



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
**INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS**

## **CONTROLE DO FENÔMENO DE TRAVAMENTO DE FREQUÊNCIA EM SISTEMAS DINÂMICOS**

RELATÓRIO FINAL DE PROJETO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA  
(PIBIC/CNPq/INPE)

Pedro Fernando Almeida Di Donato (ITA, Bolsista PIBIC/CNPq)  
E-mail: [pfadidonato@gmail.com](mailto:pfadidonato@gmail.com)

Dr. Elbert Einstein Nehrer Macau (LAC/CTE/INPE, Orientador)  
E-mail: [elbert@lac.inpe.br](mailto:elbert@lac.inpe.br)

Julho de 2006

## CONTROLE DO FENÔMENO DE TRAVAMENTO DE FREQUÊNCIA EM SISTEMAS DINÂMICOS

Pedro Fernando Almeida Di Donato<sup>1</sup> (ITA, Bolsista CNPQ/PIBIC)  
Elbert Einstein Neher Macau<sup>2</sup> (LAC/INPE, Orientador)

### RESUMO

O objetivo principal do trabalho é ser uma continuação daquele executado no período de Agosto de 2004 a Julho de 2005. Neste trabalho, foram desenvolvidos e analisados algoritmos capazes de controlar o fenômeno de travamento de frequência no modelo do mapa de círculo. Isso rendeu uma publicação em revista internacional, que ocupou uma parte do tempo deste período de concessão de bolsa. O travamento de frequência é um fenômeno muito interessante observado em distintos sistemas dinâmicos compostos por conjuntos de osciladores. Ele ocorre quando a frequência entre dois osciladores distintos fica “travada” (daí o seu nome) em uma certa fração de números inteiros quando os demais parâmetros do sistema tem seus valores variados dentro de um certo intervalo. O mapa de círculo é um modelo unidimensional capaz de apresentar este comportamento. Além disso, é possível demonstrar que vários modelos dinâmicos mais complexos podem ser reduzidos ao mapa de círculo para certos intervalos de seus parâmetros. Algoritmos baseados em controladores clássicos foram implementados no trabalho anterior com sucesso na missão de levar o sistema até a fração de travamento de frequência desejada. Seguindo um objetivo final de encontrar um controlador aplicável fisicamente, o modelo dinâmico testado neste trabalho é bem mais complexo do que o mapa de círculo, sendo formado pelo conjunto de equações diferenciais que modela o comportamento de um sistema físico com muito mais precisão. Uma vez determinados intervalos de parâmetros em que o sistema apresentava um comportamento interessante para o travamento de frequência, um modelo de perturbação externa foi aplicado de forma que as consequências de sua inclusão fossem similares aos dos controladores testados no mapa de círculo. Simulações numéricas foram então usadas buscando-se testar a eficiência destas perturbações como controladoras do fenômeno de travamento de frequência.

---

<sup>1</sup>

Aluno do Curso de Engenharia Aeronáutica, ITA. E-mail: [pfadidonato@gmail.com](mailto:pfadidonato@gmail.com)

<sup>2</sup>

Pesquisador Titular do Lab. Assoc. de Comp. e Matem. Aplic. E-mail: [elbert@lac.inpe.br](mailto:elbert@lac.inpe.br)

# SUMÁRIO

## **CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO**

## **CAPÍTULO 2 – FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E RESULTADOS PRÉVIOS**

- 2.1 Comportamento Quasi-periódico
- 2.2 Mapa do Círculo
- 2.3 Línguas de Arnold e Travamento de Frequência
- 2.4 Escadaria do Diabo e Séries de Farey
- 2.5 Algoritmos de Controle Aplicados

## **CAPÍTULO 3 – APRESENTAÇÃO DO SISTEMA FÍSICO ADOTADO**

- 3.1 Descrição do Sistema
- 3.2 Modelamento Matemático

## **CAPÍTULO 4 – RESULTADOS E ANÁLISES**

- 4.1 Desenvolvimento das Ferramentas Computacionais
- 4.2 Estudo das Regiões com Comportamento Quasi-Periódico
- 4.3 Busca da relação com o Mapa do Círculo

## **CAPÍTULO 5 – PUBLICAÇÃO DOS PRIMEIROS RESULTADOS**

## **CAPÍTULO 6 – CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS**

## **CAPÍTULO 7 – BIBLIOGRAFIA**

# 1. INTRODUÇÃO

Sistemas dinâmicos com componentes oscilatórios estão presentes em uma grande variedade de áreas da ciência. Quando um deles apresenta duas ou mais componentes oscilatórias acopladas não linearmente, um dos fenômenos mais interessantes que pode ser observado é o de travamento de frequência. Ele é caracterizado pela permanência da razão entre as frequências fundamentais do sistema em uma razão  $p/q$  de números inteiros para um certo intervalo de parâmetros.

