

**CONSELHO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO CIENTÍFICO E TECNOLÓGICO  
PROGRAMA INSTITUCIONAL DE BOLSAS DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA (PIBIC-CNPq)**



**MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS**

**RELATÓRIO FINAL DE ATIVIDADES (2003-2004)**

## **DINÂMICA CAÓTICA – CONTROLE E SINCRONIZAÇÃO**

*Felipe Bastos Gurgel Silva (IC)  
3º ano de Engenharia Aeronáutica  
Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA)  
e-mail: [d@h8.ita.br](mailto:d@h8.ita.br)*

*Dr. Elbert Einstein Nehrer Macau (PQ)  
Laboratório Associado de Computação e Matemática Aplicada (LAC)  
Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE)  
e-mail: [elbert@lac.inpe.br](mailto:elbert@lac.inpe.br)*

São José dos Campos, 25 de maio de 2004

## Sumário

1. Palavras-chave.....	1
2. Introdução.....	1
3. Resumo de atividades.....	3
4. Dinâmica caótica.....	4
5. Dinâmica do pêndulo.....	15
6. Controle de Caos – próximas etapas.....	21
7. Conclusões.....	23
8. Referências Bibliográficas.....	23
9. Agradecimentos.....	23

## 1- Palavras-chave

---

Sistemas dinâmicos; dinâmica não linear; caos; atratores; fractais; pêndulo amortecido e forçado.

---

## 2- Introdução

---

O estudo de sistemas dinâmicos, bem como a própria definição trata-se de um objeto de estudo que sempre causou grande interesse em diversas áreas do conhecimento. De modo geral, a humanidade sempre procurou estabelecer uma teoria que explicasse os mais diversos fenômenos observados, de modo que, sendo estes modelados, possamos analisar seu comportamento e principalmente, fazer previsões acerca deste.

Por um certo lado, a idéia de um sistema dinâmico era vista de forma “intuitiva” muito antes que uma teoria formal fosse desenvolvida. Podemos pensar em exemplos de sistemas dinâmicos como sendo circuitos eletrônicos, estruturas oscilantes, um escoamento de um certo fluido, a população de uma certa espécie de animais em uma determinada região, o corpo humano e seus sistemas, o mercado financeiro, dentre inúmeros exemplos que se estendem nas mais diversas áreas.

De modo geral, um sistema dinâmico é todo sistema que possui uma evolução, podendo ser esta descrita por uma lei matemática, por processos mais complexos, ou até mesmo desconhecida do ponto de vista analítico. A idéia de que os sistemas encontrados na natureza podem ser modelados por teorias matemáticas teve seu grande salto com Sir Isaac Newton [5], o qual após o desenvolvimento do Cálculo diferencial passou a utilizar equações diferenciais para descrever determinados sistemas. A segunda lei de Newton, a qual trata-se de uma equação diferencial pode ser escrita como:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = f(t, x, \frac{dx}{dt}),$$
 considerando o caso do movimento de uma partícula em uma dimensão

espacial ( $x$ ) sujeita a uma força  $f$  atuando nesta mesma direção. Neste caso, temos que o *sistema dinâmico*, no caso a partícula, apresenta uma *evolução* ao longo do tempo  $t$ . Esta evolução é expressa através da solução da equação diferencial, ou seja, de uma função que satisfaça tal equação.

Entretanto, temos no exemplo acima que a solução da equação diferencial trata-se de uma família (biparamétrica) de funções. Assim o problema só torna-se univocamente determinado através da definição de suas *condições iniciais*. Para uma certa força  $f$ , temos que o sistema é unicamente determinado, conforme é garantido pelo *teorema da existência e unicidade de soluções* de problemas de valor inicial.

Não apenas podemos modelar sistemas dinâmicos utilizando equações diferenciais, mas também temos uma grande classe de sistemas descritos por equações em diferenças. No exemplo anterior, o tempo, denominado variável independente, era visto como um contínuo. No caso de equações em diferenças, temos que este é visto como discreto. O sistema é descrito por uma equação do tipo:

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k})$$

E a seqüência  $x_0, x_1, \dots, x_n$  é a solução da equação (ou órbita), que também descreve a evolução da variável  $x$ . Como exemplo de sistema modelado por tais equações temos o modelo de dinâmica populacional sujeita a resistência do meio ambiente. Como na grande maioria das populações de animais temos que a reprodução ocorre apenas em determinadas épocas do ano, o tempo pode ser visto como uma seqüência (discreto). Neste caso temos:

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

$$x(n=0) = x_0$$

Sendo  $r$  um parâmetro. Note que, da mesma forma que no caso anterior, o problema é unicamente determinado conhecendo-se a condição inicial.

Em contrapartida aos dois exemplos citados acima temos também modelos que, mesmo conhecendo-se os valores do conjunto de variáveis que define o sistema, este não está determinado, pois trata-se de sistemas modelados por equações diferenciais estocásticas. Como exemplos, temos alguns modelos econômicos, os quais são ditos *não determinísticos*.

Assim, podemos dizer que um sistema é dito determinístico quando, a partir dos valores de suas *variáveis dinâmicas* em um determinado instante, este se encontra univocamente definido.

Entretanto, uma grande descoberta no estudo de sistemas dinâmicos é o fato de que alguns sistemas, mesmo sendo determinísticos, apresentavam um comportamento bastante particular, de modo que sua evolução era completamente irregular. Tais sistemas tinham como característica em comum a não linearidade, embora isso não fosse condição suficiente. Além disso, era observado que soluções (ou órbitas) que partiam de dois conjuntos de condições iniciais distintos, entretanto suficientemente próximos divergiam (em média) exponencialmente em seu *espaço de fase*, fenômeno tal denominado *dependência sensível a condições iniciais*. Por apresentarem tal comportamento, previsões após um certo instante não muito grande eram praticamente impossíveis, já que a determinação de suas variáveis dinâmicas com precisão infinita é impossível.

A descoberta e estudo destes sistemas, denominados *caóticos*, iniciou-se de certa forma quando o matemático francês Henri Poincaré apresentou o famoso problema planar restrito a três corpos, o qual ainda hoje não é resolvido de forma analítica.

Já no século XX, o meteorologista Edward Lorenz observou características semelhantes ao tentar obter uma solução para seu modelo de convecção atmosférica. Neste sistema, temos as seguintes equações diferenciais:

$$\dot{x} = \sigma(y - x)$$

$$\dot{y} = \rho x - y - xz$$

$$\dot{z} = xy - \beta z$$

Nele,  $x, y$  e  $z$  são as variáveis dinâmicas (dependentes) e  $t$  é a variável independente. Os reais  $\sigma, \beta$  e  $\rho$  são parâmetros. Lorenz notou que para determinados conjuntos de valores de parâmetros, a solução numérica do sistema de equações diferenciais a partir de uma condição  $x_0, y_0$  e  $z_0$  parecia variar. Isso ocorria, pois, tendo o computador uma precisão finita, o que eram duas condições iniciais aparentemente idênticas na verdade tratava-se de pontos distintos, mas próximos no espaço de fase  $xyz$ . Daí a divergência, devido à sensibilidade a condições iniciais. Esta característica foi descrita por Lorenz com a famosa pergunta: Pode uma borboleta que bate asas no Brasil causar um tornado no Texas?

Os sistemas que apresentam comportamento caótico passaram a ser observados nos mais diversos fenômenos. Como exemplos, podemos citar modelos de turbulência em escoamentos, arritmias cardíacas, modelos atmosféricos, cinética química, dentre outros. Entretanto, na grande maioria dos casos, estes sistemas apresentam uma complexidade tal que não se consegue obter uma solução analítica. Assim, a análise dos sistemas caóticos teve um grande impulso com o desenvolvimento de métodos computacionais que geram uma solução aproximada.

A dinâmica de um determinado fluido newtoniano é descrita pelo conjunto de equações diferenciais parciais abaixo, denominadas equações de Navier-Stokes:

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + f_{vx}$$

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + f_{vy}$$

$$\rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + f_{vz}$$

A complexidade dinâmica do sistema é tal que este pode apresentar os mais diversos comportamentos (inclusive caótico). Do ponto de vista matemático, o sistema de equações acima é de tal complexidade que, não se consegue uma solução analítica para tal até os dias atuais (a não ser para casos bastante particulares).

### 3- Resumo de Atividades

Conforme citado no relatório parcial deste projeto, em sua fase inicial tivemos o estudo de dinâmica caótica em sua forma geral, de modo a obtermos o embasamento teórico necessário para o estudo da dinâmica do pêndulo sujeito a uma força de amortecimento e a uma força externa periódica. É importante ressaltar que, sendo os sistemas dinâmicos tratados neste projeto descrito por equações diferenciais ou equações a diferenças, temos que os resultados experimentais foram obtidos através de métodos numéricos de resolução de tais sistemas. Daí a grande importância de [2].

Em sua fase inicial tivemos como base principal a referência [1], na qual era feita uma tradução para o português e realizadas simulações dos experimentos descritos. Para a realização de tais experimentos, foram desenvolvidas ferramentas computacionais em ambientes de linguagem C, *Visual Basic 5.0*, bem como a utilização de *notebooks* do software *Mathematica*. Este estudo iniciou-se na definição de mapas iterativos unidimensionais, observando-se a variação do comportamento dinâmico das órbitas a partir da mudança da equação de recorrência, análise de mapas em dimensões maiores, considerando conjuntos de Julia e de Mandelbrot, definição euclidiana, topológica e fractal de um atrator, caracterização da geometria de tais atratores, estudo de sistemas dinâmicos (oscilador massa-mola e equação logística), dentre outros tópicos.

De modo a auxiliar na implementação de tais programas foram utilizadas em paralelo as referências [3] e [5].

