



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

INPE-12993-PRE/8270

CONTROLE DE CAOS DE DINÂMICA NÃO LINEAR

Felipe Bastos Gurgel Silva*

*Bolsista ITA

Relatório Final de Projeto de Iniciação Científica (PIBIC/CNPq/INPE), orientado pelo
Dr. Elbert Einstein Nehrer Macau

INPE
São José dos Campos
2005

“Conheces a ti mesmo e a teu inimigo e não perderás nenhuma batalha”.

SUN TSU – A arte da Guerra

*A meus pais,
MARCELO GURGEL CARLOS DA SILVA e
MARIA DE FÁTIMA ARAÚJO BASTOS.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço inicialmente a meus pais, que mesmo a distância tem me apoiado de forma bastante significativa durante esses mais de 3 anos de Curso de Graduação no Instituto Tecnológico de Aeronáutica, e quase 2 anos de Iniciação Científica. Estendo também esse agradecimento a todos meus familiares.

Agradecimentos especiais devem ser mencionados ao meu orientador, Prof. Elbert Einstein Nehrer Macau, pela paciência, conhecimento e atenção compartilhados ao longo desses 2 anos, e a Pedro Fernando Almeida Di Donato, que trabalhou conjuntamente comigo durante o primeiro ano de Iniciação Científica.

Não apenas àqueles que me ajudaram diretamente nesse trabalho, mas a todos os colegas e amigos do Instituto Tecnológico de Aeronáutica, pelo apoio dispensado durante todo esse período.

Muito Obrigado.

RESUMO

O presente trabalho tem por objetivo a continuação do estudo de sistemas dinâmicos com comportamento caótico, correspondente ao período de Iniciação Científica de Agosto de 2003 à Julho de 2004. Nesse trabalho foi dada uma atenção especial a problemas envolvendo algoritmos de controle de tais sistemas, em especial ao método OGY. Uma vez que o comportamento caótico em sistemas naturais, de modo geral, corresponde a uma situação indesejada, é de grande interesse o estudo de métodos para eliminar tal característica. De modo semelhante ao projeto anterior, neste foram desenvolvidas ferramentas computacionais para o estudo de sistemas dinâmicos de interesse.

CONTROL OF CHAOS AND NON LINEAR DYNAMICS

ABSTRACT

The present work has as principal goal the continuation of the study of dynamic systems with chaotic behavior corresponding to the Scientific Initiation Period of August 2003 to July 2004. At this work, special attention has been given to problems related to control algorithms of these systems, especially to the OGY method. Since chaotic behavior in natural systems in general corresponds to a undesirable situation, is greatly interesting to study methods that eliminate this characteristic. As the same as in the last project, computational tools were developed to study dynamic systems of special interest.

SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
LISTA DE FIGURAS	8
CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO	9
1.1 - Esboço Geral.....	11
CAPÍTULO 2 - DESENVOLVIMENTO.....	12
2.1 - Estudo do Comportamento do Pêndulo Amortecido e Forçado.....	12
2.2 - Localização de UPO's no Pendulo Amortecido e Forçado.....	15
2.3 - Localização de UPO's no Mapa de Henón.....	19
CAPÍTULO 3 - CONCLUSÃO.....	23
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	24

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Simulação da projeção de espaço de fase do pêndulo amortecido e forçado 1,07

Figura 2: Simulação da projeção de espaço de fase do pêndulo amortecido e forçado para $g = 1,15$

Figura 3: Diagrama de bifurcação do pêndulo mostrando séries de ω a cada ciclo de forçante

Figura 4: Diagrama de bifurcação do pêndulo para outras condições iniciais

Figura 5: Simulação do mapa do retorno para o pêndulo em θ e ω com pré-seleção dos pontos fixos

Figura 6: Atrator de Henón para $A=1,2$ e $B=0,3$

Figura 7: Zoom do atrator de Henón para os mesmos parâmetros A e B

Figura 8: Órbita periódica instável de período 2 no atrator de Henón

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

De modo geral, ao longo do desenvolvimento da ciência, o estudo de sistemas dinâmicos sempre foi uma área que muito atraiu o interesse da humanidade. Desde quando Isaac Newton introduziu a idéia de modelar matematicamente sistemas naturais, através do desenvolvimento das Equações Diferenciais, de modo que seja possível fazer previsões sobre o comportamento dos mesmos, o tema tem sido continuamente desenvolvido, tanto do ponto de vista de métodos analíticos para a descrição dos sistemas, como também expandido nas mais diversas áreas do conhecimento, desde sistemas puramente físicos a problemas como dinâmica populacional e determinação do comportamento do mercado financeiro.

De modo geral, na ótica matemática, os sistemas dinâmicos podem ser subdivididos em sistemas de tempo contínuo, e sistemas de tempo discreto. Os sistemas em tempo contínuo, em modo geral, são representados por equações diferenciais ordinárias ou parciais, juntamente com condições iniciais e condições de contorno, de tal modo que a função que satisfaz a equação (ou equações), bem como as condições iniciais e de contorno, representa o comportamento dinâmico desse sistema ao longo do tempo. Como exemplo de sistemas dinâmicos de tempo contínuo, temos:

- Osciladores massa-mola-amortecedor; Pêndulo Amortecido e Forçado – Descritos por Equações Diferenciais Ordinárias (EDO's).
- Problema de oscilação de uma corda finita; Problemas de Condução de Calor em estado transiente; Escoamento de Fluido Viscoso (Equações de Navier-Stokes) – Descrito por Equações Diferenciais Parciais (EDP's).

No caso de sistemas em tempo discreto, normalmente temos uma modelagem através de mapas, nos quais temos uma lei de recorrência relacionando os valores de variáveis dinâmicas (variáveis de estado) no instante posterior com seus valores em instantes anteriores. Como exemplos, temos:

- Mapa logístico (utilizado para estudo de dinâmica de populações); Mapa de Henón (posteriormente apresentado nesse trabalho), dentre outros.

No entanto, também podemos subdividir os sistemas dinâmicos em determinísticos (nos quais uma vez conhecidas as variáveis de estado em um dado instante, seu comportamento em qualquer instante posterior é determinado univocamente) e sistemas não determinísticos (ou estocásticos), cuja modelagem, de modo geral, envolve teorias probabilísticas.