O estudo inicial deste fenômeno foi realizado no período anterior de concessão da bolsa de iniciação científica com o uso do modelo do mapa de círculo. Tal modelo é o mais simples capaz de apresentar o fenômeno, e é bastante indicado para estudos iniciais acerca dele.

Uma vez feito o estudo inicial, foram desenvolvidos três algoritmos de controle baseados em controladores clássicos, capazes de levar o sistema para um determinado valor de travamento de frequência através de uma perturbação externa.

Os resultados deste trabalho anterior foram a base para o realizado durante este período de concessão da bolsa que visa aplicar os algoritmos testados a modelos mais complexos de sistemas dinâmicos mais próximos a realidade. Matematicamente, a idéia foi aplicar os algoritmos de controle diretamente sobre as equações diferenciais que regem o comportamento de um sistema físico.

Paralelamente, o trabalho inicial foi organizado de forma a ser aceito para publicação em um periódico internacional.

## **2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E RESULTADOS PRÉVIOS**

Nesta seção apresentamos os fundamentos teóricos do presente trabalho e um breve resumo dos resultados obtidos pelo desenvolvido anteriormente e que serviu de base para este.

### **2.1 Comportamento Quasi-periódico**

Dentre os comportamentos que um sistema dinâmico pode apresentar se destacam três: o periódico, o quasi-periódico e o caótico. O primeiro é o mais simples deles e ocorre quando um sistema torna a seu estado inicial após um certo intervalo de tempo denominado período. O último, é um dos mais interessantes e apresenta duas características principais: o sistema nunca retorna a seu estado inicial, e dadas duas condições iniciais muito próximas, a distância entre elas aumenta exponencialmente com o avanço do tempo, o que é conhecido como sensibilidade a condições iniciais.

O comportamento quasi-periódico pode ser situado como um intermédio entre os dois. Uma vez o sistema em um estado inicial, ele não retorna a este em nenhum valor de tempo futuro. Entretanto, dadas duas condições iniciais próximas, a distância entre elas permanece constante com o avanço do tempo.

Tal comportamento é característico de sistemas físicos que contenham duas frequências fundamentais incomensuráveis sem acoplamento não linear. Seu espaço de estados pode ser representado por uma toróide com cada uma de suas fases associada a uma de estas frequências. Se elas são incomensuráveis, com o passar do tempo o sistema evoluirá de forma que sua órbita cobrirá toda a superfície do toróide, mas sem nunca completar um percurso fechado.

### **2.2 Mapa do Círculo**

O mapa do círculo é um modelo de sistemas dinâmico proposto inicialmente por Kolmogorov como um modelo simplificado para rotores mecânicos. Basicamente ele modela um sistema formado por dois osciladores que estão acoplados de forma não linear.

Se cortamos o toróide do espaço de estados com um plano perpendicular a ele, o resultado será uma série de pontos que pertencem a um determinado círculo contido neste plano. No caso de comportamento periódico, o número de pontos distintos será limitado. Entretanto, caso o sistema seja quasi-periódico, os pontos serão infinitos e

preencherão toda a circunferência. A sua idéia do mapa de círculo é, então, modelar a variação do valor da fase observada neste plano com a evolução do tempo.

Matematicamente ele apresenta a seguinte fórmula

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \omega - \frac{k}{2\pi} \text{sen}(2\pi\theta_n) \pmod{1}$$

onde  $\omega$  é igual ao parâmetro de frequência, que, por sua vez, é igual a razão entre os valores de suas frequências fundamentais caso não fossem acopladas não linearmente. O parâmetro  $k$  é denominado fator de acoplamento não linear já que controla a componente trigonométrica da equação dinâmica do sistema.

