

## **Órbitas Congeladas: Comparação do Efeito do Geopotencial Entre a Teoria De Brouwer e a Implementação do Centro de Controle do Inpe**

Douglas Soldan de Oliveira <sup>1</sup> (FEG/UNESP)  
Paula Cristiane Pinto Raimundo <sup>2</sup> (FEG/UNESP)  
Dr. Hélio Koiti Kuga <sup>3</sup> (DMC/INPE)  
Dr. Rodolpho Vilhena de Moraes <sup>4</sup> (DMA/FEG/UNESP)

### **RESUMO**

Em um trabalho de Iniciação Científica de 2002, foram obtidas de forma explícita as expressões de longo período da teoria de Brouwer (1959) que fornecem as perturbações devidas ao geopotencial até o termo J5. Estes termos dão origem às chamadas órbitas congeladas (“frozen orbits”), cuja teoria está sendo aplicada em missões espaciais, especialmente nos satélites CBERS-1 e 2 (“China-Brazil Earth Resources Satellite”). No estudo da influência do arrasto atmosférico no movimento de satélites artificiais vários modelos têm sido propostos para descrever a densidade atmosférica. Geralmente quando modelos realísticos são utilizados para a densidade atmosférica, eles são sofisticados, e dificultam a solução analítica das equações do movimento. Entretanto, o modelo proposto por Brouwer e Hori (1961) é conveniente para desenvolvimentos analíticos e fornece um bom indicativo para a ordem de grandeza da perturbação nos elementos orbitais. A teoria permite flexibilidade tal que efeitos seculares e de longo período são facilmente detectáveis, possibilitando análise fina do efeito perturbador. Esta implementação consta do trabalho de Iniciação Científica de 2003, em conjunção com os resultados de 2002. No presente trabalho, adaptamos as equações anteriormente obtidas, para as perturbações devidas ao geopotencial, para as variáveis não singulares, que são utilizadas no Centro de Controle de Satélites do INPE para o satélite CBERS-1 e 2. A adaptação das equações para as variáveis orbitais utilizadas no Centro de Controle (variáveis não singulares) permite comparar o desempenho da teoria de Brouwer com a presentemente em uso. Este modelo foi codificado em computador, em linguagem Fortran. O programa foi testado para várias situações sendo confrontado com os dados existentes, fazendo-se, então, um teste da veracidade do desenvolvimento matemático. Após os testes realizados neste projeto em conjunto com os testes extensivos realizados nos trabalhos de Iniciação Científica de 2002 e 2003, foi possível validar “operacionalmente” o modelo para dados do satélite CBERS-1, visando tanto previsões orbitais quanto previsão de manobras, no Centro de Controle de Satélites do INPE. O modelo desenvolvido mostrou maior precisão no cálculo dos efeitos das perturbações nas chamadas órbitas congeladas (“frozen orbits”), podendo permitir uma previsão mais acurada das manobras de manutenção orbital a serem realizadas para os satélites da série CBERS-1 e 2.

### **REFINAMENTO DAS PREVISÕES DO MODELO ETA**

<sup>1</sup> Aluno do Curso de Engenharia Mecânica, FEG / UNESP, E-mail: mec03208@feg.unesp.br

<sup>2</sup> Aluna do Curso de Física, FEG / UNESP, E-mail: paula-cristiane@uol.com.br

<sup>3</sup> Tecnologista Sr., INPE E-mail: hkk@dem.inpe.br

<sup>4</sup> Pesquisador, FEG/UNESP e docente INPE E-mail: rodolpho@feg.unesp.br



INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

**AUTORIZAÇÃO PARA PUBLICAÇÃO**

Número

PIBIC-050/04

Título *M07*

Órbitas Congeladas: Comparação do Efeito do Geopotencial entre a Teoria de Brouwer e a Implementação do Centro de Controle do INPE

Autor

Paula Cristiane Pinto Raimundo Douglas Soldan de Oliveira

Tradutor

Não há

Editor

Origem	Projeto	Série	No. de Páginas	No. de Fotos	No. de Mapas
			35	0	0

Tipo

RPQ  PRE  NTC  PRP  MAN  PUD  TAE

Divulgação

Externa  Interna  Reservada  Lista de Distribuição Anexa

Periódico / Evento

Seminário de Iniciação Científica do INPE - SICINPE 2004

Convênio

Autorização Preliminar

\_\_\_\_/\_\_\_\_/\_\_\_\_  
Data

*[Signature]*  
Coordenador do PIBIC  
Programa de Iniciação Científica do INPE

Revisão Técnica

Solicitada  Dispensada  
Recebida \_\_\_\_/\_\_\_\_/\_\_\_\_ Devolvida \_\_\_\_/\_\_\_\_/\_\_\_\_  
Titular de Nível "A"  
Assinatura do Revisor

Revisão de Linguagem

Solicitada  Dispensada  
Recebida \_\_\_\_/\_\_\_\_/\_\_\_\_ Devolvida \_\_\_\_/\_\_\_\_/\_\_\_\_  
Titular de Nível "A"  
Assinatura do Revisor