Em sua fase posterior, começamos o estudo da dinâmica caótica de um pêndulo amortecido e forçado, descrito em [4]. Para tal, foi desenvolvido um programa em *Visual Basic 5.0* de modo a observarmos uma projeção do espaço de fase e, conseqüentemente, da evolução do sistema partindo de um determinado conjunto de condições iniciais. Nele, também observamos a seção

de Poincaré, ferramenta de grande utilidade na análise da dinâmica da solução da equação diferencial. Como solução numérica do problema do pêndulo, foi utilizado o algoritmo de Runge-Kutta de 4ª ordem, descrito em [2].

Além disso, também foi desenvolvido um programa para análise de diagramas de bifurcação na dinâmica do pêndulo, considerando a frequência angular tomada em intervalos múltiplos inteiros da fase do forçante. Assim, notamos a variação do comportamento de solução mudando um dos parâmetros do sistema.

#### 4- Dinâmica Caótica

Conforme já citado, para que seja feito um estudo mais específico em dinâmica caótica, é necessário que seja empreendido uma introdução teórica mais generalista. Assim, o trabalho foi inicialmente centrado em [1].

Inicialmente, são definidos os mapas iterativos unidimensionais. De modo a representar o mapa  $x_{n+1} = f(x_n, c) = x_n^2 + c$ , são tomadas as equações de uma parábola e da bissetriz dos quadrantes ímpares.

O processo de obtenção da solução da equação recursiva (a partir de uma determinada condição inicial  $x_0$ ) para um dado parâmetro  $c$ , montamos uma tabela com a evolução da variável dinâmica  $x$  em função de  $n$  (tempo discreto). Os valores de  $x$  são obtidos através de um simples algoritmo recursivo desenvolvido em linguagem C. Assim, temos:

Para  $c = 0,25$ :

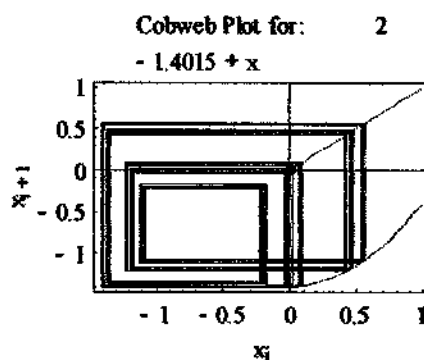
Iteração	X=0	X=0.2	X=0.3	X=0.6	X=0.7
1	0.250000	0.290000	0.340000	0.610000	0.740000
2	0.312500	0.334100	0.365600	0.622100	0.797600
3	0.347656	0.361623	0.383663	0.637008	0.886166
4	0.370865	0.380771	0.397198	0.655780	1.035290
5	0.387541	0.394987	0.407766	0.680047	1.321825
6	0.400188	0.406014	0.416273	0.712464	1.997221
7	0.410150	0.414848	0.423283	0.757605	4.238892
8	0.418223	0.422099	0.429169	0.823965	18.6218206
9	0.424911	0.428167	0.434186	0.928919	-----
10	0.430549	0.433327	0.438517	1.112890	-----
11	0.435373	0.437772	0.442297	1.488524	-----
12	0.439549	0.441645	0.445627	2.465703	-----
13	0.443204	0.445050	0.448583	6.329692	-----
14	0.446429	0.450766	0.451227	40.315006	-----
15	0.449299	0.453190	0.455758	-----	-----
	-----	-----	-----	-----	-----
	-----	-----	-----	-----	-----
	0.500000	0.500000	0.500000	Infinito	Infinito

Para  $c = -0,75$ :

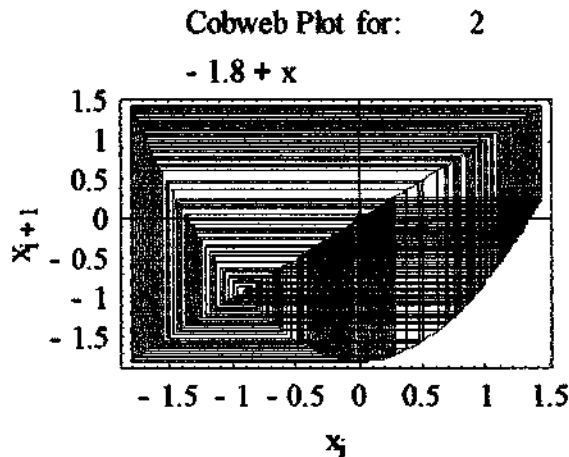
Iteração	X=2	X=1.5	X=1.1	X=0.9	X=0.8	X=0.6
1	3.250000	1.500000	0.460000	0.060000	-0.110000	-0.390000
2	9.812500	1.500000	-0.538400	-0.746400	-0.737900	-0.597900
3	95.535156	1.500000	-0.460125	-0.192887	-0.205504	-0.392516
4	-----	1.500000	-0.538285	-0.712795	-0.707768	-0.595932
5	-----	-----	-0.460250	-0.241924	-0.249064	-0.394866
6	-----	-----	-0.538170	-0.691473	-0.687967	-0.594081
7	-----	-----	-0.460373	-0.271865	-0.276701	-0.397068
8	-----	-----	-0.538057	-0.676089	-0.673436	-0.592337
9	-----	-----	-0.460495	-0.292903	-0.296483	-0.399137
10	-----	-----	-0.537944	-0.664208	-0.662098	-0.590690
11	-----	-----	-0.460616	-0.308828	-0.311627	-0.401085
12	-----	-----	-0.537833	-0.654625	-0.652889	-0.589131
13	-----	-----	-0.460735	-0.321466	-0.323736	-0.402925
14	-----	-----	-0.537723	-0.646660	-0.645195	-0.587651
15	-----	-----	-0.460854	-0.331831	-0.333724	-0.404666
	-----	-----	-----	-----	-----	-----
	Infinito	1.500000	-0.500000	-0.500000	-0.500000	-0.500000

Podemos observar que, soluções que partem de determinados valores de condições iniciais são atraídas para determinados pontos, denominados pontos fixos, ou são repelidas para o infinito. Tais pontos podem ser atrativos ou repulsivos, característica tal associada com a estabilidade da solução permanente. Diminuindo o valor do parâmetro  $c$ , observa-se que as soluções aos um longo tempo passam por um série de bifurcações, até que para  $c = -1,8$  podemos observar o comportamento caótico. Nele, temos que a variável  $x$  percorre todos os pontos no intervalo  $[-2, 2]$ . Tais bifurcações são vistas de forma mais clara através dos diagramas de bifurcação. Tais diagramas, feitos de forma iterativa no gráfico de  $y = x^2 + c$  e  $y = x$  foram feitos utilizando *notebooks* do *Mathematica*. Vemos a seguir um exemplo onde  $c = -1,3$  (comportamento periódico) e para  $c = -1,8$  (comportamento dinâmico caótico):

-  $c = -1,3$ :

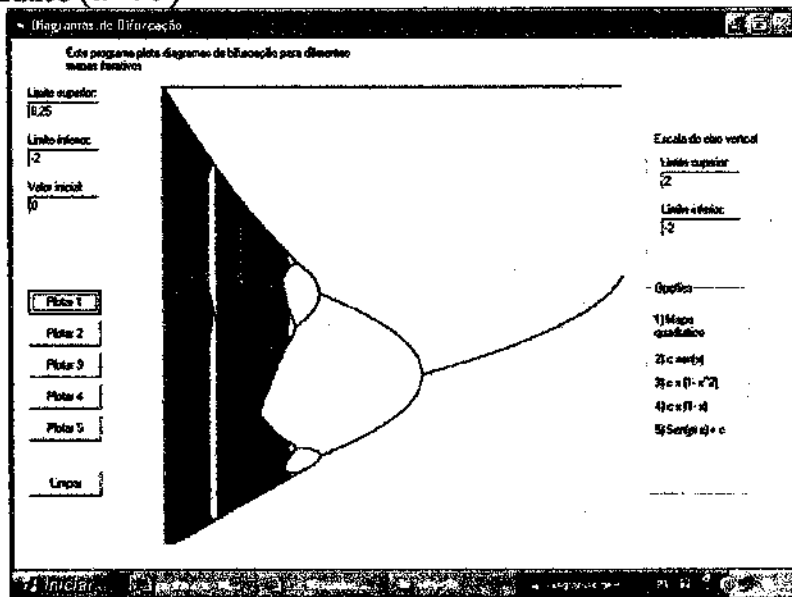


-  $c = -1,8$ :



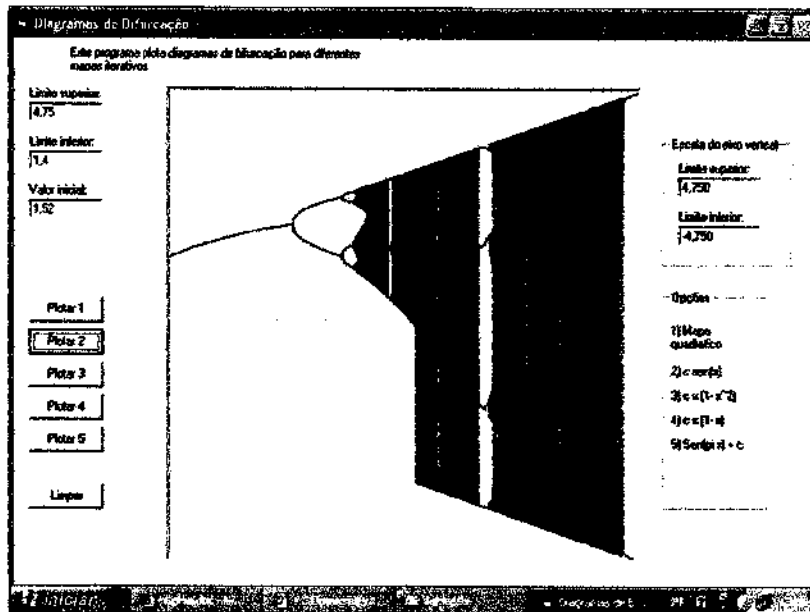
Entretanto, para que seja possível uma visão mais global do processo de bifurcação, são introduzidos os *diagramas de bifurcação*. Neles, variamos no eixo horizontal o parâmetro  $c$  em um intervalo a ser definido como entrada do programa. No eixo vertical, cujos limites também devem ser ajustados conforme ao mapa, plotamos a variável dinâmica  $x$ . Tendo como entrada o número de iterações, bem como o transiente, podemos observar:

