



ANALIS TÉCNICO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS



Estimação de atitude de satélites artificiais com quatérnions

**RELATÓRIO FINAL DE PROJETO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA
(PIBIC/CNPq/INPE)**

Nicholas de Freitas Oliveira Matos (Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá -
UNESP, Bolsista PIBIC/CNPq)
E-mail: nicholas.f.matos@hotmail.com

Orientador: Dr. Hélio Koiti Kuga (DEM/INPE/São José dos Campos)
E-mail: hkk@dem.inpe.br
Co-orientadora: Dra. Roberta Veloso Garcia (EEL/USP/Lorena)
E-mail: robertagarcia@usp.br

COLABORADORA

Dra. Maria Cecília F. P. S. Zanardi (FEG/UNESP/Guaratinguetá)
E-mail: mceciliazanardi@gmail.com

Julho de 2014

**PROGRAMA INSTITUCIONAL DE BOLSAS DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA
PIBIC/CNPQ/INPE**

Nome do(a) Aluno(a): Nicholas de Freitas Oliveira Matos

Universidade: Universidade Estadual Paulista “Júlio Mesquita Filho” UNESP

Curso: Engenharia de Produção Mecânica

Nome do(a) Orientador(a): Hélio Koiti Kuga

Coord./Depto.: DEM/INPE

Ramal: 6183

Título do Projeto: Estimação de atitude de satélites artificiais com quatérnions

No período de agosto/2013 a janeiro/2014 foram desenvolvidas, neste projeto, as fases I, II e III, anteriormente propostas no formulário de pesquisa, as quais se referem respectivamente ao estudo dos parâmetros de Rodrigues, adaptação dos parâmetros no algoritmo de estimação de atitude e sua implementação numérica. A partir de fevereiro/2014 deu-se início à fase IV, na qual foram feitas comparações dos resultados da estimação de atitude utilizando os parâmetros de Rodrigues, os Quatérnions e Ângulos de Euler, atingindo o objetivo do trabalho.

Aprovo o relatório apresentado:

Assinatura do(a) Aluno(a)

Assinatura do(a) Orientador(a)

RESUMO

A atitude de veículos espaciais é um fator de grande importância para o sucesso das missões espaciais, sendo um dos problemas relevantes estudados na Engenharia Aeroespacial. A partir disto, muitos trabalhos de pesquisa envolvendo veículos espaciais objetivam-se a buscar métodos que estimem a atitude com maior precisão e que utilizem o mínimo de transformações matemáticas possíveis, diminuindo assim a probabilidade de existirem erros. Sendo assim, em similaridade ao trabalho de doutorado de Garcia (2011), no qual a autora estimou a atitude de satélites artificiais utilizando quatérnions e ângulos de Euler com o Filtro de Kalman Unscented, este trabalho teve como objetivo obter a atitude do satélite CBERS-2 utilizando os Parâmetros modificados de Rodrigues. Os parâmetros de Rodrigues possuem uma relação direta com os quatérnions, evitando possíveis problemas de singularidade que os quatérnions apresentariam. Este trabalho foi iniciado em agosto de 2013 e foi dividido em quatro fases: (I) estudo do modelo matemático dos Parâmetros de Rodrigues (PMR), (II) adaptação dos PMR no algoritmo de estimação de atitude (Garcia, 2011), (III) simulações da estimação da atitude com o filtro de Kalman Unscented e (IV) comparação dos resultados obtidos utilizando PMR com Quatérnions (Matos, 2013) e ângulos de Euler (Garcia, 2011).

PALAVRAS-CHAVE: Parâmetros Modificados de Rodrigues, Filtro de Kalman Unscented, estimação de atitude.

ABSTRACT

The spaceships attitudes is a big important factor to the success of space missions, what is one of the troubles studied by the aerospace engineering. So, many search works involving spaceships aim to find methods, which estimate the attitude with bigger precision and utilize less mathematics transformations as they can, minimizing the possibilities to give math errors. Thus, in similarity to the work of Garcia (2011), where the authoress estimates the artificial satellites attitude using Quatérnions and Eulers Angles with Kalman Unscented Filter, this work will obtain the attitude from CBERS-2 using Rodrigues Modified Parameters. These Parameters have a direct relationship to the Quaternions, what avoids possible singularity problems the Quaternions would presents. The work was initiated in August 2013 and was divided in four phases: (I) The study of the math model Rodrigues Modified Parameter (PMR), (II) adaptation of the attitude estimation algorithm with PMR (Garcia, 2011), (III) simulations of the attitude estimation using the Unscented Kalmans Filter and (IV) comparison between results using PMR, Quaternions (Matos, 2013) and Eulers Angles (Garcia, 2011).

KEYWORD: Rodrigues Modified Parameters, Unscented Kalman Filter, attitude estimation.

Lista Figuras

FIGURA 1 – SISTEMA DE REFERÊNCIA INERCIAL (X, Y, Z), ORBITAL (X_0, Y_0, Z_0) E DO SATÉLITE (x, y, z)	12
FIGURA 2 – MEDIDAS REAIS DOS SENSORES SOLAR DIGITAL E DE TERRA INFRAVERMELHO	22
FIGURA 3 – MEDIDAS REAIS FORNECIDAS PELO GIROSCÓPIO.....	23
FIGURA 4 – ÂNGULOS DA ATITUDE DO SATÉLITE ESTIMADOS COM PARÂMETROS MODIFICADOS DE RODRIGUES, QUATÉRNIONS E ÂNGULOS DE EULER	26
FIGURA 5 – COMPONENTES DE <i>BIAS</i> ESTIMADOS COM PARÂMETROS MODIFICADOS DE RODRIGUES NO EIXO X, Y E Z	27
FIGURA 6 – RESÍDUO OBTIDO COM PARÂMETROS MODIFICADOS DE RODRIGUES RELACIONADO AOS SENSORES SOLARES DSS1 E DSS2.....	29
FIGURA 7 – RESÍDUO OBTIDO COM PARÂMETROS MODIFICADOS DE RODRIGUES RELACIONADO AOS SENSORES DE TERRA INFRAVERMELHO IRES1 E IRES2.....	30
FIGURA 8 – ÂNGULOS DA ATITUDE DO SATÉLITE ESTIMADOS COM PARÂMETROS MODIFICADOS DE RODRIGUES COM INICIALIZAÇÃO DE 0°, 10° E 20°.....	31
FIGURA 9 – UTILIZAÇÃO DO COMANDO “TIC TOC”	33

Lista de Tabelas

TABELA 1 – DADOS REFERENTES ÀS OBSERVAÇÕES UTILIZADAS DO CBERS-2.....	21
TABELA 2 – CONDIÇÕES INICIAIS DAS COMPONENTES DO VETOR DE ESTADO.....	24
TABELA 3 – VALORES INICIAIS DOS QUATÉRNIONS	24
TABELA 4 – VALORES DA DIAGONAL PRINCIPAL DA MATRIZ DE COVARIÂNCIA INICIAL (P).....	24
TABELA 5 – VALORES DA DIAGONAL PRINCIPAL DA MATRIZ DE CONVERIÂNCIA DO ERRO DE OBSERVAÇÃO (R).....	24
TABELA 6 – VALORES DA DIAGONAL PRINCIPAL DA MATRIZ DE COVERIÂNCIA DO RUÍDO DINÂMICO (Q)	24
TABELA 7 – MÉDIA DAS COMPONENTES DA ATITUDE UTILIZANDO PMR, QUATÉRNIONS E ÂNGULOS DE EULER	26
TABELA 8 – MÉDIA DAS COMPONENTES <i>BIAS</i> UTILIZANDO PMR, QUATÉRNIONS E ÂNGULOS DE EULER.....	28
TABELA 9 – MÉDIA DOS RESÍDUOS FORNECIDOS PELOS SENSORES UTILIZANDO PMR, QUATÉRNIONS E ÂNGULOS DE EULER.....	31
TABELA 10 – TEMPO DE PROCESSAMENTO DOS ALGORITMOS.....	33

Lista de Abreviaturas

CBERS	Satélite Sino Brasileiro de Sensoriamento Remoto
INPE	Instituto Nacional de Pesquisa Espacial
FKU	Filtro de Kalman <i>Unscented</i>
DSS	Sensor Solar Digital (<i>Digital solar Sensors</i>)
PMR	Parâmetros Modificados de Rodrigues
IRES	Sensor de Terra infravermelho (<i>Infrared Earth Sensors</i>)

Lista de Símbolos

(x,y,z)	- Sistema de referência do Satélite
(X, Y, Z)	- Sistema de referência da Terra
(x_0, y_0, z_0)	- Sistema de referência Orbital
(ϕ, Θ, ψ)	- Ângulos de Euler (<i>roll, pitch, yaw</i>)
(S_x, S_y, S_z)	- Vetor unitário associado ao vetor solar no sistema do satélite
$(\alpha_\Theta, \alpha_\psi)$	- Medidas do sensor solar associados aos ângulos <i>pitch</i> e <i>yaw</i>
ϑ	- Ruído branco Gaussiano relacionado às medidas dos sensores
(ϕ_H, Θ_H)	- Medidas do sensor de Terra em <i>roll</i> e <i>pitch</i>
$\Delta\Theta$	- Deslocamento angular do satélite
ω_i	- Componentes da velocidade angular do Satélite
β_i	- Componentes bias do gyro
$\vec{\omega}$	- Vetor velocidade angular do satélite
$\vec{\beta}$	- Vetor bias do gyro
$\vec{\eta}_1$	- Ruído branco Gaussiano do processo
q	- Quatérnion de attitude
\vec{q}	- Parte vetorial do quatérnion de attitude
q_1, q_2, q_3	- Componentes da parte vetorial do quatérnion
q_4	- Componente escalar do quaternion
A	- Matriz de rotação dada em termos de quatérnion
\dot{q}	- Equações cinemáticas em quatérnions
δp	- Componentes dos PMR
δq	- Incrementos de Quatérnions
P	- Matriz de covariância do estado
Q	- Matriz de covariância do ruído dinâmico
(P_{yy}, P_{xy})	- Covariâncias das observações e das correlações cruzadas
χ_k	- Vetor de estado no instante
σ_k	- Variação sigma-ponto no instante
y_k	- Vetor de observação no instante

q^+	- Quatérnion atualizado
q^-	- Quatérnion propagado
h	- Função vetorial de medidas dos sensores
E	- Operador de expectância
\hat{x}	- Vetor de estado estimado
W	- Pesos
K	- Ganho de Kalman
Υ	- Matriz de Sigma- Pontos das medidas transformadas
H	- Matriz jacobiana das medidas

