



Ministério da
**Ciência, Tecnologia
e Inovação**

sid.inpe.br/mtc-mxx/aaaa/00.00.00.00-XXX

A TRANSFORMAÇÃO ENTRE SISTEMAS DE COORDENADAS, APLICADA AO POSICIONAMENTO POR SATÉLITES ARTIFICIAIS

Thiago Gonçalves Guimarães Lopes

Relatório de Iniciação Científica,
orientado pelo Dr. Helio Koiti Kuga
e pela Dra. Paula Cristiane Pinto
Mesquita Pardal.

URL do documento original:

<<http://urlib.net/xx/yy>>

INPE
São José dos Campos
2018



Ministério da
**Ciência, Tecnologia
e Inovação**

A TRANSFORMAÇÃO ENTRE SISTEMAS DE COORDENADAS, APLICADA AO POSICIONAMENTO POR SATÉLITES ARTIFICIAIS

RELATÓRIO FINAL DE PROJETO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA (PIBIC/CNPq/INPE)

Thiago Gonçalves Guimarães Lopes (EEL/USP, Bolsista PIBIC/CNPq)
E-mail: thiago.goncalves.lopez@usp.br

Hélio Koiti Kuga (ITA/DCTA, Orientador)
E-mail: helio.kuga@inpe.br

Paula Cristiane Pinto Mesquita Pardal (DEBAS/EEL/USP,
Co-Orientadora)
E-mail: paulapardal@usp.br

INPE
São José dos Campos
2018

Esta ficha será revisada pelo SID.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Lopes, Thiago G. G.

Cutter A transformação entre sistemas de coordenadas, aplicada ao posicionamento por satélites artificiais/ Thiago Gonçalves Guimarães Lopes. – São José dos Campos : INPE, 2018.

Relatório Final (Iniciação Científica) - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2018

Orientador: Hélio Koiti Kuga e Paula Cristiane Mesquita Pardal.

1. Transformação Direta e Inversa. 2. Elipsoide 3. Método Iterativo. 4. Aproximação. I. Título.

CDU



Esta obra foi licenciada sob uma Licença Creative Commons Atribuição-NãoComercial 3.0 Não Adaptada.

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 3.0 Unported License.

[Informar aqui sobre marca registrada.](#)

FOLHA DE APROVAÇÃO
CONFECCIONADA PELO SPG E INCLUÍDA PELO SID

Resumo

Na área aeroespacial, saber trabalhar os dados obtidos da melhor maneira possível é essencial para uma maior eficácia de resultados, portanto, torna-se necessário saber transformar esses dados, de acordo com o problema. Na análise de dados e posicionamento na esfera celeste geocêntrica, é comum utilizar o sistema de coordenadas cartesiano ou o sistema de coordenadas elipsoidal. No presente trabalho, é feito um estudo da relação entre coordenadas cartesianas e geodésicas bem como suas transformações direta e inversa (coordenadas geodésicas obtidas a partir das cartesianas). O projeto compreende estudar métodos desenvolvidos para a resolução do problema inverso, uma vez que a análise dos diferentes métodos se faz necessária devido às regiões analisadas, pois certos métodos apresentam melhor desempenho para pontos próximos aos pólos enquanto outros métodos mostram maior precisão para alturas próximas a do elipsoide. No caso, três métodos foram analisados, dois iterativos e um por aproximação, descritos por Hoffman-Wellenhof (método iterativo e por aproximação); e Ligas-Banasik (método iterativo). O método iterativo descrito pelo primeiro autor é composto por aproximação inicial para o raio de curvatura e por sucessivos incrementos, de forma que o raio convirja em um valor finito. O método iterativo descrito pelo segundo autor consiste em analisar dois vetores equipolentes formados pelo ponto a ser analisado e sua projeção sobre o elipsoide. O método por aproximação é definido ao implementar um ângulo auxiliar que tem uma relação com o ângulo real, chegando-se ao resultado desejado. Os resultados obtidos foram comparados por um sistema de erro relativo desenvolvido por Ligas-Banasik e o resultado computacional obtido por eles. Os métodos também foram comparados pelo tempo de execução de seus algoritmos.

Palavras-chave: Transformação Direta e Inversa. Elipsoide. Método Iterativo. Aproximação.

THE TRANSFORMATION BETWEEN COORDINATE SYSTEMS APPLIED TO ARTIFICIAL SATELLITES'S POSITIONING

Abstract

In the aerospace area, the work performed on the program data is more important for a greater contraction of results, therefore, it becomes necessary to know these data according to the problem. In the data analysis and positioning in the geocentric celestial system, it is common to use the cartesian coordinate system or the ellipsoidal coordinate system. In the present work, a study is made of the relation between Cartesian and geodetic coordinates as well as their direct and inverse transformations from the Cartesian). The project consists of an analysis of the different methods to solve an inverse problem, since the analysis of the different methods is necessary for the analyzed temperatures, which makes the process more efficient for points next to pole while others methods are more accurate over the ellipsoid. In this case, the procedures were analyzed by iterative and approximation methods, by Hoffman-Wellenhof (iterative and approximation method); and Ligas-Banasik (iterative method). The iterative method is described by the first author for the initial choice of calculating the curvature and by successive increments, so that it converges to a finite value. The iterative method described by the second author is based on the analysis of two equipolents vectors formed by the point to be analyzed and its projection on the ellipsoid. The approximation method consists in implement an auxiliary angle that has a relation with the actual angle, reaching the desired result. The results were compared to a system of relative error developed by Ligas-Banasik and the computational result obtained by them. The methods were also compared by the execution time of their algorithms.

Keywords: Direct and Reverse Transformation. Ellipsoid Iterative Method. Approximation.

Lista de Figuras

2.1	Coordenadas Cartesianas e Coordenadas Elipsoidais	2
2.2	Representação da projeção	4
2.3	Raio de curvatura na vertical principal.	6
2.4	Fluxograma Método Iterativo Hofmann-Wellenhof	8
2.5	Plano Meridiano.	9
2.6	Latitude reduzida	10
2.7	Latitude Geocêntrica	10
2.8	Plano meridiano mostrando a relação entre o centro de curvatura	12
2.9	Solução baseadas nos vetores colineares \vec{n} e \vec{h}	14
2.10	Simplificação do elipsoide no plano meridiano	15
2.11	Fluxograma Método Iterativo Ligas-Banasik	18
4.1	Erros encontrados nos grupos quando $\varphi = 0^\circ$	33
4.2	Erros encontrados nos grupos quando $\varphi = 15^\circ$	34
4.3	Erros encontrados nos grupos quando $\varphi = 45^\circ$	35
4.4	Erros encontrados nos grupos quando $\varphi = 75^\circ$	36
4.5	Erros encontrados nos grupos quando $\varphi = 90^\circ$	37

Lista de Tabelas

4.1	Comparação entre os métodos da literatura no grupo (a)	25
4.2	Comparação entre os métodos de transformações utilizando os pontos do grupo (a)	26
4.3	Erros entre os métodos de transformações utilizando os pontos do grupo (a)	26
4.4	Comparação entre os métodos da literatura no grupo (b)	27
4.5	Comparação entre os métodos de transformações utilizando os pontos do grupo (b)	28
4.6	Erros entre os métodos de transformações utilizando os pontos do grupo (b)	28
4.7	Comparação entre os métodos da literatura no grupo (c)	29
4.8	Comparação entre os métodos de transformações utilizando os pontos do grupo (c)	30
4.9	Erros entre os métodos de transformações utilizando os pontos do grupo (c)	30

Sumário

1	Introdução	1
2	Revisão Bibliográfica	2
2.1	Introdução ao sistema de Coordenadas Geodésicas e Cartesianas	2
2.2	Problema Direto	3
2.3	O problema inverso	5
2.3.1	Método Iterativo Hofmann-Wellenhof	6
2.3.2	Método Direto Hofmann-Wellenhof(Bowring e Rapp)	9
2.3.3	Método Iterativo Ligas-Banasik	14
3	Materiais e Métodos Utilizados	20
3.1	Primeira análise	20
3.2	Segunda análise	23
4	Análises e Resultados	24
4.1	Resultados da primeira análise	24
4.2	Resultados da segunda análise	31
5	Conclusões	38
	Referências	39

1 Introdução

O posicionamento do homem dentro no Terra ou no Espaço, após o avanço da tecnologia, é algo que vem sendo estudado e aprimorado ao longo dos anos. Nos primórdios das navegações, utilizavam-se das constelações para que navios soubessem suas rotas. Atualmente, é utilizado sistemas tecnológicos sofisticados como antenas, satélites ou sondas espaciais que possibilitam fazer o rastreamento do objeto dentro da esfera celeste ou ainda coletar outros dados importantes como análises climáticas, geográficas, rastreamento de planetas e galáxias.

É na parte análise de dados e localização, dentro do âmbito aeroespacial, que é aplicada as transformações de coordenadas. Em qualquer atividade de posicionamento terrestre, no caso, geodésico, é essencial a utilização de sistemas de referência adequados, que dependem de cada situação. No ambiente aeroespacial, cada problema requer uma análise em sistemas apropriados para cada atividade, como modelar as observáveis; descrever as órbitas dos satélites; e em sistemas de posicionamento, como *Global Position System* (GPS) [HOFMANN-WELLENHOF, 2008, MONICO, 2008].

Do ponto de vista do observador, um único sistema de referência ou uma coordenada oficial única para o posicionamento de corpos, como o GNSS, seria algo desejável. Por vários motivos, esse sistema único de coordenadas está longe de ser encontrado, porém para trabalhar alguns problemas existentes, faz-se necessário utilizar sistemas espaciais específicos. Em controle de posicionamento, normalmente os dados são obtidos em coordenadas cartesianas, porém em algumas situações, como localização de corpos celeste, é preferível utilizar um sistema elipsoidal ao invés de um geocêntrico (cartesiano).[HOFMANN-WELLENHOF, 2008].

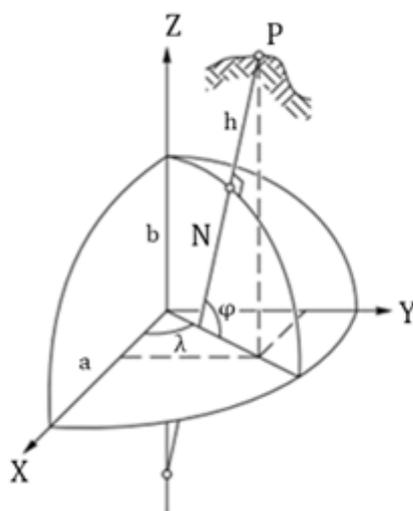
Neste projeto de IC, foi estudado um método para obter a transformação direta, por meio de uma análise geométrica. Já no processo inverso foram analisados três métodos: uma aproximação e dois interativos, tanto na precisão dos métodos e do algoritmo criado para realização desta pesquisa quanto seu custo computacional. Como resultado desta IC, obteve-se algoritmos que reproduzissem resultados semelhantes aos apresentados na literatura e uma análise de erro em relação a distância do corpo celeste ao elipsoide, apresentando algumas variações de método para método.

2 Revisão Bibliográfica

2.1 Introdução ao sistema de Coordenadas Geodésicas e Cartesianas

Denotando as coordenadas cartesianas retangulares por X, Y, Z e assumindo um elipsoide de revolução de raio maior a e raio menor b , com a mesma origem do sistema cartesiano (o centro de gravidade da Terra), um ponto pode ser expresso pelas coordenadas geodésicas, como ilustra a Fig. 2.1. Definindo φ como a latitude geodésica (ângulo entre a normal que passa pelo ponto P e sua projeção ortogonal no plano do Equador, isto é, o plano XY), λ é a longitude geodésica (ângulo medido do meridiano de Greenwich, coincidindo com o eixo X , ao meridiano do ponto P) e h é a altura geométrica (distância de P ao elipsoide, medida sobre a grande normal N).

Figura 2.1: Coordenadas Cartesianas e Coordenadas Elipsoidais



Fonte:[HOFMANN-WELLENHOF, 2008][Modificado].

Serão introduzidas as seguintes quantidades: achatamento (α), diferença entre os comprimentos dos semi-eixos (c), excentricidade (e), Grande Normal (N) e Pequena Normal (N'), necessárias no desenvolvimento analítico, mostrado nas seções seguintes [UFRGS, 2008]:

$$\alpha = 1 - \frac{b}{a} \quad (2.1)$$

$$c^2 = a^2 - b^2 \quad (2.2)$$

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \quad (2.3)$$

$$e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2} \quad (2.4)$$

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi)}} \quad (2.5)$$

$$N' = \frac{a(1 - e^2)}{\sqrt{1 - e^2 \text{sen}^2(\varphi)}} \quad (2.6)$$

2.2 Problema Direto

O problema direto consiste em encontrar as transformações que levam do sistema de coordenadas elipsoidais, cujas variáveis são conhecidas, para o sistema de coordenadas cartesiano, cujas coordenadas se deseja saber. Pode-se encontrar uma solução de maneira direta analisando a Fig. 2.1, por meio da projeção do ponto P nas direções X, Y, Z . Para encontrar as transformações é necessário relacionar a equação que descreve o elipsoide em coordenadas Cartesianas e Geodésicas. A equação que descreve a geodésia de raio maior a e raio menor b é dada por [HOFMANN-WELLENHOF, 2006]:

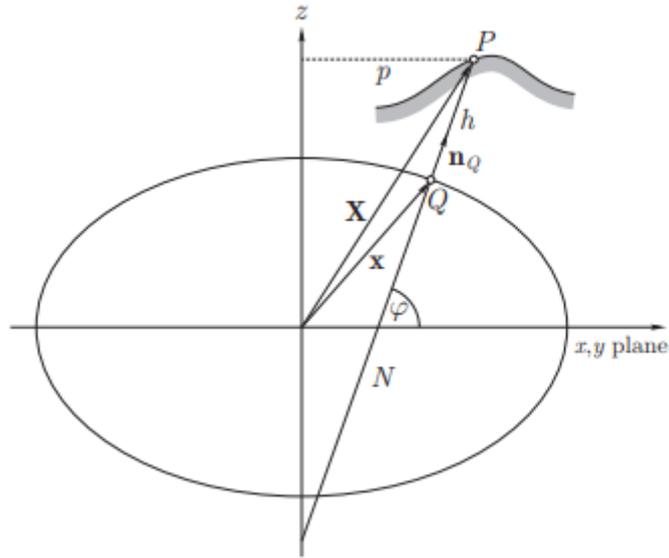
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad (2.7)$$

E a representação do elipsoide em função dos ângulos φ e λ por:

$$\begin{aligned} x &= N \cos(\varphi) \cos(\lambda) \\ y &= N \cos(\varphi) \text{sen}(\lambda) \\ z &= \frac{b^2}{a^2} N \text{sen}(\varphi) \end{aligned} \quad (2.8)$$

A priori, encontram-se a relação entre os sistemas de coordenadas relacionando alguns vetores entre a origem do sistema e o ponto a ser analisado. Para facilitar demonstração da solução do problema direto, toma-se a projeção do ponto P entre plano XY e o eixo Z , formando um plano médio como exemplifica Fig. 2.2 [UFRGS, 2008; HOFMANN-WELLENHOF, 2006].

