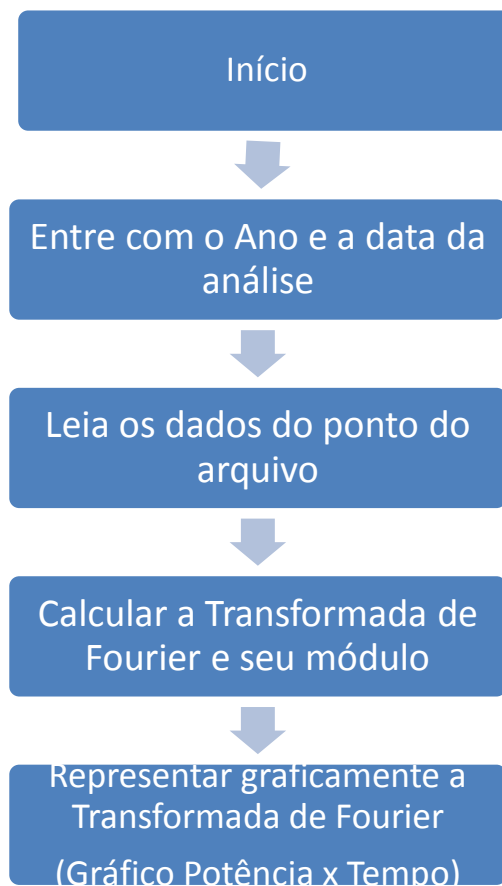
Podendo ser escrita como:

$$W(k2^{-s}, 2^{-s}) \approx 2^{s/2} \sum_n f(n) \psi(2^s n - k) \quad (10)$$

#### 4. FLUXOGRAMA

Um dos programas utilizados para análise de dados de curvas de luz (series temporais), é o VARTOOLS. Tal ferramenta é composta por métodos para o cálculo de periodicidade de curvas de luz, para filtrar e transformar e modelar curvas de luz. É comumente utilizado para um número grande de curvas de luz, e é executado através da emissão de uma série de comandos, onde cada comando é executado com dados coletados na primeira curva de luz analisada.

O fluxograma abaixo representa um algoritmo, que está sendo estudado durante esse projeto, utilizado para a plotagem de gráficos de curvas de luz do tipo Potência x Tempo, utilizando, no caso, o calendário juliano, utilizando sequências constantes para a observação.



## 5. CURVAS DE LUZ

Curvas de luz traduzem o comportamento temporal dos quasares, núcleos ativos de galáxias, BL Lacertae, mostrando as variabilidades de longo e curto períodos nesses objetos em uma determinada frequência de observação. O estudo da variabilidade das curvas de luz, coopera na determinação e classificação desses corpos. Para fazer uma análise de curva de luz é necessário realizar observações por determinado tempo, após isso, dados são gerados apresentando as datas de cada observação e a densidade de fluxo detectada.

Para ilustrar, é apresentado o gráfico das curvas de luz de OJ287, GASTALDI, 2016. Os dados foram obtidos no radiotelescópio de Michigan (EUA).