Sumário

1. INTRODUÇÃO.....	10
2. SISTEMA DE REFERÊNCIA DO SATÉLITE	10
3. SENSORES	12
3.1. SENSOR SOLAR DIGITAL (DSS – DIGITAL SUN SENSOR)	12
3.2. SENSOR DE TERRA INFRAVERMELHO (IRES – INFRARED EARTH SENSOR)	13
3.3. GIROSCÓPIO	13
4. REPRESENTAÇÃO DA ATITUDE POR QUATÉRNIONS.....	14
4.1. QUATÉRNIONS DIRETOS	14
4.2. PARÂMETROS MODIFICADOS DE RODRIGUES	16
5. FILTRO DE KALMAN UNSCENTED COM PMR	17
5.1. INICIALIZAÇÃO DO ALGORITMO.....	17
5.2. PROPAGAÇÃO DO FILTRO	18
5.3. ATUALIZAÇÃO DO FILTRO	19
6. RESULTADOS.....	20
6.1. DADOS DE TESTE DO SATÉLITE CBERS-2.....	20
6.2. DADOS DE ENTRADA	24
6.3. ESTADO ESTIMADO	24
6.4. TESTE DE EFICIÊNCIA DO FKU COM PMR	31
7. COMENTÁRIOS FINAIS	33
8. REFERÊNCIAS	34

1. INTRODUÇÃO

Este trabalho está relacionado com a dinâmica do movimento rotacional de satélites artificiais, ou seja, com a sua orientação espacial em relação a um sistema de referência inercial denominada de atitude. Em missões espaciais, os veículos utilizados dependem da dinâmica e controle da atitude para poderem executar suas tarefas com a precisão que a que a missão se destina. Desta forma o controle da atitude depende diretamente do conhecimento desta. Diante disto, neste trabalho é estudado o problema de estimação de atitude utilizando dados reais de sensores que estão a bordo do satélite CBERS-2 (China Brazil Earth Resources Satellite).

De acordo com o último trabalho de iniciação científica realizado, o processo de determinação da atitude de veículos espaciais requer informações relacionadas com o tempo, órbita e dados de sensores. Sendo assim, são utilizados dados reais dos satélites CBERS-2, fornecidos pelo Centro de Controle de Satélites do INPE. Como utilizado anteriormente (GARCIA, 2011, MATOS, 2013), os modelos matemáticos são manipulados com a técnica do Filtro de Kalman Unscented (FKU). Este método é aplicado a sistemas não lineares e utiliza um conjunto de pontos amostrais (sigma-pontos) evitando as linearizações utilizadas em outros métodos. Este trabalho complementa estudos realizados em outros trabalhos que utilizaram o FKU (GARCIA, 2010; GARCIA, KUGA, ZANARDI, 2011).

Foi discutido em trabalhos anteriores (MATOS, 2013) que a utilização direta dos quatérnions no processo de estimação da atitude poderia apresentar alguns problemas como, por exemplo, o quatérnion perdendo suas características como módulo não unitário, matriz de atitude via quatérnion não ortogonal, etc. Para evitar tais problemas no processo de estimação, foi considerado o PMR que, apesar de possuir uma relação direta com os quatérnions considera o vetor de estado reduzido. Desta forma, o algoritmo utilizado no último projeto sofrerá suas devidas alterações para a implementação do PMR, tendo como suporte na transformação do algoritmo o trabalho de Crassidis e Markley (2003). O estudo é validado através de comparações entre os resultados de atitude obtidos via PMR com quatérnions (MATOS, 2013) e ângulos de Euler (GARCIA, 2011).

As etapas e cronograma de atividades do projeto encontram-se a seguir.

FASE	Agosto/ setembro 2013	Outubro/ 2013	Novembro/ dezembro 2013	Janeiro 2013	Fevereiro/ Junho 2014	Junho/ julho 2014
I	X					
II		X	X			
III			X	X	X	
IV			X	X	X	X
V					X	X

Seguindo este plano de atividades, o primeiro semestre (Fases I, II e III) da iniciação científica tinha como objetivo o estudo teórico dos Parâmetros Modificados de Rodrigues, a adaptação do algoritmo de estimação de atitude implementado no MATLAB por GARCIA utilizando o PMR, e início das comparações entre resultados de quatérnions diretos, ângulos de Euler e os parâmetros modificados de Rodrigues. Os estudos se basearam em referências

bibliográficas fornecidas pelos orientadores, em especial o trabalho de Crassidis e Markley (2003). O estudo foi acompanhado por discussões semanais com os orientadores e colaboradora.

Na sequência deste relatório serão apresentados os principais conceitos estudados durante todo o projeto.

2. Sistema de Referências do Satélite

Para determinar a atitude de um corpo celeste, no caso um satélite artificial, deve-se primeiro estabelecer uma relação com algum sistema de coordenadas. Como já estabelecido em Garcia et al (2011) e Matos (2013), o sistema de referência do satélite é o da Terra, com coordenadas (X, Y, Z) , centradas em seu centro de massa, e sistema de coordenadas do satélite é representado por (x,y,z) com origem no centro de massa do satélite. Para estudos de satélites estabilizados em 3 eixos, se define os eixos *roll*, *pitch* e *yaw* como (MATOS, 2013):

- Roll (rolamento) em x , alinhado com o eixo x_0 pertencente ao referencial orbital do satélite. O eixo x define o movimento do satélite em torno da direção da velocidade orbital.
- Pitch (arfagem) em y , alinhado com o eixo y_0 que aponta na direção normal do plano orbital e também pertence ao referencial orbital do satélite. O eixo y define o movimento do satélite em torno da direção normal à órbita.
- Yaw (guinada) em z , alinhado com o eixo z_0 que aponta para o centro da Terra (direção Nadir) e também pertence ao referencial orbital do satélite. O eixo z define, o movimento em torno da direção Nadir.

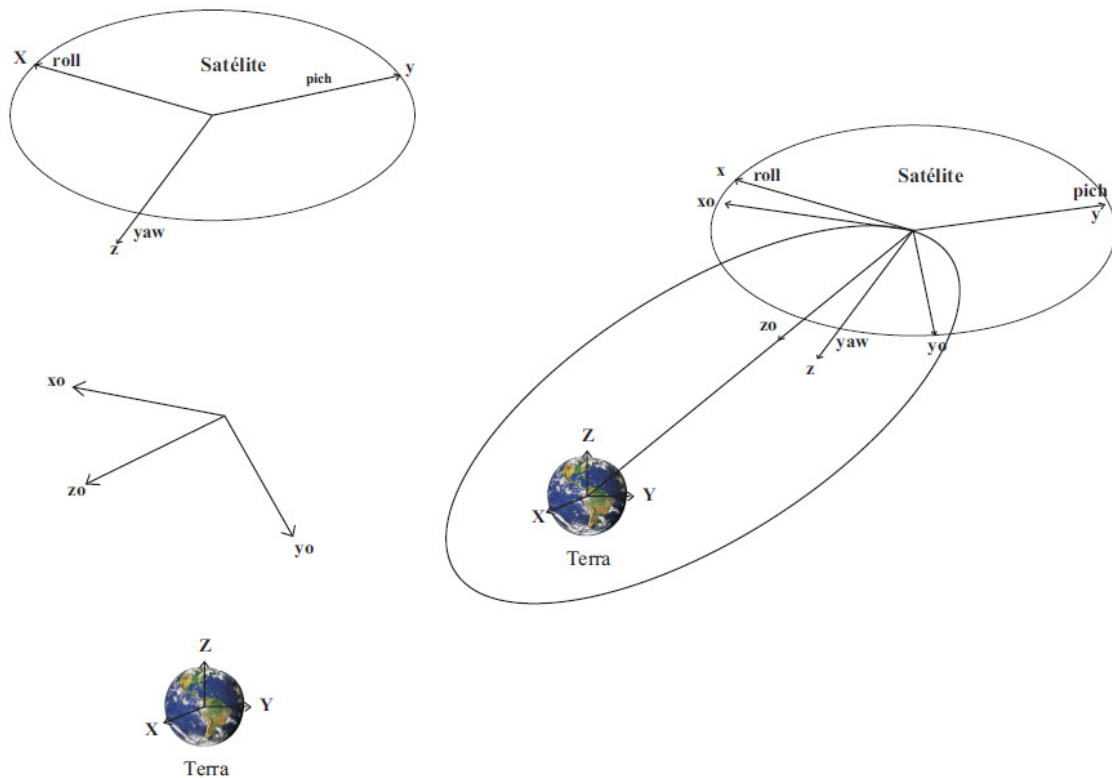


Figura 1 – Sistema de referência inercial (X, Y, Z), orbital (x_0, y_0, z_0) e do satélite (x, y, z).
 Fonte: GARCIA (2011)

3. Sensores

Para estimar a atitude de um veículo espacial, é necessário a utilização de alguns equipamentos que tomam o centro da Terra como referência inercial. Neste projeto são utilizados três tipos de sensores que estão a bordo do satélite CBERS: o Sensor Solar Digital, Sensor de Terra Infravermelho e o Giroscópio. Neste tópico será apresentado as equações que descrevem a atuação destes sensores a bordo (MATOS, 2013).

3.1. Sensor Solar Digital (DSS – *Digital Solar Sun*)

O Sensor Solar Digital (DSS – *Digital Solar Sensor*) consiste num mecanismo óptico que detecta o sol, definindo a posição dos principais eixos de atitudes do veículo espacial, em relação à direção que o sol foi detectado. No entanto, o DSS não nos fornece diretamente os ângulos de pitch e yaw, e sim seus valores acoplados, ou seja, α_θ e α_ψ .

As equações de medidas para o sensor solar digital são obtidas da seguinte forma (FUMING, KUGA, 1999, GARCIA, 2011, MATOS, 2013):

$$\alpha_{\psi} = \tan^{-1} \frac{-S_y}{S_x \cos 60^\circ + S_z \cos 150^\circ} + \vartheta_{\alpha_{\psi}} \quad (1)$$

quando $|S_x \cos 60^\circ + S_z \cos 150^\circ| < \cos(60^\circ)$, e

$$\alpha_{\theta} = 24^\circ - \tan^{-1} \left(\frac{S_x}{S_y} \right) + \vartheta_{\alpha_{\theta}} \quad (2)$$

quando $|24^\circ - \tan^{-1} \left(\frac{S_x}{S_y} \right)| < 60^\circ$, onde os ϑ são os ruídos brancos que representam pequenos efeitos remanescentes de desalinhamento durante a instalação e/ou pela montagem do sensor, ou seja, são erros estipulados para estes processos. Sendo (S_x, S_y, S_z) o vetor unitário associado ao vetor solar do sistema do satélite.

3.2. Sensor de Terra Infravermelho (IRES – *Infrared Earth Sensor*)

O Sensor de Terra Infravermelho (IRES – *Infrared Earth Sensor*) define a orientação do satélite a partir da posição do planeta Terra, determinando o ângulo de diferença entre os eixos dos satélites e do centro da Terra. A utilização deste sensor tem como um dos objetivos a compensação dos erros do Giroscópio. No trabalho são utilizados dois sensores de terra, que estão postos no satélite de forma alinhada aos eixos *roll* e *pitch* (GARCIA, 2011).