Figura 2.2: Representação da projeção



Fonte: [HOFMANN-WELLENHOF, 2006].

Sendo \vec{X} e \vec{x} os vetores que formados pela origem até o ponto P e \vec{n} o vetor ortonomal ao elipsoide no ponto Q , projeção do ponto P . O primeiro vetor representa as coordenadas do ponto externo ao elipsoide, descrito por:

$$\vec{X} = [X, Y, Z] \quad (2.9)$$

Já o segundo, representa a localização do ponto Q , denotado por:

$$\vec{x} = [x, y, z] \quad (2.10)$$

Já o \vec{n} , é o vetor gradiente da equação do elipsoide que já está normalizado e aponta na direção de P é escrito por:

$$\vec{n} = [\cos(\varphi)\cos(\lambda), \cos(\varphi)\text{sen}(\lambda), \text{sen}(\varphi)] \quad (2.11)$$

Como mostra a Fig 2.2, as coordenadas do ponto P podem ser obtidas fazendo a seguinte soma vetorial:

$$\vec{X} = \vec{x} + h\vec{n} \quad (2.12)$$

Onde h é a do ponto P em relação ao elipsoide. Então, as coordenadas X, Y e Z são escritas dessa forma:

$$\begin{aligned} X &= x + h\cos(\varphi)\cos(\lambda) \\ Y &= y + h\cos(\varphi)\text{sen}(\lambda) \\ Z &= z + h\text{sen}(\varphi) \end{aligned} \quad (2.13)$$

Utilizando as relações apresentadas na Eqs.2.8 nas relações da Eqs. 2.13, obtêm:

$$\begin{aligned} X &= (N + h)\cos(\varphi)\cos(\lambda) \\ Y &= (N + h)\cos(\varphi)\sen(\lambda) \\ Z &= \left(\frac{b^2}{a^2}N + h\right)\sen(\varphi) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Mas pode-se escrever:

$$\frac{b^2}{a^2} = 1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \quad (2.15)$$

Logo:

$$Z = \left(\frac{b^2}{a^2}N + h\right)\sen(\varphi) = \left[\left(1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2}\right)N + h\right]\sen(\varphi) \quad (2.16)$$

Utilizando a Eq. 2.3, chega-se na expressão apresentada em [MENZORI, 2017]:

$$Z = [(1 - e^2)N + h]\sen(\varphi) \quad (2.17)$$

Para simplificar ainda mais essa relação, basta notar que:

$$\frac{N'}{N} = 1 - e^2 \quad (2.18)$$

Substituindo a Eq. 2.18 em Eq. 2.17, obtêm a fórmula com utilizando a pequena normal:

$$Z = (N' + h)\sen(\varphi) \quad (2.19)$$

As transformações de coordenadas do problema direto obtidas, podem ainda ser expressas pela seguinte matriz [HOFMANN-WELLENHOF, 2008; MENZORI, 2017]:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (N + h)\sen(\varphi)\cos(\lambda) \\ (N + h)\sen(\varphi)\sen(\lambda) \\ (N' + h)\sen(\varphi) \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

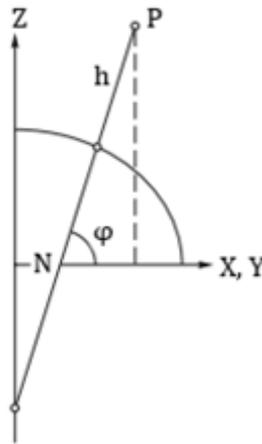
2.3 O problema inverso

O problema inverso consiste em encontrar transformações do sistema cartesiano, cujas coordenadas são conhecidas, para o sistema elipsoidal, cujas coordenadas deseja-se determinar. No entanto, encontrar a solução desse problema é um tanto quanto complicada, devido a não linearidade da transformação do problema inverso, que torna a solução analítica impossível. Desta forma, buscam-se soluções numéricas, iterativas e aproximações, como as que serão apresentadas nos métodos a seguir.

2.3.1 Método Iterativo Hofmann-Wellenhof

Em diversas problemas aeroespaciais, como por exemplo, os de navegação ou monitoramento de satélites, a transformação inversa é muito mais interessante, uma vez que as coordenadas cartesianas são usualmente conhecidas. Normalmente, esse problema pode ser resolvido por uma solução iterativa ou por uma aproximação adequada [HOFMANN-WELLENHOF, 2008].

Figura 2.3: Raio de curvatura na vertical principal.



Fonte:[HOFMANN-WELLENHOF, 2008] [modificado].

Para simplificar o problema, analisar o contexto bidimensional ao invés do tridimensional, facilitando na leitura das imagens e da construção da solução ajudam o processo. Suponha um plano meridiano (vertical principal) e projete a Grande Normal mais a altura h sobre o mesmo. Pode-se fazer isso, desde que seja introduzida uma quantidade p , um eixo resultante da soma quadrática dos eixos X e Y expressa por [HOFMANN-WELLENHOF, 2008]:

$$p = \sqrt{X^2 + Y^2} \quad (2.21)$$

Substituindo X e Y da Eqs. 2.20, obtém-se:

$$p = (N + h)\cos(\varphi) \quad (2.22)$$

Reformulando algebricamente a Eq. 2.22, obtemos a relação da altura:

$$h = \frac{p}{\cos(\varphi)} - N \quad (2.23)$$

Substituindo a Eq. 2.23 na 2.17, têm-se que:

$$Z = \left[N(1 - e^2) + \left(\frac{p}{\cos(\varphi)} - N \right) \right] \text{sen}(\varphi) \quad (2.24)$$

Reescrevendo a Eq. 2.24:

$$Z = (N + h) \left(1 - \frac{Ne^2}{N + h} \right) \text{sen}(\varphi) \quad (2.25)$$

Dividindo a Eq. 2.25 pela quantidade 2.21:

$$\frac{Z}{p} = \frac{(N + h) \left(1 - \frac{Ne^2}{N+h} \right) \text{sen}(\varphi)}{(N + h)\text{cos}(\varphi)} = \left(1 - \frac{Ne^2}{N + h} \right) \text{tg}(\varphi) \quad (2.26)$$

Reescrevendo a Eq. 2.26, chega-se na seguinte relação que descreve a latitude mostrada por [HOFMANN-WELLENHOF, 2008]:

$$\text{tg}(\varphi) = \frac{Z}{p} \left(1 - \frac{Ne^2}{N + h} \right)^{-1} \quad (2.27)$$

Para obter longitude, basta dividir o valor de Y pelo de X da Eq. 2.20:

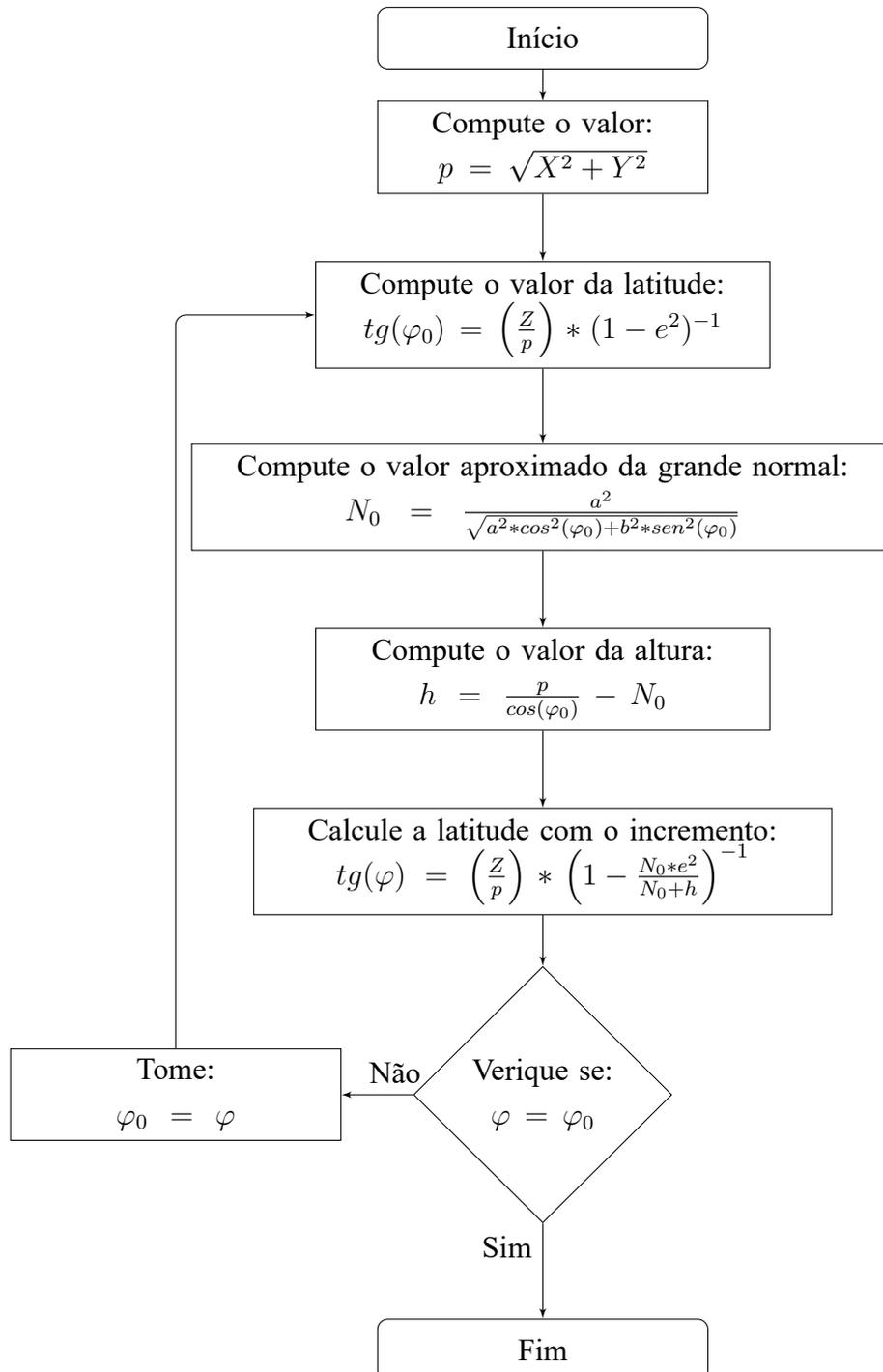
$$\frac{Y}{X} = \frac{(N + h)\text{sen}(\varphi)\text{sen}(\lambda)}{(N + h)\text{sen}(\varphi)\text{cos}(\lambda)} \quad (2.28)$$

Reformulando a Eq. 2.28, a relação para λ é definida por:

$$\text{tg}(\lambda) = \frac{Y}{X} \quad (2.29)$$

A longitude pode ser calculada diretamente através da Eq. 2.29, porém a altura e a latitude determinadas pelas Eqs. 2.23 e 2.27, respectivamente, dependem uma da outra. Então, a solução desse problema é obtida por meio de um método iterativo mostrado no fluxograma [HOFMANN-WELLENHOF, 2008]:

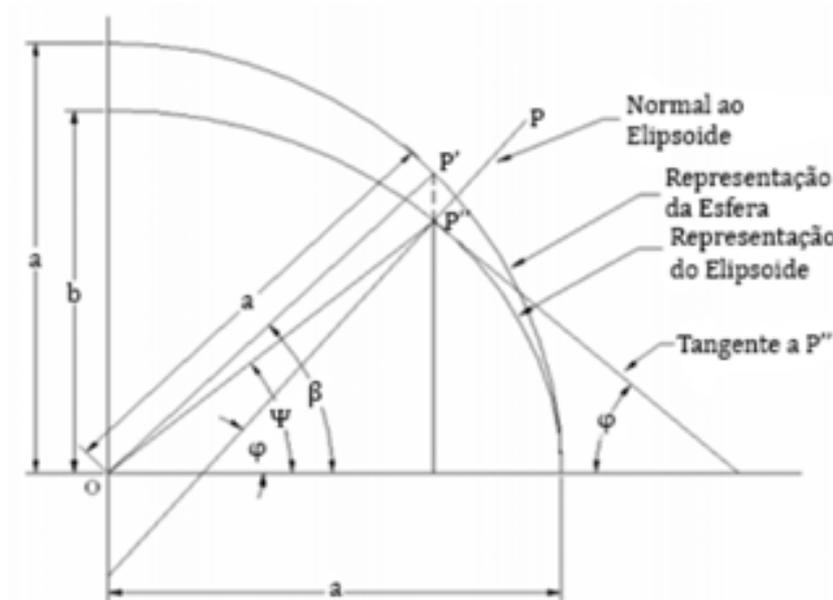
Figura 2.4: Fluxograma Método Iterativo Hofmann-Wellenhof



2.3.2 Método Direto Hofmann-Wellenhof(Bowring e Rapp)

Muitos outros métodos já foram desenvolvidos para resolver o problema da transformação inversa. Um exemplo disso, sem utilizar um método iterativo, é a aproximação do problema em um plano meridiano, utilizando um ângulo médio [BURTCH, 2006; HOFMANN-WELLENHOF, 2008; RAPP, 1974].