No entanto, um fato que chama bastante atenção é o de que existem sistemas determinísticos que apresentam um comportamento dinâmico irregular. Esse fato foi constatado pelo matemático francês do século XIX Henri Poincaré, em seu estudo clássico do chamado problema de três corpos.

Nesse problema, Poincaré estudava o comportamento dinâmico de três corpos sujeitos a ação de força gravitacional em um plano, segundo a lei universal de Newton do inverso da distância ao quadrado.

Esse comportamento estranho foi novamente observado por Edward Lorenz, na década de 1960 ao estudar problemas de convecção atmosférica em um modelo simplificado. Nesse modelo, aparentemente soluções que partiam das mesmas condições iniciais, ao serem simuladas, levavam a órbitas que divergiam, o que seria uma contradição ao fato do sistema ser determinístico. No entanto, temos que o problema da divergência estava associado a imprecisão na determinação das condições iniciais. Dessa forma, o que de fato ocorria era que órbitas que partiam de condições iniciais suficientemente próximas, eram repelidas ao longo do tempo, um fenômeno hoje conhecido como *sensibilidade a condições iniciais*.

Dessa forma, o fato que sistemas determinísticos não implicam necessariamente em presença de comportamento regular tornou-se uma das maiores descobertas da humanidade, e o interesse por sistemas com tal comportamento (caótico) cresceu de modo vertiginoso, principalmente pelo desenvolvimento de métodos numéricos que passaram a ser implementáveis, em computadores com capacidades de processamento cada vez mais elevadas.

Sistemas caóticos são constantemente observados na natureza, em problemas que envolvem desde dinâmica populacional, a situações de arritmia cardíaca e modelos de turbulência. No entanto, de modo geral, os sistemas caóticos representam situações não desejadas. Assim, o objetivo do desenvolvimento de métodos para controle de caos é centrado em tornar periódica a dinâmica do mesmo, considerando que, de modo geral, não temos um grau de liberdade muito elevado para alterar parâmetros do sistema.

1.1 Esboço Geral

De modo a termos uma maior organização na definição de conceitos e apresentação de resultados, o presente trabalho foi subdividido da seguinte forma:

- *SUBITEM 2.1 - Estudo do Comportamento do Pêndulo Amortecido e Forçado:* Neste tópico os conceitos apresentados no projeto anterior de Iniciação Científica são retomados, para a definição de aspectos essenciais para a aplicação de algoritmos de controle de caos;
- *SUBITEM 2.2 - Localização de UPO's no Pendulo Amortecido e Forçado:* Este tópico aborda a descrição do algoritmo de OGY, bem como mostra os resultados preliminares de localização de UPO's no sistema dinâmico em questão.
- *SUBITEM 2.3 - Localização de UPO's no Mapa de Henón:* Apresenta resultados para a localização de UPO's em um mapa bidimensional.

CAPÍTULO 2

DESENVOLVIMENTO

Passemos agora a uma descrição dos aspectos teóricos, bem como dos resultados obtidos no trabalho em questão, seguindo a subdivisão apresentada anteriormente.

2.1 - Estudo do Comportamento do Pêndulo Amortecido e Forçado

O pêndulo amortecido sujeito a uma força de modo cossenoidal, conforme vemos em [1], pode ser modelado simplesmente considerando a Segunda Lei de Newton e rearranjando os termos para a equação em espaço de estados conforme mostrado a seguir:

$$\dot{\omega} = -\omega / q - \text{sen}\theta + g \cos \phi$$

$$\dot{\theta} = \omega$$

$$\dot{\phi} = \omega_D$$

Onde θ , ω e ϕ são as variáveis de estado, representado respectivamente a posição angular, a velocidade angular e a fase do forçante; e q , g e ω_D são parâmetros correspondentes ao fator de amortecimento, a amplitude do forçante externo e a frequência do forçante.

O fato de termos três variáveis de estado, bem como as equações dinâmicas possuírem termos não lineares faz com que sejam satisfeitas as condições necessárias para a observação do comportamento caótico.

No período anterior do projeto, foram desenvolvidas ferramentas computacionais em plataforma *Visual Basic* para a análise dinâmica do pêndulo. Para termos a evolução do sistema a partir de condições iniciais, as equações diferenciais acima foram integradas numericamente utilizando o algoritmo de Runge-Kutta de 4ª ordem [2].

As soluções das equações diferenciais, sendo fixados valores para os três parâmetros, levam a órbitas no espaço de fase (θ, ω, ϕ) . Tomando projeções no plano (θ, ω) , temos uma idéia da evolução das mesmas, uma vez que a fase do forçante cresce de modo linear com o tempo.

As figuras a seguir nos mostram simulações feitas para $g=1,07$ e $g=1,15$, com valores de q e ω_D fixados, sendo desprezadas as soluções transientes (de modo geral só estamos interessados em soluções de regime).