As medidas determinadas pelos sensores IRES são dadas por (FUMING, KUGA, 1999, MATOS, 2013):

$$\theta_H = \theta + \vartheta_{\theta_H} \quad (3)$$

$$\phi_H = \phi + \vartheta_{\phi_H} \quad (4)$$

onde os ϑ possuem a mesma origem que tal variável na equação do DSS.

3.3. Giroscópio

E por último, o Giroscópio, é um equipamento o qual mede as alterações de atitude da espaçonave, podendo gerar torque de controle para ajustar sua orientação. A configuração deste sensor se resume numa roda que gira em alta velocidade sentindo e respondendo às mudanças da orientação inercial do seu eixo de rotação que coincide com o do satélite.

No projeto, os erros derivados deste equipamento são denominados bias, os quais serão incluídos no vetor de estado a ser estimado. Além disso, os giros integradores de velocidade são utilizados para medir a velocidade angular de *roll*, *pitch* e *yaw* (MATOS, 2013).

O modelo matemático destes integradores é (WERTZ, 1978):

$$\Delta\theta_i = \int_0^{\Delta t} (\omega_i + \beta_i) dt \quad (i = x, y, z) \quad (5)$$

sendo i no qual $\Delta\theta_i$ são os deslocamentos angulares do satélite em um intervalo de tempo Δt , ω_i são as componentes da velocidade angular no sistema do satélite e β_i as componentes bias.

Sendo assim as medidas das componentes da velocidade angular do satélite se resume em (WERTZ, 1978):

$$\vec{\omega} = \left(\frac{\Delta\vec{\theta}}{\Delta t} \right) - \vec{\beta} - \vec{v}_1 \quad (6)$$

4. Representação da atitude por quatérnions

Com o objetivo de evitar as singularidades nas equações geradas por Ângulos de Euler na determinação da atitude dos satélites artificiais, podemos utilizar os quatérnions (SANTOS, 2011). Baseado nos estudos de Matos (2013), que transformou o algoritmo de estimação de atitude pelo FKU (GARCIA, 2011) para quatérnions diretos, este projeto tem a proposta de implementar os Parâmetros Modificados de Rodrigues. Tal método possui uma relação direta com os quatérnions.

A seguir, serão apresentados ambos os modelos e suas devidas diferenças no equacionamento e medidas de vetores.

4.1. Quatérnions Diretos

De acordo com SANTOS, (2011) o quatérnion q é um vetor 4×1 , sendo que as três primeiras componentes compõem a parte vetorial e a quarta componente a parte escalar do quatérnion:

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{q} \\ q_4 \end{bmatrix} \quad (7)$$

As componentes do vetor \vec{q} e a componente escalar q_4 podem ser expressas em função do ângulo de rotação ϕ e do eixo de rotação \hat{n} :

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \text{sen}\left(\frac{\phi}{2}\right) \hat{n} \quad \text{e} \quad q_4 = \text{cos}\left(\frac{\phi}{2}\right) \quad (8)$$

É possível provar que o módulo do quatérnio é 1, visto que \hat{n} é um vetor unitário na direção do vetor velocidade de rotação.

A matriz de atitude em termos dos quatérnios pode ser obtida pelas componentes da matriz de atitude A dada por (Matos, 2012):

$$A = \begin{bmatrix} q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_1q_2 + q_4q_3) & 2(q_3q_1 - q_4q_2) \\ 2(q_2q_1 - q_4q_3) & -q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_3q_2 + q_4q_1) \\ 2(q_3q_1 + q_4q_2) & 2(q_3q_2 - q_4q_1) & -q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Conhecendo-se os elementos $A(i, j)$ da matriz de atitude A (SHUSTER, 1993, SANTOS, 2011, MATOS, 2012), obtém-se, para $q_4 \neq 0$, as componentes do quatérnio (SHUSTER, 1993):

$$q_4 = \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + A(1,1) + A(2,2) + A(3,3)} \quad (10)$$

$$q_1 = \frac{1}{4q_4} [A(2,3) - A(3,2)] \quad (11)$$

$$q_2 = \frac{1}{4q_4} [A(3,1) - A(1,3)] \quad (12)$$

$$q_3 = \frac{1}{4q_4} [A(1,2) - A(2,1)] \quad (13)$$

Para o caso em que $q_4 = 0$, pode-se obter as componentes do quatérnio de outras maneiras, visto que as equações acima não são válidas neste caso (ZANARDI, 2005).

O conjunto de equações cinemáticas em quatérnios é dado por:

$$\dot{q}(t) = \frac{1}{2} \Omega(\hat{\omega}) q(t) \quad (14)$$

sendo ω o vetor velocidade angular fornecidos pelos giroscópios que estão a bordo do satélite, e

$$\Omega(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y & \omega_x \\ -\omega_z & 0 & \omega_x & \omega_y \\ \omega_y & -\omega_x & 0 & \omega_z \\ -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z & 0 \end{pmatrix} \cdot \quad (15)$$

4.2. Parâmetros Modificados de Rodrigues

Como foi visto na sessão anterior, o quatérnio direto não apresenta singularidades nas equações cinemáticas e o modelo cinemático é linear. Além disso, ele também possui um vetor de 4 componentes, uma a mais em relação aos PMR, que são 3. Desta forma, o uso dos PMR é bastante plausível, tendo a dimensão do vetor de estado a ser estimado reduzida. Para isso é definido um erro (incremento) do quatérnio, denotado por $\delta q \equiv [\delta \vec{q}^T \ \delta q_4]^T$, e será representado utilizando um vetor de parâmetros modificados de Rodrigues dado por (Crassidis, Markley, 2003):

$$\delta p = f \frac{\delta \vec{q}}{a + \delta q_4} \quad (16)$$

no qual δp é um vetor 3×1 , “a” é um parâmetro de 0 a 1, e f é um fator de escala, tal que $f = 2(a+1)$. A escolha de f pela função é tal que $\|\delta p\|$ é igual a ϑ para pequenos erros. A transformação inversa de δp para δq , transformação utilizada no algoritmo deste projeto é dada por:

$$\delta q_4 = \frac{-a\|\delta p\|^2 + f\sqrt{f^2 + (1-a^2)\|\delta p\|^2}}{f^2 + \|\delta p\|^2} \quad (17)$$

$$\delta \vec{q} = \begin{bmatrix} \delta q_1 \\ \delta q_2 \\ \delta q_3 \end{bmatrix} = f^{-1}(a + \delta q_4) * \delta p \quad (18)$$

$$\delta q = \begin{bmatrix} \delta \vec{q}_i \\ \delta q_4 \end{bmatrix} \quad i = 1, 2, 3 \quad (19)$$

Dado o quatérnio no instante atual t (q_0) e o erro do quatérnio (δq) associado ao instante posterior $t+1$, calcula-se o quatérnio no instante $t+1$:

$$q = \delta q \otimes q_0 \quad (20)$$

Na equação acima temos uma multiplicação matricial que ocorre da seguinte forma:

$$\delta q \otimes q_0 = \begin{bmatrix} \delta q_4 & \delta q_3 & -\delta q_2 & \delta q_1 \\ -\delta q_3 & \delta q_4 & \delta q_1 & \delta q_2 \\ \delta q_2 & -\delta q_1 & \delta q_4 & \delta q_3 \\ -\delta q_1 & -\delta q_2 & -\delta q_3 & \delta q_4 \end{bmatrix} * q_0 \quad (21)$$

A partir destes cálculos implementados no algoritmo com Filtro de Kalman Unscented, obtém-se os quatérnions q . Neste caso, como já explicado anteriormente, evitamos os possíveis erros e problemas que os quatérnions poderiam proporcionar. A partir dos PMR temos então uma melhor confiabilidade dos resultados e menor margem de erro.

5. Filtro de Kalman Unscented com PMR

O Filtro de Kalman é uma técnica matemática utilizada no intuito de diminuir a variância do erro de uma medida estimada, equiparando os valores estimados aos reais. Resumidamente, esta técnica se divide em duas etapas: a fase de propagação e a de atualização (MATOS, 2013, GARCIA, 2011).

No algoritmo trabalhado é utilizado o Filtro de Kalman Sigma-Ponto, do tipo Filtro de Kalman Unscented (FKU). Em Garcia (2011) é explicado que este Filtro, comparado aos outros, proporciona uma maior precisão na captação da média e covariância de um sistema. Durante uma transformação não-linear, este gera um conjunto de vetores que permanecem com a mesma média e covariância das variáveis aleatórias antes da transformação (MATOS, 2013).

Baseado nas referências (CRASSIDIS, MARKLEY, 2003), o equacionamento do FKU utilizando os Parâmetros de Rodrigues será apresentado em três fases: Inicialização do algoritmo, propagação e atualização do filtro.

5.1. Inicialização do Algoritmo

Para inicialização do filtro é necessário os seguintes dados para $k=0$:

Quaternion inicial: $q_k = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$.

vetor de bias do giro: $\beta_k = [\beta_x, \beta_y, \beta_z]^T$ rad/s.

PMR: $dp_k = [0, 0, 0]$.

Elementos da diagonal principal da Matriz de covariância P: $\sigma_\phi, \sigma_\theta, \sigma_\psi, \sigma_{\epsilon_x}, \sigma_{\epsilon_y}, \sigma_{\epsilon_z}$.

Elementos da diagonal principal da Matriz de covariância R: $\sigma_{DSS1}, \sigma_{DSS2}, \sigma_{IRES1}, \sigma_{IRES2}$.

Elementos da diagonal principal da Matriz de covariância Q: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \sigma_{Dgx}, \sigma_{Dgy}, \sigma_{Dgz}$.