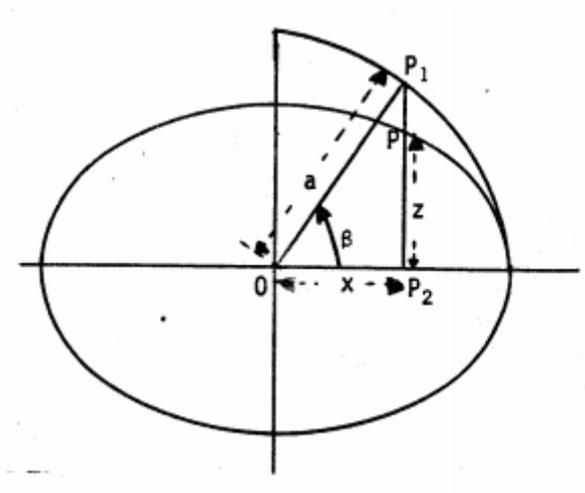
Figura 2.5: Plano Meridiano.



Fonte:[BURTCH, 2006][Modificado].

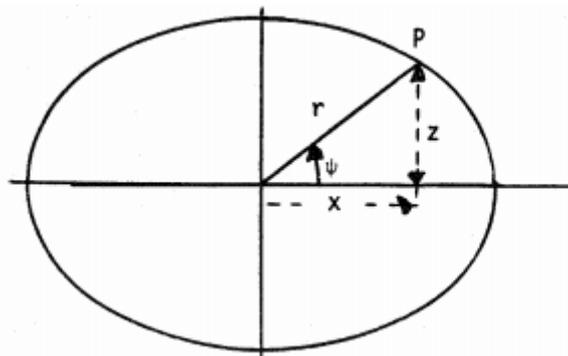
Para encontrar uma solução aproximada para o problema inverso, é definida uma esfera de raio a , tangente ao elipsoide de revolução ao longo do Equador. A solução será encontrada quando se toma o plano em que $tg(\lambda) = \frac{Y}{X}$, isto é, retomando a quantidade p da Eq. 2.22 e introduzindo duas grandezas: β e ψ . A primeira, denominada latitude reduzida, é o ângulo entre o plano do equador e o raio da circunferência que passa pelo ponto P' , projeção perpendicular ao Equador do ponto P'' sobre a esfera. A segunda, denominada latitude geocêntrica, é o ângulo entre um segmento que liga o centro da circunferência e o ponto P' [RAPP, 1974].

Figura 2.6: Latitude reduzida



Fonte: [RAPP, 1974].

Figura 2.7: Latitude Geocêntrica



Fonte: [RAPP, 1974].

Nesta análise, pelas Fig. 2.6 e 2.7, o valor x representa a distância da projeção do ponto no plano onde o λ já foi especificado até a origem do sistema. Já o valor de z é a altura da projeção do ponto sobre a elipse do plano meridiano e o mesmo plano λ . Tanto o valor de z quanto x do plano meridiano podem ser calculados sabendo-se os valores de φ , β e ψ . As relações entre cada ângulo podem ser desenvolvidas ao analisar as Fig. 2.6 e 2.7 [RAPP, 1974].

Analisando a Fig. 2.6 com relação ao elipsoide e a circunferência, obtêm-se as seguintes relações:

$$(\overline{OP_2})^2 + (\overline{P_1P_2})^2 = a^2 \quad (2.30)$$

$$\frac{(\overline{OP_2})^2}{a^2} + \frac{(\overline{P_2P})^2}{b^2} = 1 \quad (2.31)$$

Associando as Eqs. 2.30 e 2.31, têm-se que:

$$(\overline{OP_2})^2 + (\overline{P_2P})^2 \frac{a^2}{b^2} = (\overline{OP_2})^2 + (\overline{P_1P_2}) \quad (2.32)$$

Isolando $\overline{P_2P}$, temos:

$$\overline{P_2P} = \frac{b}{a} \overline{P_2P_1} \quad (2.33)$$

Mas da Fig. 2.6, têm-se que:

$$\overline{P_2P_1} = a \operatorname{sen}(\beta) \quad (2.34)$$

Logo, substituindo a Eq. 2.33 na 2.31, chega-se nas seguintes relações:

$$x = \overline{OP_2} = a \operatorname{cos}(\beta) \quad (2.35)$$

$$z = \overline{P_2P} = b \operatorname{sen}(\beta) \quad (2.36)$$

Analisando a Fig. 2.5, têm-se que:

$$\frac{dz}{dx} = \tan(90 + \varphi) = -\frac{\operatorname{cos}(\varphi)}{\operatorname{sin}(\varphi)} \quad (2.37)$$

Onde $\frac{dz}{dx}$ é o coeficiente angular da reta tangente. Reescrevendo a Eq. 2.31, é obtido seguinte relação:

$$b^2 x^2 + a^2 z^2 = a^2 b^2 \quad (2.38)$$

Tomando o diferencial da Eq. 2.38:

$$b^2 x dx + a^2 z dz = 0 \quad (2.39)$$

Reescrevendo a Eq. 2.39 obtêm a relação:

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 z} = -\frac{\operatorname{cos}(\varphi)}{\operatorname{sen}(\varphi)} \quad (2.40)$$

Reescrevendo a Eq. 2.40, substituindo na Eq. 2.38 e isolando as variáveis de interesse:

$$x = \frac{a^2 \operatorname{cos}(\varphi)}{(a^2 \operatorname{cos}^2(\varphi) \varphi + b^2 \operatorname{sen}^2(\varphi))^{\frac{1}{2}}} = \frac{a \operatorname{cos}(\varphi)}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2(\varphi))^{\frac{1}{2}}} \quad (2.41)$$

$$z = \frac{b^2 \operatorname{sen}(\varphi)}{(a^2 \operatorname{cos}^2(\varphi) \varphi + b^2 \operatorname{sen}^2(\varphi))^{\frac{1}{2}}} = \frac{a(1 - e^2) \operatorname{sen}(\varphi)}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2(\varphi))^{\frac{1}{2}}} \quad (2.42)$$

Adotando-se as seguintes simplificações utilizadas por Rapp (1974):

$$\begin{aligned} W^2 &= 1 - e^2 \operatorname{sen}^2(\varphi) \\ V^2 &= 1 + e'^2 \operatorname{cos}^2(\varphi) \\ w^2 &= 1 - e^2 \operatorname{cos}^2(\beta) \\ v^2 &= 1 + e'^2 \operatorname{sen}^2(\beta) \end{aligned} \quad (2.43)$$

Utilizando as simplificações da Eq. 2.43 dentro das Eq. 2.41 e 2.41, chega-se nas seguintes relações:

$$x = \frac{a \cos(\varphi)}{W} = \frac{c}{V} \cos(\varphi) \quad (2.44)$$

$$z = \frac{a(1 - e^2) \operatorname{sen}(\varphi)}{W} = \frac{c \operatorname{sen}(\varphi)}{V(1 + e^2)} \quad (2.45)$$

Onde c é a diferença entre os comprimentos dos semi-eixos. Analisando a Fig. 2.7, obtêm a igualdade:

$$\tan(\psi) = \frac{z}{x} \quad (2.46)$$

Substituindo as Eqs. 2.35 e 2.36 na 2.46 e em seguida substituir as Eq. 2.44 e 2.45, chega-se nas igualdades:

$$\operatorname{tg}(\psi) = \frac{b}{a} \operatorname{tg}(\beta) = (1 - e^2) \tan(\varphi) \quad (2.47)$$

Isolando z dentro das Eqs. 2.35, 2.36, 2.44 e 2.45 e usando a relação 2.47, encontram-se as seguintes relações [RAPP, 1974]:

$$\operatorname{sen}(\beta) = \frac{\operatorname{sen}(\varphi)}{V} \quad (2.48)$$

$$\cos(\beta) = \frac{\cos(\varphi)}{W} \quad (2.49)$$

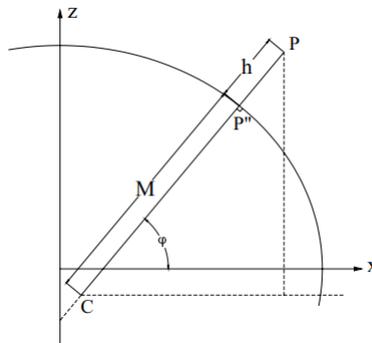
Utilizando-se as Eq. 2.48 e 2.49 e as simplificações da 2.43:

$$\cos(\varphi) = \frac{\cos(\beta)}{v} = (1 - e^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\cos(\beta)}{W} \quad (2.50)$$

$$\operatorname{sen}(\varphi) = \frac{\operatorname{sen}(\beta)}{W} = (1 + e^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{sen}(\beta)}{V} \quad (2.51)$$

Agora, precisa-se definir uma relação entre o ângulos β , φ e as coordenadas do ponto P , para isso, toma-se a Fig. 2.8 onde C é o centro de curvatura do elipsoide, M é o raio de curvatura do meridiano, P é o ponto a ser analisado e P'' é a projeção de P sobre o plano meridiano.

Figura 2.8: Plano meridiano mostrando a relação entre o centro de curvatura



Fonte: [BURTCH, 2006] [Modificado].

Analisando a figura anterior, percebe que as coordenadas do centro de curvatura podem ser escritas como:

$$X_C = X_{P''} - M \cos(\varphi) \quad (2.52)$$

$$Z_C = Z_{P''} - M \sin(\varphi) \quad (2.53)$$

Sendo M definido por [BURTCH, 2006]:

$$M = \frac{a(1 - e^2)}{W^3} \quad (2.54)$$

Percebe-se que os pontos $X_{P''}$ e $Z_{P''}$ da Fig. 2.8 são os mesmos valores de x e y das Fig. 2.6 e 2.7. Logo, substituindo as Eqs. 2.44 e 2.45 junto com o valor de M nas Eqs. 2.52 e 2.53:

$$X_C = \frac{ae^2 \cos^3(\varphi)}{W^3} \quad (2.55)$$

$$Z_C = \frac{a(1 - e^2) \sin(\varphi)}{W} \left(1 - \frac{1}{W^2}\right) \quad (2.56)$$

Usando a relação 2.49 na 2.55:

$$X_C = ae^2 \cos^3(\beta) \quad (2.57)$$

Substituindo o valor de W^2 na Eq. 2.56 e fazendo algumas simplificações de forma a aparecer o e' , chega-se na expressão [BURTCH, 2006]:

$$Z_C = -be'^2 \sin^3(\beta) \quad (2.58)$$

Para encontrar o valor de φ , basta então tomar:

$$\text{tg}(\varphi) = \frac{Z_P - Z_C}{X_P - X_C} \quad (2.59)$$

Substituindo os valores de Z_C e X_C e lembrando que X_P e Z_P são grandezas criadas no plano meridiano, ou seja:

$$\begin{aligned} X_P &= p \\ Z_P &= Z \end{aligned} \quad (2.60)$$

Têm-se o resultado descrito por Hofmann-Wellenhoff, Rapp e Burtch:

$$\text{tg}(\varphi) = \frac{Z + be'^2 \sin^3(\beta)}{p - ae^2 \cos^3(\beta)} \quad (2.61)$$

Onde β pode ser calculado usando a seguinte relação [BURTCH, 2006]:

$$\text{tg}(\beta) = \left(\frac{Z}{p}\right) \left(\frac{a}{b}\right) \quad (2.62)$$

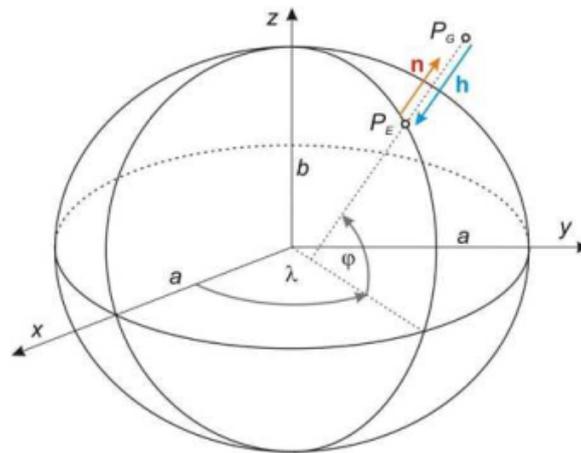
2.3.3 Método Iterativo Ligas-Banasik

Encontrar uma transformação entre coordenadas cartesianas e elipsoidais é uma das tarefas mais importantes na área aeroespacial. Essa relação é utilizada tanto para descrever objetos tanto em terra quando objetos viajando pelo espaço [LIGAS, 2011].

O método é dividido em duas etapas principais, a primeira: criação e resolução do sistema de equações para encontrar a projeção e a segunda: cálculo da latitude e altura a partir do ponto projetado. [LIGAS, 2011].

O primeiro baseia-se na criação de dois vetores equipolentes e em encontrar um sistema de equações envolvendo ambos. Resolvendo esse sistema de equações utilizando o método de Newton-Raphson, pode-se encontrar algumas relações que possibilitam calcular o valor da altura e da latitude.