- mapa quadrático ( $x^2 + c$ )



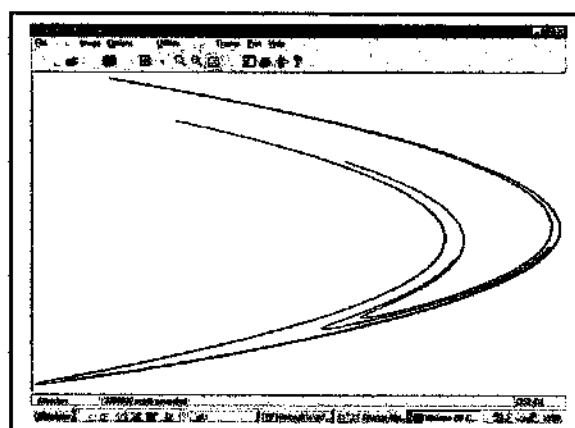
Ajustando os limites dos eixos podemos aproximar o diagrama em determinadas regiões e notarmos a similaridade com o diagrama completo. Não apenas o mapa quadrático, mas outros sistemas iterativos apresentam diagramas de bifurcação. Vemos como exemplo o mapa  $c \cdot \text{sen} x$  :



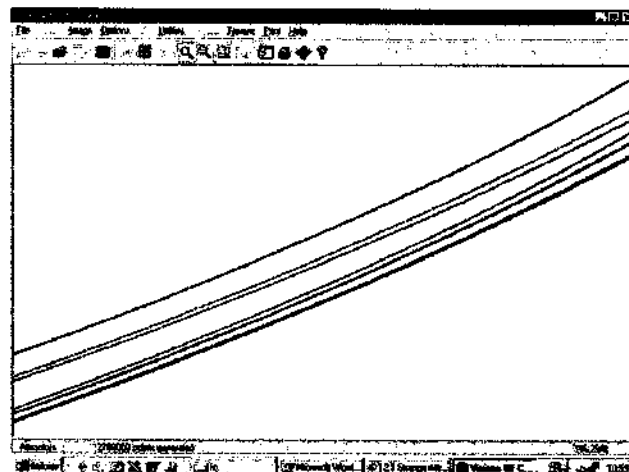


Vale citar que o programa utilizado para plotar diagramas de bifurcação de sistemas iterativos foi desenvolvido em Visual Basic. Nele, o usuário entra com o intervalo de variação do parâmetro  $c$  do mapa, bem como com o valor inicial da órbita. Também temos como controle de visualização os limites de escala no eixo vertical ( $x_n$ ). Desprezando-se as 30 primeiras iterações, podemos garantir que a solução analisada deve “desprezar” o transiente. Assim, o programa é executado através de um laço para a variação do parâmetro  $c$  e um outro para o processo iterativo  $x_{n+1} = f(x_n)$ .

Passando para mapas em dimensões superiores, vemos que estes, que também podem ser vistos com variáveis complexas possuem atratores que, para determinados valores de parâmetros, apresentam uma geometria “estranha” a qual será discutida posteriormente em [1] do ponto de vista topológico e fractal. Foi definido o mapa de Henón em variáveis complexas, e o atrator foi simulado utilizando o software *Visions of Chaos*. Temos abaixo o atrator de Henon:



A geometria fractal do atrator (dito estranho) pode ser observada ao aproximarmos a visualização em determinadas regiões do atrator. Abaixo temos uma aproximação (zoom) no atrator:



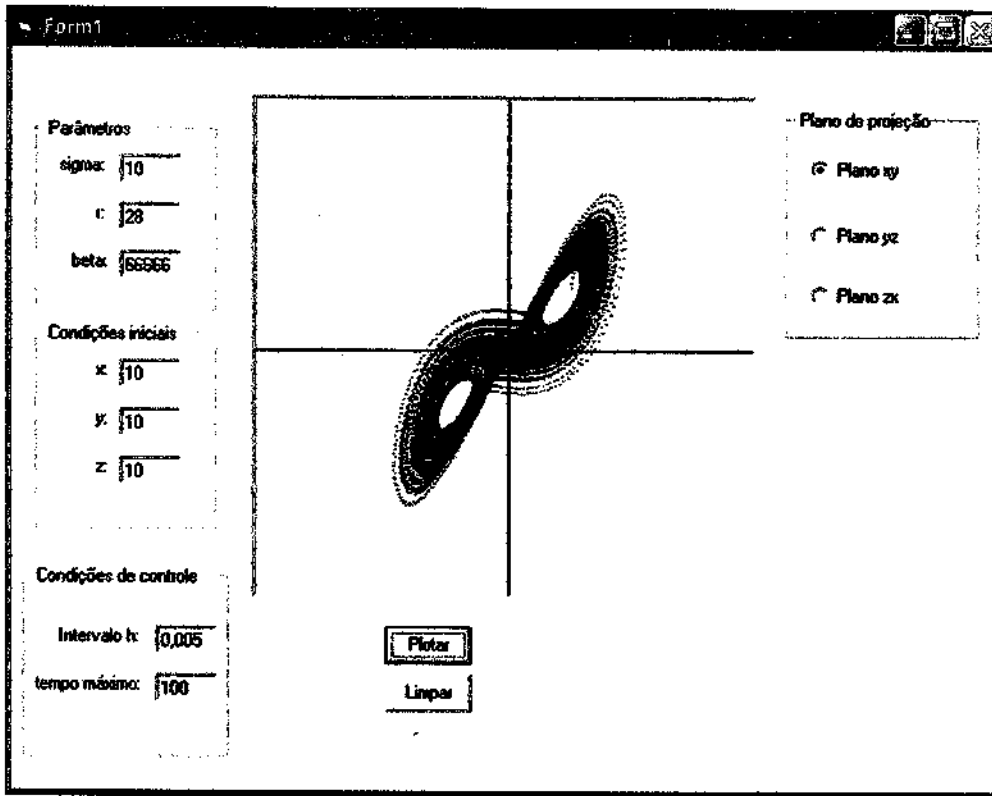
Nele, notamos que o que aparentam ser linhas , na realidade são conjuntos de linhas quando realizamos uma observação mais aproximada. Quando tais linhas são ampliadas elas também se transformam em conjuntos de linhas e assim por diante [1].

Analogamente, é definido o mapa de Ikeda, cujo atrator é mostrado logo abaixo:

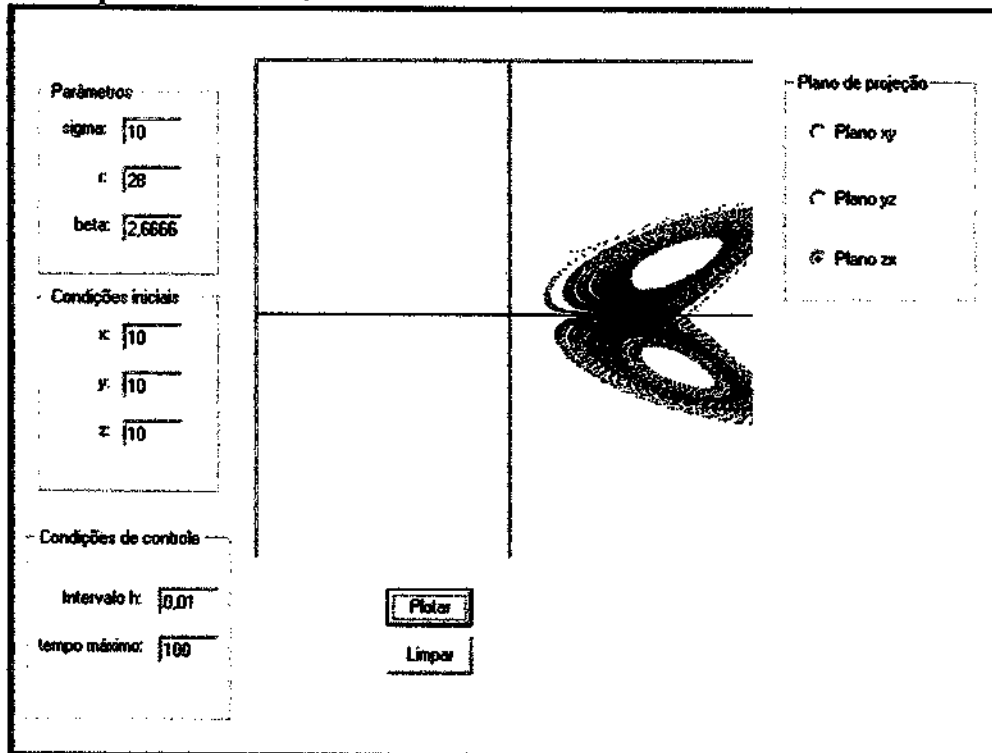


Também temos definido o sistema de equações diferenciais que Edward Lorenz utilizou para modelar problemas de convecção atmosférica, já descrito neste relatório.