Para valores de  $k$  entre 0 e 1, o sistema apresenta exclusivamente comportamentos periódicos e quasi-periódicos. Para valores superiores a 1, observam-se zonas de comportamento caótico que não fazem parte do objetivo deste trabalho e não serão estudadas.

### **2.3 Línguas de Arnold e o Travamento de Frequência**

Estudando o modelo do mapa do círculo. Quando o valor de  $k$  é igual a zero, por sua definição, não existe o acoplamento entre os dois osciladores e o valor de próxima fase será simplesmente o anterior acrescido da razão entre as frequências fundamentais dos osciladores.

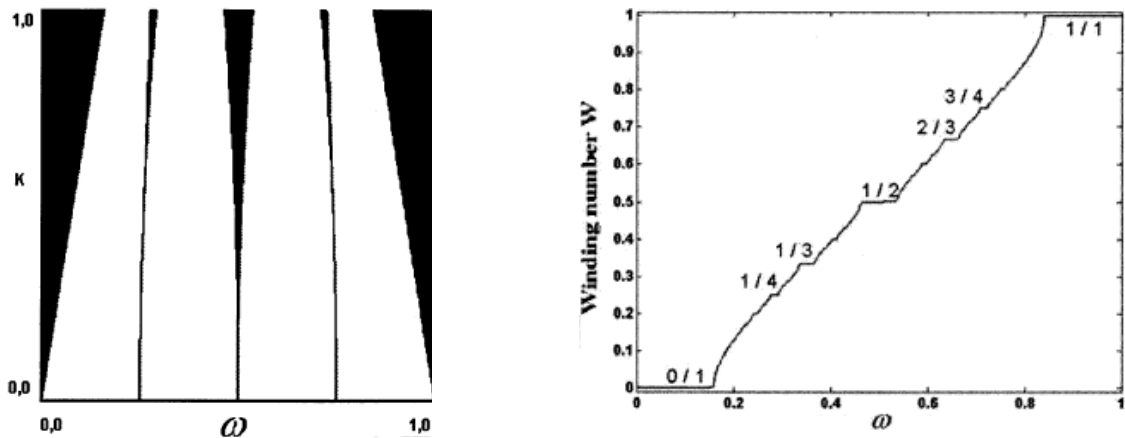
Desta forma, caso essas frequências sejam incomensuráveis, isto é, caso a razão entre elas ( $\omega$ ) não seja um número racional, um determinado valor de fase jamais poderá ser repetido com a evolução do tempo. Por outro lado, no caso de um valor racional de  $\omega$  sempre serão observados comportamentos periódicos do sistema.

Assim, se considerarmos todos os valores possíveis de  $\omega$ , ou seja, aqueles contidos entre 0 e 1, para o valor de  $k$  nulo, temos um número infinito de condições que levam a um comportamento periódico. O conjunto delas, entretanto, tem medida topológica nula devido a intercalação com valores de  $\omega$  irracionais.

Para observar o que acontece quando o valor do acoplamento não linear é aumentado, usamos o gráfico da esquerda da figura 1. Ela apresenta um mapa com todos os valores de  $k$  e  $\omega$  entre 0 e 1, e para cada um deles associamos um ponto negro no caso de comportamento periódico do sistema.

O resultado são estas típicas “línguas” negras que crescem em largura com o aumento do valor de  $k$ . Elas são conhecidas na literatura como línguas de Arnold. Na

verdade, existem uma delas associada a cada valor racional de  $\omega$  quando  $k$  vale 0. Para melhor visualização na figura apresentamos apenas cinco delas.



**Figura 1:** Línguas de Arnold (direita) e Escadaria do Diabo (esquerda)

Como podemos observar, quando acrescentamos e aumentamos o acoplamento não linear entre os osciladores, observamos intervalos de tamanho cada vez maiores de regiões que apresentam comportamento periódico. Isso quer dizer que tal acoplamento permite que mesmo sistemas com frequências fundamentais incomensuráveis apresentem comportamento periódico.

Ademais, para cada uma das línguas, a razão entre as frequência dos osciladores, neste caso representada pelo número de rotação, é fixa. Isso caracteriza exatamente o fenômeno de travamento de frequência que definimos acima. O número de rotação é definido como:

$$W = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\theta_n - \theta_0}{n}$$

Quando o valor de  $k$  atinge o limite máximo de 1, as línguas de Arnold formam um conjunto de Cantor.