Figura 2.9: Solução baseada nos vetores colineares \vec{n} e \vec{h}



Fonte: [LIGAS, 2011].

Para encontrar os vetores \vec{n} e \vec{h} , é necessário calcular e definir o ponto P_E , a projeção normal de P_G no elipsoide. Então, define-se os pontos como:

$$\begin{aligned} P_G &= (x_G, y_G, z_G) \\ P_E &= (x_E, y_E, z_E) \end{aligned} \quad (2.63)$$

Definido os pontos, ao analisar a Fig. 2.9 têm-se que \vec{h} , vetor normal ao elipsoide e de comprimento igual a altura h , pode ser definido por:

$$\vec{h} = [h_1, h_2, h_3] = [x_E - x_G, y_E - y_G, z_E - z_G] \quad (2.64)$$

Para definir o \vec{n} , precisa-se encontrar um vetor normal ao elipsoide no ponto P_E , portanto basta-se aplicar o operador gradiente sobre uma função F cuja curva de nível descreva a

equação do elipsoide em P_E . Sendo F definido por [LIGAS, 2011; STEWART, 2006]:

$$F(x) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \quad (2.65)$$

Tomando o gradiente de F no ponto P_E , obtêm-se o vetor \vec{n} :

$$\vec{n} = [n_1, n_2, n_3] = \nabla F(P_E) = 2\left[\frac{x^E}{a^2}, \frac{y^E}{a^2}, \frac{z^E}{b^2}\right] \quad (2.66)$$

Com os dois vetores definidos, utilizando conceitos de geometria analítica, como \vec{h} e \vec{n} são equipolentes, existe um k , constante real, tal que:

$$k = \frac{h_1}{n_1} = \frac{h_2}{n_2} = \frac{h_3}{n_3} \quad (2.67)$$

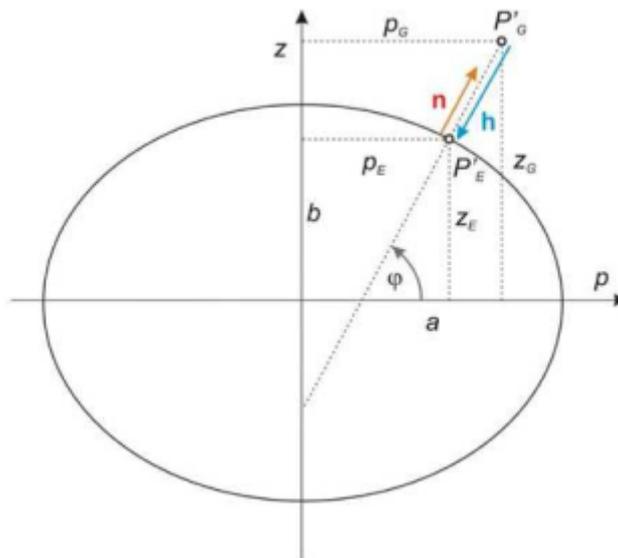
Reescrevendo a Eq. 2.67 utilizando as Eq. 2.65 e 2.66, o valor de k pode ser descrito de outra forma:

$$k = \frac{x^E - x^G}{Ax^E} = \frac{y^E - y^G}{Ay^E} = \frac{z^E - z^G}{Bz^E} \quad (2.68)$$

Onde $A = a^{-2}$ e $B = b^{-2}$. Para encontrar as coordenadas elipsoidais por esse método, é essencial que seja feita uma simplificação do problema, fazendo a projeção do ponto analisado no plano em que [BURTCH, 2006; LIGAS, 2011]:

$$tg(\lambda) = \frac{y^G}{x^G} \quad (2.69)$$

Figura 2.10: Simplificação do elipsoide no plano meridiano



Fonte: [LIGAS, 2011].

E definindo os pontos projetados como sendo [LIGAS, 2011]:

$$\begin{aligned} P'g &= (pg, zg) \\ P'e &= (pe, ze) \end{aligned} \quad (2.70)$$

Sendo $pe = \sqrt{xE^2 + yE^2}$ e $pg = \sqrt{xG^2 + yG^2}$, as projeções resultantes no plano simplificado. Mas da definição do elipsoide em coordenada esférica da Eq. 2.8, têm-se que:

$$\begin{cases} pe = N \cos(\varphi) \\ ze = \frac{b^2}{a^2} N \sin(\varphi) \end{cases} \quad (2.71)$$

Dessa forma, analisando a Fig. 2.10 e utilizando as Eq. 2.70 e 2.71, pode-se escrever os vetores \vec{n} e \vec{h} nessa projeção por:

$$\vec{n} = \frac{2}{K} [Gpe, Hze] \quad (2.72)$$

$$\vec{h} = [pe - pg, ze - zg] \quad (2.73)$$

Onde $G = \frac{b}{a}$, $H = \frac{a}{b}$ e $K = ab$. Como os vetores no espaço tridimensional são equipolentes, a projeção deles também é, tornando a seguinte relação verdadeira:

$$k = \frac{pe - pg}{Gpe} = \frac{ze - zg}{Hze} \quad (2.74)$$

Reescrevendo a Eq. 2.74:

$$Hze(pe - pg) = Gpe(ze - zg) \quad (2.75)$$

Da mesma forma que no caso tridimensional, o ponto $P'e$ necessariamente precisa pertencer à elipse do plano meridiano, logo deve satisfazer a equação da elipse:

$$\frac{pe^2}{a^2} + \frac{ze^2}{b^2} = 1 \quad (2.76)$$

Reescrevendo a Eq. 2.76 utilizando as quantidades G , H e K :

$$Gpe^2 + Hze^2 = K \quad (2.77)$$

Utilizando as relações 2.75 e 2.77, é possível criar um sistema de equações da seguinte forma [LIGAS, 2011]:

$$\begin{cases} f1(pe, ze) = (pe - pg)Hze - (ze - zg)Gpe = 0 \\ f2(pe, ze) = Gpe^2 + Hze^2 - K = 0 \end{cases} \quad (2.78)$$

O resultado apresentado por Ligas-Banasik consiste em resolver esse sistema de equações 2.78 utilizando o método de Newton-Raphson. Esse método, também conhecido

como método de Newton, é um método numérico para estimar raízes de funções que consiste em, partindo de um valor inicial, aproximar o valor das raízes por iterações sucessivas [STEWART, 2006]. A equação para aproximar x_{n+1} , segundo o Método de Newton-Raphson, é obtida por [STEWART, 2006]:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (2.79)$$

Esse sendo o método para uma dimensão. Para ele ser utilizado dentro de uma sistema de equações com funções de 2 ou mais variáveis, é necessário utilizar a forma vetorial do método, isto é [LIGAS, 2011; STEWART, 2006]:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{x}_n) \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) \quad (2.80)$$

Onde \mathbf{x} é o vetor que representa a solução do sistema, \mathbf{f} é o vetor que agrupa as funções f_1 e f_2 ; e \mathbf{J} é o Jacobiano das funções f_1 e f_2 . Para adaptar o método ao problema estudado, é necessário calcular o jacobiano de acordo com as variáveis a serem descobertas, no caso, pe e ze . O Jacobiano no caso então é dado por:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial pe} & \frac{\partial f_1}{\partial ze} \\ \frac{\partial f_2}{\partial pe} & \frac{\partial f_2}{\partial ze} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Hze - (ze - zg)G & (pe - pg)H - Gpe \\ 2Gpe & 2Hze \end{bmatrix} \quad (2.81)$$

Além do Jacobiano, é necessário ajustar o método ao problema tomando o vetor coluna \mathbf{x} como:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} pe \\ ze \end{bmatrix} \quad (2.82)$$

E o vetor coluna \mathbf{f} como:

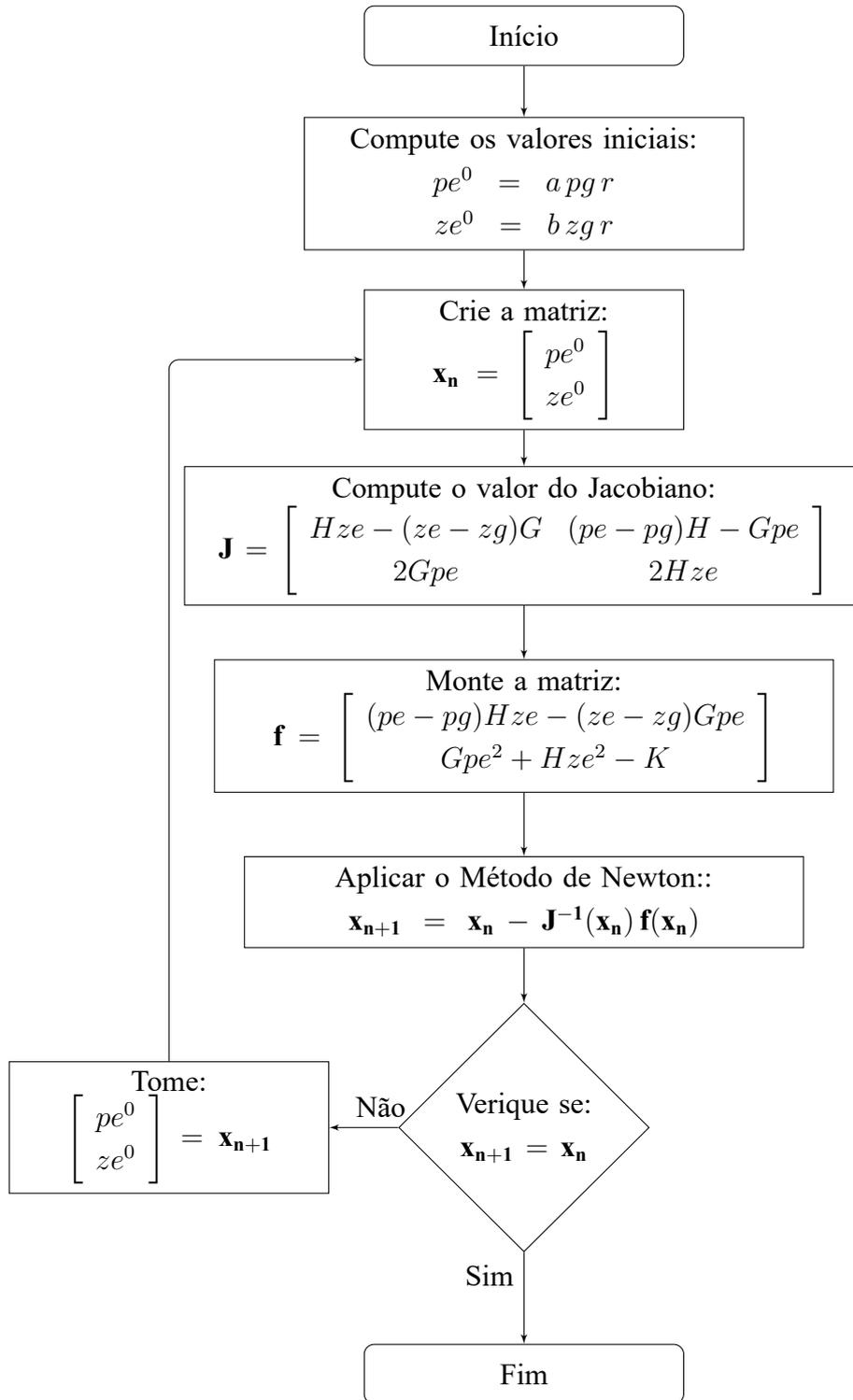
$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (pe - pg)Hze - (ze - zg)Gpe \\ Gpe^2 + Hze^2 - K \end{bmatrix} \quad (2.83)$$

Para realizar o método iterativo e encontrar os valores de pe e ze , será introduzido a simplificação:

$$r = \frac{1}{\sqrt{p^2g + z^2g}} \quad (2.84)$$

Para obter uma solução próxima do valor real pelo método de Ligas (2011) deve-se seguir o seguinte procedimento descrito no fluxograma:

Figura 2.11: Fluxograma Método Iterativo Ligas-Banasik



Após o término do algoritmo, é obtido os valores de pe e ze do vetor \mathbf{x} . Utilizando a Eq. 2.71, é obtido a seguinte relação para a latitude φ [LIGAS, 2011]:

$$tg(\varphi) = \frac{\text{sen}(\varphi)}{\text{cos}(\varphi)} = H^2 \frac{ze}{pe} \quad (2.85)$$

Já a distância h pode ser calculada facilmente pela distância entre os pontos $P'g$ e $P'e$ da Fig. 2.10:

$$h = \sqrt{(pe - pg)^2 + (ze - zg)^2} \quad (2.86)$$

No caso, a altura h ainda pode ser negativa então temos a seguinte condição:

$$(pg + |zg|) < (pe + |ze|) \quad (2.87)$$

Se a inequação 2.87 for verdadeira, então h é negativo.

3 Materiais e Métodos Utilizados

Existem diversas formas para poder comparar a eficácia e o custo computacional entre as transformações de coordenadas. O primeiro método de comparação utilizado nesse trabalho é o mesmo apresentado por Ligas-Banasik que consiste em, criar pontos no primeiro quadrante da esfera celeste em coordenadas elipsoidais (h, φ, λ) e em seguida calcular a transformação direta. Após esse cálculo, realizar a transformação inversa, esperando-se que seja obtido o mesmo ponto inicial. A segunda análise consiste em analisar os erros das alturas obtidas pelos métodos e algoritmos estudados neste relatório de IC. Tal análise é necessária, para saber como varia o erro de cada algoritmo com relação a altura, variável que apresentou maior erro dentre os métodos analisados por Ligas (2011) e no presente relatório.