A partir do vetor de estado no instante k , calcula-se a matriz de sigma-ponto associada a ele e dada por:

$$\sigma_k \leftarrow 2n \text{ columns from } \pm \sqrt{(n + \lambda) [P_k^+ + Q_k]} \quad (22)$$

$$\chi_k(\mathbf{0}) = \hat{x}_k^+ \quad (23)$$

$$\chi_k(i) = \sigma_k(i) + \hat{x}_k^+ \quad (24)$$

O vetor de estado em função dos PMR é definido das equações anteriores (Equações 22, 23 e 24) e descrito por:

$$\chi_k(\mathbf{0}) = \hat{x}_k^+ = \begin{bmatrix} \delta \hat{p}_k^+ \\ \beta_k^+ \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$\chi_k(i) = \begin{bmatrix} \chi_k^{\delta p}(i) \\ \chi_k^{\beta}(i) \end{bmatrix} \quad i = 0, 1, \dots, 12 \quad (26)$$

A partir de $\chi_k(i)$ é feito o cálculo do sigma- pontos do Incremento de Quatérnions, dado pelas equações 17, 18 e 19. Este cálculo é realizado para cada vetor i , sendo δp referente ao vetor $\chi_k^{\delta p}(i)$. O Quatérnion Sigma-ponto é obtido por:

$$\hat{q}_k^+(\mathbf{0}) = \hat{q}_k^+ \quad (27)$$

$$\hat{q}_k^+(i) = \delta \hat{q}_k^+(i) \otimes \hat{q}_k^+ \quad i = 1, 2, \dots, 12 \quad (28)$$

5.2. Propagação do Filtro

Utilizando o Quatérnion Sigma-ponto \hat{q}_k^+ , propaga-se ele de acordo com:

$$\hat{q}_{k+1}^-(i) = \Omega[\hat{w}_k^+(i)] * \hat{q}_k^+(i) \quad (29)$$

onde w_k corresponde à velocidade angular do satélite e \hat{q}_{k+1}^- o quatérnion propagado.

Obtido o Quatérnion Sigma-ponto propagado determina-se o incremento de quatérnions propagado por:

$$\delta q_{k+1}^-(i) = \hat{q}_{k+1}^-(i) \otimes [\hat{q}_{k+1}^-(\mathbf{0})]^{-1} \quad (30)$$

onde $\delta q_{k+1}^-(\mathbf{0})$ é o quatérnion identidade.

Para se obter os Parâmetros Modificados de Rodrigues propagados utiliza-se a equação 16 para cada vetor i obtido pela equação 30. Desta forma, o vetor de estado propagado χ_{k+1} em PMR, $\chi_{k+1}^{\delta p}$, é descrito por:

$$\chi_{k+1}(i) = \begin{bmatrix} \chi_{k+1}^{\delta p}(i) \\ \chi_{k+1}^{\beta}(i) \end{bmatrix} \quad i=1,2,\dots,12 \quad (31)$$

sendo $\chi_{k+1}^{\beta}(i) = \chi_k^{\beta}$.

A média propagada, $\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^-$, e a covariância, $\hat{\mathbf{P}}_{k+1}^-$, são determinadas a partir das estatísticas dos sigma-pontos propagados, dadas por:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- = \sum_{i=0}^{2n} W_i (\chi_{k+1}^-)_i \quad (32)$$

$$\mathbf{P}_{k+1}^- = \sum_{i=0}^{2n} W_i [(\chi_{k+1}^-)_i - \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^-][(\chi_{k+1}^-)_i - \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^-]^T + \mathbf{Q}_{k+1} \quad (33)$$

com pesos definidos por $W_0 = \frac{\lambda}{(n+\lambda)}$, $W_i = \frac{1}{2(n+\lambda)}$, $i=1,\dots,2n$.

5.3. Atualização do Filtro

Na fase de atualização do filtro, inicialmente transforma-se as colunas de χ_{k+1} através da função de medidas Υ_{k+1} :

$$(\Upsilon_{k+1})_i = h((\chi_{k+1}^-)_i), \quad i=0,\dots,2n \quad (34)$$

$$\hat{\mathbf{y}}_{k+1}^- = \sum_{i=0}^{2n} W_i (\Upsilon_{k+1})_i$$

Com a média do vetor de medidas $\hat{\mathbf{y}}_{k+1}^-$, é possível estimar um vetor de estado e a covariância por:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^+ = \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- + \mathbf{K}_{k+1} (\mathbf{y}_{k+1} - \hat{\mathbf{y}}_{k+1}^-) \quad (35)$$

$$\hat{\mathbf{P}}_{k+1}^+ = \hat{\mathbf{P}}_{k+1}^- - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{P}_{yy} \mathbf{K}_{k+1}^T \quad (36)$$

onde \mathbf{K} é o ganho de Kalman dado por $\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{P}_{xy} \mathbf{P}_{yy}^{-1}$ e

$$\mathbf{P}_{xy} = \sum_{i=0}^{2n} W_i [(\chi_{k+1}^-)_i - \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^-][(\Upsilon_{k+1})_i - \hat{\mathbf{y}}_{k+1}^-]^T \quad (37)$$

$$\mathbf{P}_{yy} = \sum_{i=0}^{2n} W_i [(\Upsilon_{k+1})_i - \hat{\mathbf{y}}_{k+1}^-][(\Upsilon_{k+1})_i - \hat{\mathbf{y}}_{k+1}^-]^T + \mathbf{R} \quad (38)$$

Com o vetor de estado propagado $\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^-$, definido na última etapa, calcula-se o incremento de quaternions atualizado (equação 39) a partir das equações 17, 18 e 19, sendo representado por:

$$\delta q_{k+1}^+ = \begin{bmatrix} \delta \vec{q}_{i_{k+1}}^+ \\ \delta q_{4_{k+1}}^+ \end{bmatrix} \quad i = 1, 2, 3 \quad (39)$$

Obtido o incremento de quatérnion, realiza-se a multiplicação matricial da equação 40 e define-se o Quatérnion Sigma-Ponto atualizado.

$$\hat{q}_{k+1}^+ = \delta q_{k+1}^+ \otimes \hat{q}_{k+1}^-(0) \quad (40)$$

Tendo o Quatérnion Sigma-Ponto atualizado, é apresentado enfim a atitude do satélite artificial. Reinicializando novamente o FKU, $\chi_k^{\delta p}(0)$ é levado a zero para a próxima propagação.

6. Resultados

Nesta seção serão apresentados os dados utilizados na simulação da estimação da atitude do satélite CBERS-2, os quais foram fornecidos pelo INPE. As simulações foram realizadas no software MATLAB e os resultados são apresentados a seguir.

6.1. Dados de teste do satélite CBERS-2

De acordo com dados do INPE, o satélite CBERS-2 foi o segundo satélite que o Brasil desenvolveu em conjunto com a China, lançado com sucesso no dia 21 de Outubro de 2003. Este segundo satélite é idêntico ao CBERS-1 em sua constituição técnica, missão no espaço e em suas cargas úteis (equipamentos que vão à bordo). Um dos grandes motivos para a realização desta aliança entre Brasil e China era o grande potencial agrícola e ambiental de ambos os países, no qual se viu a necessidade de se monitorar constantemente estas áreas.

Nesta seção serão apresentados os dados de teste do CBERS-2 para análise de sua estimação. As medições foram fornecidas pelo INPE e retiradas do trabalho de Garcia (2011) e são datadas do dia 22 de abril de 2006.

A tabela 1 apresenta o período e a taxa de amostragem das observações dos sensores fornecidas pelo CCS do INPE. A cada novo instante, foram processadas 7 medidas sendo 2 de sensores de Terra infravermelho, 2 de sensores solares digitais e 3 medidas referentes aos incrementos da atitude fornecidas pelo giroscópio.

Data	Período das observações		Intervalo de Amostragem	Medidas Processadas		
dia/mês/ano	t_0 (hh:mm:ss.sss)	t_f (hh:mm:ss.sss)	Δt (s)	DSS	IRES	Giro
22/Abril/2006	13:46:25.000	13:55:27.250	10.23	2	2	3

Tabela 1 – Dados referentes às observações utilizadas do CBERS-2

Nas Figuras 2 e 3 são apresentadas as medidas reais obtidas pelos Sensores Solar Digital (DSS), de Terra Infravermelho (IRES) e Giroscópio, respectivamente, de acordo com a cada instante em que foi determinada a medida (Garcia, 2011).

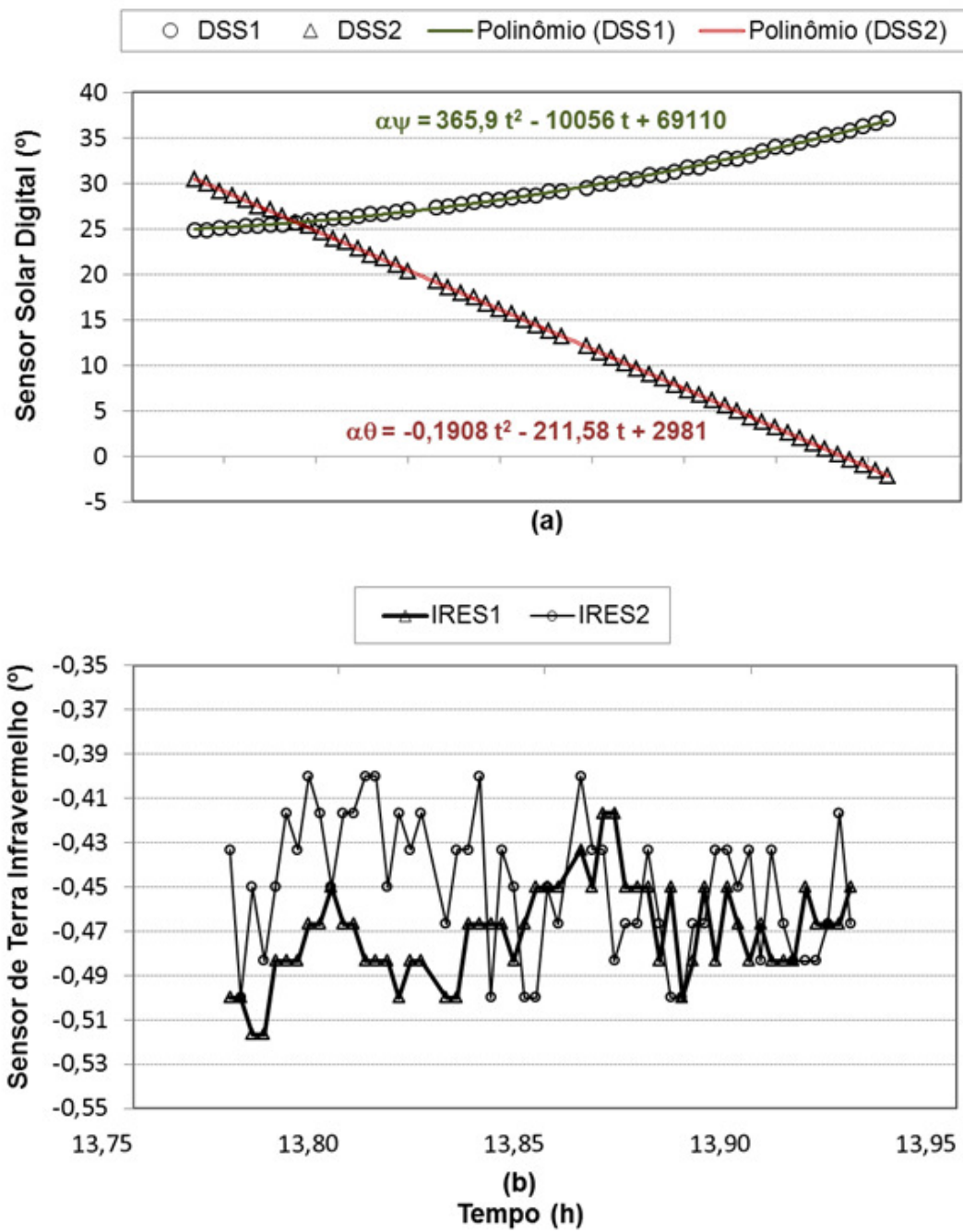


Figura 2 – (a) Medidas reais dos Sensores Solar Digital 1 e 2. (b) Medidas reais fornecidas pelos Sensores de Terra Infravermelho 1 e 2.