## 2.4 Escadaria do Diabo e Séries de Farey

Se fixarmos um valor para  $k$  e fizermos o gráfico do valor do número de rotação em função do parâmetro  $\omega$ , o resultado será similar àquele apresentado no lado direito da figura 1. Conforme discutido acima, para cada uma das línguas, o valor do número de rotação é constante. Logo, o gráfico final apresenta numerosas bases como pode ser observado. Devido a similaridade do gráfico com uma escadaria, surge o nome pelo qual é conhecido na literatura: Escadaria do Diabo.

Conforme pode ser imaginado da discussão anterior, quanto maior o valor de  $k$ , maiores as larguras dos degraus na escadaria. A distribuição destas larguras entre eles, entretanto, apresenta um comportamento bastante organizado descrito pela chamada série de Farey.

Farey, um geólogo inglês, publicou em 1812 uma interessante observação com respeito as frações irredutíveis. Dadas todas as frações irredutíveis cujo denominador é inferior ao valor  $N$ , se estas forem organizadas de forma crescente então cada uma delas pode ser escrita como uma relação entre as suas frações adjacentes na seqüência. Um exemplo ilustra muito bem este fato. Considerando  $N$  igual a 5, temos como frações irredutíveis organizadas em ordem crescente de valor:

$$\frac{0}{1} < \frac{1}{5} < \frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{2}{5} < \frac{1}{2} < \frac{3}{5} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{4}{5} < \frac{1}{1}$$

E para cada uma delas se observa a seguinte relação com suas adjacentes:

$$\frac{1}{5} = \frac{0}{1} \oplus \frac{1}{4} = \frac{0+1}{1+4} \quad e \quad \frac{1}{3} = \frac{1}{4} \oplus \frac{2}{5} = \frac{1+2}{4+5} \quad e \quad \frac{2}{3} = \frac{3}{5} \oplus \frac{3}{4} = \frac{3+3}{5+4}$$

A demonstração desta propriedade de teoria dos números só foi feita por Cauchy um pouco mais tarde, mas o crédito e nome sempre ficaram com Farey.

Agora voltando a Escadaria do Diabo, se observarmos a relação entre a largura de seus degraus e seu respectivo número de rotação, percebemos a ocorrência das séries de Farey. Os dois maiores apresentam número de rotação igual às frações limites 0/1 e 1/1. O maior entre eles é formado exatamente pela regra de Farey e corresponde à fração 1/2. Seguindo esta idéia observamos que o maior entre o 0/1 e 1/2 é o 1/3 e assim por diante. Daí a ligação entre o fenômeno do travamento de freqüência e as séries de Farey.

## 2.5 ALGORITMOS DE CONTROLE APLICADOS

No projeto anterior, o objetivo principal foi o desenvolvimento de uma série de algoritmos capazes de levar, por meio de uma perturbação externa ao mapa de círculo, o sistema sistema para o travamento de freqüência no número de rotação desejado. Para uma descrição detalhada do trabalho veja [1].

A idéia por trás de todos os três algoritmos era fazer uso do conhecimento do comportamento dos degraus de travamento em relação a série de Farey. Assim, dada uma fração de travamento inicial e um desejada, o algoritmo buscava levar o sistema através dos degraus, do maior para o menor, até o desejado. Isso é feito pensando nos futuros passos do trabalho, em particular a implementação do algoritmo em sistemas



reais onde é interessante travar o sistema em degraus mais largos e portanto mais estáveis, ao invés de tentar buscar um degrau de pequenas dimensões diretamente.

O primeiro algoritmo implementado era muito simples e se baseava simplesmente em um buscador que mudava o valor da perturbação para mais ou menos dependendo do resultado obtido. Apesar de funcionar com sucesso, tal algoritmo necessita um intervalo muito grande de tempo (neste caso um grande número de iterações) para chegar ao degrau desejado. Ao invés de tentar otimiza-lo, buscou-se implementar outros dois algoritmos baseados em controladores clássicos.

O primeiro deles era baseado no controlador integrador simples. Os resultados com este já foram bastante superiores aos com o de busca. O segundo era um pouco mais complexo e baseado no controlador proporcional integral. Com ele, o controle era possível com menores valores das constantes dos controladores.