Autorização Final

\_\_\_\_/\_\_\_\_/\_\_\_\_  
Data

*[Signature]*  
Marcos Dias de Souza  
Coordenador de Apoio, Documentação e Programação de Unidade

Palavras Chave

Órbitas - Brouwer - Centro de Controle



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
**INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS**

**INPE-11580-PRE/6966**

**ÓRBITAS CONGELADAS: COMPARAÇÃO DO EFEITO DO  
GEOPOTENCIAL ENTRE A TEORIA DE BROUWER E A  
IMPLEMENTAÇÃO DO CENTRO DE CONTROLE DO INPE**

Paula Cristiane Pinto Raimundo

Relatório Final de Projeto de Iniciação Científica  
(PIBIC/CNPq/INPE)

INPE  
São José dos Campos  
2004



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

# **ÓRBITAS CONGELADAS: COMPARAÇÃO DO EFEITO DO GEOPOTENCIAL ENTRE A TEORIA DE BROUWER E A IMPLEMENTAÇÃO DO CENTRO DE CONTROLE DO INPE**

**RELATÓRIO FINAL DE PROJETO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA  
(PIBIC/CNPQ/INPE)**

**Paula Cristiane Pinto Raimundo (FEG/UNESP, Bolsista PIBIC/CNPq)  
E-mail: paula-cristiane@uol.com.br**

**Douglas Soldan de Oliveira (FEG/UNESP, Bolsista PIBIC/CNPq)  
E-mail: mec03208@feg.unesp.br**

**Dr. Hélio Koiti Kuga (DME/INPE, Orientador)  
E-mail: hkk@dem.inpe.br**

**Dr. Rodolpho Vilhena de Moraes (DMA/UNESP, Orientador)  
E-mail: rodolpho@feg.unesp.br**

**MAIO DE 2004**

## **AGRADECIMENTOS**

Nós agradecemos ao INPE (Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais) e ao CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico) pela oportunidade fornecida para que desenvolvêssemos este trabalho juntamente com Dr. Hélio Koiti Kuga e Dr. Rodolpho Vilhena de Moraes, que nos orientaram neste trabalho de Iniciação Científica e aos quais nós também agradecemos pela confiança em nós depositada.

# SUMÁRIO

1.	<u>INTRODUÇÃO</u> .....	4
2.	<u>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</u> .....	5
2.1	<u>GEOPOTENCIAL</u> .....	5
2.2	<u>MÉTODO DA VARIAÇÃO DAS CONSTANTES</u> .....	7
2.3	<u>EQUAÇÕES DE LAGRANGE</u> .....	9
2.4	<u>CÁLCULO DAS PERTURBAÇÕES DE LONGO PERÍODO ATÉ J5 PELA TEORIA DE BROUWER</u> .....	11
2.4.1	<u>INCLUSÃO DAS PERTURBAÇÕES RELACIONADAS AO GEOPOTENCIAL ATÉ A ORDEM DE J5</u> .....	11
2.5	<u>MODELAGEM DO ARRASTO ATMOSFÉRICO PELA TEORIA DE BROUWER E DE HORI</u> .....	14
2.5.1	<u>A TEORIA DE BROUWER E DE HORI</u> .....	15
2.5.2	<u>INCLUSÃO DAS PERTURBAÇÕES RELACIONADAS AO ARRASTO ATMOSFÉRICO</u> .....	16
3.	<u>COMPARAÇÃO COM A TEORIA UTILIZADA NO CENTRO DE CONTROLE DE SATÉLITES DO INPE</u> .....	20
3.1	<u>TEORIA UTILIZADA NO CENTRO DE CONTROLE DE SATÉLITES DO INPE</u> .....	21
3.2	<u>EQUIVALÊNCIA ENTRE TEORIA DE BROUWER E TEORIA UTILIZADA NO CENTRO DE CONTROLE DE SATÉLITES DO INPE</u> .....	22
3.3	<u>DESENVOLVIMENTO DA COMPARAÇÃO</u> .....	23
4.	<u>RESULTADOS E ANÁLISES</u> .....	26
5.	<u>CONCLUSÕES</u> .....	34
6.	<u>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</u> .....	35

# 1. INTRODUÇÃO

A solução dada por Brouwer (1959), apesar de antiga, apresenta expressões analíticas explícitas, como funções do tempo, para a variação dos elementos orbitais. Isto permite efetuar com certa facilidade, para diversos tipos de órbitas e condições iniciais, a análise sobre o comportamento temporal dos elementos orbitais bem como obter ordens de grandeza para as perturbações devidas ao geopotencial. Na solução de Brouwer aparecem de forma explícita as expressões de longo período devidas a  $J_2$  e  $J_4$ . As expressões devidas a  $J_3$  e  $J_5$  podem também ser obtidas mas com um trabalho suplementar, incluindo tais perturbações. Estes termos dão origem às chamadas órbitas congeladas (“frozen orbits”) cuja teoria está sendo aplicada em missões espaciais, especialmente o satélite CBERS-1 (“China-Brazil Earth Resources Satellite”).