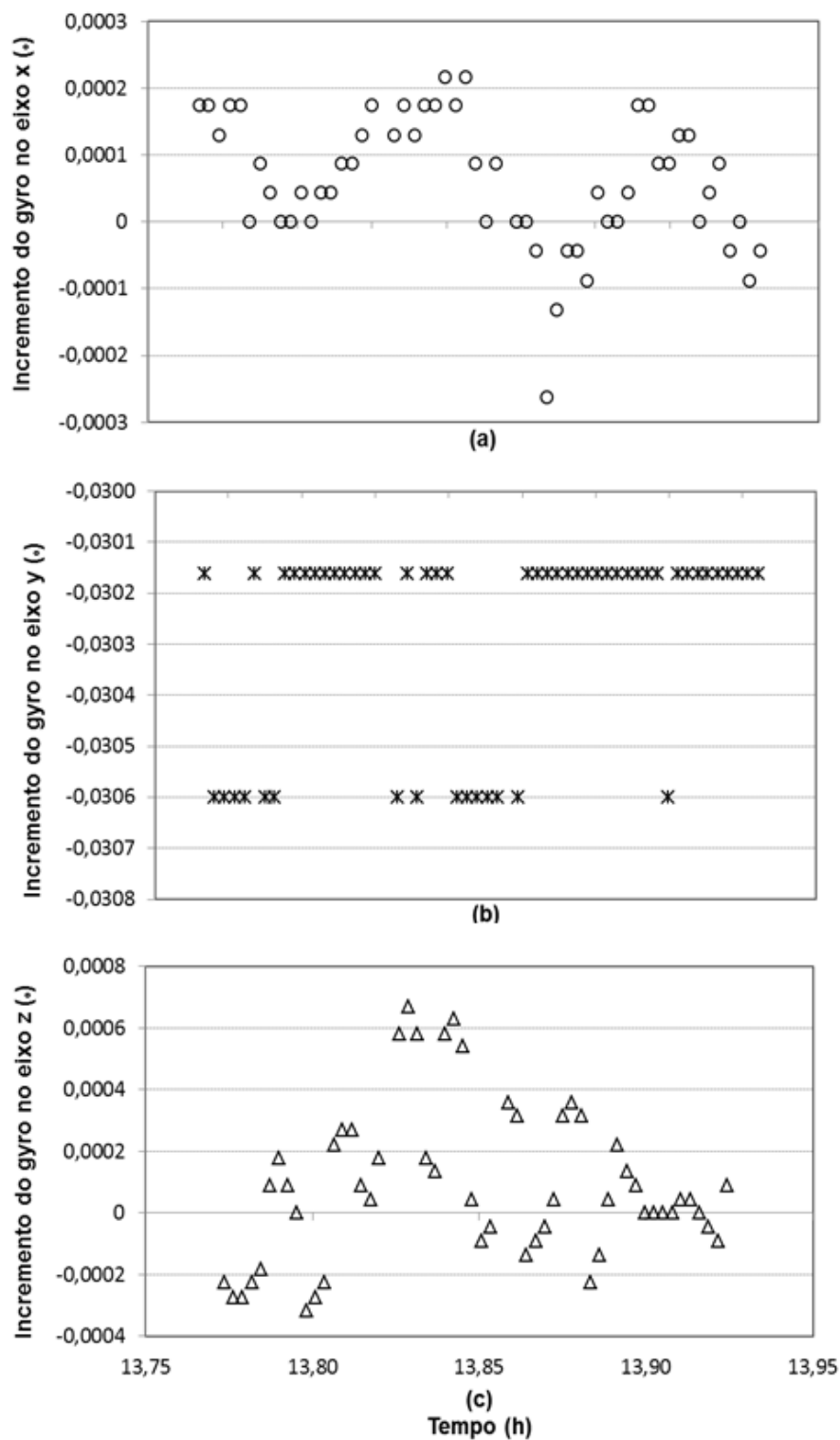


Figura 3 – Medidas reais fornecidas pelo giroscópio no (a) eixo x (b) eixo y (c) eixo z.

6.2. Dados de Entrada

Os dados utilizados na inicialização do algoritmo são apresentados a seguir.

ϕ (deg)	θ (deg)	ψ (deg)	β_x (deg/h)	β_y (deg/h)	β_z (deg/h)
0	0	0	5,76	4,64	2,68

Tabela 2. Condições iniciais das componentes do vetor de estado

q_1	q_2	q_3	q_4
0	0	0	1

Tabela 3. Valores iniciais dos quatérnions

σ_ϕ (deg)	σ_θ (deg)	σ_ψ (deg)	σ_{ϵ_x} (deg/h)	σ_{ϵ_y} (deg/h)	σ_{ϵ_z} (deg/h)
0,5	0,5	2,0	1,0	1,0	1,0

Tabela 4. Valores da diagonal principal da matriz de covariância inicial (P)

σ_{DSS1} (deg)	σ_{DSS2} (deg)	σ_{IRES1} (deg)	σ_{IRES2} (deg)
0,6	0,6	0,06	0,06

Tabela 5. Valores da diagonal principal da Matriz de covariância do erro de observação (R)

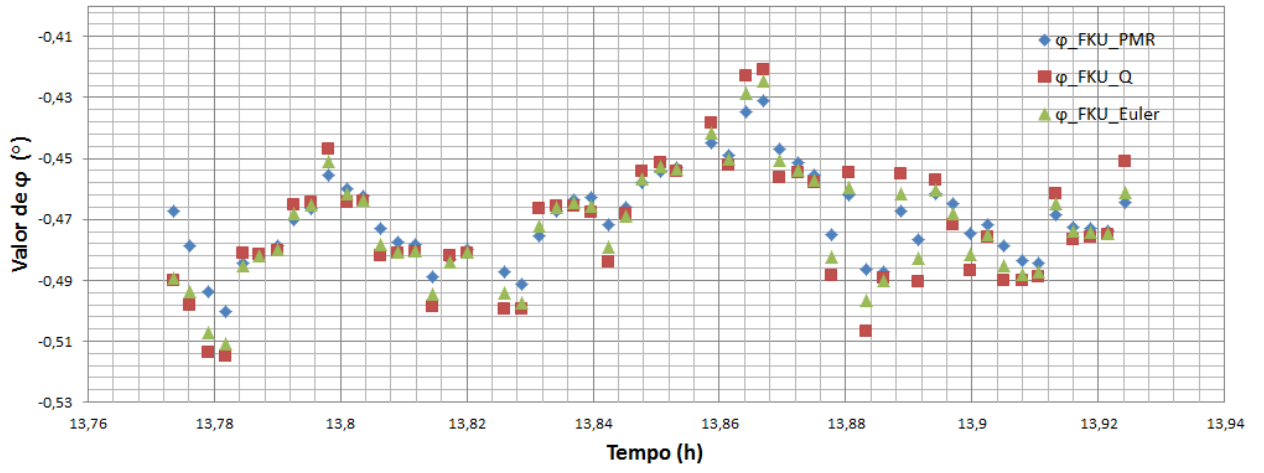
σ_x (deg)	σ_y (deg)	σ_z (deg)	σ_{Dgx} (deg/h)	σ_{Dgy} (deg/h)	σ_{Dgz} (deg/h)
0,1	0,1	0,1	0,01	0,01	0,005

Tabela 6. Valores da diagonal principal da matriz de covariância do ruído dinâmico (Q)

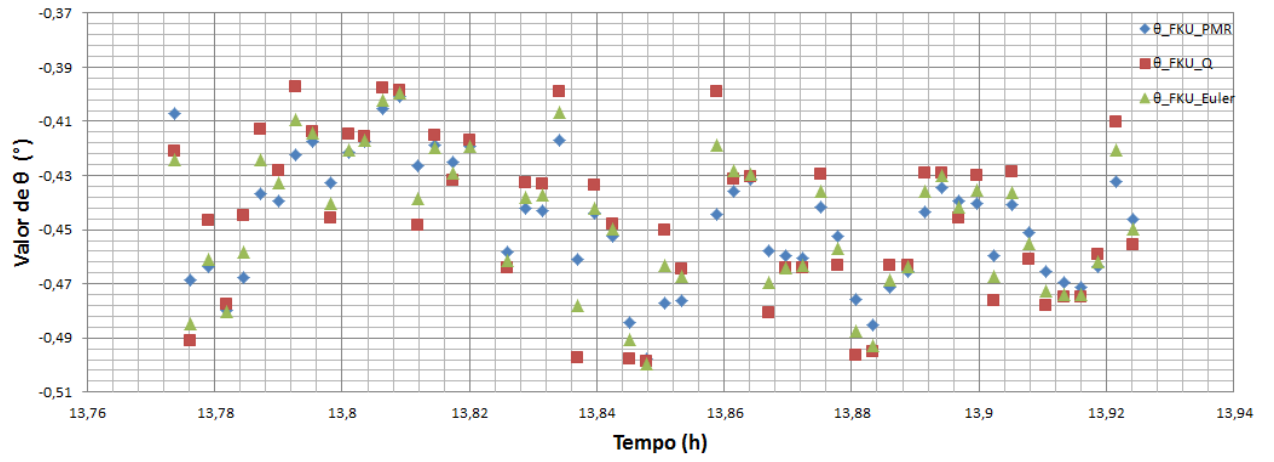
6.3. Estado Estimado

As figuras a seguir apresentam os resultados obtidos neste trabalho utilizando o FKU com os PMR. De forma a avaliar o comportamento obtido pelos PMR, são realizadas comparações com resultados já obtidos em trabalhos anteriores (Matos, 2013, Garcia, 2011) utilizando os quatérnions e os ângulos de Euler para representar a atitude do satélite.