### **3. APRESENTAÇÃO DO SISTEMA FÍSICO ADOTADO**

Uma vez que os algoritmos de controle haviam sido desenvolvidos e testados no modelo do mapa do círculo, o próximo passo é adaptar e aplicá-los em modelos mais complexos de sistemas físicos, em especial utilizando diretamente as equações diferenciais que regem o seu comportamento.

Com este objetivo, foi feita uma pesquisa na literatura acerca de modelos de sistemas que pudessem ser testados. Apesar de numerosos modelos poderem ter seu comportamento aproximado pelo mapa de círculo, é necessário saber como esta aproximação é feita, e sobretudo, para que parâmetros é válida. Somente assim seria possível o estudo de como implementar nossos controladores em sistemas mais próximos aos reais.

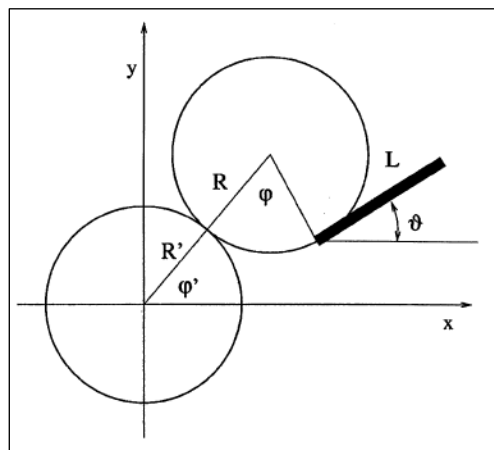
Tal pesquisa resultou na escolha do artigo apresentado na referencia [2] que descreve um sistema formado por duas engrenagens onde uma é fixa e a outra roda em relação a primeira, além de ter uma barra fixa em uma de suas extremidades. O principal fator para a escolha deste sistema deveu-se ao extensivo estudo por parte dos autores e com os resultados apresentado no artigoem que destacam as áreas de quasi-periodicidade e onde seu modelamento é próximo ao do mapa de círculo.

Nesta seção apresentamos uma breve descrição do sistema e depois o seu modelamento matemático seguindo o que foi apresentado no artigo original.

### 3.1 Descrição do Sistema Físico

O sistema a ser estudado consiste em um conjunto de três corpos distintos: duas engrenagens e uma barra. A primeira engrenagem é denominada *solar*, e está fixa com relação ao referencial inercial, não sendo permitida nem mesmo a rotação ao redor de seu eixo de simetria. Seu raio recebe o símbolo  $R'$ . A segunda, por sua vez, é denominada *planetária*, tem raio  $R$ , e gira ao redor de seu eixo ao mesmo tempo que roda ao redor da primeira engrenagem sem que haja deslizamento entre elas. Este movimento é mantido por uma força externa ao sistema de forma que a velocidade angular da segunda engrenagem é constante e igual a  $\omega_d$ .

A figura 2, a seguir ilustra tais explicações. A relação entre os ângulos  $\varphi$  e  $\varphi'$  apresentados nela é facilmente deduzida como:  $R'\varphi' = R\varphi$ .



**Figura 2:** Esquema do sistema físico dinâmico estudado (copiado da referência [2]).

Em uma extremidade da engrenagem planetária está fixa uma barra de comprimento  $L$ , de forma que pode rodar em relação a este ponto de contato. Todo o sistema está contido em um mesmo plano horizontal e, portanto, não há variação de energia potencial durante o movimento.

### 3.2 Modelamento matemático

Conforme apresentado na figura 2, escolhemos como origem de nosso sistema de referência o eixo de simetria da engrenagem solar. Tal sistema apresenta dois graus de liberdade, e, seguindo a referência [2], escolhemos como variáveis o ângulo  $\varphi'$  que a segunda engrenagem faz com o eixo  $x$ , e o ângulo  $\vartheta$  que a barra faz com o mesmo eixo.