Em um trabalho de Iniciação Científica de 2002 (Raimundo, 2002), foram obtidas de forma explícita as expressões de longo período da teoria de Brouwer que fornecem as perturbações devidas ao geopotencial até o termo  $J_5$ . Estes termos dão origem às chamadas órbitas congeladas (“frozen orbits”), cuja teoria está sendo aplicada em missões espaciais, especialmente no satélite CBERS-1 (“China-Brazil Earth Resources Satellite”).

No estudo da influência do arrasto atmosférico no movimento de satélites artificiais vários modelos têm sido propostos para descrever a densidade atmosférica  $\rho$  (Vilhena de Moraes, 1994). Geralmente quando modelos realísticos são utilizados para a densidade atmosférica, eles são sofisticados, e dificultam a solução analítica das equações do movimento. Entretanto, o modelo proposto por Brouwer e Hori (1961) é conveniente para desenvolvimentos analíticos e fornece um bom indicativo para a ordem de grandeza da perturbação nos elementos orbitais. A teoria permite flexibilidade tal que efeitos seculares e de longo período são facilmente detectáveis, possibilitando análise fina do efeito perturbador. Esta implementação consta do trabalho de Iniciação Científica de 2003 (Raimundo 2003), em conjunção com os resultados de 2002.

No presente projeto, propõe-se adaptar as equações para as variáveis não singulares que são utilizadas no Centro de Controle de Satélites do INPE para o satélite CBERS-1 (Fu-Ming e Kuga, 1999).

A adaptação das equações para as variáveis orbitais utilizadas no centro de controle (variáveis não singulares), permitirá comparar o desempenho da teoria com a presentemente em uso. Assim, o desenvolvimento final deste modelo permitirá melhorar a análise da influência das perturbações nas previsões da evolução das órbitas da família CBERS e de satélites similares (SPOT, Landsat, ERS e IRS).

## 2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Durante o período da bolsa, os seguintes tópicos foram estudados:

1. Geopotencial;
2. Método da variação das constantes,
3. Equações de Lagrange;
4. Cálculo das perturbações de longo período até J5 pela teoria de Brouwer;
5. Modelagem do arrasto atmosférico pela teoria de Brouwer e de Hori;
6. Comparação com a teoria utilizada no Centro de Controle de Satélites do INPE.

A seguir, está um resumo de cada um destes tópicos estudados.

### 2.1 GEOPOTENCIAL

Seja o potencial correspondente a um campo de forças igual a  $F$ , isto é,  $F = \nabla U$ . Para um sólido constituído por elementos infinitesimais, esse potencial pode ser expresso, conforme a figura (2.1.1), por:

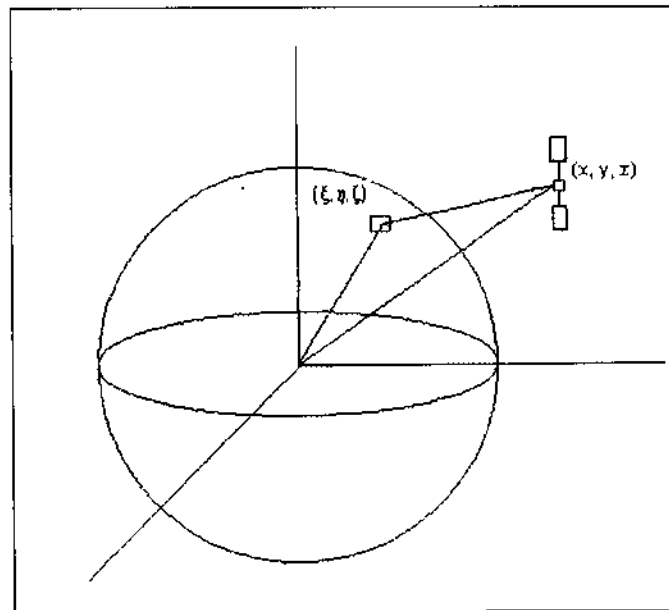


Figura (2.1.1) – Fonte: Vilhena de Moraes (1978)

$$U(x, y, z) = \iiint_V G \frac{dm}{R} = \iiint_V G \frac{\sigma d\xi d\eta d\zeta}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}} \quad (2.1.1)$$

em que  $G$  é a constante da gravitação universal,  $\sigma(\xi, \eta, \zeta)$  é a densidade variável e a integral é estendida sobre todo o volume  $V$ .