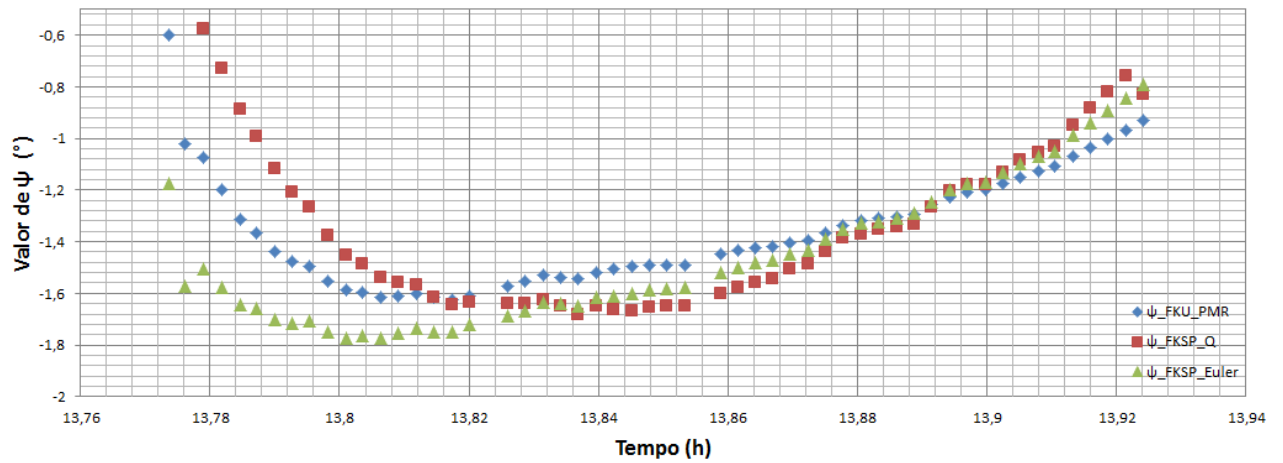
As Figs. 4 mostram o comportamento dos ângulos de roll, pitch e yaw, respectivamente. Nota-se um comportamento similar entre as diferentes parametrizações da atitude, validando assim os resultados obtidos no presente trabalho. A média dos valores obtidos nas 3 parametrizações são apresentados na Tab. 7.



(a)



(b)



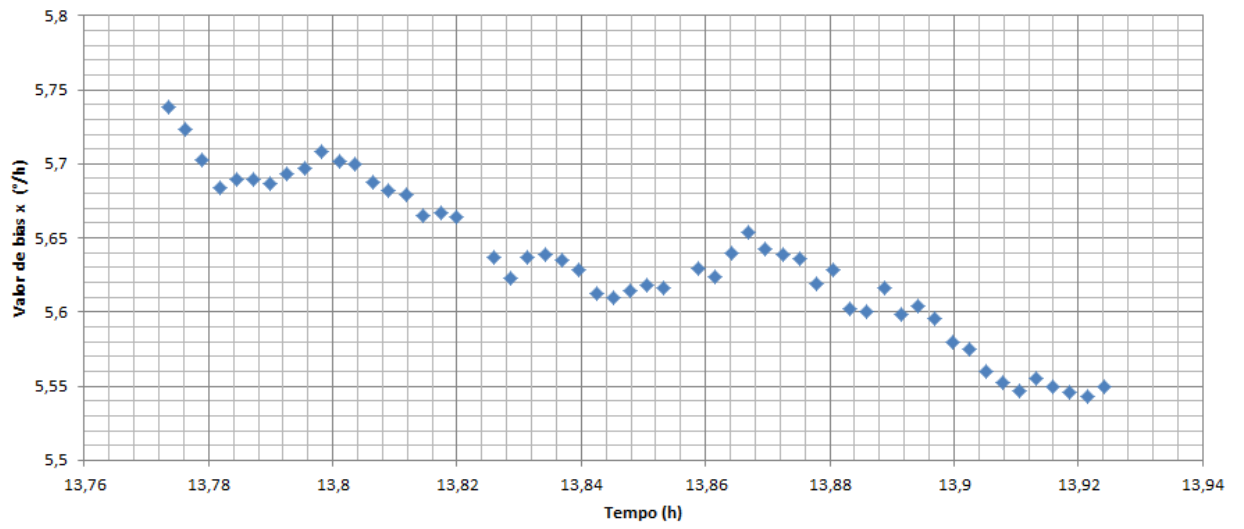
(c)

Figura 4 – Ângulos (a) ϕ (roll) (b) θ (pitch) (c) ψ (yaw) da atitude do satélite estimados com Parâmetros Modificados de Rodrigues, Quatérnions e Ângulos de Euler.

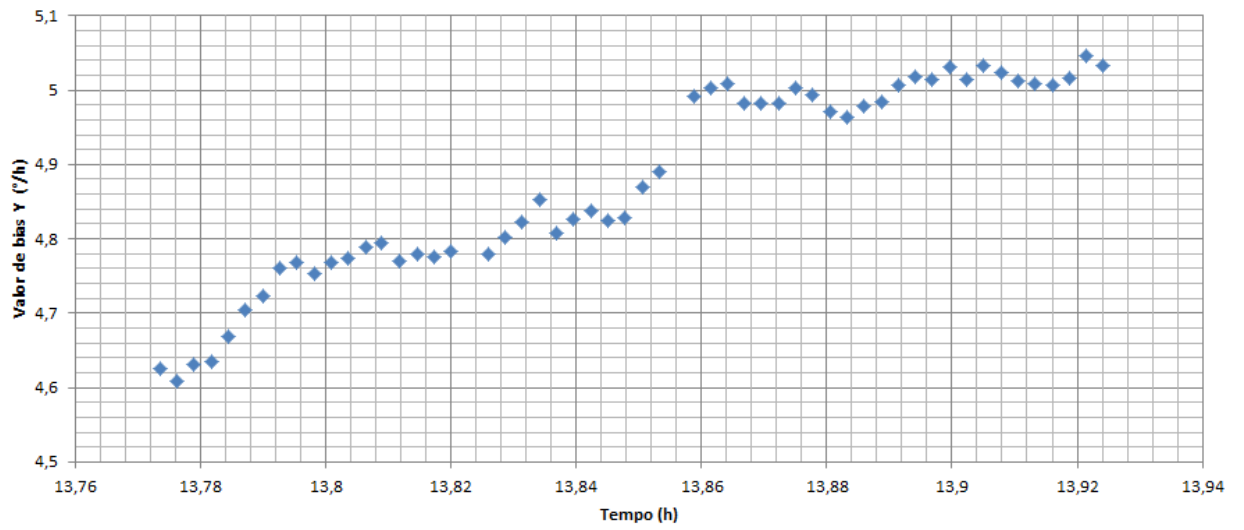
Média dos ângulos das atitudes			
Atitude (°)	PMR	Quatérnions	Ângulos de Euler
ϕ	-0,4698	-0,4729	-0,4722
θ	-0,4475	-0,4457	-0,4471
ψ	-1,3522	-1,3026	-1,4496

Tabela 7 – Média das componentes da atitude estimada utilizando PMR, Quatérnions e Ângulos de Euler

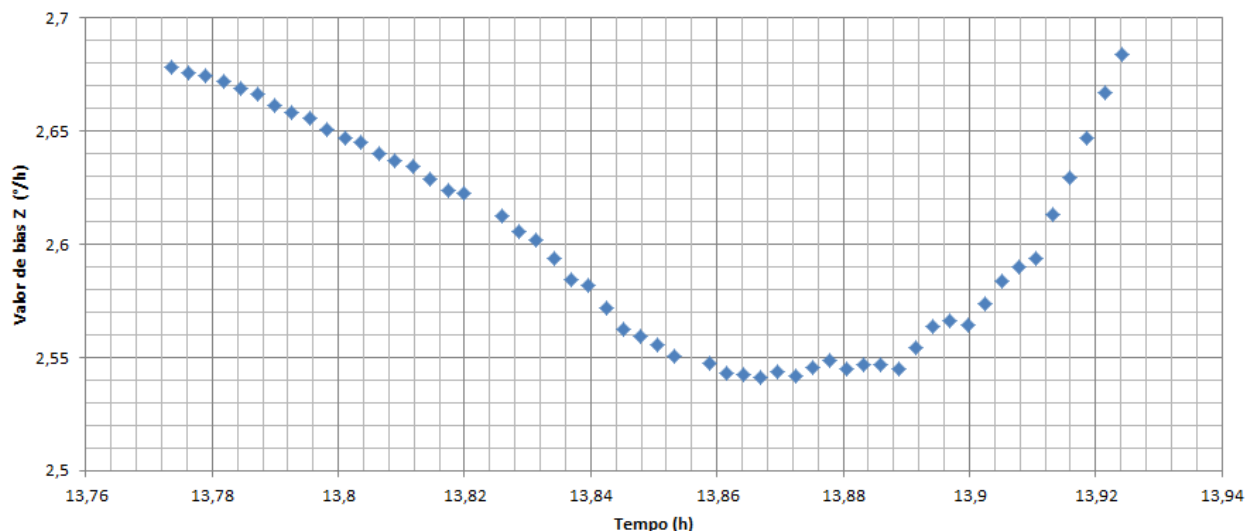
O comportamento do bias do giroscópio estimado utilizando PMR e o filtro de Kalman Unscented é apresentado na Fig. 5. Observa-se que o para o bias o estimador ainda não atingiu o estado de convergência. Isto se deve ao fato de que no período considerado o conjunto de dados utilizados contem poucas medidas. O desvio padrão para as componentes em x, y e z do bias são aproximadamente dados por 0,051 °/h, 0,132 °/h e 0,048 °/h, respectivamente.



(a)



(b)



(c)

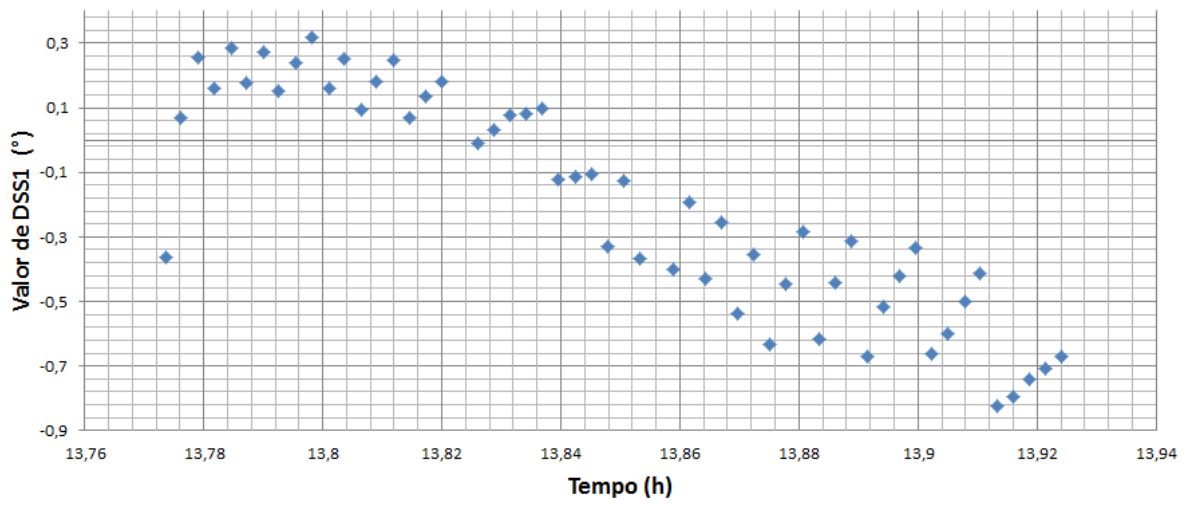
Figura 5 – Componentes de *bias* estimados com Parâmetros Modificados de Rodrigues (a) no eixo x. (b) no eixo y. (c) no eixo z.