Por simplicidade e sem perder a generalidade do problema, escolhemos condições iniciais tais que  $\varphi' = \omega_d t$ . As equações do movimento são deduzidas a partir do Lagrangiano. Este, por sua vez, é determinado apenas pela energia cinética da barra uma vez que a energia potencial do sistema é constante assim como a velocidade angular da segunda engrenagem. O total de energia cinética da barra pode ser escrito como

$$T = \frac{1}{2} \int dm(\dot{x} + \dot{y})$$

As coordenadas  $x$  e  $y$  de um elemento de massa da barra podem ser escritas em função dos dois ângulos  $\varphi'$  e  $v$  além de sua posição relativa na barra. Usando a expressão do Lagrangiano nas equações do movimento de Euler-Lagrange encontramos

$$I\ddot{v} + \frac{1+r}{2} mLR\omega_d^2 \{r \text{sen}(v - r\varphi) - (1+r) \text{sen}[v - (1+r)\varphi]\} = Q_v$$

onde  $Q_v$  é a força de atrito que age no ponto de contato entre a engrenagem e a barra e  $r = R/R'$ . Considerando esta força com expressão simplificada temos

$$Q_v = -\eta\dot{v} \Rightarrow \ddot{v} + \frac{\eta}{I}\dot{v} + \omega_0^2 \left\{ \text{sen}(v - r\varphi) - \frac{1+r}{r} \text{sen}[v - (1+r)\varphi] \right\} = 0$$

onde  $\omega_0^2 = r(1+r) \frac{mLR}{2I} \omega_d^2$ .

Usando uma variável de tempo adimensional  $\tau = \omega_0 t$  e introduzindo a seguir as seguintes mudanças de variáveis:

$$\theta = v - r\varphi, \quad a = \frac{\omega_d}{\omega_0} = \sqrt{\frac{2L}{3r(1+r)R'}}, \quad Q = \frac{\omega_d}{\eta} \sqrt{r \frac{1+r}{2} mLR} \quad e \quad \varphi = \omega_d t = a\tau$$

Chegamos, finalmente, ao sistema de equações que descrevem o sistema:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{d\tau} &= \dot{\theta} \\ \frac{d\dot{\theta}}{d\tau} &= -\frac{1}{Q}\dot{\theta} - \text{sen}\theta + \frac{ar}{Q} - \frac{1+r}{r} \text{sen}(\theta - \varphi) \\ \frac{d\varphi}{d\tau} &= \omega_d \end{aligned}$$

Durante todo o trabalho, o valor de  $\omega_d$  é assumido constante. Para qualquer instante temos que o estado do sistema é descrito pelo vetor  $(\theta, \dot{\theta}, \varphi)$  e os seus parâmetros são três:  $a, r$  e  $Q$ .

## **4. RESULTADOS E ANÁLISES**

Nesta seção apresentaremos o que foi desenvolvido neste trabalho até agora no sentido de se modelar e estudar o comportamento do sistema físico escolhido, apresentando os resultados obtido.

### **4.1 Desenvolvimento da Ferramenta Computacional**

Para simular o comportamento do sistema dinâmico foram construídas rotinas computacionais desta vez em linguagem C, ao contrario do trabalho desenvolvido no passado que era baseado na ferramenta MATLAB.

Esta mudança tem por objetivo escrever funções mais robustas e que possam vir a ser aplicadas com diferentes sistemas dinâmicos. Sentiu-se essa necessidade uma vez que, ao longo do trabalho desenvolvido até hoje, as funções programadas eram muito específicas o que causava problemas de integração e, em várias ocasiões, a necessidade de se reprogramar toda uma função para que tivesse aplicações apenas ligeiramente modificadas.

Além disso, a linguagem C fornece mais liberdade do que os códigos fonte de MATLAB e não depende deste software para serem executadas. A única subrotina que foi utilizada pronta era uma de integração numérica baseada no método de Runge-Kutta-Felhberg de 7/(8) ordem.

### **4.2 Estudo das Regiões com Comportamento Quasi-Periódico**

De acordo com o já verificado pelos autores da referência [2], tal sistema dinâmico apresenta os três tipos de comportamento: periódico, quasi-periódico e caótico, de acordo com os valores dos parâmetros usados. No artigo, eles fazem um pequeno estudo dos intervalos em que cada um deles é observado.