Em coordenadas esféricas o volume unitário é:  $\rho^2 \cos \phi' d\phi' d\lambda' d\rho$ . Assim, o potencial será expresso por

$$U(r, \phi, \lambda) = \iiint G \frac{dm}{R} = \iiint G \frac{\sigma \rho^2 \cos \phi' d\phi' d\lambda' d\rho}{R} \quad (2.1.2)$$

Como  $\frac{r}{\rho} < 1$ , vamos expandir  $\frac{1}{R}$  nas vizinhanças de  $\frac{r}{\rho} = 0$ :

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} \left\{ \begin{aligned} &1 + \frac{\rho}{r} \cos \psi + \left(\frac{\rho}{r}\right)^2 \left[ -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos^2 \psi \right] + \left(\frac{\rho}{r}\right)^3 \left[ -\frac{3}{2} \cos \psi + \frac{5}{2} \cos^3 \psi \right] + \\ &\left(\frac{\rho}{r}\right)^4 \left[ \frac{3}{8} - \frac{15}{4} \cos^2 \psi + \frac{35}{8} \cos^4 \psi \right] + \dots \end{aligned} \right\} \quad (2.1.3)$$

com:

$$P_0(\cos \psi) = 1$$

$$P_1(\cos \psi) = \cos \psi$$

$$P_2(\cos \psi) = \frac{1}{2}(3 \cos^2 \psi - 1)$$

$$P_3(\cos \psi) = \frac{1}{2}(5 \cos^3 \psi - 3 \cos \psi)$$

$$P_4(\cos \psi) = \frac{1}{8}(35 \cos^4 \psi - 30 \cos^2 \psi + 3)$$

Outros termos são gerados por:

$$nP_n(\cos \psi) = (2n - 1) \cos \psi P_{n-1}(\cos \psi) - (n - 1)P_{n-2}(\cos \psi) \quad (2.1.4)$$

Deste modo, podemos escrever  $\frac{1}{R}$  da seguinte maneira:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{r}\right)^n P_n(\cos \psi) \quad (2.1.5)$$

Substituindo  $\frac{1}{R}$  na integral de U, obteremos:

$$U = G \frac{\sigma}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \iiint \left(\frac{\rho}{r}\right)^n \rho^2 P_n(\cos \psi) \cos \phi' d\phi' d\lambda' d\rho \quad (2.1.6)$$

em que  $(\rho, \phi', \lambda')$  são as coordenadas do elemento infinitesimal de massa  $dm$ . É necessário, agora, expressar  $\psi$  em termos de  $\phi$  e  $\lambda$ .

Mostra-se que (pode ser encontrada em Morando, 1974):

$$P_n(\cos \psi) = \left\{ \begin{aligned} &P_n(\sin \phi)P_n(\sin \phi') + \\ &+ 2 \sum_{k=1}^n \frac{(n-k)!}{(n+k)!} P_{n,k}(\sin \phi)P_{n,k}(\sin \phi') \cos k(-\lambda') \end{aligned} \right\} \quad (2.1.7)$$

sendo que os  $P_{n,k}(x)$  são os polinômios generalizados de Legendre.

Para o caso de um satélite artificial da Terra, o potencial é dado por:

$$U = \frac{\mu}{r} \left[ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{J_n \alpha_e^n}{r^n} P_n(\sin \phi) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^n \frac{J_{n,k} \alpha_e^n}{r^n} P_{n,k}(\sin \phi) \cos k(\lambda - \lambda_{n,k}) \right] \quad (2.1.8)$$

sendo que  $\mu = GM$ ,  $J_n$  e  $J_{n,k}$  estão associados à distribuição de massa da Terra; e  $\alpha_e$  é o raio médio da Terra.

Supondo que a Terra tem uma distribuição de massa simétrica em relação ao Equador, a expressão para  $U$  será:

$$U = \frac{GM}{r} \left\{ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left( \frac{R}{r} \right)^n P_n(\sin \phi) \right\} \quad (2.1.9)$$

em que  $G$  é a constante gravitacional,  $M$  é a massa de Terra,  $J_n$  são constantes e  $P_n(\sin \phi)$  é o polinômio de Legendre de grau  $n$  e argumento  $(\sin \phi)$ , sendo que  $\phi$  é a latitude geocêntrica. O primeiro termo em  $U$  representa o potencial básico da esfera terrestre; o termo em  $J_2$ , o segundo harmônico, representa o efeito do achatamento da Terra; o terceiro harmônico (termo  $J_3$ ) representa uma ligeira assimetria em relação ao Equador, conhecido como efeito "formato de pêra".

## 2.2 MÉTODO DA VARIAÇÃO DAS CONSTANTES

O método da variação das constantes arbitrárias foi desenvolvido inicialmente por Euler; em seguida trabalhado por Lagrange, que lhe deu fundamentos sólidos; e por Laplace, que determinou com rigor as derivadas dos elementos keplerianos.