Os algoritmos utilizados para efetuar as transformações bem como a comparação dos métodos foram todos escritos em MATLAB 2017a e todos os cálculos presentes neste trabalho foram feitos utilizando um sistema operacional Windows 10 Home, no HP Pavilion x360 11-n025br notebook com processador Intel®Pentium®N3520 com 500 GB RAM.

No caso dos resultados obtidos na literatura, todos os algoritmos foram feitos em Borland Delphi 7, utilizando um sistema operacional Windows XP Professional em um HP Pavilion AMD Athlon(tm) 64X2 Dual – Core Processor TK – 55, 1.80 GHz, 960 MB RAM.

3.1 Primeira análise

Na primeira análise, são gerados pontos na esfera celeste em seções de acordo com a altura a ser analisada, de forma que aplicando a transformação direta e em seguida a inversa, obtenha-se o mesmo resultado gerado anteriormente, quanto menor for a diferença entre o ponto inicial e o final com relação a altura h e φ , melhor o método.

O processo de análise descrito por Ligas (2011) e utilizado nesse relatório consiste em efetuar os cálculos mantendo o λ constante e igual ao utilizado na referência (45°). Com relação a altura h , os pontos analisados são divididos em 3 intervalos, da seguinte forma:

- (a) de -10km a 10km variando de 0,5km
- (b) de 20km a 1000km variando de 10km
- (c) de 1000km a 36000km variando de 100km

Com relação a latitude φ , avalia-se o intervalo de 0° a 90° com passo de $0,05^\circ$. Isto significa que para cada valor de altura h , existem 1801 coordenadas de latitude a serem comparadas. Portanto, mescla-se os intervalos entre si, isto é, criam-se ternas coordenadas

do tipo (h, φ, λ) , com λ constante. Fazendo a união, são criados e analisados ao todo 73841 pontos no teste (a), 178299 pontos no teste (b) e 632151 pontos no teste (c).

O primeiro procedimento de análise entre os métodos de transformação foi feito da seguinte forma:

- criar os pontos em coordenadas elipsoidais (h, φ, λ) , utilizando $\lambda = 45^\circ$;
- Fazer a transformação direta dos pontos e encontrar os valores em coordenadas cartesianas (X, Y, Z) ;
- Realizar a transformação inversa dos pontos cartesianos e encontrar os valores em coordenadas elipsoidais;
- Comparar o resultado final com os pontos criados no começo;
- Calcular o erro entre os pontos utilizando a seguinte fórmula:

$$\text{erro} = \text{valor absoluto}(x_f - x_i).;$$

- Utilizar o maior erro encontrado como parâmetro para comparar a eficácia do método
- Calcular o tempo gasto desde a criação da primeira trinca de pontos até a conversão final e utilizar o maior valor encontrado como o parâmetro de custo.

Nesta primeira análise, Ligas-Banasik (2011) também faz menção a outros métodos de resolução do problema inverso. Os resultados obtidos por eles também serão citados e analisados, baseando-se no número de iterações utilizada em cada método no trabalho deles, enquanto a análise feita nesse relatório parte de um número não específico de iterações e sim de um condicional de igualdade, prezando pelo resultado mais preciso possível dentro do método analisado. Para isso, é necessário fazer uma menção aos métodos, equações e seus palpites iniciais [LIGAS, 2011]:

- Heiskanen and Moritz (1967):**

$$\text{Equações a serem resolvidas: } \begin{cases} h = \frac{pg}{\cos(\varphi)} - N \\ tg(\varphi) = \frac{(N+h)zg}{\left(\frac{b^2}{a^2}N+h\right)pg} \end{cases}$$

$$\text{Palpite inicial: } tg(\varphi_0) = \frac{a^2 zg}{b^2 pg}$$

Método de resolução: iteração com ponto fixo;

- Lin and Wang (1995):**

$$\text{Equação a ser resolvida: } f(m) = \frac{pg^2}{\left(a + \frac{2m}{a}\right)^2} + \frac{zg^2}{\left(b + \frac{2m}{b}\right)^2} - 1 = 0$$

$$\text{Palpite inicial: } m_0 = \frac{ab(a^2 zg^2 + b^2 pg^2)^{\frac{3}{2}} - a^2 b^2 (a^2 zg^2 + b^2 pg^2)}{2(a^4 zg^2 + b^4 pg^2)}$$

Método de resolução: Newton-Raphson

Obtenção de φ : $tg(\varphi) = \frac{a^2 ze}{b^2 pe}$

Obtenção de h : $h = \sqrt{(pe - pg)^2 + (ze - zg)^2}$

Sendo que:
$$\begin{cases} pe = \frac{pg}{1 + \frac{2m}{a^2}} \\ ze = \frac{zg}{1 + \frac{2m}{b^2}} \end{cases}$$

c) **Fukushima (1999):**

Equação a ser resolvida: $pg t^4 + u t^3 + v t - pg = 0$

Palpite inicial: $t = \frac{pg-c+z'}{pg-c+2z'}$

Método de resolução: Newton-Raphson

Obtenção de φ : $tg(\varphi) = \frac{a(1-t^2)}{2bt}$

Obtenção de h : $h = \frac{2\frac{b}{a}pgt + zg(1-t^2) - b(1+t^2)}{\sqrt{(1+t^2) - 4e^2t^2}}$

Sendo que:
$$\begin{cases} t = tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right) \\ u = 2(z' - c) \\ v = 2(z' + c) \\ c = ae^2 \\ z' = \frac{b}{a}zg \end{cases}$$

d) **Borkowski (1989):**

Equação a ser resolvida: $2sen(\beta - t) - g sen(2\beta) = 0$

Palpite inicial: $tan(\beta_0) = \frac{a zg}{b pg}$

Método de resolução: Newton-Raphson

Obtenção de φ : $tg(\varphi) = \frac{a}{b}tg(\beta)$

Obtenção de h : $h = (pg - a cos(\beta))cos(\varphi) + (zg - b sen(\beta))sen(\varphi)$

Sendo que:
$$\begin{cases} tg(t) = \frac{b zg}{a pg} \\ g = \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{(a pg)^2 + (b zg)^2}} \end{cases}$$

e) **Fukushima (2006):**

Equação a ser resolvida: $g(T) = PT - Z - \frac{ET}{\sqrt{1+T^2}}$

Palpite inicial: $T_0 = \frac{|zg|}{e_c pg} = \frac{Z}{e_c^2 P}$

Método de resolução: Halley iteração

Obtenção de φ : $\varphi = sgn(zg)tg^{-1}\left(\frac{T}{e_c}\right)$

Obtenção de h : $h = \frac{e_c pg + |zg|T - b\sqrt{1+T^2}}{\sqrt{e_c^2 + T^2}}$

Sendo que:
$$\begin{cases} T = tg(\beta) \\ P = \frac{pg}{a} \\ Z = \frac{e_c |zg|}{a} \\ E = e^2 \\ e_c = \sqrt{1 - e^2} \end{cases}$$

f) **Fukushima e Bowring (1999):**

Equação a ser resolvida: $T = \frac{z' + cS^3}{pg - cC^3}$

Palpite inicial: $T_0 = \frac{zg}{e' pg}$

Método de resolução: Newton-Raphson

Obtenção de φ : $tg(\varphi) = \frac{T}{e'}$

Obtenção de h : $h = \begin{cases} \frac{\sqrt{(1-e^2)+T^2}}{e'} \left(pg - \frac{a}{\sqrt{1+T^2}} \right) & , se \ pg > zg \\ \sqrt{(1-e^2)+T^2} \left(\frac{zg}{T} - \frac{b}{\sqrt{1+T^2}} \right) & , se \ \leq zg \end{cases}$

Sendo que: $\begin{cases} C = \frac{1}{\sqrt{1+T^2}} \\ S = CT \\ e' = \sqrt{1-e^2} \\ c = ae^2 \\ z' = e' zg \end{cases}$

3.2 Segunda análise

Para realizar a segunda análise, com respeito aos erros da altura h , será utilizado os mesmos intervalos discutidos na primeira análise. Para que seja feita uma análise mais abrangente, será feito os cálculos utilizando o mesmo λ anterior mas fixando cinco valores de latitude φ e comparando como os erros se alteram para cada altura em cada método. Para isso, utilizará os mesmos intervalos da comparação anterior, porém serão utilizados para efeito de cálculo os seguintes ângulos de φ : 0° , 15° , 45° , 75° e 90° . Dessa forma, pode-se fazer a análise de erro de uma forma mais abrangente ao longo da latitude. Serão então analisados 41 pontos no teste (a), 99 pontos no teste (b) e 351 pontos no teste(c). O segundo procedimento de análise entre os métodos de transformação foi feito da seguinte forma:

- Criar os pontos em coordenadas elipsoidais (h, φ, λ) , utilizando $\lambda = 45^\circ$ e ficando um $\varphi_i = c_i$, sendo $c_i = 0^\circ, 15^\circ, 45^\circ, 75^\circ, 90^\circ$ para $i = 1, 2, 3, 4, 5$;
- Fazer a transformação direta dos pontos e encontrar os valores em coordenadas cartesianas (X, Y, Z) ;
- Realizar a transformação inversa dos pontos cartesianos e encontrar os valores em coordenadas elipsoidais;
- Comparar o resultado final com os pontos criados no começo;
- Calcular o erro entre os pontos utilizando a seguinte fórmula:

$$erro = \text{valor absoluto}(h_f - h_i).;$$

- Criar um gráfico de Erro x h para cada valor de φ analisado.

4 Análises e Resultados

Para análise de resultados, serão utilizados tanto os valores obtidos na literatura por Ligas-Banasik (2011) quanto os obtidos neste relatório, visando fazer uma análise comparativa entre os métodos mencionados na literatura e os métodos estudados.

Na primeira parte, os dados são expressos Ligas-Banasik em escala logarítmica na base 10. Tal método de demonstrar os resultados é utilizado pois visa mostrar a ordem do erro, isto é, qual casa decimal aparece a variação do valor real para o valor encontrado. Sendo assim, quanto menor forem os erros, menor será o valor encontrado. Nos métodos mencionados na literatura, serão mostrados os resultados obtidos por Ligas-Banasik (2011) e feito uma análise rápida sobre os resultados encontrados em cada iteração. Já nos resultados dos métodos estudados neste relatório, será feita a análise e comparação entre os três métodos e com os resultados obtidos na literatura.

Na segunda parte, os erros encontrados serão mostrados em gráficos de forma a facilitar a análise e compreensão. Devido a abrangência de pontos estudados pelos três grupos, essa segunda foi feita utilizando apenas cinco valores de latitude, buscando uma abrangência de resultados que pudessem trazer conclusões pertinentes ao projeto.

4.1 Resultados da primeira análise

Os erros expressos nessa parte da discussão de resultados não apresentam unidade pois está sendo avaliado somente a ordem de grandeza do erro. De acordo com Ligas-Banasik (2011), os resultados do grupo (a) com relação aos métodos analisados por eles foram:

Tabela 4.1: Comparação entre os métodos da literatura no grupo (a)

Método		Nº de iterações				
		1	2	3	4	5
Heiskanen e Moritz (1967)	Tempo de CPU	(0.72)	(1.05)	(1.39)	(1.73)	
	Erro max. em φ	-5.88	-8.15	-10.39	-12.61	
	Erro max. em h	-1.17	-3.34	-5.51	-7.68	
Borkowski (1989)	Tempo de CPU	(1.91)				
	Erro max. em φ	-11.09				
	Erro max. em h	-14.88				
Liu e Wang (1995)	Tempo de CPU	(1.13)				
	Erro max. em φ	-14.88				
	Erro max. em h	-14.75				
Fukushima (1999)	Tempo de CPU	(0.85)	(1.06)	(1.28)	(1.51)	(1.72)
	Erro max. em φ	1.20	-0.02	-2.35	-6.91	-14.88
	Erro max. em h	2.39	-0.05	-4.70	-13.79	-14.72
Fukushima (2006)	Tempo de CPU	(1.00)				
	Erro max. em φ	-14.88				
	Erro max. em h	-14.70				
Fukushima e Bowring (1999)	Tempo de CPU	(0.83)				
	Erro max. em φ	-11.09				
	Erro max. em h	-9.05				
Ligas e Banasik (2011)	Tempo de CPU	(1.04)	(1.43)			
	Erro max. em φ	-6.09	-12.71			
	Erro max. em h	-2.04	-8.19			

Fonte: [LIGAS, 2011][Modificado].

Como mostra a Tab. 4.1, os resultados apresentados na literatura apresentam grande precisão em sua maioria, sendo os métodos mais precisos o Borkowski (1989), Liu e Wang (1995) e Fukushima (2006,1999). Sendo que alguns precisaram de mais de uma iteração para atingir valores aceitáveis de erro. No caso de Liu e Wang, método mais preciso, fazendo a conversão do erro para valores em metros e graus, os erros em latitude chegaram a $1.318 \cdot 10^{-15}^\circ$ e erro de altura de $1.778 \cdot 10^{-15}m$. Com relação ao custo computacional de cada método em conjunto com a precisão, o melhor método seria o Fukushima (2006), pois além de apresentar quase o mesmo resultado de precisão, tem uma diferença de 0.13 s de tempo de execução de código em relação ao outro método quase tão preciso quanto Liw e Wang(1995). Em relação aos métodos analisados e algoritmo criado nesta IC, os resultados são mostrados nas Tab. 4.2 e 4.3:

Tabela 4.2: Comparação entre os métodos de transformações utilizando os pontos do grupo (a)

Método	Erro $\log_{10} \varphi$	Erro $\log_{10} h$	Tempo CPU (s)
Ligas-Banasik Literatura	-12.71	-8.19	-
Hofmann-Wellenhof Iterativo	-13.02	-8.18	0.161
Hofmann-Wellenhof Direto	-11.09	-5.97	0.182
Ligas-Banasik Iterativo	-13.55	-8.50	0.121

Tabela 4.3: Erros entre os métodos de transformações utilizando os pontos do grupo (a)

Método	Erro φ ($^{\circ}$)	Erro h (m)
Ligas-Banasik Literatura	$1.94 \cdot 10^{-13}$	$6.45 \cdot 10^{-9}$
Hofmann-Wellenhof Iterativo	$9.54 \cdot 10^{-14}$	$7.58 \cdot 10^{-9}$
Hofmann-Wellenhof Direto	$8.13 \cdot 10^{-12}$	$1.07 \cdot 10^{-6}$
Ligas-Banasik Iterativo	$2.81 \cdot 10^{-14}$	$3.16 \cdot 10^{-9}$

Analisando os resultados das Tab. 4.2 e 4.3, percebe-se ótimos resultados dos algoritmos criados utilizando os métodos apresentados. Os erros apresentados nas Tab. 4.2 mostram que os resultados das transformações neste caso são boas, apresentando erros na ordem de grandeza de 10^{-12} graus para a latitude e $10^{-6}m$ para a altura. Como percebe-se, os maiores erros encontrados estão no método direto, feito por aproximação. Ainda assim, mesmo com os maiores erros, o método Hofmann-Wellenhof Direto ainda é uma boa opção para se trabalhar dentro da região (a). Como os custos computacionais estão próximos, a definição do melhor método tem valor puramente de precisão de resultado. Analisando somente os algoritmos feitos nesta IC, define-se como o melhor método para a região (a) o método Ligas-Banasik Iterativo. Tanto pela precisão quanto o custo computacional.