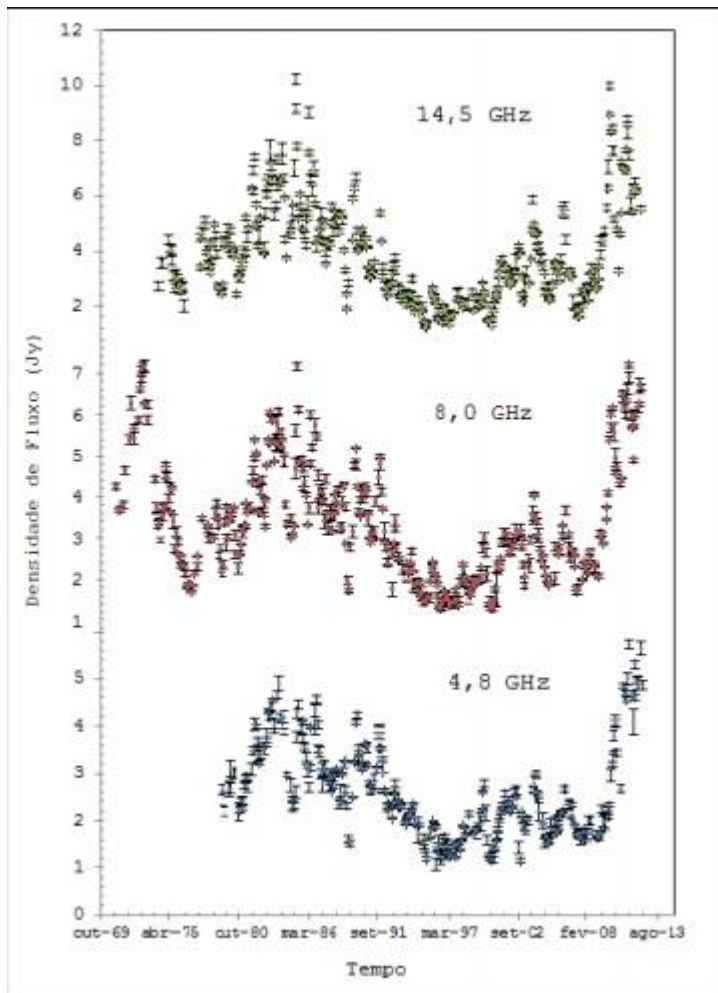


Figura 1. Essa figura mostra as curvas de luz de OJ287 em 4,8, 8,0, e 14,5 GHz de 1969 a 2012. As frequências mais altas exibem maiores amplitudes de variabilidade e existe relação entre as curvas de luz nas três frequências.

## 6. CONCLUSÃO

Neste trabalho foram estudadas algumas ferramentas matemáticas como: a transformada de Fourier, o periodograma de Lomb e a transformada wavelet, e suas aplicações às curvas de luz. A análise de Fourier consiste em detectar e quantificar dados de series temporais, enquanto que as transformadas wavelet permitem analisar dados em diferentes frequências, onde podem ser entendidas para decompor sinais de suas partes. O periodograma de Lomb-Scargle consiste em um modelo de estimação da densidade do espectro de potência de sinais apresentados de maneira não-uniforme, tornando esta, a ferramenta mais viável.

Procurou-se desenvolver um programa cujo objetivo é determinar os períodos presentes em uma curva de luz de uma AGN e apresentar um gráfico do estudo realizado. Esse programa ainda está em desenvolvimento, e para o desenvolvimento, está sendo utilizada a linguagem Python, criada por Guido van Rossum em 1991, ferramenta criada para produzir um código de boa qualidade e fácil manipulação..

A próxima etapa do trabalho é dar continuação do desenvolvimento do programa utilizando um algoritmo que leve em consideração o método de Lomb-Scargle para analisar pontos não igualmente espaçados em uma curva de luz.

## REFERÊNCIAS

GASTALDI, Marcio Ribeiro. Uso do periodograma de lomb e da transformada Wavelet para detecção de periodicidades em radiofontes extragalácticas. 2016. 150 f. Tese (Ciências e Aplicações Geoespaciais) - Universidade Presbiteriana Mackenzie, São Paulo .

LOMB, N.R. Least square frequencies analysis of unequally spaced data. *Astrophysics and Space Science*, Sidney, 39, 1976.

MANWELL, T. & Simon, M. Application of a Random Event Quasar Model to the Optical Variability of 3C 273. *Astronomical Journal*, Vol. 73, p. 407, 1968

NEWLAND, D.E. An introduction to random vibrations: spectral & wavelet analysis. EUA: Dover, 2005.

PETERSON, B.M. An Introduction to Active Galactic Nuclei. Cambridge University Press, 1997.

POLIKAR, B.M. The story of Wavelet. International joint conference on circuits, systems, communications and computers IEEE/IMACS, 1999.

ROCHA, Nathalia Mattos Novaes da. Análise wavelet da variabilidade do quasar 3C 273. 2015. 116f. Dissertação (Mestrado em Física) - Centro de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2015.

SANTOS, Márcia Auta dos. Investigações das periodicidades do quasar 3C 273 pelas transformadas de Fourier e Wavelet de suas curvas de luz em radio. 2007. 104 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) - Universidade Presbiteriana Mackenzie, São Paulo, 2007

SCARGLE, J.D. Studies in astronomical time series analysis *The Astrophysical Journal*, 263, 1982.

SOLDI, S., TÜRLER, M., PALTANI, S., ALLER, H.D., ALLER, M.F., BIRKI, G., CHERNYAKOVA, M., LÄHTEENMÄKI, A., McHARDY, I.M., ROBSON, E.I., STAUBERT, R., TORNIKOSKI, M., WALTER, R., COURVOISIER, T.J.L. *Astronomy and Astrophysics*, v.486, p.411-425, 2008.