Considere um sistema de  $n$  equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, que define  $n$  funções  $x_1, x_2, \dots, x_n$  de uma variável independente  $t$ . Seja este sistema escrito sob a forma (pode ser encontrada em Ferraz Melo, 1972):

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}, t) \quad (2.2.1)$$

Admita-se conhecida a solução geral deste sistema, em função de  $n$  constantes arbitrárias  $C_1, C_2, \dots, C_n$ . Seja esta solução:

$$\bar{x} = \bar{\varphi}(\bar{C}, t) \quad (2.2.2)$$

Considere agora um novo sistema de  $n$  equações diferenciais ordinárias de primeira ordem cujos segundos membros diferem dos segundos membros das equações precedentes por um termo aditivo que será suposto pequeno, relativamente às funções  $f_i(\bar{x}, t)$ . Seja este novo sistema:

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}, t) + \bar{g}(\bar{x}, t) \quad (2.2.3)$$

O método de Lagrange da Variação das Constantes Arbitrárias consiste em considerar, em  $\bar{x} = \bar{\varphi}(\bar{C}, t)$ , a quantidade  $\bar{C}$  como uma função vetorial incógnita da variável  $t$  e não mais como um vetor constante. Procuramos determiná-la de maneira que  $\bar{x} = \bar{\varphi}[\bar{C}(t), t]$  satisfaça ao novo sistema de equações diferenciais.

A derivada de (2.2.3),  $\dot{\bar{x}} = \frac{d\bar{\varphi}}{d\bar{C}} \dot{\bar{C}} + \frac{d\bar{\varphi}}{dt}$ , deve satisfazer o novo sistema de equações diferenciais. Segue-se então que:

$$\frac{d\bar{\varphi}}{d\bar{C}} \dot{\bar{C}} + \frac{d\bar{\varphi}}{dt} = \bar{f}(\bar{x}, t) + \bar{g}(\bar{x}, t) \quad (2.2.4)$$

Cabe lembrar que  $\bar{\varphi}$  não é uma função qualquer, pois para que  $\bar{C}$  seja constante, ela deve satisfazer ao sistema não perturbado, ou seja:

$$\frac{d\bar{\varphi}(\bar{C}, t)}{dt} = \left[ \frac{d\bar{\varphi}(\bar{C}, t)}{d\bar{C}} \right] \dot{\bar{C}} = c\dot{t}e = \bar{f}(\bar{x}, t) \quad (2.2.5)$$

de onde resulta:

$$\frac{d\bar{\varphi}}{d\bar{C}} \dot{\bar{C}} = \bar{g}[\bar{\varphi}(\bar{C}, t), t] \quad (2.2.6)$$

sistema de  $n$  equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, que define a função  $\bar{C}(t)$ .

Vale ressaltar que  $\frac{d\bar{\varphi}}{d\bar{C}}$  não pode ser nulo, senão  $\bar{x} = \bar{\varphi}(\bar{C}, t)$  não seria mais a solução do problema não perturbado, como foi suposto inicialmente. Podemos, então, representar o sistema de equações de perturbação da seguinte maneira:

$$\dot{\bar{c}} = \left[ \frac{d\bar{\varphi}}{d\bar{c}} \right]^{-1} \bar{g}[\bar{\varphi}(\bar{c}, t), t] = \bar{G}(\bar{c}, t) \quad (2.2.7)$$

e estando este sistema resolvido, teremos a solução perturbada do sistema.

### 2.3 EQUAÇÕES DE LAGRANGE

Do estudo do problema dos dois corpos é conhecido que as coordenadas e as componentes da velocidade permitem a determinação de um único conjunto de seis elementos orbitais, que não variam neste problema.

Em várias aplicações, costuma-se também utilizar a anomalia média  $M$  ao invés de o tempo de passagem do pericentro.

O problema dos dois corpos pode ser considerado uma primeira idealização para movimento de um satélite artificial. No movimento real, os elementos orbitais, que correspondem a coordenadas e componentes da velocidade dadas em um sistema de referência, variam com o tempo. Ao invés de calcular as coordenadas e velocidades perturbadas podemos obter equações que fornecem as variações dos elementos orbitais.

As equações do movimento de um satélite artificial, considerando perturbações, podem ser colocadas na seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\mu x}{r^3} &= \frac{\partial R}{\partial x}; \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{\mu y}{r^3} &= \frac{\partial R}{\partial y}; \\ \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{\mu z}{r^3} &= \frac{\partial R}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

sendo a segunda parcela do primeiro termo correspondente ao problema dos dois corpos. No segundo membro, foi suposto que as componentes da aceleração podem ser escritas como a derivada de uma função perturbadora  $R$ , produzida por todas as outras forças do movimento.  $R$  é a função perturbadora do movimento dada em função de  $x$ ,  $y$ ,  $z$  e  $t$ , contendo ainda um pequeno parâmetro. Tais equações foram determinadas considerando a massa central colocada na origem do sistema de coordenadas.