Comparando com a literatura percebe-se algumas variações. Além de terem sido obtidos resultados diferentes da literatura para o mesmo método analisado (Ligas-Banasik Iterativo), os custos computacionais apresentados na literatura são muito maiores dos que os encontrados no algoritmo desenvolvido para esta IC. Tais dados diferentes são resultado da produção de algoritmos distintos, em máquinas diferentes e em *softwares* diferentes. Os custos computacionais mais baixos são fator direto da tecnologia e do *softwares* utilizado, uma vez que os dados foram gerados em máquinas diferentes. Outro possível motivo para divergência de resultados com a literatura foi a utilização de mais iterações, possibilitando

uma precisão um pouco maior.

De acordo com Ligas-Banasik (2011), os resultados do grupo (b) com relação aos métodos analisados por eles foram:

Tabela 4.4: Comparação entre os métodos da literatura no grupo (b)

Método		Nº de iterações				
		1	2	3	4	5
Heiskanen e Moritz (1967)	Tempo de CPU	(0.72)	(1.03)	(1.36)	(1.68)	(2.01)
	Erro max. em φ	-4.01	-6.34	-8.64	-10.93	-13.20
	Erro max. em h	0.83	-1.41	-3.64	-5.88	-8.11
Borkowski (1989)	Tempo de CPU	(1.85)	(2.33)			
	Erro max. em φ	-7.30	-12.53			
	Erro max. em h	-14.48	-14.84			
Liu e Wang (1995)	Tempo de CPU	(1.11)				
	Erro max. em φ	-13.62				
	Erro max. em h	-9.03				
Fukushima (1999)	Tempo de CPU	(0.85)	(1.05)	(1.25)	(1.47)	(1.66)
	Erro max. em φ	1.2	-0.01	-2.34	-6.89	-14.88
	Erro max. em h	2.45	0.02	-4.63	-13.73	-14.70
Fukushima (2006)	Tempo de CPU	(1.00)				
	Erro max. em φ	-10.51				
	Erro max. em h	-14.69				
Fukushima e Bowring (1999)	Tempo de CPU	(0.82)	(1.08)			
	Erro max. em φ	-7.29	-14.88			
	Erro max. em h	-5.17	-14.73			
Ligas e Banasik (2011)	Tempo de CPU	(1.02)	(1.39)			
	Erro max. em φ	-6.10	-12.73			
	Erro max. em h	-2.05	-8.21			

Fonte: [LIGAS, 2011][Modificado].

Como mostra a Tab. 4.4, os resultados apresentados na literatura ainda apresentam grande precisão dentro da região (b), sendo os métodos mais precisos o Borkowski (1989), Liu e Wang (1995), Fukushima (2006,1999) e Fukushima e Bowring (1999). Sendo que alguns métodos precisaram de mais interações para atingir valores aceitáveis de erro próximos da análise anterior. Com isso, pode-se perceber que a medida que a região analisada da altura h aumenta, isto é, analisa-se corpos mais distantes do elipsoide, a precisão do método tende a cair para o mesmo número de iterações. Com isso, pode-se concluir que certos métodos que utilizam aproximações não são tão eficazes quando o corpo celeste está muito distante da Terra. Com relação a Tab. 4.4, o método mais preciso é o Fukushima e Bowring (199) apresentando erros em latitude de $1.318 \cdot 10^{-15}^\circ$ e erro de altura de $1.862 \cdot 10^{-15}m$. Com relação ao custo computacional de cada método em conjunto com a precisão, o melhor método continua sendo o Fukushima e Bowring (2011), pois além de ser o mais preciso, tem uma diferença pequena de tempo de execução de código em relação aos outros métodos. Em relação aos métodos analisados e algoritmo criado nesta IC, os resultados são mostrados nas Tab. 4.5 e 4.6:

Tabela 4.5: Comparação entre os métodos de transformações utilizando os pontos do grupo (b)

Método	Erro $\log_{10} \varphi$	Erro $\log_{10} h$	Tempo CPU (s)
Ligas-Banasik Literatura	-12.73	-8.21	-
Hoffman-Wellenhof Iterativo	-13.01	-8.19	0.291
Hofman-Wellenhof Direto	-7.29	-2.10	0.277
Ligas-Banasik Iterativo	-13.55	-8.50	0.235

Tabela 4.6: Erros entre os métodos de transformações utilizando os pontos do grupo (b)

Método	Erro φ ($^{\circ}$)	Erro h (m)
Ligas-Banasik Literatura	$1.86 \cdot 10^{-13}$	$7.59 \cdot 10^{-9}$
Hofmann-Wellenhof Iterativo	$7.94 \cdot 10^{-14}$	$6.46 \cdot 10^{-9}$
Hofmann-Wellenhof Direto	$5.13 \cdot 10^{-8}$	$7.94 \cdot 10^{-3}$
Ligas-Banasik Iterativo	$2.81 \cdot 10^{-14}$	$3.16 \cdot 10^{-9}$

Analisando os resultados da Tab. 4.5, percebe-se resultados parecido a aqueles mostrados na Tab. 4.2, havendo apenas um considerável decréscimo da precisão do método Hofmann-Wellenhof Direto. Como foi dito na análise dos métodos mostrados por Ligas-Banasik (2011), existe uma exigência maior de custo computacional para a medida que aumenta-se o valor de h , por isso, alguns métodos aproximativos percam precisão a medida que o corpo esteja mais distante do observador. Nesta segunda análise, os erros máximos de altura foram da ordem de $10^{-3}m$ para os pontos dentro do intervalo de 20km a 1000km. Erros com relação a latitudena ordem dos 10^{-7} graus. Novamente, os piores resultados foram os do método por aproximação, porém neste caso ele já não seria tão bem aceito em diversas áreas aeroespacial que precisariam de precisões mais elevadas. Com realção aos custos computacionais apresentados, os tempos gastos nos três métodos são semelhantes, resultado também visto na Tab. 4.2, portanto o de melhor método e algoritmo para o intervalo (b), dos métodos estudados, é Ligas-Banasik Iterativo.

Comparando novamente os resultados com a literatura percebe-se os mesmos tipos de variações apresentados no estudo do grupo (a). Resultados distintos obtidos por utilização de equipamentos, algoritmos e *softwares* diferentes. Já os resultados obtidos no grupo (c) por Ligas-Banasik são:

Tabela 4.7: Comparação entre os métodos da literatura no grupo (c)

Método		Nº de iterações				
		1	2	3	4	5
Heiskanen e Moritz (1967)	Tempo de CPU	(0.73)	(1.05)	(1.38)	(1.70)	(2.03)
	Erro max. em φ	-3.68	-6.18	-8.57	-10.90	-13.19
	Erro max. em h	2.38	-0.61	-3.31	-5.71	-8.03
Borkowski (1989)	Tempo de CPU	(1.87)	(2.34)			
	Erro max. em φ	-6.49	-11.78			
	Erro max. em h	-12.62	-14.05			
Liu e Wang (1995)	Tempo de CPU	(1.12)	(1.43)			
	Erro max. em φ	-11.17	-14.87			
	Erro max. em h	-5.85	-14.05			
Fukushima (1999)	Tempo de CPU	(0.86)	(1.06)	(1.27)	(1.49)	(1.68)
	Erro max. em φ	1.21	-0.01	-2.31	-6.83	-14.87
	Erro max. em h	3.22	0.81	-3.81	-12.84	-13.85
Fukushima (2006)	Tempo de CPU	(1.00)				
	Erro max. em φ	-8.82				
	Erro max. em h	-13.97				
Fukushima e Bowring (1999)	Tempo de CPU	(0.83)	(1.09)			
	Erro max. em φ	-6.32	-14.87			
	Erro max. em h	-3.58	-13.97			
Ligas e Banasik (2011)	Tempo de CPU	(1.03)	(1.40)			
	Erro max. em φ	-6.43	-12.75			
	Erro max. em h	-2.32	-8.11			

Fonte: [LIGAS, 2011][Modificado].

Analisando a Tab. 4.7, percebe-se que novamente houve uma queda na precisão em relação a iteração em alguns métodos, como foi visto comparando as Tab. 4.1 e 4.4. Efeito que será estudado na próxima análise. No grupo (c), os métodos apresentaram resultados ainda com grande precisão dentro da região, sendo os métodos mais precisos o Liu e Wang (1995), Fukushima (1999) e Fukushima e Bowring (1999). Com relação a Tab. 4.7, o método mais preciso é o Liu e Wang (1995) apresentando erros em latitude de $1.349 \cdot 10^{-19}^\circ$ e erro de altura de $8.912 \cdot 10^{-15}m$. Com relação ao custo computacional de cada método em conjunto com a precisão, o melhor método é o Fukushima e Bowring (2011), pois apesar de ser um pouco menos preciso, tem uma é mais rápido em relação ao Liu e Wang (1995). Em relação aos métodos analisados e algoritmo criado nesta IC para a região (c), os resultados são:

Tabela 4.8: Comparação entre os métodos de transformações utilizando os pontos do grupo (c)

Método	Erro $\log_{10} \varphi$	Erro $\log_{10} h$	Tempo CPU (s)
Literatura	-12.75	-8.11	-
Hoffman-Wellenhof Iterativo	-13.55	-7.43	0.357
Hofman-Wellenhof Direto	-6.32	-0.51	0.268
Ligas-Banasik Iterativo	-13.55	-7.73	0.249

Tabela 4.9: Erros entre os métodos de transformações utilizando os pontos do grupo (c)

Método	Erro φ ($^{\circ}$)	Erro h (m)
Ligas-Banasik Literatura	$1.78 \cdot 10^{-13}$	$7.76 \cdot 10^{-9}$
Hofmann-Wellenhof Iterativo	$2.82 \cdot 10^{-14}$	$3.72 \cdot 10^{-8}$
Hofmann-Wellenhof Direto	$4.79 \cdot 10^{-7}$	$3.09 \cdot 10^{-1}$
Ligas-Banasik Iterativo	$2.82 \cdot 10^{-14}$	$1.86 \cdot 10^{-8}$

Analisando o último grupo de pontos apresentados nas Tab. 4.8 e 4.9, percebe-se um grande decréscimo com relação a precisão da determinação da distância h pelo método Hofmann-Wellenhof Direto, comprovando e tornando-o obsoleto para utilização em projetos onde o corpo celeste está distante da Terra. Os outros dois métodos continuam mantendo a precisão elevada, havendo um pequeno aumento na precisão do Hofmann-Wellenhof Iterativo quase que igualando-se a precisão do Ligas-Banasik Iterativo. Dos métodos analisados, os maiores erros encontrados foram os resultados obtidos no método Hofmann-Wellenhof Direto com erros de 10^{-7} graus para latitude e $10^{-1}m$ para a altura. Erros considerados grandes dentro da área aeroespacial. Já os custos computacionais apresentados, os tempos gastos nos métodos Hofmann-Wellenhof Iterativo e Ligas-Banasik Iterativo são relativamente distintos. Logo, o melhor método para o intervalo (c) entre os métodos estudados continua sendo o Ligas-Banasik Iterativo.

Esses resultados ao longo dos grupos, tanto os citados na literatura quanto os realizados nesta IC, mostram que os métodos começam a variar e gerar inconsistências a medida que a altura h aumenta, principalmente o método por aproximação. Com relação aos métodos estudados neste relatório, os métodos Hofmann-Wellenhof Iterativo e Ligas-Banasik Iterativo se mostraram precisos nas três regiões analisadas, fato que os tornam possíveis de serem utilizados em projetos geoespaciais ou aeronáuticos. Enquanto o método Hofmann-Wellenhof Direto, apresentou ótimos resultados resultados dentro do grupo (a), tornando-

se útil para sistemas de monitoramento terrestre próximas a Terra, uma vez que a altura do corpo celeste não será tão grande. Ao analisar então os três métodos, conclui-se que o melhor, isto é, mais preciso, com custo menor computacional e maior abrangência de aplicações é o Ligas-Banasik Iterativo com erros na latitude na ordem de 10^{-14} graus e na altura na ordem de 10^{-8} .

4.2 Resultados da segunda análise

Como foi observado na primeira análise, a altura é um fator crucial na precisão do método, seja ele iterativo ou direto. Por isso, será feita uma análise da variação do erro em relação a altura h com relação a valores específicos de φ . Portanto, essa segunda análise busca encontrar como cada método varia sua precisão para latitudes específicas e ao passo que a distância aumenta. Sendo o erro desta etapa calculado por: *erro = valor absoluto* ($h_f - h_i$).