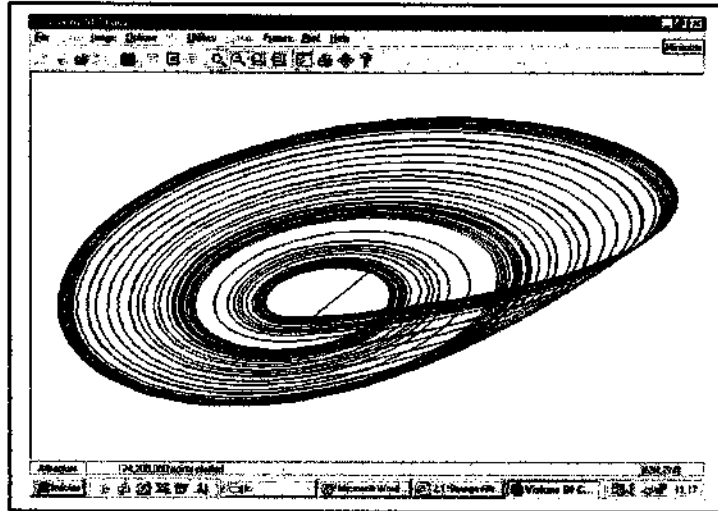
O sistema apresenta comportamento caótico quando temos os valores de parâmetros iguais a  $\sigma=10$   $\beta=28$   $\rho=8/3$ . Para efeito de comparação, este foi simulado utilizando o *Visions of Chaos*, bem como foi desenvolvido um programa em *Visual Basic* no qual o usuário escolhe o plano de projeção do espaço de fase ( $xy$ ,  $yz$  ou  $zx$ ), e, entrando com condições iniciais rodamos o algoritmo de *Runge-Kutta de 4ª ordem* descrito em [2]. A seguir mostramos o atrator obtido pelo programa desenvolvido, tomando-se o plano  $xy$ :



Escolhendo o plano zx obtemos:



De modo análogo, também foi feito um programa para a simulação do atrator de Rössler, cujo sistema modela problemas em cinética química. O atrator de Rössler simulado utilizando o *Visions of Chaos* é mostrado a seguir:

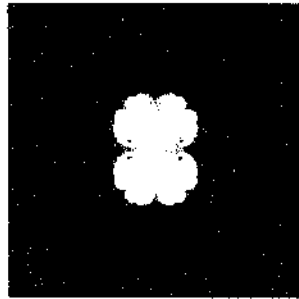


Posteriormente são definidos mapas iterativos do tipo  $z_{n+1} = f(z_n, c)$   $z, c \in \mathbb{C}$ . São introduzidos os conjuntos de Julia (relativos a que pontos do plano complexo são atraídos ou divergem ao infinito) e conjuntos de Mandelbrot, associados a conexidade ou não de conjuntos de Julia. Os resultados de [1] foram repetidos utilizando o software *Fractal Explorer 2.00*. Vemos a seguir alguns conjuntos de Julia e seu parâmetro  $c$ :

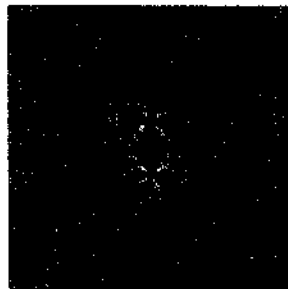
-  $c = (0,0)$



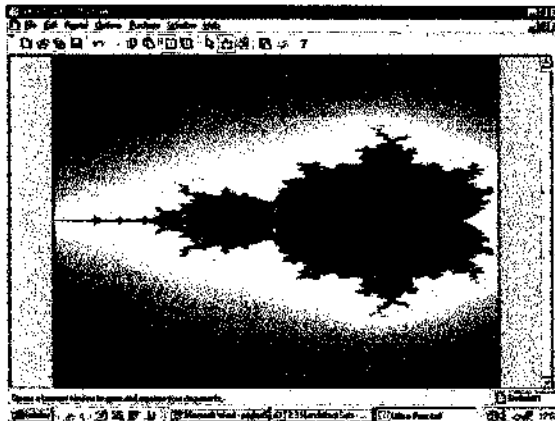
-  $c = (-.275, 0)$



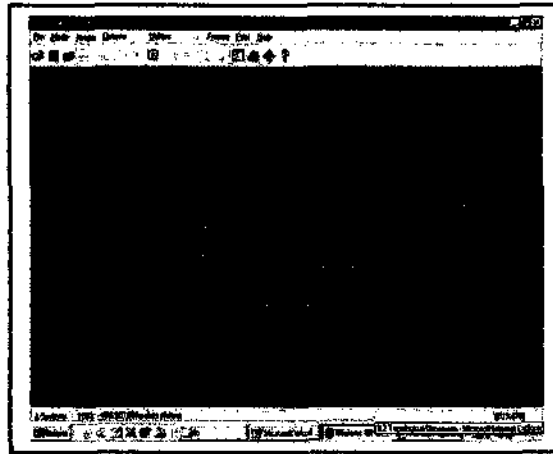
-  $c = (0.285, 0.535)$



Utilizando o software *Ultra Fractal*, foi simulado o conjunto de Mandelbrot do mapa quadrático complexo, conforme vemos a seguir.



Características como a geometria fractal e a analogia com do ponto no plano complexo com seu conjunto de Julia associado são mostrados através de aproximações (zoom) e observando o conjunto de Julia associado no próprio software. Posteriormente, [1] cita definições matemáticas de dimensão, até definir o conceito de dimensão fractal de um conjunto. A curva de koch, cuja dimensão é um não inteiro  $\frac{\log 4}{\log 3}$  é definida como o limite de um processo iterativo. Para  $n = 7$ , o *Visions of Chaos* nos fornece:



No próximo capítulo de [1], são discutidos o sistema massa mola amortecido e forçado, o qual é descrito por uma equação diferencial de segunda ordem a coeficientes constantes, e a equação logística, vista como uma equação em diferenças (um mapa iterativo). O comportamento dinâmico como função dos parâmetros do oscilador harmônico é discutido. Para uma análise no caso da equação logística, foi desenvolvido um programa em Visual Basic de tal forma que na análise de bifurcações do mapa quadrático e outros mapas já citados. Em adição a tal modelo, foi descrito um algoritmo para o cálculo do expoente de Lyapunov, o qual se relaciona com a divergência de duas órbitas que partem de condições iniciais suficientemente próximas.

A equação logística pode ser definida como:

$$x_{n+1} = rx_n(1-x_n)$$

Partindo de uma certa condição inicial no intervalo  $[0, 1]$ . Esta equação é utilizada para modelagem de problemas envolvendo crescimento populacional. O valor do expoente de Lyapunov é calculado baseado no cálculo da derivada do mapa logístico, e pode ser posto como função do parâmetro  $r$  e do número de termos que tomamos no truncamento da série:

$$\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \log_2 \left| \frac{dx_{n+1}}{dx_n} \right|$$

Desenvolvendo um algoritmo em C, através do compilador da *Digital Mars*, podemos montar uma tabela semelhante a descrita em 1.

- Fazendo  $N = 4000$  e  $x_0 = 0.5$ , obteve-se:

Parâmetro (r)	Expoente de Lyapunov ( $\lambda$ )	Comentários
1	-0.005112	Temos um ponto fixo estável
1.99	-6.644043	-----
1.999	-9.965241	-----
2	Overflow	Ponto fixo superestável
2.001	-9.966049	-----
2.01	-6.644047	-----
3	-0.003518	Inicia-se um ciclo estável de período 2
3.236067977	Overflow	Ciclo superestável (1 + raiz(5))

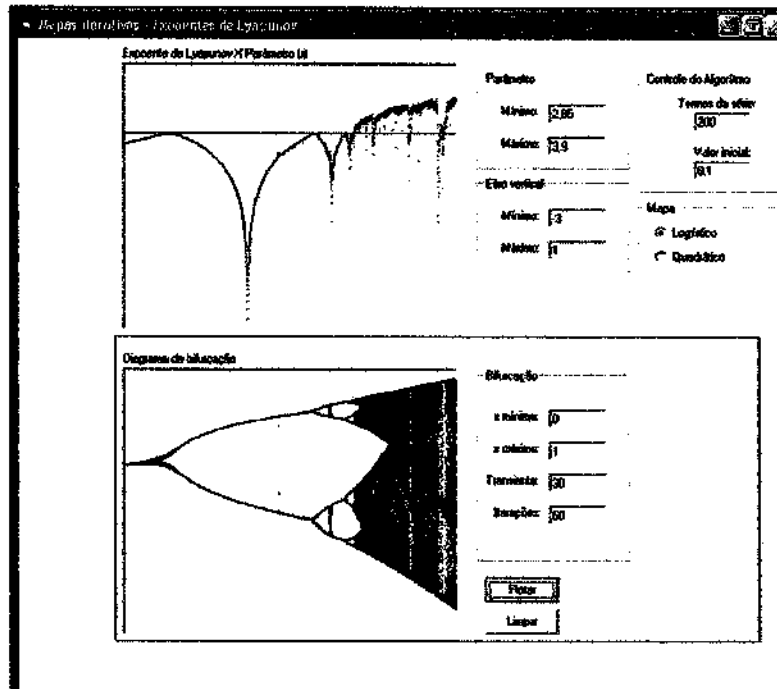
3.449489743	-0.003151	Inicia-se um ciclo estável de período 4 (1 + raiz(6))
3.5699456720	0.001547	Início do Caos (Hofstadter)
3.56994571869	0.002978	Início do Caos (Dewdney)
3.828427125	-0.004620	Inicia-se Um ciclo estável de período 3 (1 + raiz(8))
3.9	0.719987	Volta ao comportamento caótico
4	2.000000	Fim do caos