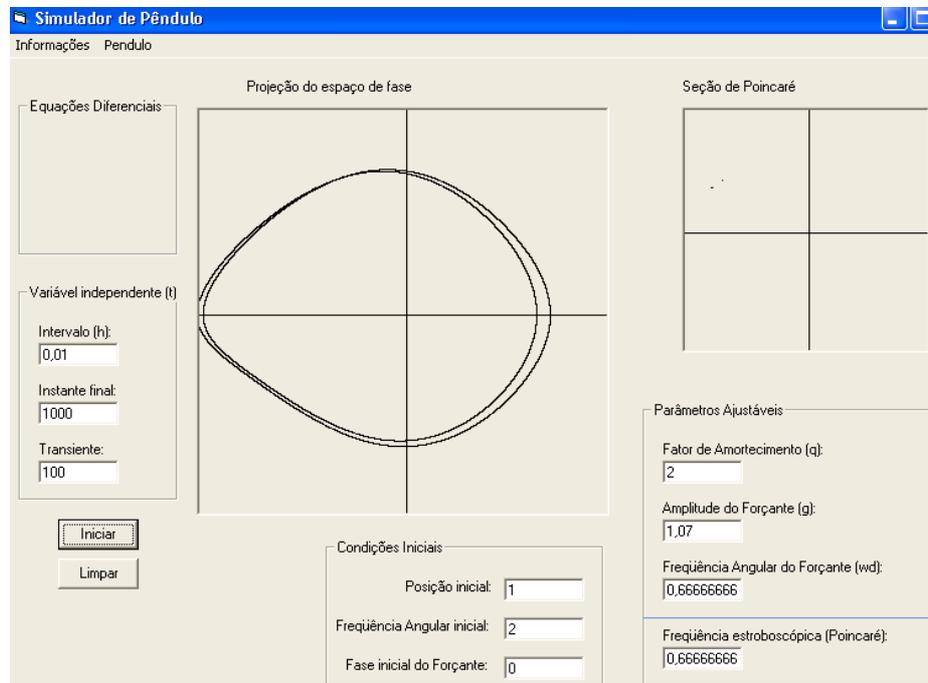


Figura 1: Simulação da projeção de espaço de fase do pêndulo amortecido e forçado 1,07

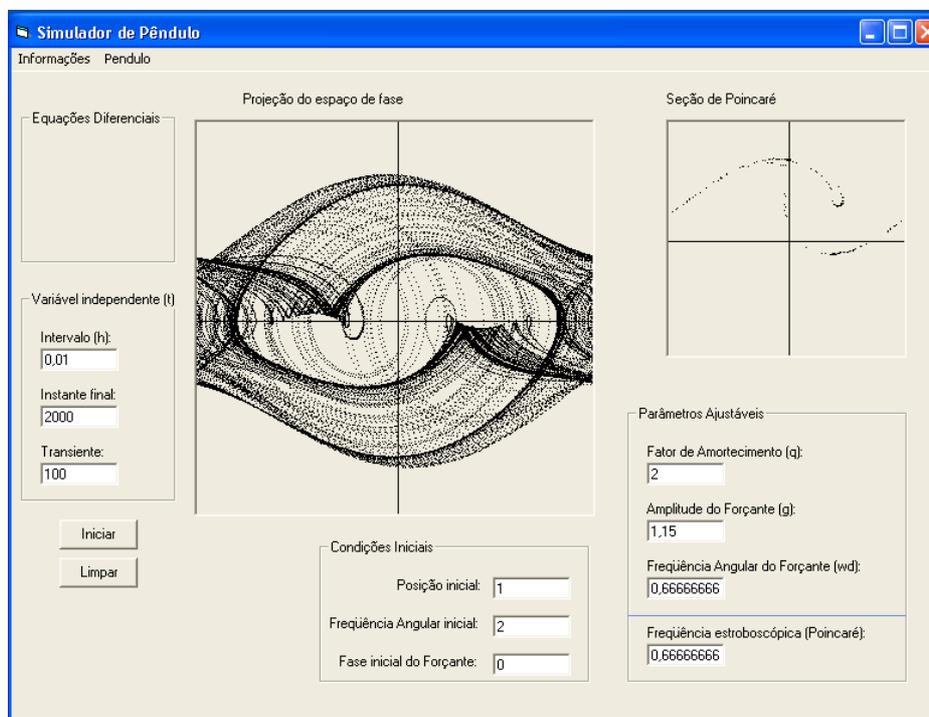


Figura 2: Simulação da projeção de espaço de fase do pêndulo amortecido e forçado para $g = 1,15$

Através de tais simulações, pode-se observar a variedade de comportamento dinâmico mostrado no sistema em questão. Para a primeira combinação de parâmetros, notamos que o sistema é periódico (com período 2). Já na segunda combinação, observamos o comportamento irregular da trajetória, evidenciando o comportamento caótico.

A seção de Poincaré, apresentada nos cantos superiores à direita, é uma forma de transformarmos um sistema contínuo de ordem $n=3$ em um sistema discreto de ordem $n-1=2$. Essa é definida como o conjunto de pontos projetados em (θ, ω) toda vez que inicia-se uma novo ciclo de forçante. Numericamente, a seção de Poincaré é obtida comparando as fases φ em dois instantes sucessivos do método de Runge-Kutta, reduzidas ao intervalo $[-\pi, \pi]$. O entendimento da seção de Poincaré será de suma importância para o entendimento do algoritmo OGY de controle de caos. Observa-se que, na Figura 1, existem dois pontos distintos na seção, enquanto que na Figura 2 tem-se uma estrutura fractal, correspondente a um atrator caótico.

A variedade de comportamentos que o pêndulo em questão apresenta pode ser melhor visualizada pelo diagrama de bifurcação mostrado a seguir:

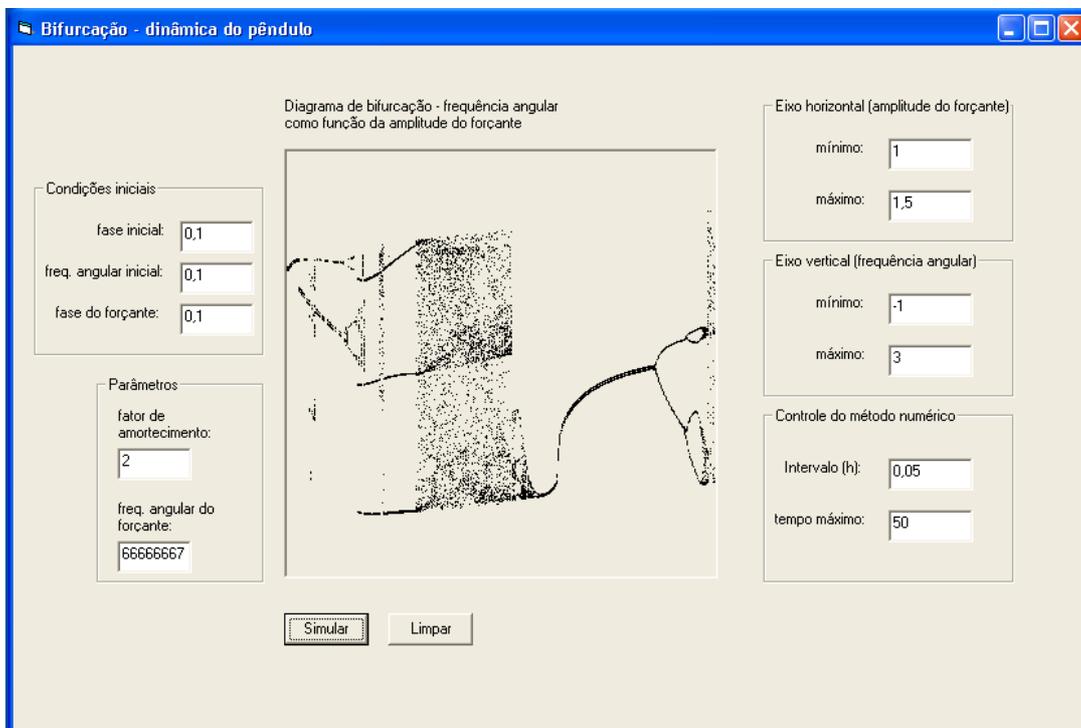


Figura 3: Diagrama de bifurcação do pêndulo mostrando séries de ω a cada ciclo de forçante

Na simulação em questão, são fixados os parâmetros q e ω_D e variado no eixo horizontal o parâmetro g . Para cada valor de g , o sistema de equações diferenciais é resolvido

numericamente, sendo plotados no eixo vertical os valores de ω a cada início de ciclo, também desprezando um tempo transiente. Pode-se observar que, na região onde $g=1,07$ temos dois valores de ω correspondentes, de modo coerente com o observado na Figura 1. De modo semelhante, tem-se que, na região onde $g=1,15$, um conjunto valores de ω indicando que, dado um ponto na região varrida por ω , existe uma iteração finita tal que esse valor será atingido, o que é característica do comportamento caótico.

A seguir é mostrada uma simulação semelhante, sendo que com condições iniciais distintas, pertencentes a uma bacia de atração diferente.

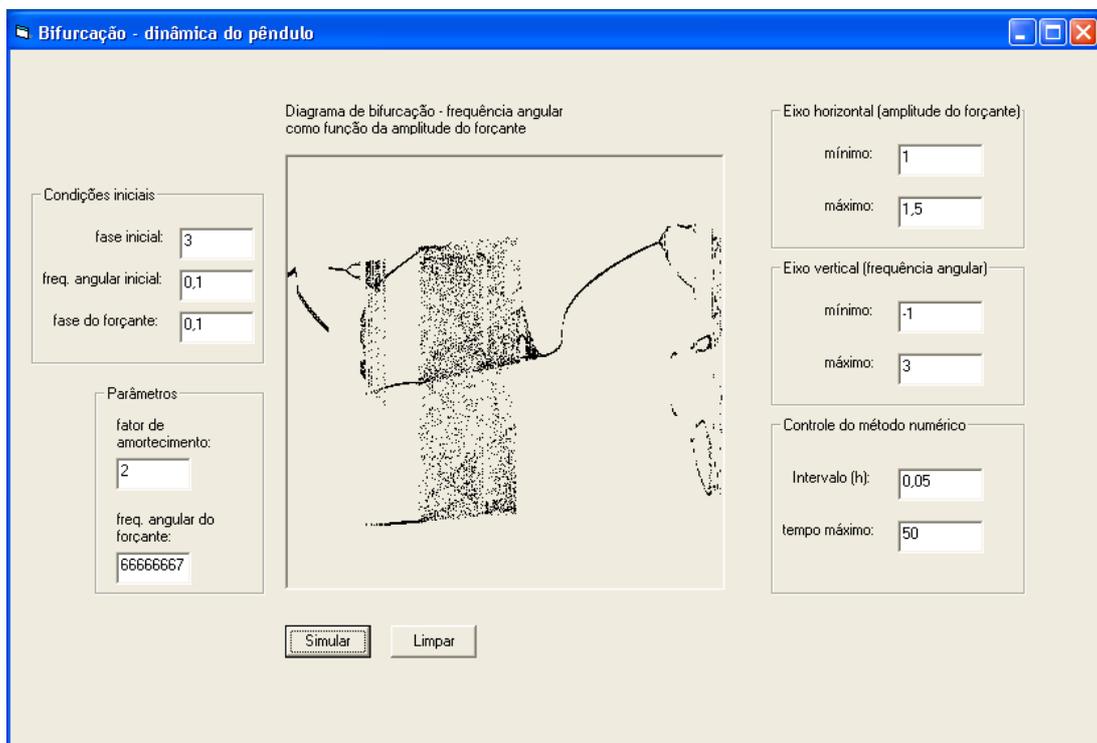


Figura 4: Diagrama de bifurcação do pêndulo para outras condições iniciais

Passemos agora a descrição teórica do método de controle de caos a ser estudado, bem como das técnicas a serem implementadas.

2.2- Localização de UPO's no Pendulo Amortecido e Forçado

Conforme visto no subitem anterior, o pêndulo amortecido e forçado apresenta uma grande variedade de comportamento dinâmico, seguindo sucessivas bifurcações de período até que tenhamos órbitas completamente irregulares (período infinito), a medida que um dos parâmetros é variado.

Desta forma, poder-se-ia pensar que, para levarmos o sistema que tenha comportamento caótico (indesejado) a um comportamento periódico, bastaríamos ajustar os parâmetros em valores tais que garantam essas novas condições. No entanto, em situações reais, é muito provável que não se tenha liberdade suficiente para alterar significativamente os valores de parâmetros do sistema.

Por outro lado, nos intervalos de combinações de parâmetros com comportamento caótico, a natureza física do problema nos garante a existência de infinitas órbitas periódicas instáveis (*unstable periodic orbits*, ou simplesmente *UPO's*), de todos os períodos possíveis. Uma vez que tais órbitas são instáveis, o sistema deve passar na vizinhança dessas órbitas apenas por um pequeno número de ciclos.

Dessa forma, se for possível fazer o sistema operar nas proximidades dessas órbitas, pode-se não apenas tornar o mesmo periódico, como ter a possibilidade de escolher o período no qual o mesmo deve evoluir.