Analisando a Fig. 4.1, observa-se um erro muito pequeno, sendo zero no grupo (a) e baixíssima na ordem de $10^{-10}m$ nos grupos (b) e (c). Também observa-se nos grupos (a), (b) e (c) que todos os métodos apresentaram praticamente os mesmos valores de erro, exceto alguns poucos pontos no grupo (b) e (c) divergiram. Tais valores mostram que os três métodos estudados na região próxima ao equador ($\varphi = 0^\circ$) apresentam ótimos resultados.

Já a Fig. 4.2, mostra uma variação entre os erros encontrados nos três métodos, os dois iterativos na ordem de $10^{-10}m$ e o direto na ordem de $10^{-7}m$ mas com valores diferentes. Com esse erro ainda baixo, na região (a) próxima ao elipsoide, pode-se afirmar que dentro do região entre 0° e 15° , os três métodos apresentam resultados satisfatórios e semelhantes. Porém, como é visto no grupo (b) e (c), os erros gerados pelo método de Hofmann-Wellenhof aumentam a medida que h aumenta, o que mostra mais uma vez que esse método por aproximação não é recomendado para regiões distantes do elipsoide. Em relação aos outros dois métodos nas mesmas regiões analisadas, os erros permanecem pequenos na ordem de $10^{-9}m$.

Em relação Fig. 4.3, pode-se concluir que os métodos dentro do grupo (a) continuam apresentando bons resultados na ordem de $10^{-7}km$ para o direto e 10^{-10} para os outros dois. Já nos grupos (b) e (c) para o ângulo $\varphi = 45^\circ$, o método de Hofmann-Wellenhof Direto colapsa e tem um crescimento de erro enorme, fato já verificado nas Tab. 4.2, 4.5 e 4.8. Como pode ser observado na Fig. 4.3, na região de 45° e no grupo (c) que esse método tem o seu maior erro, logo ele não poderia ser utilizados em tais situações como esta, devido ao alto erro numérico que ele causaria. Os outros dois métodos mantiveram o

mesmo resultado, mantendo o erro na mesma ordem de grandeza analisada anteriormente.

Já a Fig. 4.4, mostra um retorno do erro aos resultados observados na Fig. 4.3 com relação ao (a), o método Hofmann-Wellenhof Direto apresenta erro de $10^{-7}m$ enquanto os outros dois continuam na faixa de 10^{-9} . Nas regiões (b) e (c), ambos métodos iterativos continuam com alta precisão. Mas o método iterativo, teve uma pequena melhora de resultados. Isso mostra que na região próxima a 45° que a aproximação apresenta maior falha, mas que próximos aos polos, a aproximação se torna mais precisa. Todavia, ainda sendo mais precisa, o erro obtidos por esse método dentro da seção (b) e (c) continuam altos.

Na região onde $\varphi = 90^\circ$, conhecida como região dos polos, a Fig. 4.5 mostra que todos os métodos apresentam resultados satisfatórios dentro dos três grupos analisados, Porém com respeito aos grupos (b) e (c) o método Hofmann-Wellenhof Iterativo apresentou os maiores erros em relação a outros valores de φ , mostrando que esse método tem um aumento dos erros próximos da região dos polos da esfera celeste. Tais resultados já citados nas Tab. 4.6 e 4.9. Já o Ligas-Banasik Iterativo, os erros tiveram um pequeno aumento da região (b) para (c) na faixa onde $\varphi = 75^\circ$, na ordem de $10^{-10}m$, sugerindo que a região próximas ao polo não é a região ideal a ser trabalhada com esses métodos, mesmo que eles ainda assim apresentam erros baixíssimos.

Esses resultados mostrados apresentados nos gráficos a seguir e analisados anteriormente comprovam a observação presente na literatura e vista na primeira análise. Transformações iterativas são melhores para distância mais longas, pois ela busca encontrar um valor finito, gerando um resultado de alta precisão. Transformações por aproximação como a feita em Hofmann-Wellenhof Direto, apresentam bons resultados próximos do elipsoide, porém para corpos distantes ela não deve ser usada uma vez que apresenta erros relativamente altos. O problema para analisar corpos mais distantes é que serão utilizados mais iterações do que o comum para corpos mais próximos da geodésia, por isso que o custo computacional de cada método é de extrema importância, uma vez que quanto mais rápido é o processo, mais rápido os dados recebidos pelo equipamento são analisados.