Levando em consideração o fato de que o algoritmo utilizado, além de estar sujeito a erros de arredondamento, baseia-se em uma aproximação de uma série considerando apenas um número  $N$  suficientemente grande, testemos os mesmos valores de parâmetro  $r$  considerando um  $N$  maior:

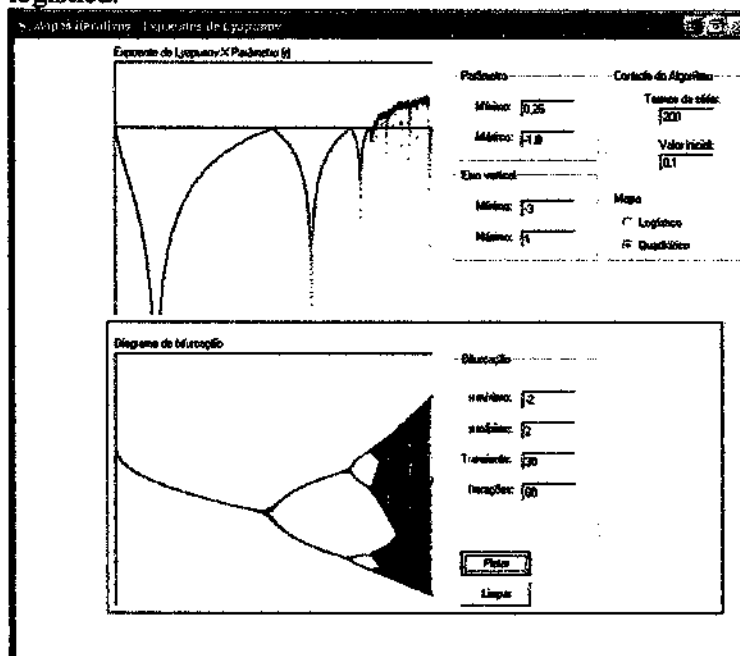
- Fazendo  $N = 6000$  e  $x_0 = 0.5$ , pode-se observar:

Parâmetro ( $r$ )	Expoente de Lyapunov ( $\lambda$ )	Comentários
1	-0.003603	Temos um ponto fixo estável
1.99	-6.644207	-----
1.999	-9.965109	-----
2	Overflow	Ponto fixo superestável
2.001	-9.965647	-----
2.01	-6.644208	-----
3	-0.002491	Inicia-se um ciclo estável de período 2
3.236067977	Overflow	Ciclo superestável (1 + raiz(5))
3.449489743	-0.002246	Inicia-se um ciclo estável de período 4 (1 + raiz(6))
3.5699456720	0.001422	Início do Caos (Hofstadter)
3.56994571869	0.002920	Início do Caos (Dewdney)
3.828427125	-0.004179	Inicia-se Um ciclo estável de período 3 (1 + raiz(8))
3.9	0.716809	Volta ao comportamento caótico
4	2.000000	Fim do caos

O programa feito em Visual Basic nos fornece uma melhor visualização do comportamento dinâmico em função do parâmetro  $r$ :



Note que o gráfico de expoentes de Lyapunov (superior) possui uma grande correlação com o diagrama de bifurcação (inferior). Regiões do diagrama onde temos o comportamento caótico, verifica-se um valor positivo do expoente ( $\lambda$ ). Oscilações do valor de  $\lambda$  nestas regiões devem-se às janelas de periodicidade existentes. O mesmo programa pode ser simulado utilizando o mapa quadrático. Nele podemos notar que o comportamento de  $\lambda$  está associado ao diagrama conforme ocorre na equação logística.



Nos próximos tópicos de [1] são desenvolvidas as idéias de espaço de lyapunov.



Tendo sido desenvolvido o embasamento teórico necessário para o estudo de dinâmica caótica aplicada, passemos a seguir a discussão do problema do pêndulo. Tal sistema embora seja bastante simples do ponto de vista físico, apresenta uma grande variedade de comportamentos dinâmicos, conforme veremos no próximo tópico deste relatório.

---

## 5- Dinâmica do Pêndulo

---

Conforme descrito em [4], para que um sistema dinâmico apresente comportamento caótico temos como condições necessárias (mas não suficientes) que:

- i. O sistema deve possuir no mínimo três variáveis dinâmicas independentes.
- ii. As equações de movimento devem possuir termos não lineares acoplando várias das variáveis.

O problema do pêndulo pode ser descrito como:

$$\dot{\omega} = -\omega/q - \text{sen}\theta + g \cos \phi$$

$$\dot{\theta} = \omega$$

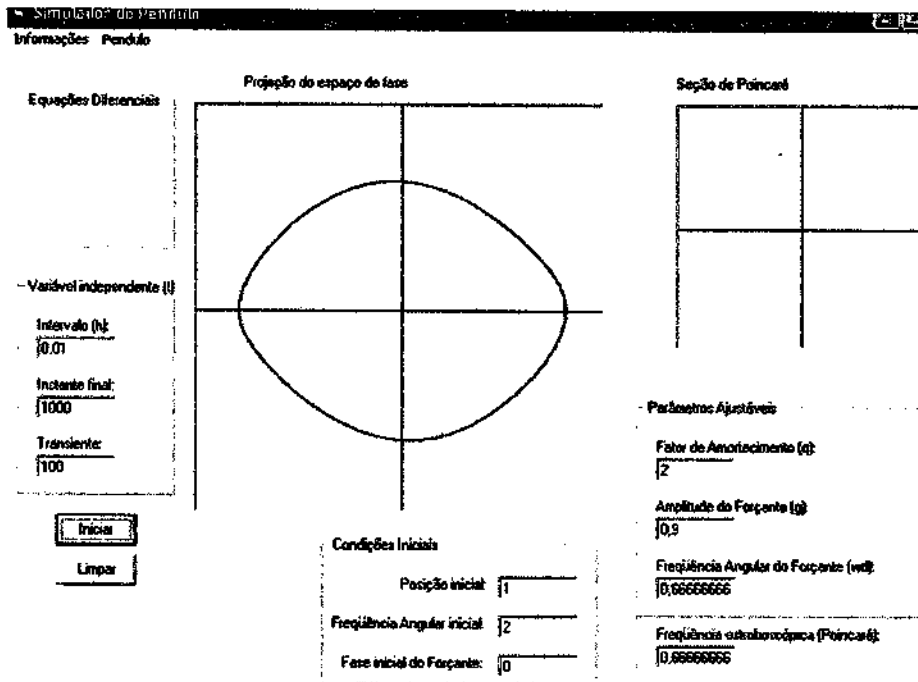
$$\dot{\phi} = \omega_D$$

Temos que  $g$ ,  $q$  e  $\omega_D$  são parâmetros que correspondem respectivamente à amplitude do forçante, ao fator de amortecimento e à frequência angular do forçante.

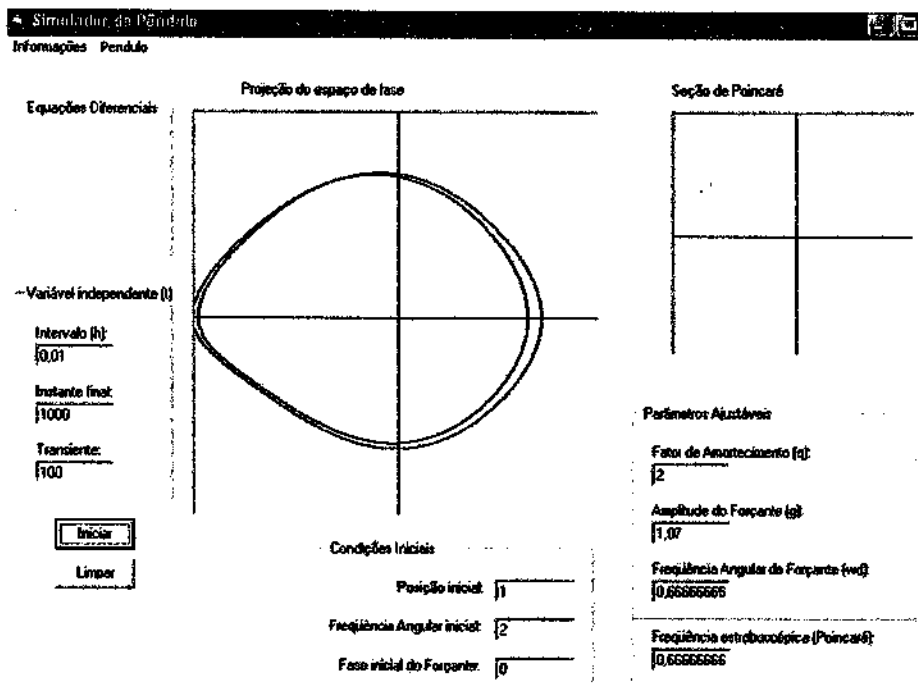
Note que as condições para que possamos ter comportamento caótico são satisfeitas. A idéia do programa, conforme citado, é plotar a evolução de uma trajetória (partindo de determinadas condições iniciais) no plano  $(\theta, \omega)$  do espaço de fase de dimensão três. Conforme observa-se nos experimentos realizados em [4], o valor de  $\omega$  não deve aumentar indefinidamente. Entretanto, para a fase  $\theta$ , fazemos um ajuste no próprio algoritmo de modo que este esteja sempre em seu correspondente no intervalo  $[-\pi, \pi]$ . Como entrada do programa, temos os parâmetros  $g$ ,  $q$  e  $\omega_D$ , as condições iniciais  $(\theta_0, \omega_0, \phi_0)$ , e condições de controle do algoritmo numérico, ou seja, o tempo total de simulação, o passo do algoritmo de Runge-Kutta ( $h$ ), bem como o transiente considerado, pois em geral estamos interessados na solução do sistema após um certo intervalo. Para o controle da seção de Poincaré, deve-se entrar com uma frequência estroboscópica, com a qual serão tomados os pontos nesta seção, gerando uma mapa de dimensão 2 associado ao sistema de tempo contínuo de dimensão 3.