Para resolver as equações (2.3.1), utiliza-se o Método da Variação das Constantes. Sabemos que a solução do sistema sem o segundo membro é um movimento kepleriano caracterizado por  $a$ ,  $e$ ,  $i$ ,  $\Omega$ ,  $\omega$  e  $M$ . Essa solução é utilizada como a solução não perturbada conhecida. Temos, portanto, que resolver um sistema de equações diferenciais, ligando as derivadas dessas quantidades com relação ao tempo às derivadas parciais da função perturbadora com relação aos elementos  $a$ ,  $e$ ,  $i$ , etc.

As equações obtidas são as Equações de Lagrange da Mecânica Celeste cujo uso é bastante geral. Elas servem tanto para resolver o problema do movimento de um satélite artificial como para problemas de mecânica do sistema solar (movimento de planetas, da Lua, de satélites naturais). As equações, dadas aqui sem demonstração (podem ser encontradas em Kovalevsky, 1967), são:

$$\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial M} \\
\frac{de}{dt} &= \frac{-\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial \omega} \frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial M} \\
\frac{di}{dt} &= \frac{-1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \text{seni}} \frac{\partial R}{\partial \Omega} \frac{\text{cosi}}{na^2 \sqrt{1-e^2} \text{seni}} \frac{\partial R}{\partial \omega} \\
\frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \text{seni}} \frac{\partial R}{\partial i} \\
\frac{d\omega}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} \frac{\text{cosi}}{na^2 \sqrt{1-e^2} \text{seni}} \frac{\partial R}{\partial i} \\
\frac{dM}{dt} &= n - \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} \frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e}
\end{aligned} \tag{2.3.2}$$

observa-se que, nas três primeiras equações, aparecem as derivadas de  $R$  com relação à  $\Omega$ ,  $\omega$  e  $M$ ; enquanto nas três últimas equações não aparecem essas derivadas, mas sim, as derivadas com relação a  $a$ ,  $e$ ,  $i$ . As variáveis  $a$ ,  $e$ ,  $i$  são chamadas de variáveis métricas; e  $\Omega$ ,  $\omega$  e  $M$  de variáveis angulares.

Em lugar dos elementos osculadores (elementos instantâneos obtidos com o auxílio das fórmulas do problema não perturbado), tomemos como variáveis as ditas variáveis de Delaunay, que estão ligadas aos elementos keplerianos pelas seguintes fórmulas:

$$\begin{aligned}
L &= \sqrt{\mu a} & G &= \sqrt{\mu a(1-e^2)} & H &= \sqrt{\mu a(1-e^2)} \text{cosi} \\
l &= M = n(t-t_0) & g &= \omega & h &= \Omega
\end{aligned} \tag{2.3.3}$$

Efetuada as mudanças de variáveis definidas pelas fórmulas (2.3.3) nas equações de Lagrange, obtém-se o sistema:

$$\begin{aligned}
\frac{dL}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial l}, \quad \frac{dG}{dt} = \frac{\partial F}{\partial g}, \quad \frac{dH}{dt} = \frac{\partial F}{\partial h} \\
\frac{dl}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial L}, \quad \frac{dg}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial G}, \quad \frac{dh}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial H}
\end{aligned} \tag{2.3.4}$$

com:

$$F = \frac{\mu^2}{2L^2} + R$$

Tal forma, dita Equações de Lagrange na Forma Hamiltoniana, é amplamente empregada.

## **2.4 CÁLCULO DAS PERTURBAÇÕES DE LONGO PERÍODO ATÉ J5 PELA TEORIA DE BROUWER**

Em um projeto de Iniciação Científica anterior ao que estamos apresentando, baseamo-nos no artigo de Brouwer (1959) para inserir de forma explícita as expressões de longo período que fornecem as perturbações devidas ao geopotencial até o termo em J5 nas equações dos elementos congelados (argumento do perigeu e excentricidade); estes termos dão origem às chamadas órbitas congeladas, cuja teoria está sendo aplicada em missões espaciais, especialmente para a família CBERS. Posteriormente, analisamos qual o resultado desta inserção no desenvolvimento da órbita do CBERS-1 e quais os efeitos tanto na precisão da manobra de correção a ser efetuada quanto na precisão da previsão dos referidos elementos congelados.

O resultado foi coerente com o que esperávamos, pois a partir da inclusão de termos mais precisos nas equações do argumento do perigeu e da excentricidade percebemos uma melhor qualidade dos resultados obtidos, traduzindo de maneira mais precisa a realidade da evolução da órbita do CBERS-1. Fato este comprovado com a exclusão de determinadas manobras de correção após a inserção dos termos relacionados ao geopotencial até a ordem de J5, as quais eram previstas e necessárias na teoria que não considerava estes termos.

### **2.4.1 INCLUSÃO DAS PERTURBAÇÕES RELACIONADAS AO GEOPOTENCIAL ATÉ A ORDEM DE J5**

Em um trabalho anterior a este deste projeto, foram desenvolvidos analiticamente os termos das perturbações de longo período (cujos efeitos são gerados pelos termos ímpares) até J5, através de manipulação algébrica da teoria de Brouwer.