Na década de 1990, Ott, Grebogi e Yorke [3] desenvolveram um método elegante para o controle de sistemas caóticos, baseado na existência de tais órbitas periódicas instáveis no atrator caótico, supondo que seja possível aplicar, a cada ciclo, pequenas perturbações em um dos parâmetros do sistema. O mesmo é descrito sucintamente a seguir:

- Inicialmente, devem ser localizadas, em um atrator caótico, as proximidades de possíveis órbitas periódicas instáveis de determinados períodos. Tal método pode ser aproximado, em um mapa, por exemplo, através da resolução numérica (método de Newton-Raphson [2]) da equação $x_n = x_{n+1} = f(x_n)$.
- Feito isso, deve-se verificar o efeito da variação de um parâmetro (por exemplo, q) do sistema na posição de uma órbita periódica instável.
- Deve-se, portanto, após cada tempo discreto (ciclo) avaliar qual a perturbação no parâmetro δq para manter o sistema na vizinhança dessa órbita.

Vale lembrar que, no caso de mapas, cada ciclo corresponde a um tempo discreto, e as órbitas periódicas dos diversos períodos correspondem a pontos fixos de períodos semelhantes.

No caso do pêndulo amortecido e forçado, temos que o método deve ser aplicado na seção de Poincaré, que corresponde a um mapa de ordem 2. Nessas condições, dada uma órbita

periódica instável, teremos uma variedade de atração e outra de repulsão, definidas pelos autovalores e autovetores da matriz $m(\theta, \omega)$, que define uma aproximação linear do mapa:

$$\begin{pmatrix} \theta_{n+1} \\ \omega_{n+1} \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} \theta_n \\ \omega_n \end{pmatrix}$$

Um método para a localização de órbitas periódicas instáveis de período 1, por exemplo, é baseado no mapa do retorno, o qual foi implementado para o problema do pêndulo em ambiente *Visual Basic*. Nele, as equações diferenciais que regem o problema do pêndulo são resolvidas numericamente, sendo definida uma seção de Poincaré.

Os pontos (θ, ω) da seção são plotados em eixos de θ_{i+1} versus θ_i e ω_{i+1} versus ω_i . Dessa forma, os pontos da seção correspondentes a proximidade de órbitas periódicas instáveis devem satisfazer simultaneamente as duas condições de proximidade abaixo, sendo ε um número pequeno que definirá a precisão do algoritmo.

- $|\theta_{i+1} - \theta_i| < \varepsilon$
- $|\omega_{i+1} - \omega_i| < \varepsilon$

Assim sendo, o programa mostra o conjunto de pontos correspondentes ao mapa do retorno, nos dois quadros superiores, para a posição angular e a velocidade angular. Nos quadros abaixo, são plotados apenas os pontos que satisfazem simultaneamente os dois critérios de proximidade.

Devem ser definidos, tal qual no programa desenvolvido anteriormente, parâmetros de controle do método numérico, tais como o tempo total de simulação, o passo do método de Runge-Kutta e o tempo transiente a ser desprezado, além dos parâmetros do sistema e condições iniciais para a integração das equações diferenciais.

Tem-se, portanto, a Figura 5 mostrada a seguir:

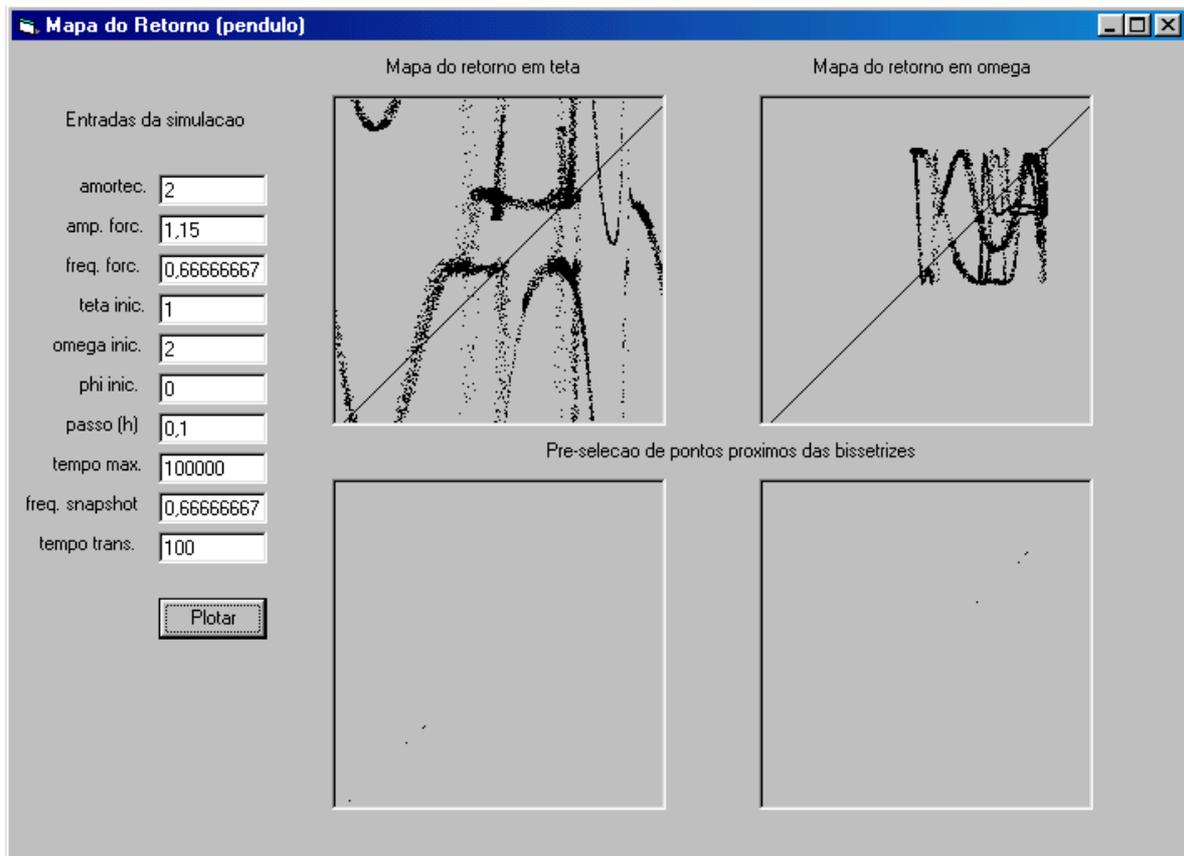


Figura 5: Simulação do mapa do retorno para o pêndulo em θ e ω com pré-seleção dos pontos fixos