Mantendo os parâmetros  $\omega_D = 2/3$  e  $q = 2$ . Variamos o valor de  $g$  para analisarmos as diferentes trajetórias. Assim temos:

$$g = 0,9:$$

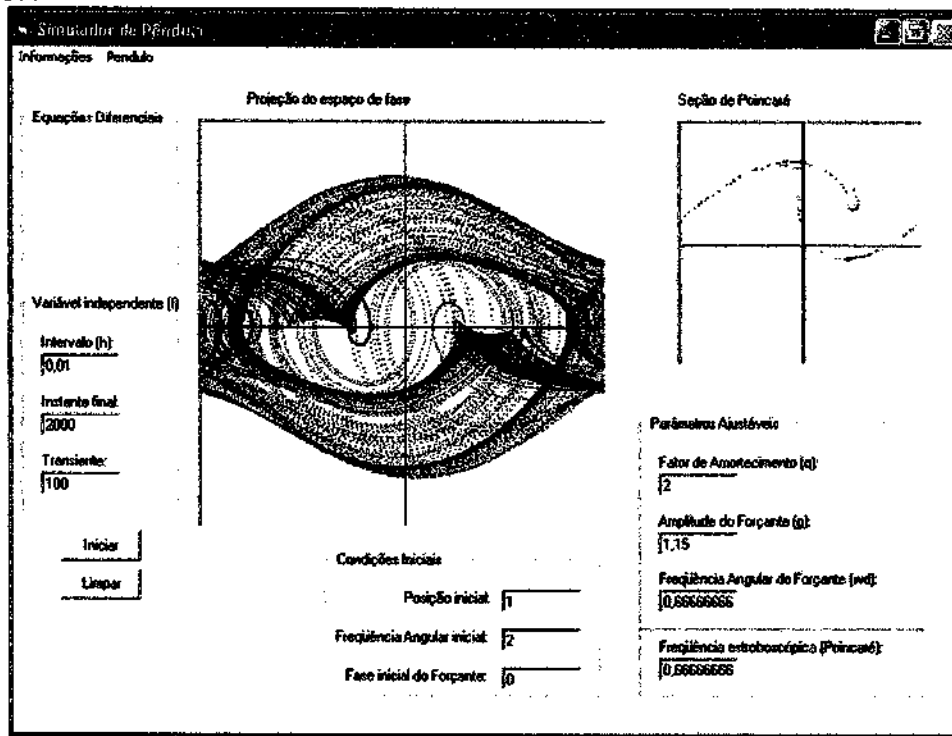


Temos que a solução estacionária é uma órbita periódica de período 1. Isto pode ser observado a partir da seção de Poincaré (no canto direito superior da janela do programa), aonde notamos apenas um ponto fixo. Passemos agora a análise do sistema para um outro valor de  $g$ .  
 $g = 1,07$ :



Temos agora uma órbita periódica de período-2. Novamente note a seção de Poincaré. Podemos perceber que temos dois pontos fixos no mapa. Mudando novamente  $g$ , temos:

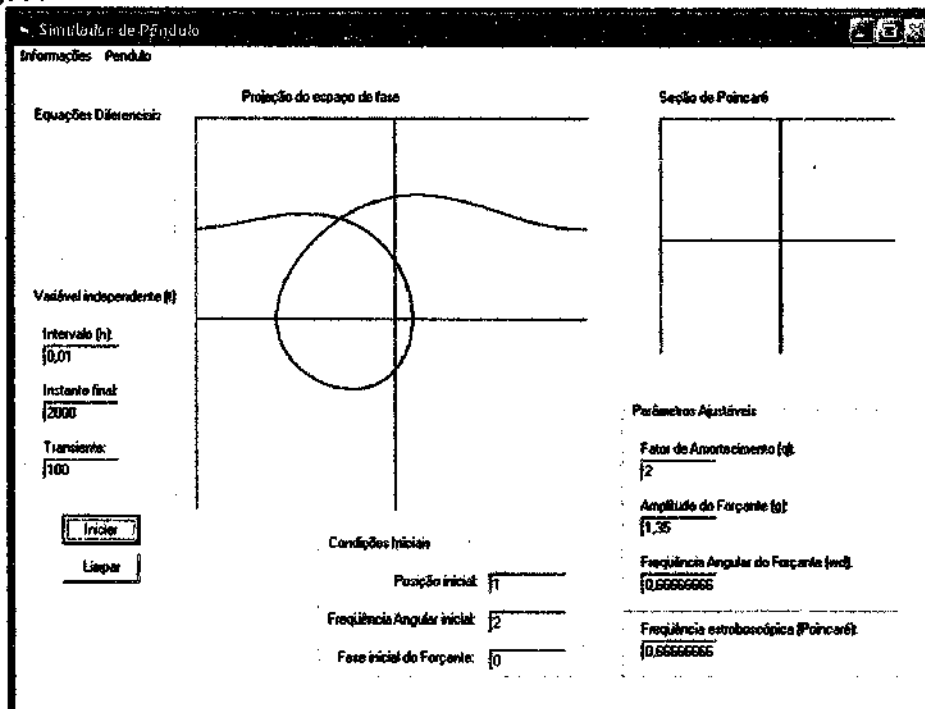
$g = 1,15:$



Note que o movimento é completamente irregular e imprevisível, observando a seção de Poincaré, temos que esta apresenta uma geometria fractal. Temos o comportamento caótico.

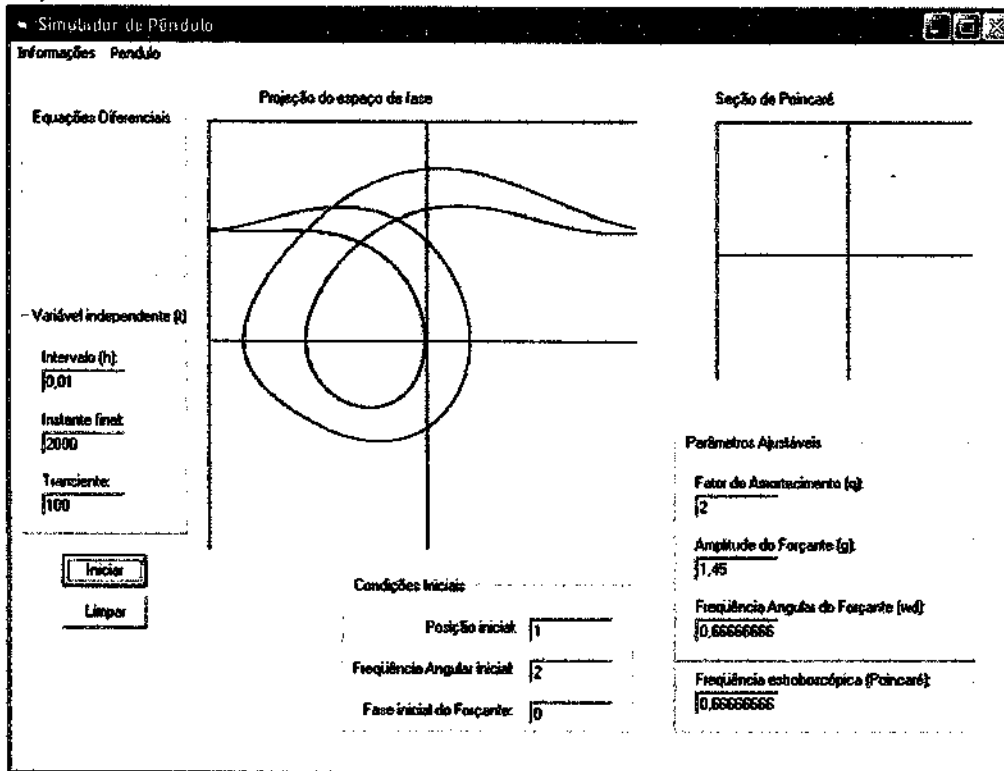
Variando o parâmetro  $g$  novamente, temos:

-  $g = 1,35:$



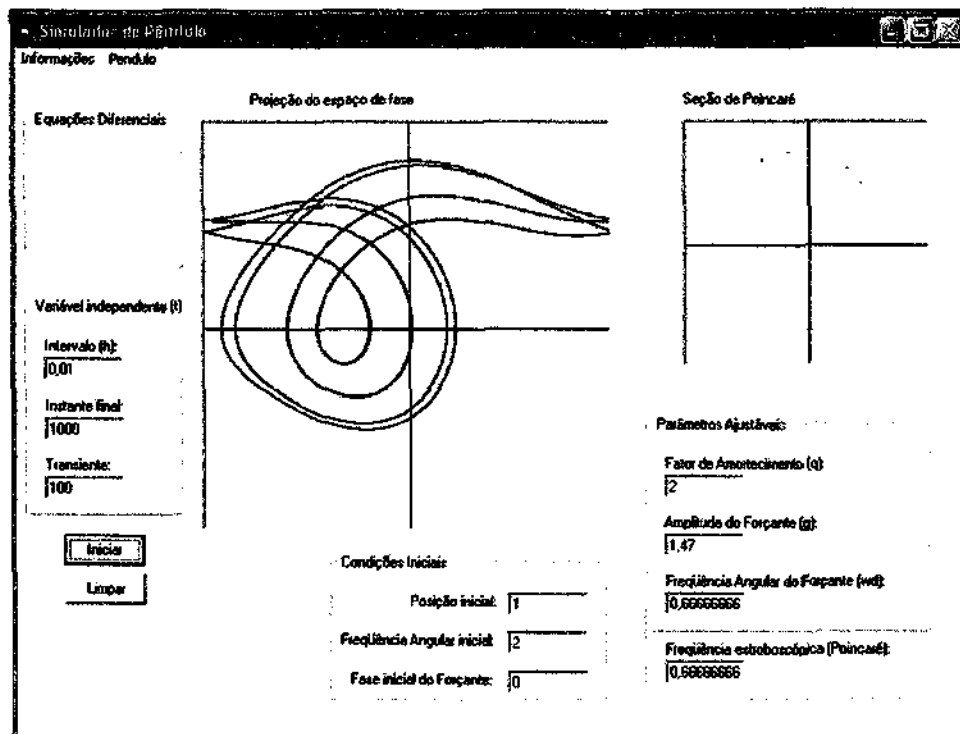
A dinâmica do sistema volta a ser periódica (período 1). Variando novamente o valor da amplitude do forçante, temos:

-  $g = 1,45$ :

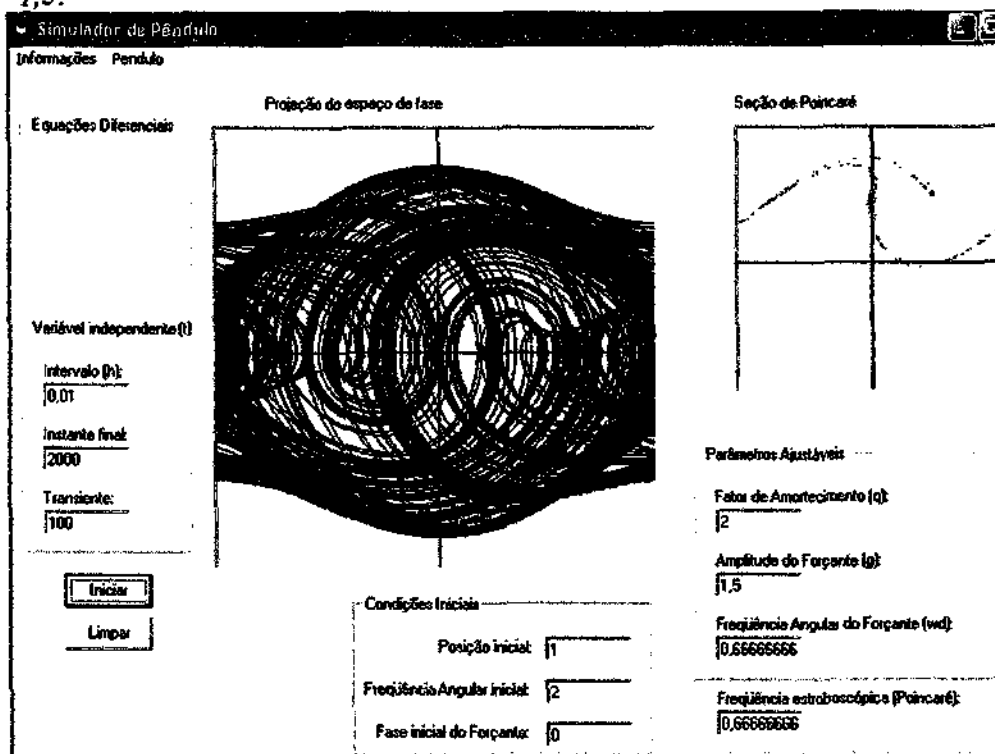


Notamos que a solução é periódica de período 2. A partir de então, o sistema passa a duplicar sua periodicidade com a mudança de  $g$  até que volta a apresentar o comportamento caótico para  $g = 1,5$ . Note que para  $g = 1,47$  temos uma solução periódica de período 4. Observe os quatro pontos fixos na seção de Poincaré.

-  $g = 1,47$ :



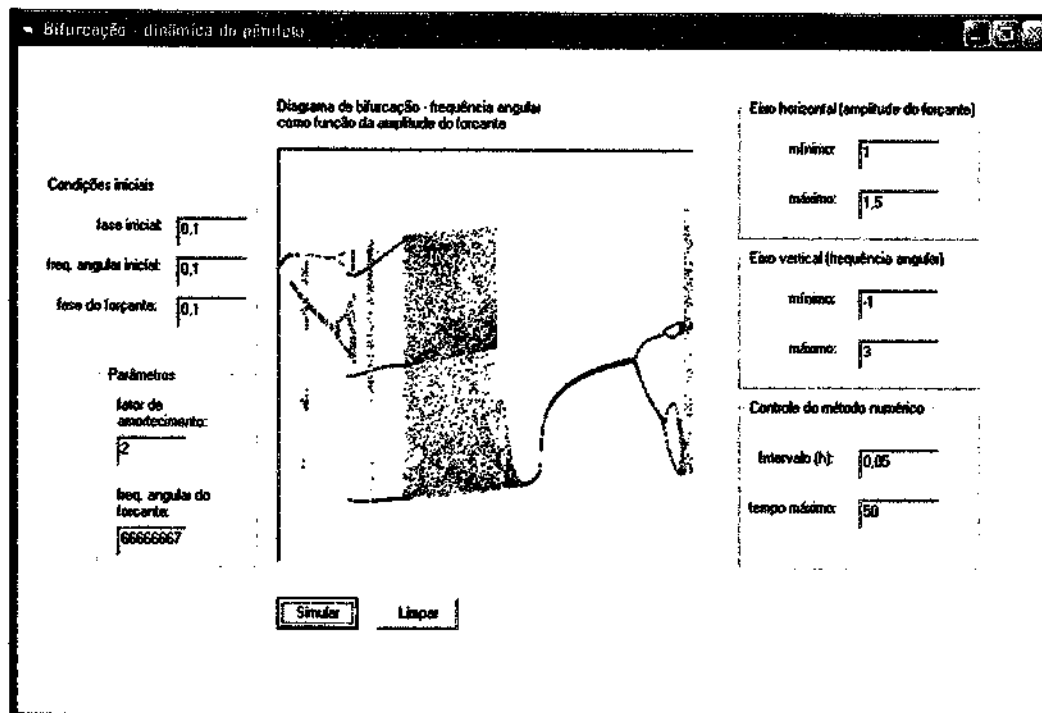
-  $g = 1,5$ :



Para melhor observarmos a mudança de comportamento dinâmico, isto é, as bifurcações com variações de  $g$ , temos que foi desenvolvido um programa no qual o método de solução da

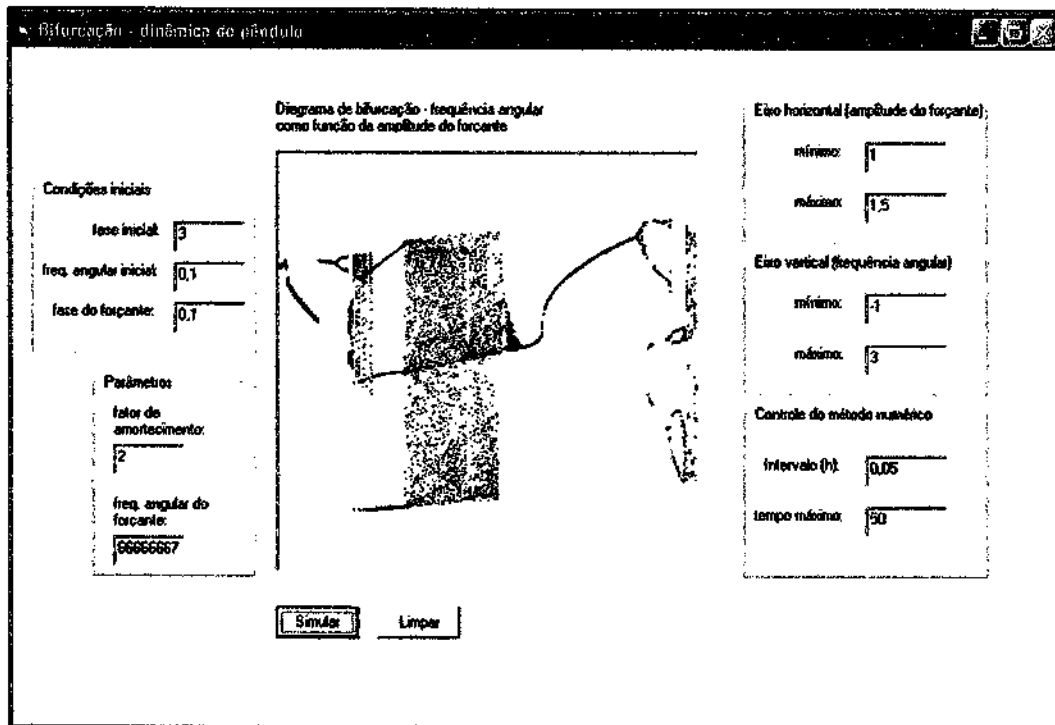
equação diferencial é feito de forma repetitiva enquanto que são tomadas variações do parâmetro  $g$  em torno de um certo intervalo (que é uma das entradas do programa). Plotando-se o valor da velocidade angular para intervalos periódicos do forçante, tomados após um certo transiente, observa-se de modo global tais bifurcações. Temos:

- Diagrama de bifurcação:
- $g$  no intervalo  $[1; 1,5]$



Sendo o intervalo considerado de variação do parâmetro  $g$  descrito acima, notamos que para um dado ponto o comportamento do sistema corresponde a projeção do espaço de fase observado no programa anterior. Quando entramos com  $g = 1,15$ , observamos uma solução caótica. Este ponto está localizado na região observada no diagrama de bifurcação onde o movimento é irregular. Notemos que as sucessivas bifurcações do período do sistema podem ser vistas logo após a faixa caótica. Podemos observar órbitas de período 1, 2, 4 e assim por diante. Para  $g = 1,5$  temos que o sistema novamente é caótico. Isso pode ser visto na extrema direita do diagrama.