A Tab. 8 mostra a média obtida para as componente do *bias* em x, y e z para os PMR. As médias mostradas na referente tabela para os quatérnions e ângulos de Euler foram obtidas nos trabalhos de Garcia (2011) e servem como base para verificar que o comportamento obtido para os *bias* é compatível com o esperado.

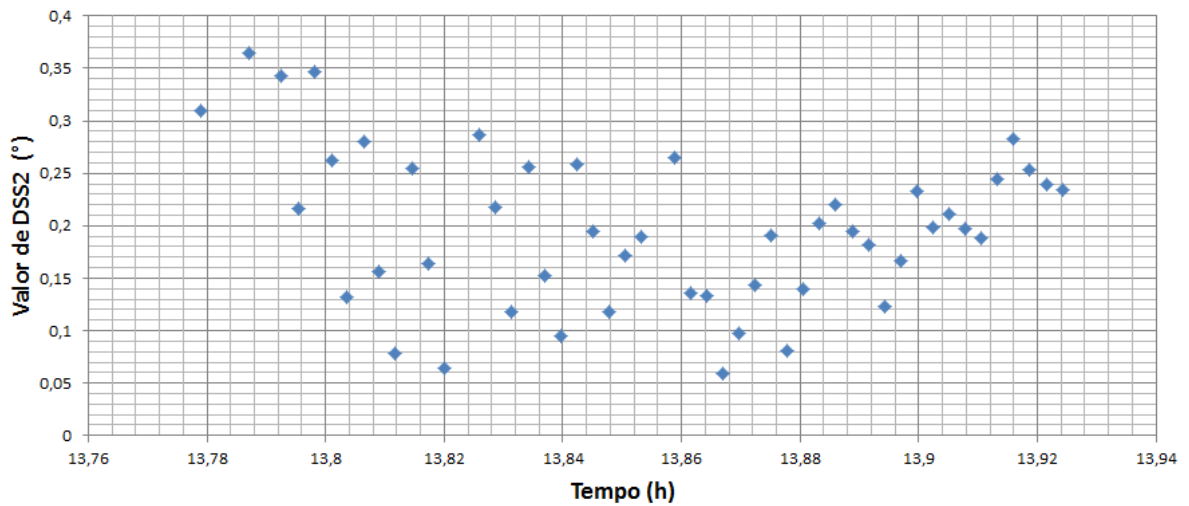
Média dos componentes de <i>bias</i>			
<i>Bias</i>(deg/h)	PMR	Quatérnions	Ângulos de Euler
<i>Bias</i>_x	5,6336	5,7672	5,7502
<i>Bias</i>_y	4,8769	4,7667	4,7969
<i>Bias</i>_z	2,6017	2,6995	2,6400

Tabela 8 - Média das componentes *bias* utilizando PMR, Quatérnions e Ângulos de Euler

Os resíduos dos sensores solar (DSS) e de horizonte (IRES) são apresentados nas Figs. 6 e 7. Cabe lembrar que os resíduos são obtidos pela diferença entre o valor calculado e o valor medido após a fase de atualização do filtro. Considerando que o sensor DSS possui uma precisão menor que o IRES (Garcia, 2011), é estipulado para ele um menor peso para suas medidas, sendo o erro para o DSS de 0,6° e para o IRES de 0,06°.

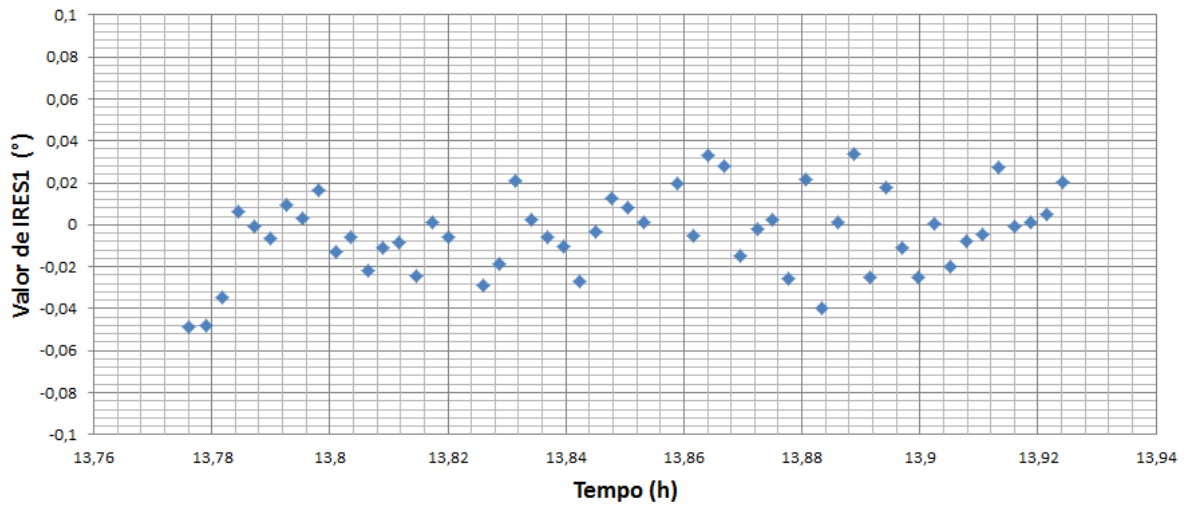


(a)

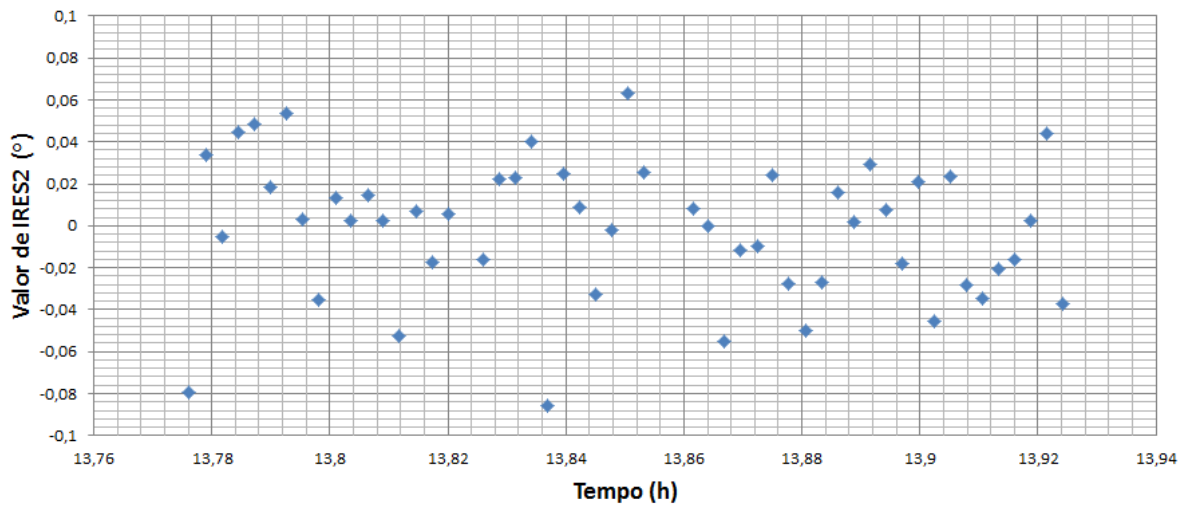


(b)

Figura 6 – Resíduo obtido com Parâmetros Modificados de Rodrigues relacionado aos Sensores Solares (a) DSS1. (b) DSS2.



(a)



(b)

Figura 7 - Resíduo obtido com Parâmetros Modificados de Rodrigues relacionado ao aos Sensores de Terra Infravermelho (a) IRES1. (b) IRES2.

A Tab. 9 mostra a média obtida para os resíduos dos sensores para os PMR. As médias mostradas na referente tabela para os quatérnions e ângulos de Euler foram obtidas nos trabalhos de Garcia (2011) e servem como base para verificar se o comportamento obtido para os resíduos neste trabalho é compatível com o esperado.

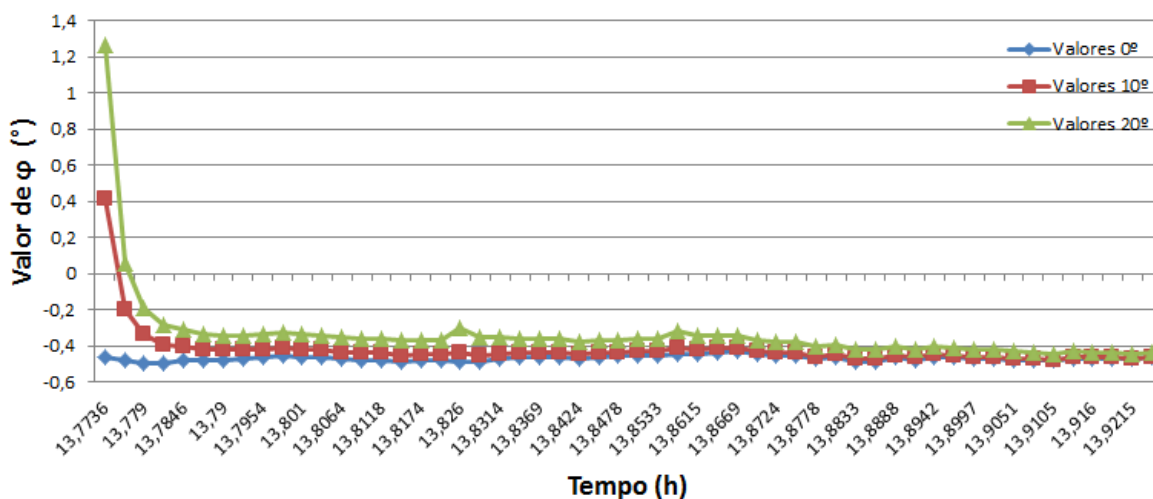
Média dos resíduos			
Sensor (deg)	PMR	Quatérnions	Ângulos de Euler
DSS1	-0,1992	-0,1849	-0,1628
DSS2	0,2267	0,2368	0,1754
IRES1	-0,0136	0,0022	0,0015
IRES2	-0,0075	-0,0037	-0,0023