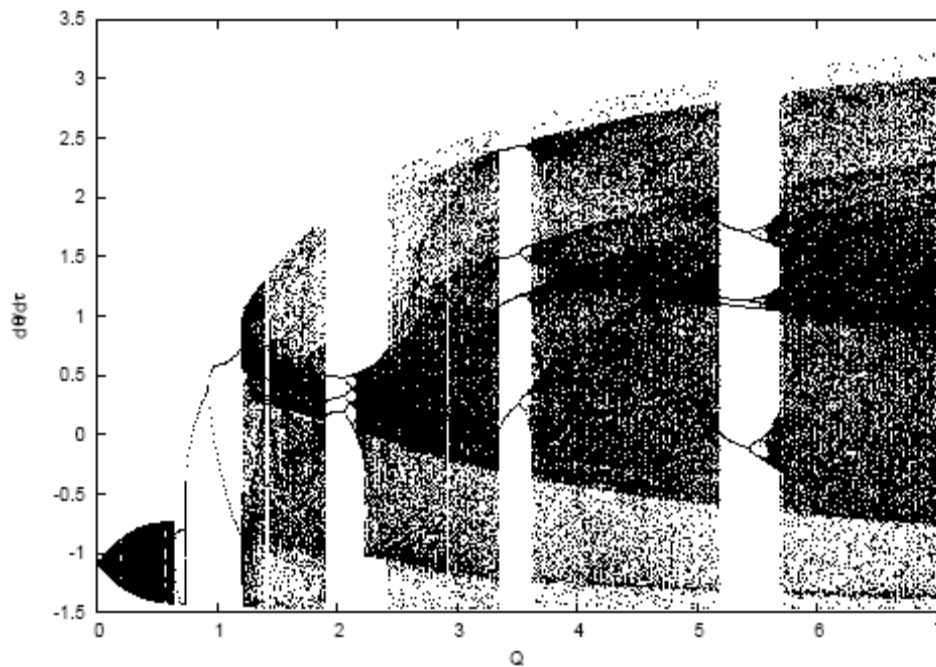
Entretanto, seu interesse não estava no fenômeno de travamento de frequência, de forma que se tornou necessário expandir este estudo por eles desenvolvido concentrando-se nas zonas de interesse deste trabalho, em especial zonas com comportamento quasi-periódico e periódico.

Isto foi feito com o uso de dois diagramas principais: o diagrama de bifurcações e o de máximo valor de expoente de Lyapunov. Regiões de comportamento quasi-periódico são caracterizadas por cobrir um intervalo de valores de  $y$  para cada valor de  $x$  no diagrama de bifurcações enquanto apresenta expoente de Lyapunov igual a zero para

estes mesmo valores de  $x$ . O maior valor do expoente de Lyapunov é calculado conforme o explicado na referência [3].

Seguindo a referência [2], os diagramas de bifurcação são feitos variando-se o parâmetro  $Q$  e observando o valor de  $d\theta/d\tau$  quando  $\varphi$  assume o valor de uma constante escolhida.

A figura 3 a seguir apresenta um exemplo de um diagrama de bifurcação feito para os seguintes valores de parâmetros:  $a = 1,2$  e  $r = 0,9$ . Estes forem um dos primeiros valores de parâmetros utilizados uma vez que um diagrama igual é apresentado em [2] e assim, serve de comparação para os nossos gráficos.



**Figura 3:** Exemplo de diagrama de bifurcação utilizado para estudo do comportamento do sistema.

Neste caso temos  $a = 1,2$  e  $r = 0,9$ .

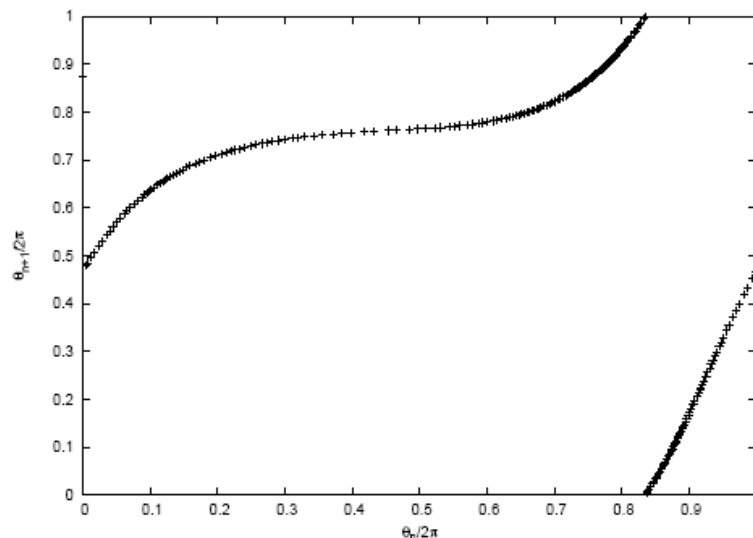
Usando este diagrama associado com um gráfico do máximo valor de expoentes de Lyapunov para cada valor de  $Q$  verificamos que a zona de comportamento quasi-periódico corresponde àquela para os valores de  $Q$  inferiores a 0,7 na figura 2. No caso de valores altos de  $a$  e  $r$  observa-se que a região associada a este tipo de comportamento domina o sistema, o que vem a favor de nosso interesse.