Figura 4.1: Erros encontrados nos grupos quando $\varphi = 0^\circ$

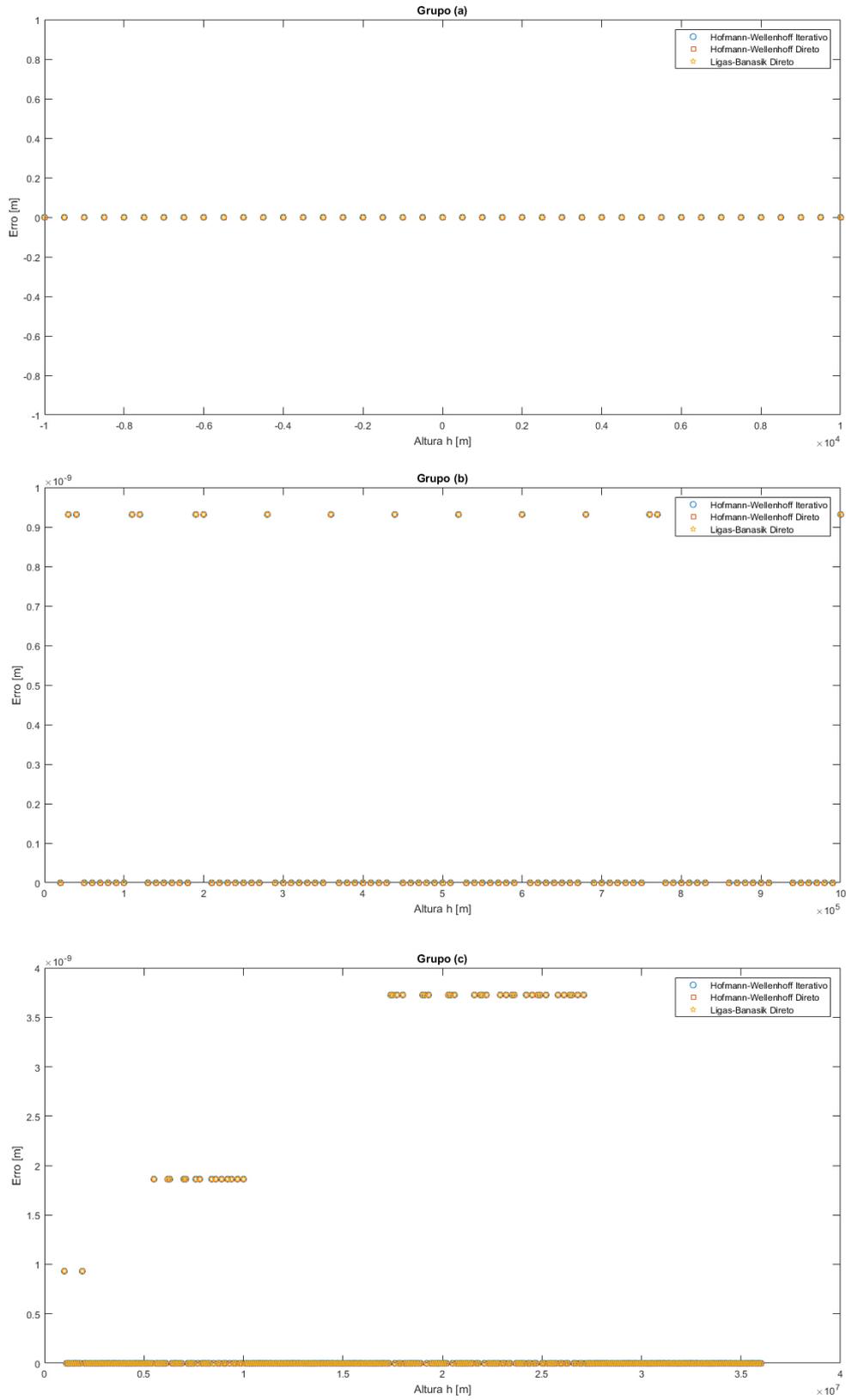


Figura 4.2: Erros encontrados nos grupos quando $\varphi = 15^\circ$

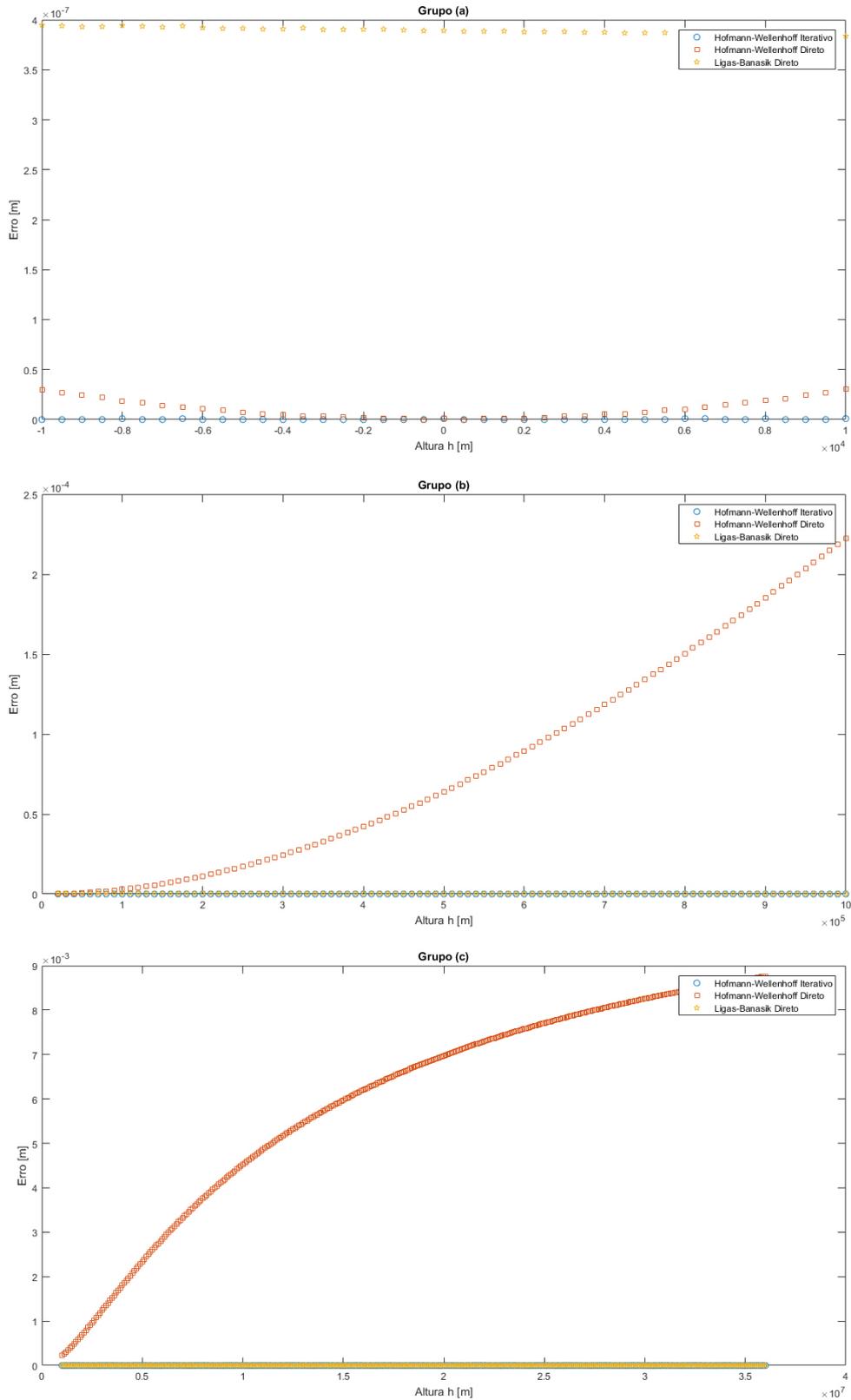


Figura 4.3: Erros encontrados nos grupos quando $\varphi = 45^\circ$

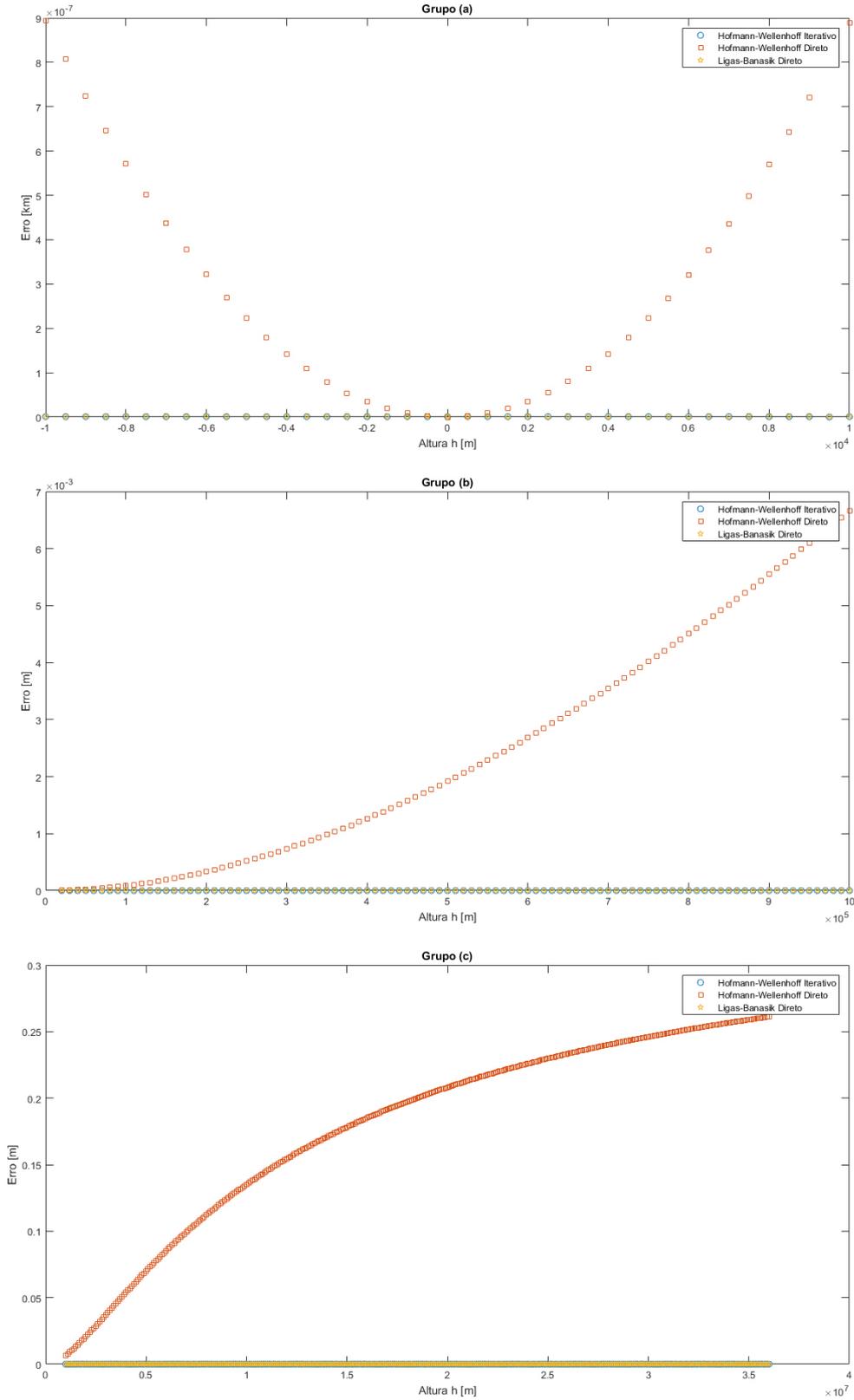


Figura 4.4: Erros encontrados nos grupos quando $\varphi = 75^\circ$

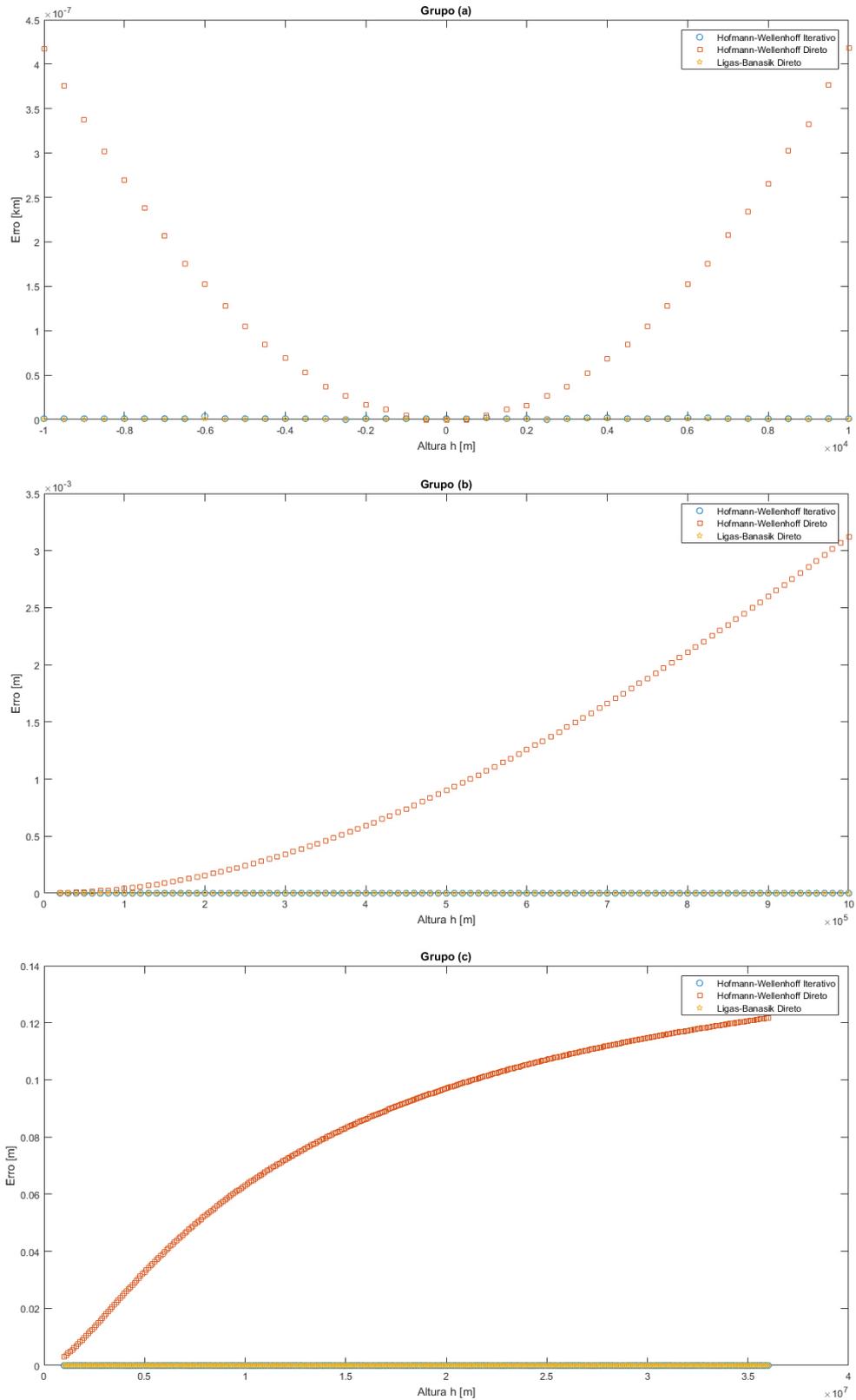
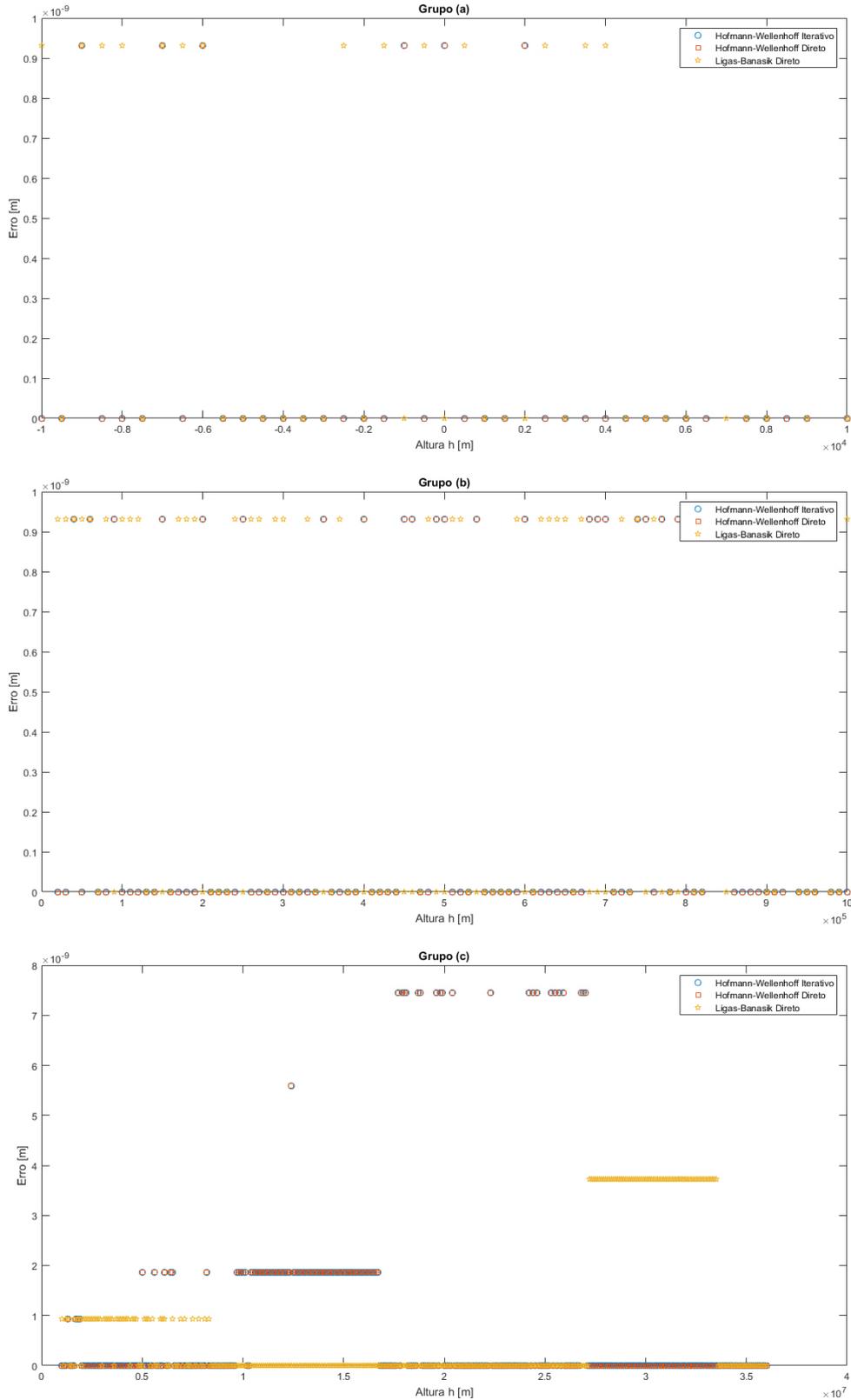


Figura 4.5: Erros encontrados nos grupos quando $\varphi = 90^\circ$



5 Conclusões

A partir do estudo apresentado neste relatório de Iniciação Científica torna-se possível a análise da precisão e do custo computacional entre métodos de transformações entre coordenadas cartesianas e elipsoidais, bem como cada um dos três métodos variam de acordo com a altura h e latitude φ .

Percebeu-se que os métodos estudados apresentaram bons resultados parecidos nas regiões próximas ao elipsoide. Também notou-se que cada método tem regiões de atuação mais importante, isto é, existem métodos iterativos ou não, que cada método poderia ou não ser utilizado. Como exemplo, o método direto analisado neste trabalho pode ser utilizado dentro dos parâmetros do grupo (a), mas não dentro das outras regiões. Dentro do método de comparação estabelecido por Ligas-Banasik(2011), e analisando os algoritmos e custo computacional, chegou-se na conclusão de que o método Ligas-Banasik Iterativo é o método mais completo dentre os estudados dentro deste relatório. Apresentando bons resultados de precisão e tempo de processamento. Mas se for analisar os outros métodos mencionados na literatura, sem reparar nos algoritmos criados e considerando que o equipamento utilizado para cálculo pelo autor são menos tecnológicos do que utilizados para esta IC, chega-se na conclusão que o melhor método seria Fukushima e Bowring (1999) para regiões (b) e (c) analisadas; e o Liu e Wang (1995) para a região (a) [LIGAS, 2011].

Em relação a segunda análise e os dados citados na literatura, percebe-se que cada método varia de forma diferente para cada região de latitude diferente, apresentando maior precisão na região do equador ou menor precisão próximos aos polos como o caso dos métodos em [HOFMANN-WELLENHOF, 2008]. Outro fator importante para análise se trata do custo computacional gerado a medida que a altura h aumentava, isso se deve ao fato de aumentar o número de iterações necessárias para que fosse encontrado resultados satisfatórios.

Com isso, planeja-se em um futuro próximo projeto de IC realizar um estudo mais detalhado de outros métodos e promover uma melhoria do algoritmo criado visando diminuir ainda mais o custo computacional e corrigir possíveis falhas dos algoritmos já criados. Além da descrição da obtenção de outros métodos citados na literatura.

Referências

- [BURTCH, 2006] BURTCH, R. (2006). *A Comparison of Methods used in Rectangular to Geodetic Coordinate Transformations*. Michigan.
- [HOFMANN-WELLENHOF, 2006] HOFMANN-WELLENHOF, B. M. H. (2006). Physical geodesy.
- [HOFMANN-WELLENHOF, 2008] HOFMANN-WELLENHOF, B.; LICHTENEGGER, H. W. E. (2008). Gns – global navigation satellite systems: Gps, glonass, galileo, and more.
- [LIGAS, 2011] LIGAS, Marcin; BANASIK, P. (2011). *Conversion between Cartesian and geodetic coordinates on a rotational ellipsoid by solving a system of nonlinear equations*. Department of Geomatics, Mickiewicza Al.
- [MENZORI, 2017] MENZORI, M. (2017). *Georreferenciamento – Conceitos*. Editora Baraúna, São Paulo.
- [MONICO, 2008] MONICO, J. G. (2008). Posicionamento pelo gnss: Descrição, fundamentos e aplicações.
- [RAPP, 1974] RAPP, R. H. (1974). *Geometric Geodesy: Part 1*. Columbus.
- [STEWART, 2006] STEWART, J. (2006). *Cálculo, volume I*. Pioneira Thomson Learning, São Paulo, 5 edition.
- [UFRGS, 2008] UFRGS (2008). *Geometria do Elipsóide*. Instituto de Geociências - Depto. de Geodésia.