Modificando as condições iniciais, obtemos um diagrama semelhante:



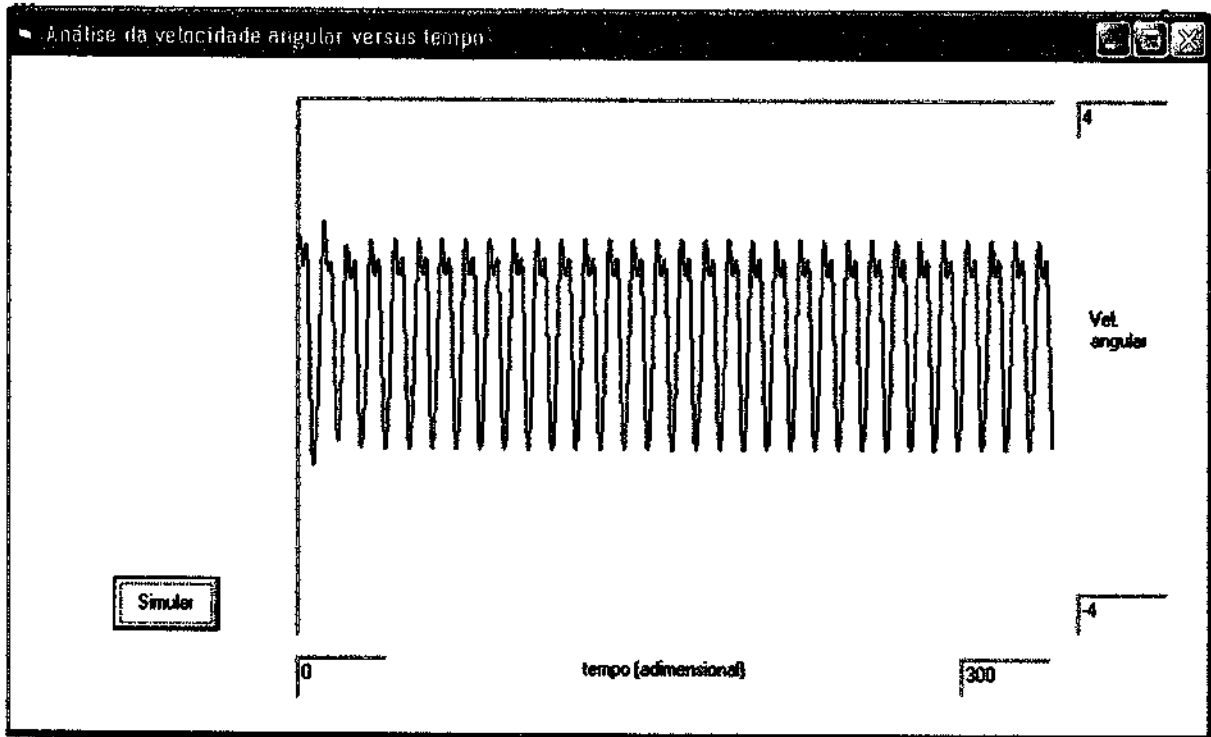
## 6- Controle de Caos – próximas etapas

O termo controle aplicado a sistemas caóticos, embora apresente-se aparentemente contraditório, pois um sistema que tenha tal natureza apresenta sua dinâmica irregular, embora determinística. Sendo os sistemas caóticos observados nos mais diversos fenômenos da natureza, pesquisas são feitas com o intuito de “modificar” a dinâmica destes de modo que passem a apresentar um comportamento regular. Situações aonde desejamos “anular” o comportamento caótico são normalmente encontradas em projetos de estruturas mecânicas e circuitos eletrônicos [4].

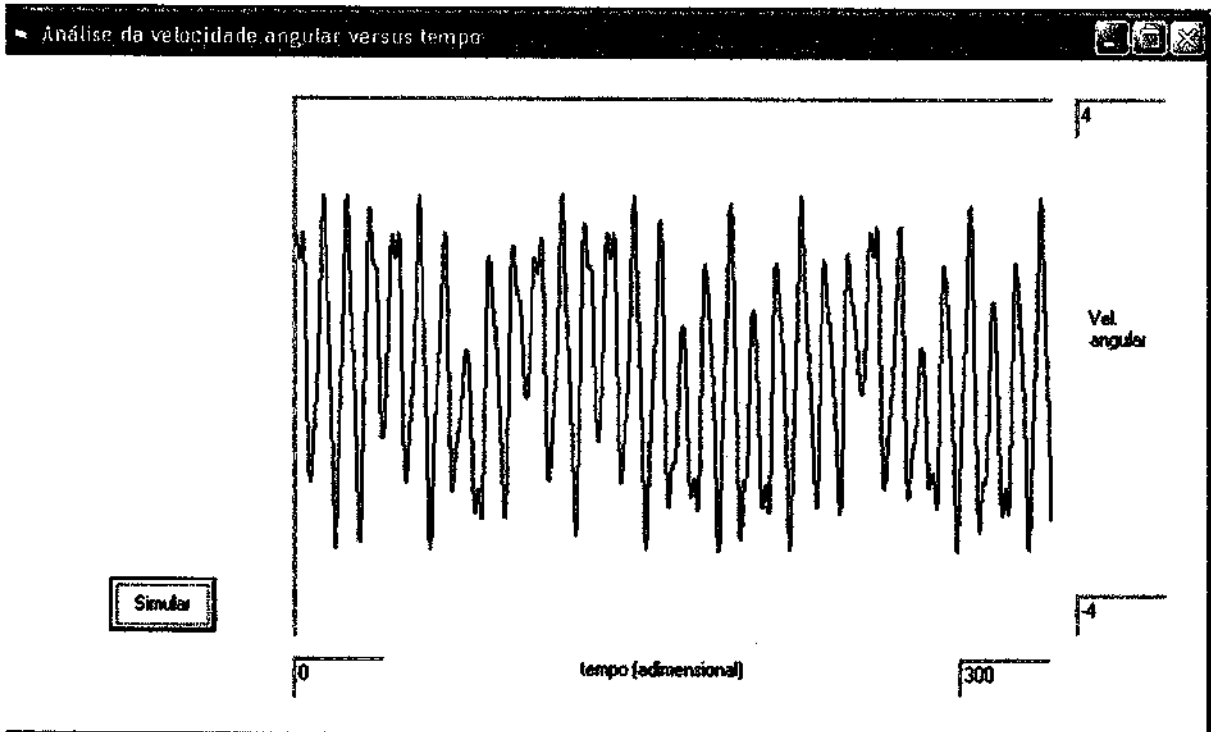
Uma forma simples de evitar o caos é ajustar os parâmetros do sistema de modo que esta solução seja periódica [4]. Por exemplo, o pêndulo amortecido e forçado pode ser estabilizado se em um determinado instante adicionarmos um forçante com frequência igual a metade da do forçante inicial e amplitude de  $2/3$  desta. Utilizando o programa descrito no item anterior, podemos a partir de condições iniciais e definidos os parâmetros do sistema analisar as variações da velocidade angular.

Consideraremos uma simulação com  $t_{max} = 300$ .

Para  $g = 1,35$ :



Para  $g = 1,5$ :





Conforme esperávamos, temos que o último sistema apresenta oscilações não regulares de valores de sua velocidade angular. Assim, podemos estabilizar o sistema através da adição do forçante adicional.

Entretanto, nem sempre temos controle de tais parâmetros, de modo que não se torna possível tal mudança. O processo de controle de caos é então baseado no princípio de que, quando um sistema bifurca de modo a atingir um certo comportamento caótico, temos que as órbitas antes periódicas tornaram-se instáveis. Logo, devemos provocar pequenas variações nos parâmetros de controle ( $\delta q$ ) de modo a atingirmos tais estados. O processo é descrito segundo o algoritmo de Ott, Grebogi e Yorke (OGY 1990), e será a etapa final deste projeto, o qual pretende-se dar continuidade por um período de mais 1 ano.

---

## 7- Conclusões

---

Com os experimentos realizados citados acima, além da descrição teórica de sistemas dinâmicos e algoritmos utilizados em suas simulações pode-se fazer um estudo sobre esta área da matemática cujo âmbito de aplicações abrange desde problemas em física e engenharia até sistemas econômicos, biológicos, dentre outros.

Os experimentos realizados forneceram resultados que, de modo geral, podem ser comparados com os vistos nas referências, assim como com outros fornecidos pelos softwares de simulações numéricas já existentes, com os quais pode-se concluir uma boa coerência.

---

## 8- Referências Bibliográficas

---

- 1- *The Chaos Hypertext Book* – [www.hypertextbook.com/chaos](http://www.hypertextbook.com/chaos)
- 2- *Numerical Recipes* - [www.nr.com](http://www.nr.com)
- 3- MONTEIRO, L.H.A – *Sistemas dinâmicos*. Editora Livraria da Física, São Paulo – 2002.
- 4- BAKER, G.L; GOLLUB J.P. – *Chaotic Dynamics, an introduction*. Cambridge University Press, Cambridge (UK)-1996.
- 5- MACAU, E. E. N – *Sistemas Caóticos*. Artigo.

---

## 9- Agradecimentos

---

Agradeço ao prof. Elbert Macau pela orientação científica e acadêmica durante todas as etapas do projeto, bem como ao Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio financeiro e por possibilitarem as ferramentas necessárias para que este projeto fosse realizado.