As equações já existentes (Cutting et. al.; 1978) foram previamente analisadas através de um modelo codificado em computador, em linguagem Fortran, para dados do referido artigo e cujos resultados obtidos foram plotados com o auxílio do editor de gráficos MS-Excel, para que se pudesse entender qual a natureza das “órbitas congeladas”, cuja característica é de fundamental importância para usuários das imagens obtidas pela câmara CCD a bordo deste tipo de satélites, já que imagens de datas diferentes podem ser comparadas para a mesma latitude, para utilizações tais como previsão de safras, queimadas, localização de aeroportos clandestinos, e outras.

Após a análise dos termos cuja perturbação tinha a ordem de grandeza de J3 (já existentes), o que fizemos foi uma extensa manipulação algébrica das equações da teoria de Brouwer, encontrando os termos em J5 que complementam as equações do artigo de Cutting et. al. (1978). Mostraremos agora apenas o raciocínio utilizado para a obtenção destas equações.

A equação para o argumento do perigeu  $\omega$ , já com modificações em relação à teoria de Brouwer, é:

$$\omega = 6nt \frac{K_2}{a^2(1-e^2)^2} \left(1 - \frac{5}{4} \text{sen}^2 i\right) + \frac{1}{4} \frac{A_{3,0}}{a(1-e^2)K_2} \left(\frac{\text{sen} i}{e} - \frac{e \cos^2 i}{\text{sen} i}\right) \cos \omega \quad (2.4.1.1)$$

E de Cutting et. al. temos que:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{3nJ_2 R_7^2}{a^2(1-e^2)^2} \left(1 - \frac{5}{4} \text{sen}^2 i\right) \left\{ 1 + \frac{J_2 R_7}{2J_2 a(1-e^2)} \left(\frac{\text{sen}^2 i - e^2 \cos^2 i}{e \text{sen} i}\right) \text{sen} \omega \right\} \quad (2.4.1.2)$$

Sabemos que  $\omega$  (argumento do perigeu) é uma função linear do tempo definida como  $\omega = \omega_0 + n_\omega t$  e, portanto, se derivarmos o primeiro termo de (2.4.1.1), teremos:

$$\dot{\omega} = 6n \frac{K_2}{a^2(1-e^2)^2} \left(1 - \frac{5}{4} \text{sen}^2 i\right) = n_\omega \quad (2.4.1.3)$$

Comparando este resultado com o primeiro termo da equação (2.4.1.2), concluímos que:

$$K_2 = \frac{J_2 R_7^2}{2} \quad \text{e} \quad n_\omega = \frac{3nJ_2 R_7^2}{a^2(1-e^2)^2} \left(1 - \frac{5}{4} \text{sen}^2 i\right)$$

Agora, derivando o segundo membro da equação (2.4.1.2), obteremos:

$$\dot{\omega} = -\frac{1}{4} n_\omega \frac{A_{3,0}}{a(1-e^2)K_2} \left(\frac{\text{sen} i}{e} - \frac{e \cos^2 i}{\text{sen} i}\right) \text{sen} \omega \quad (2.4.1.4)$$

onde  $K_2$  e  $n_\omega$  são conhecidos.

Comparando (2.4.1.4) com o segundo termo de (2.4.1.2), encontramos que:

$$A_{3,0} = -J_2 R_7^3$$

Agora que encontramos o valor de  $K_2$  e  $A_{3,0}$  e que sabemos que  $\omega = \omega_0 + n_\omega t$ , podemos acrescentar à equação (2.4.1.1) o termo de longo período devido a  $J_5$ :

$$\omega = \frac{2A_{5,0}}{J_2 R_7^2 a^3 (1-e^2)^3} \left\{ \begin{aligned} & \left[ \frac{5}{64} \left[ \left( \frac{\eta^2 \text{sen} i}{e} - \frac{e \cos^2 i}{\text{sen} i} \right) (4+3e^2) - e \text{sen} i (26+9e^2) \right] \times \right. \\ & \left. \left( 1 - 9 \cos^2 i - \frac{24 \cos^4 i}{1-5 \cos^2 i} \right) - \frac{15}{32} e \cos^2 i \text{sen} i (4+3e^2) \times \right. \\ & \left. \left[ 3 + \frac{16 \cos^2 i}{1-5 \cos^2 i} + \left[ \frac{40 \cos^4 i}{(1-5 \cos^2 i)^2} \right] \right] \right\} \cos \omega \quad (2.4.1.5) \end{aligned} \right.$$

Derivando (2.4.1.5), teremos:

$$\dot{\omega} = -n_{\omega} \frac{A_{3,0}}{J_2 R_T^2 a^3 (1-e^2)^3} \left\{ \begin{array}{l} \left[ \frac{5}{64} \left[ \left( \frac{\eta^2 \text{sen} i}{e} - \frac{e \cos^2 i}{\text{sen} i} \right) (4+3e^2) + e \text{sen} i (26+9e^2) \right] \times \right. \\ \left. \left( 1 - 9 \cos^2 i - \frac{24 \cos^4 i}{1-5 \cos^2 i} \right) - \frac{15}{32} e \cos^2 i \text{sen} i (4+3e^2) \times \right. \\ \left. \left[ 3 + \frac{16 \cos^2 i}{1-5 \cos^2 i} + \left[ \frac{40 \cos^4 i}{(1-5 \cos^2 i)^2} \right] \right] \right] \end{array} \right\} \text{sen} \omega \quad (2.4.1.6)$$