### 4.3 Busca da relação com o Mapa do Círculo

Uma vez terminados os testes buscando intervalos de parâmetros que permitissem grandes zonas de comportamento quasi-periódico, o trabalho evoluiu para busca dos valores de parâmetros para os quais o comportamento do sistema se aproxima do mapa de círculo.

Os primeiros estudos neste sentido também foram feitos para os autores da referencia [2]. Para determinados valores de parâmetros, se plotamos o valor da fase  $\theta$  normalizado para sucessivos valores de  $\varphi$  constante, podemos observar um comportamento que se aproxima em muito do mapa de círculo.

A figura 4 a seguir é um exemplo disto. Neste caso plotamos o valor da fase  $\theta_{n+1}$  em função da fase  $\theta_n$ . Para estes valores de parâmetros observamos que o gráfico é muito similar ao seu correspondente do mapa de círculo com o um valor de acoplamento não linear  $k$  entre 0 e 1, ou seja, um mapa de círculo subcrítico, no qual estamos interessados.



**Figura 3:** Exemplo de estudo do comportamento do sistema próximo ao do Mapa de Círculo subcrítico. Parâmetros neste caso valem:  $a = 0.971$ ,  $r = 1.088$  e  $Q = 0.57$ . O valor de  $\varphi$  de referência é 0,0.

Uma vez obtidos estes gráficos, usamos ferramentas de ajuste não linear de equações para buscar a relação entre os parâmetros do sistema e o mapa do círculo. Tais parâmetros serão a ponte entre os dois sistemas, necessária para podermos aplicar os algoritmos de controle desenvolvidos anteriormente.

Esta etapa do trabalho esta em vias de conclusão conforme é melhor explicado no ultimo capitulo deste relatório.

## **5. PUBLICAÇÃO DOS PRIMEIROS RESULTADOS**

Durante os primeiros meses deste período de concessão da bolsa, os resultados obtidos anteriormente foram melhor organizados e preparou-se um artigo para sua publicação em um periódico internacional.

A primeira versão do artigo foi enviada para o periódico “Nonlinear Dynamics” no final de Outubro de 2005 e aceito para publicação no começo de Janeiro de 2006 com o título “Phase Locking control in the Circle Map”. Correções necessárias foram realizadas dentro deste período e recentemente, no começo de Junho, a prova de impressão foi realizada, de forma que o artigo deve estar sendo publicado nestas semanas.

## **6. CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS**

O trabalho está sendo continuado com o objetivo de aplicar os algoritmos controladores em modelos cada vez mais complexos e acurados de sistemas físicos. No estágio atual estamos terminando a determinação da relação entre os parâmetros físicos do sistema e os do mapa do círculo. Uma vez com esta “ponte” entre os dois sistemas bem definida, a aplicação dos algoritmos será bastante simples. Os planos são para término deste trabalho no começo do segundo semestre de 2006 com a preparação de um novo artigo para publicação destes novos resultados.

## 7. BIBLIOGRAFIA

1. DI DONATO, Pedro F. A.; MACAU, Elbert E. N. **Dinâmica Caótica e Travamento de Freqüência em Mapas Acoplados**. Relatório Final do Programa de Iniciação Científica PIBIC/INPE. 2005.
2. KOBES, Randy; LIU, Junxian; PELES, Slaven. **Analysis of a parametrically driven pendulum**. Physical Review E, Winnipeg, v. 63, n. , p.036219-1-036219-17, 27 fev. 2001.
3. SPOTT, J. C.. **Numerical Calculation of Largest Lyapunov Exponent**. Disponível em: <<http://sprott.physics.wisc.edu/chaos/lyapexp.htm>>. Acesso em: 20 abr. 2006.