No desenvolvimento do programa em questão, foram encontrados diversos problemas em relação a simulações realizadas concomitantemente. Primeiramente, torna-se necessária a simulação para um tempo total suficientemente elevado, do modo que a seção de Poincaré numérica possua um número considerável de pontos. Isso acarreta em um grande esforço computacional, levando muitas vezes a inviabilidade da simulação em plataforma *Visual Basic*. Vale lembrar que, para cada ponto obtido na seção o método numérico para resolução do sistema de equações diferenciais é implementado durante um ciclo completo de forçante, o que corresponde a vários passos. Caso seja definida uma seção de Poincaré com um menor número de pontos, evitando o esforço computacional excessivo, tem-se uma grande chance de nenhum dos pontos da seção satisfazerem ambos os critérios de proximidade (em θ e em ω)

Por outro lado, a escolha do valor de ε é também afetada pelo esforço computacional. Um valor muito pequeno restringe o número de pontos que possam satisfazer os critérios, exigindo novamente uma maior seção de Poincaré a ser simulada. Por outro lado, um valor mais elevado acarreta em pouca precisão.

Assim sendo, a simulação da Figura 5 foi feita de modo a ajustar o valor da precisão simultaneamente no código fonte, bem como do tempo total de simulação.

Como etapas posteriores, teremos a implementação dos dois passos posteriores do algoritmo OGY de controle de sistemas caóticos.

2.3- Localização de UPO's no Mapa de Henón

De modo a estender o princípio de localização das órbitas periódicas instáveis, optou-se por implementar um método alternativo, que engloba ordens superiores, para um sistema descrito por uma mapa bidimensional, para que posteriormente a aplicação à seção de Poincaré do pêndulo amortecido e forçado fosse implementada.

O mapa de Henón é descrito pela forma recorrente mostrada a seguir:

$$x_{n+1} = A - x_n^2 + By_n$$

$$y_{n+1} = x_n$$

Onde A e B são parâmetros do sistema e x e y as variáveis dinâmicas. Para os parâmetros A e B respectivamente iguais a $1,2$ e $0,3$ o sistema apresenta comportamento caótico. Nessas condições, foi desenvolvido um programa em ambiente MATLAB para a definição do atrator, correspondente aos pontos x_n e y_n sendo desprezado o transiente.

Primeiramente, o atrator caótico é definido, sendo os pontos x_n e y_n armazenados em dois vetores. Feito isso, na implementação do método descrito em [4], temos que existirá um valor m de iteração na qual o ponto (x_m, y_m) entrará na vizinhança de uma órbita periódica instável. Por outro lado, à medida que passamos desse valor, iterações sucessivas mostrarão que a órbita tende a sair dessas vizinhanças a medida que temos uma direção de atração e outra de repulsão.

A Figura 6 a seguir mostra o atrator de Henón obtido com o programa desenvolvido, sendo os parâmetros A e B iguais a $1,2$ e $0,3$, respectivamente.

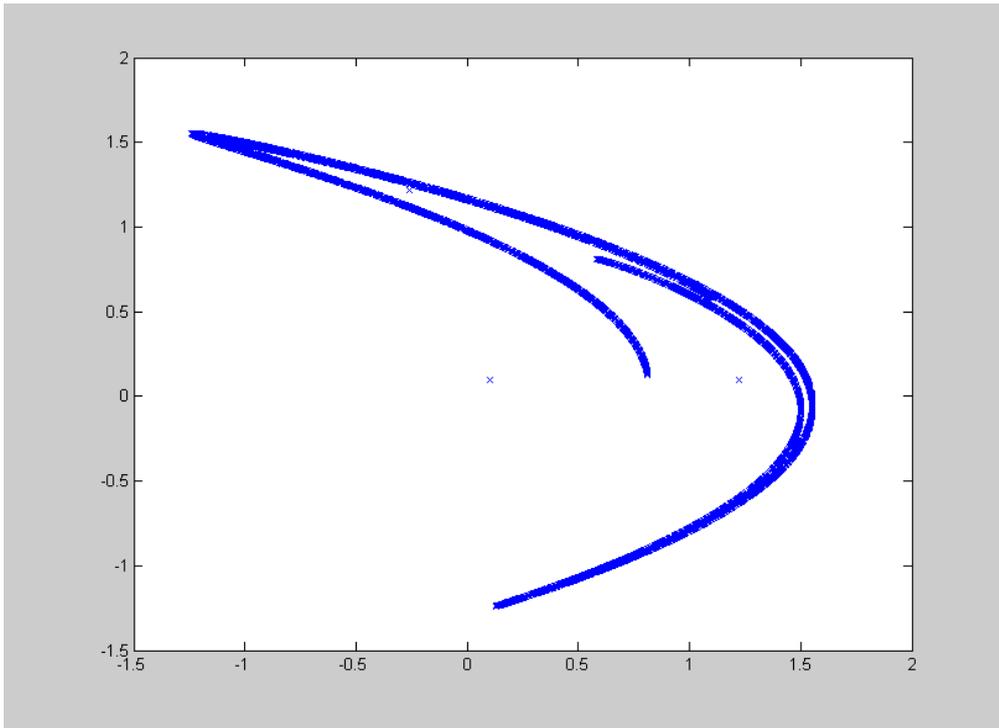


Figura 6: Atrator de Henón para $A=1,2$ e $B=0,3$

Pode-se proceder com uma aproximação no atrator para verificar a estrutura fractal do mesmo:

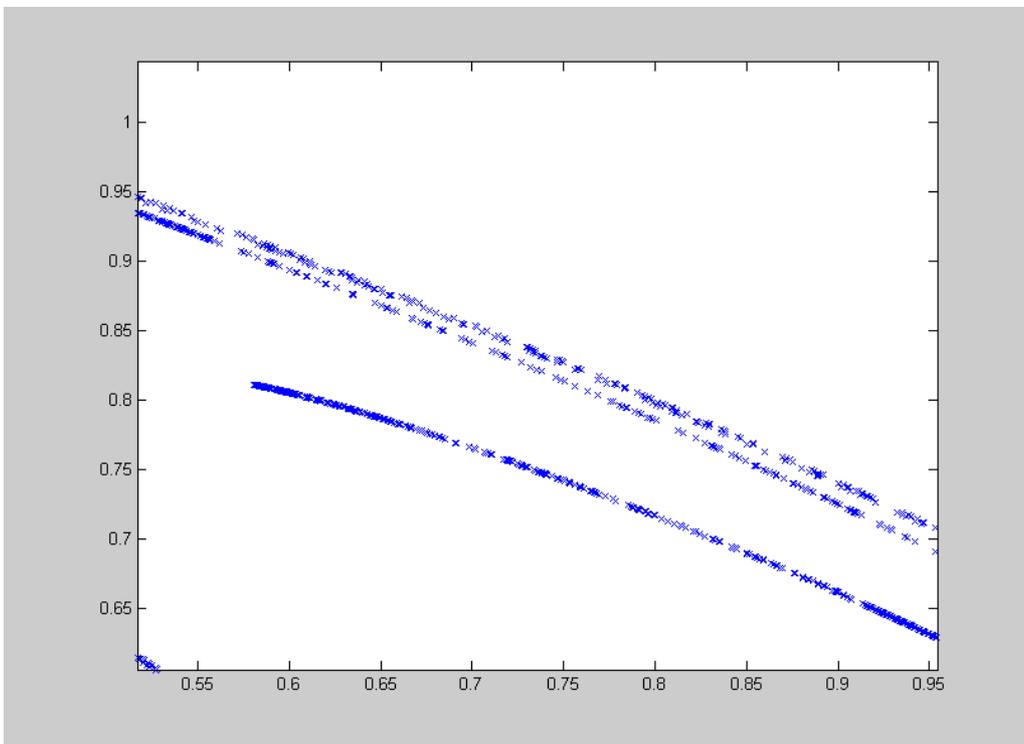


Figura 7: Zoom do atrator de Henón para os mesmos parâmetros A e B

Dessa forma, temos um critério de comparação sendo realizado à medida que os valores que armazenam x e y são percorridos para quando estivermos na vizinhança de uma UPO, e um critério de saída. Assim os valores de iteração de início e fim das variáveis em tais vizinhanças são anotados. Esse critério depende do período que se deseja. Por exemplo, no caso de órbitas de período 2, o critério de proximidade é:

$$|(x, y)_{i+2} - (x, y)_i| < \varepsilon, \text{ além de } |(x, y)_{i+1} - (x, y)_i| > \varepsilon$$

Caso apenas a primeira condição fosse implementada, dentro das órbitas instáveis de período 2 seriam contabilizadas as órbitas de período 1. Para período 4, por exemplo, deve-se também excluir as órbitas de período 1 e 2, através de uma condição de negação de proximidade, como feita no exemplo para período 2.

Por fim, os pontos correspondentes às órbitas periódicas encontradas são plotados juntamente com o atrator, mas com cor diferente. A nos mostra esse resultado, com os pontos em vermelho representando uma órbita instável de período 2:

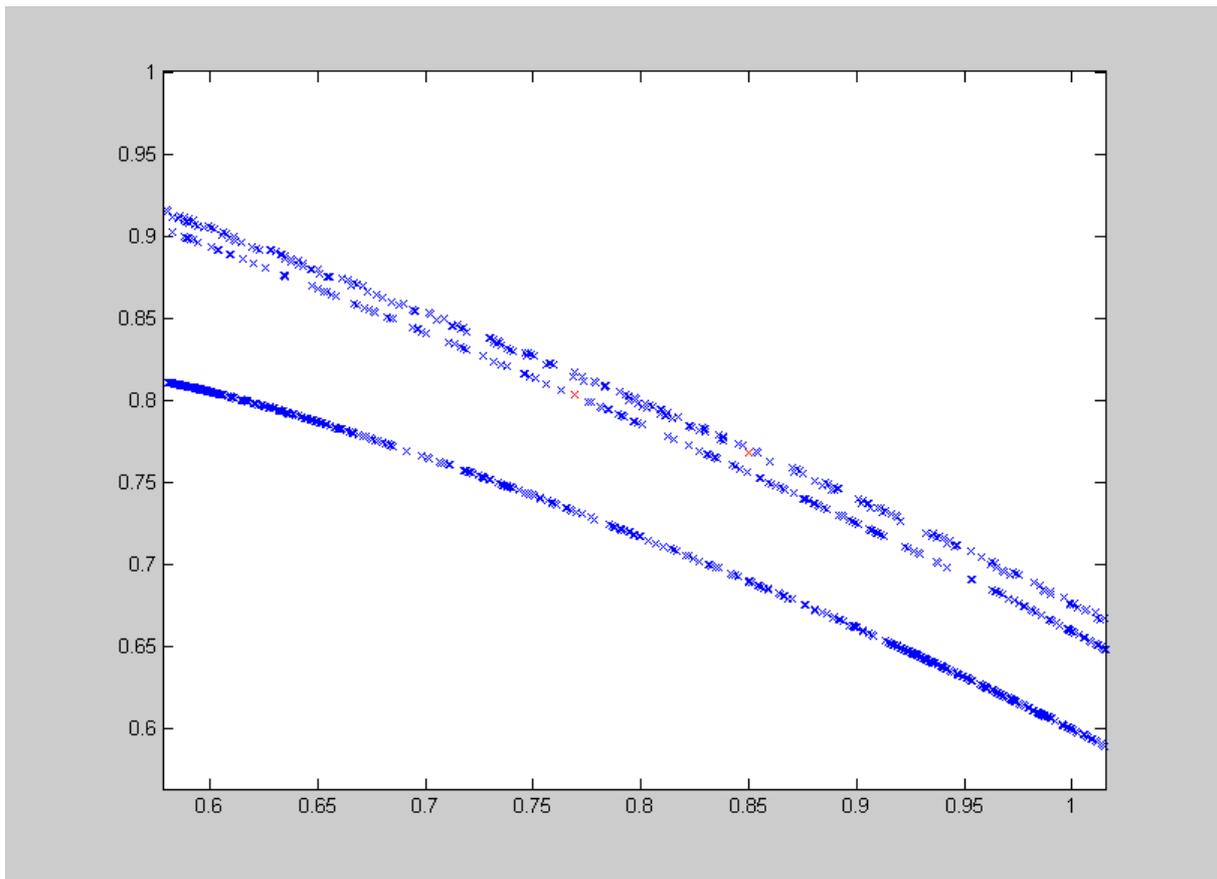


Figura 8: Órbita periódica instável de período 2 no atrator de Henón

Novamente, procedeu-se com um *zoom* da Figura 8 para uma melhor visualização dos pontos correspondentes a UPO de período 2.

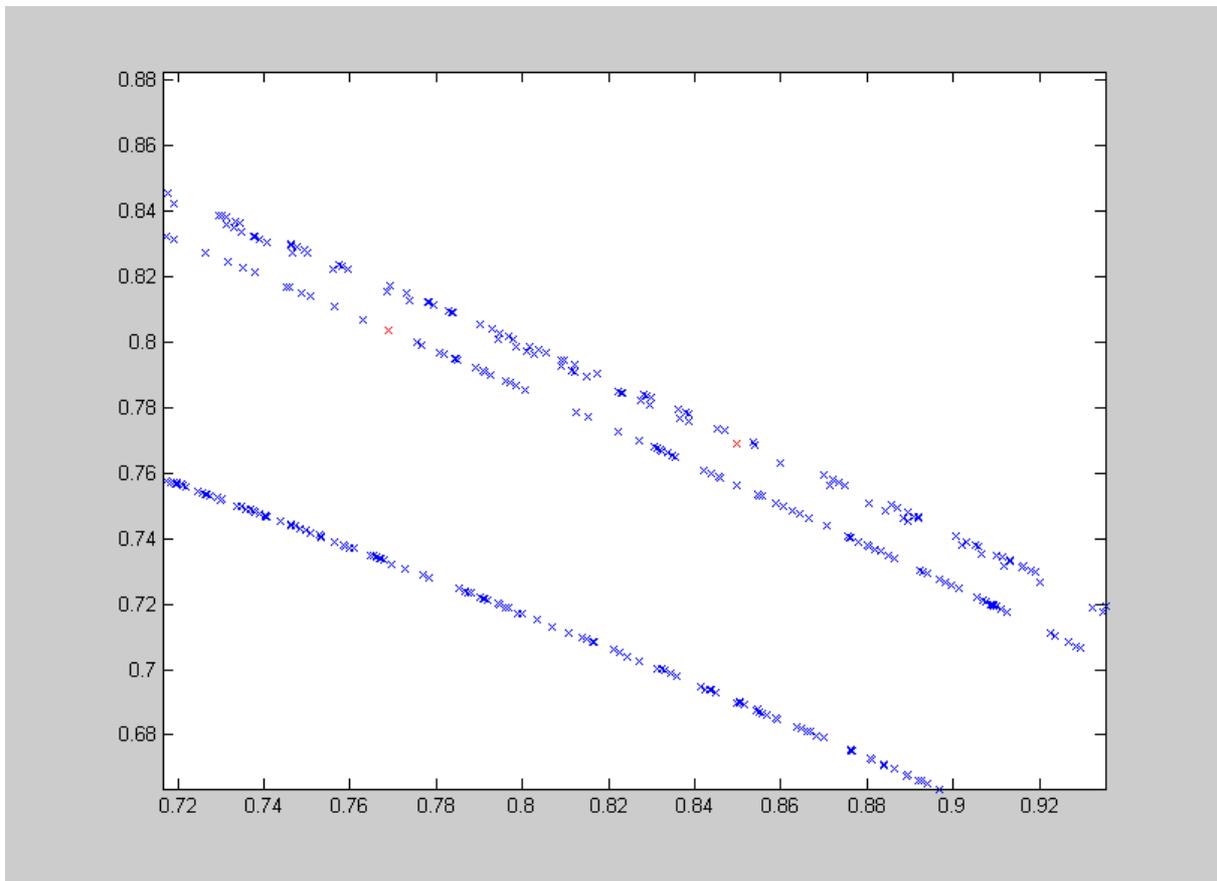


Figura 9: Zoom na região do atrator onde estão os pontos correspondentes a UPO localizada

A programação em MATLAB permite uma série de vantagens com relação ao ambiente *Visual Basic*, uma vez que os dados podem ser manipulados com maior facilidade e liberdade, além de reduzir consideravelmente os problemas com esforço computacional.

Feito isso, deve-se refinar a aproximação com um método numérico, tal qual descrito no subitem anterior, bem como implementar as duas etapas conseqüentes do algoritmo OGY.

CAPÍTULO 3

CONCLUSÕES

Com base nos resultados mostrados nesse relatório, pode-se concluir que os métodos para localização de órbitas periódicas instáveis realmente comprovam tal existência em atratores caóticos, o que possibilita a implementação futura das outras etapas do algoritmo de OGY.

Como próximas etapas do presente trabalho, a definição da perturbação em um dos parâmetros, tanto para o problema do pêndulo, através da seção de Poincaré, como no atrator de Henón de modo direto serão implementadas novamente em ambiente MATLAB, para a verificação dos resultados obtidos por Ott, Grebogi e Yorke [3].

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1- BAKER, G.L; GOLLUB J.P. – Chaotic Dynamics, an introduction. Cambridge University Press, Cambridge (UK)-1996.

2- Numerical Recipes – www.nr.com

3- OTT, E; GREBOGI, C; YORKE, J. A – Controlling chaos. Physical Review Letters, Volume 64, Number 11.

4- KOSTELICH, E. J; LATHROP, D. P: Characterization of an experimental strange attractor by periodic orbits. Physical Review A, Volume 40, Number 7, October 1st 1989.