Tabela 9 - Média dos resíduos fornecidos pelos sensores utilizando PMR, Quatérnions e Ângulos de Euler

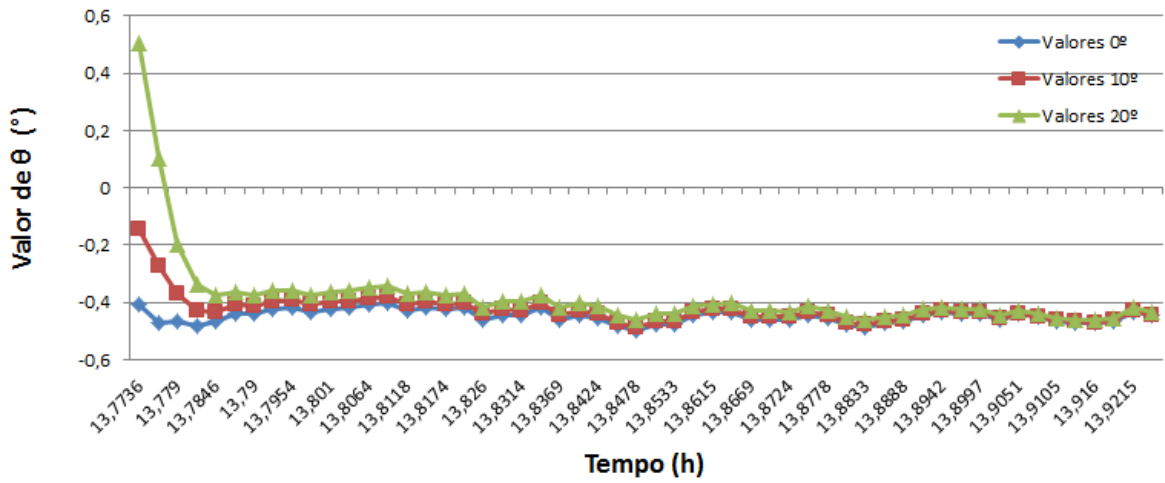
6.4. Teste de Eficiência do FKU com PMR

Nesta seção será apresentado o teste de eficiência do Filtro de Kalman Unscented utilizando os Parâmetros modificados de Rodrigues. Para isso foram considerados dados de entrada para a atitude (roll, pitch, yaw) corrompidos, ou seja, valores distantes dos de convergência. A análise foi realizada para os ângulos de 0°, valor próximo ao de convergência, 10° e 20°, os quais estão muito fora do esperado para a convergência. Outra análise será realizada comparando o tempo de processamento do algoritmo do FKU utilizando PMR e Quatérnions, com o objetivo de avaliar o tempo de processamento de ambas parametrizações com o FKU.

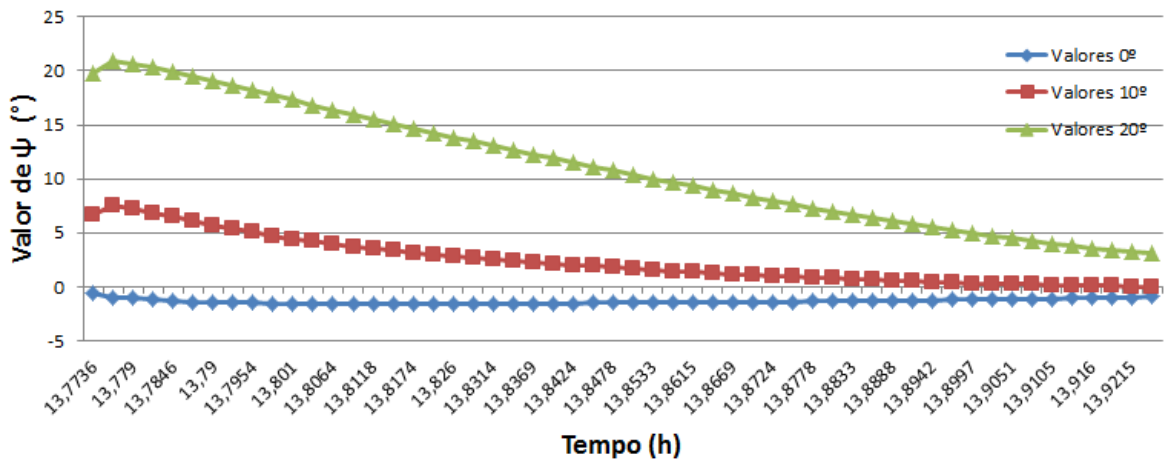
A Fig. 8 apresenta os resultados da atitude considerando os valores iniciais de 0°, 10° e 20°. Nota-se que o filtro converge logo nos primeiros instantes mesmo quando alimentado com dados imprecisos. Tal fato ilustra expressivamente a eficiência do FKU.



(a)



(b)



(c)

Figura 8 – Ângulos (a) ϕ (*roll*) (b) θ (*pitch*) (c) ψ (*yaw*) da atitude do satélite estimados com Parâmetros Modificados de Rodrigues como inicialização de 0° , 10° e 20° .

Visto que o FKU gera um conjunto de $(2n+1)$ sigma-pontos, os quais dependem diretamente da dimensão do vetor de estado (n), espera-se que haja um aumento no tempo de processamento. No entanto, em trabalhos anteriores observou-se que o aumento no tempo de processamento não é proporcional aos $2n+1$ sigma-pontos gerados no FKU, tornando-o competitivo com os demais filtros. Neste trabalho analisou-se o tempo de processamento gasto quando utilizado o PMR em comparação ao tempo gasto quando utiliza-se o quatérnio diretamente. Para isso foram acrescentadas às simulações o comando “tic toc”, o qual nos possibilita visualizar o tempo de processamento do programa. Sendo assim, a simulação foi

repetida 1000 vezes, e este processo foi repetido 10 vezes com o intuito de se obter um valor mais expressivo do tempo de processamento. Na Figura 9, é apresentado o início e fim do programa, ilustrando a utilização do comando descrito acima. Para se obter o valor do tempo gasto no processamento, basta chamar a variável “temp_proc”.

```

37 - tic
38 - for c=1:1000,
    .
    .
    .
327
328 - end
329 - tempo_proc=toc;

```

Figura 9 – Utilização do comando “tic toc”

Nº da repetição	Tempo de Processamento (s)	
	PMR	Quatérnions
1	163,67	116,67
2	150,17	117,74
3	161,40	126,15
4	154,53	111,94
5	160,08	120,41
6	164,96	122,41
7	156,11	128,59
8	156,99	115,51
9	161,68	120,14
10	156,73	123,14
Média dos tempos (s)		
	158,63	120,27

Tabela 10 – Tempo de processamento dos algoritmos

Como descrito na Tab. 10, o tempo de processamento com a utilização dos PMR foi 32% maior do que o tempo gasto utilizando os Quatérnions. Este fato era esperado uma vez que a estimação com o PMR possui uma quantidade maior de cálculos devido aos sigma pontos obtidos para os parâmetros de Rodrigues e para os quatérnions.

7. Comentários finais

Feitas todas as análises gráficas dos resultados fica evidente que a utilização dos PMR na estimação da atitude de satélites artificiais é muito válida ao se tratar de evitar possíveis erros nas manipulações matemáticas. Uma vez comparado com os resultados da obtidos com os

Quaternions e Ângulos de Euler, observou-se um comportamento próximo entre as diversas parametrizações, validando assim a utilização dos PMR. Porém é importante lembrar que o processamento do algoritmo de PMR é mais longo que nos Quaternions, o que leva a uma questão de planejamento na hora da escolha de qual tipo de algoritmo é mais apropriado para determinado trabalho, se será mais valorizado a velocidade para se obter as atitudes, ou se é mais importante evitar possíveis erros matemáticos durante os cálculos.

Além disso foi reafirmado e comprovado a grande eficiência do FKU, dando uma maior confiabilidade a este método de estimação. Uma convergência rápida para diferentes dados de inicialização faz com que este método assuma um caráter de flexibilidade, estando apto a convergir e apresentar os resultados esperado seja quais forem as medidas que alimentam o algoritmo.

8. Referências

CRASSIDIS, J. L.; MARKLEY, F. L. Unscented Filtering for Spacecraft Attitude Estimation. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, v. 26, n.4, p.536-542, 2003.

SCHAUB, H.; JUNKINS, J. L. Stereographic Orientation Parameters for Attitude Dynamics: A Generalization of the Rodrigues Parameters. *Journal of the Astronautical Sciences*, Vol. 44, n°1, Jan-Mar 1996, pp, 1-20.

GARCIA, R. V. Filtro não linear de Kalman Sigma-Ponto com Algoritmo Unscented aplicado à estimativa dinâmica da atitude de satélites artificiais. Tese de Doutorado do curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologias Espaciais/ Mecânica Espacial e Controle. Faculdade de Engenharia, UNESP. Guaratinguetá, 2011.

GARCIA, R. V.; KUGA, H. K.; ZANARDI, M. C. Aplicação do Filtro de Kalman não linear sigma-ponto para estimativa dinâmica da atitude de satélites artificiais. Colóquio Brasileiro de Dinâmica Orbital, Águas de Lindóia, p. 60, 2008.

GARCIA, R. V.; KUGA, H. K.; ZANARDI, M. C. Unscented Kalman Filter for spacecraft attitude estimation using quaternions and Euler angles. *Proceedings: 22ND INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON SPACE FLIGHT DYNAMICS*, Sao Jose dos Campos, p. 1-13, DVD, 2011.

SANTOS, J. C. Análise da estabilidade do Movimento Rotacional de Satélites Artificiais com Quaternions e sob a influência de Torques Externos. Trabalho de Conclusão de Curso. Licenciatura em Matemática. Faculdade de Engenharia, UNESP. Guaratinguetá, 2011.

MATOS, N. F. O; ZANARDI, M. C.; GARCIA, R. V. Estimação do Vetor de Medidas de Quaternion. Trabalho de Iniciação Científica. Bolsa CNPq/INPE. Guaratinguetá, 2013.

JULIER, S. J.; UHLMANN, J. K. A new extension of the Kalman Filter for nonlinear systems. In *SIGNAL PROCESSING, SENSOR FUSION, AND TARGET RECOGNITION*, 6, [S.I]. *Proceedings...* [S.I]: SPIE, 1997. v.3068, p.182-193, 1997. 45, 46, 49.

SHUSTER, M. D. A survey of attitude representation. *Journal of Astron. Sciences.* v. 41. 4, 1993.

WERTZ, J. R. *Spacecraft attitude determination and control.* Kluwer Academic Publishers, 1978.

ZANARDI, M. C. *Fundamentos da Astronáutica.* Apostila do ITA, 1990.

ZANARDI, M. C. *Dinâmica da atitude de satélites artificiais.* (Tese de Livre Docência). Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2005.