Este termo é inédito em Cutting et. al. (1978); porém, analisando os termos nele existentes, pudemos definir  $A_{3,0} = -J_3 R_T^5$  em função de  $J_5$ , por analogia (comprovamos que o termo obtido estava correto em programa codificado em computador, utilizando linguagem FORTRAN). Assim, acrescentando a equação (2.4.1.6) modificada em (2.4.1.2), obtivemos o seguinte:

$$\dot{\omega} = \frac{3nJ_2 R_T^2}{a^2 (1-e^2)^2} \left( 1 - \frac{5}{4} \text{sen}^2 i \right) \left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{J_3 R_T}{2J_2 a (1-e^2)} \times \left( \frac{\text{sen}^2 i - e^2 \cos^2 i}{e \text{sen} i} \right) \text{sen} \omega + \\ \left[ \frac{5}{64} \left[ \left( \frac{(1-e^2) \text{sen} i}{e} - \frac{e \cos^2 i}{\text{sen} i} \right) \times \right. \right. \\ \left. \left. (4+3e^2) + e \text{sen} i (26+9e^2) \right] \times \right. \\ \left. \left( 1 - 9 \cos^2 i - \frac{24 \cos^4 i}{1-5 \cos^2 i} \right) - \right. \\ \left. \left. - \frac{15}{32} e \cos^2 i \times \text{sen} i (4+3e^2) \times \right. \right. \\ \left. \left. \left( 3 + \frac{16 \cos^2 i}{1-5 \cos^2 i} + \frac{40 \cos^4 i}{(1-5 \cos^2 i)^2} \right) \right] \end{array} \right\} \text{sen} \omega \quad (2.4.1.7)$$

O mesmo processo foi feito para encontrar o termo em  $J_5$  de  $\frac{de}{dt}$ , pois a excentricidade é o outro elemento congelado. Partindo da seguinte equação do artigo do Brouwer (já substituindo os valores de todas as constantes que foram citadas anteriormente):

$$e = \left[ \frac{1}{4} \frac{A_{3,0}}{a K_2} \text{sen} i + \frac{5}{64} \frac{A_{3,0}}{a^3 (1-e^2)^3} K_2 \text{sen} i (4+3e^2) \left( \frac{1-9 \cos^2 i - 24 \cos^4 i}{1-5 \cos^2 i} \right) \right] \text{sen} \omega \quad (2.4.1.8)$$



e não esquecendo como  $\omega$  é definido e que  $n_0$  se mantém constante, ao derivar (2.4.1.8), obtivemos:

$$\dot{e} = -\frac{3nJ_2R_T^2}{a^2(1-e^2)^2} \left(1 - \frac{5}{4}\sin^2 i\right) \left[ \begin{array}{l} \frac{J_2R_T}{2J_2a} \text{semi} + \frac{5}{32} \frac{J_2R_T^3}{J_2a^3(1-e^2)^3} \times \\ \text{semi}(4+3e^2) \left( \frac{1-9\cos^2 i - 24\cos^4 i}{1-5\cos^2 i} \right) \end{array} \right] \cos\omega \quad (2.4.1.9)$$

As equações (2.4.1.7) e (2.4.1.9) fornecem as perturbações de longo período da teoria de Brouwer devidas ao geopotencial até a ordem de  $J_5$ .

## 2.5 MODELAGEM DO ARRASTO ATMOSFÉRICO PELA TEORIA DE BROUWER E DE HORI

Prosseguindo com a análise de efeitos perturbadores na evolução da órbita do satélite CBERS-1, após inserir de forma explícita as expressões de longo período que fornecem as perturbações devidas ao geopotencial até o termo em  $J_5$  nas equações dos elementos congelados (argumento do perigeu e excentricidade), utilizamos como referência o artigo de Brouwer e Hori (1961) sobre o arrasto atmosférico, em que é suposto que a velocidade do satélite é constante durante toda a órbita e que a densidade atmosférica diminui a uma razão constante à medida que a altitude do satélite aumenta, para introduzir, novamente de forma explícita, as expressões relacionadas aos efeitos perturbadores do arrasto atmosférico nas equações da excentricidade e do argumento do perigeu.

Consideramos o efeito do mesmo apenas nos termos de longo período, pois foram estes os termos considerados para a inclusão das perturbações devidas ao geopotencial até a ordem de  $J_5$ . Isto para que a análise da inclusão dos termos relacionados com o arrasto fosse a mais precisa possível e não perdesse a continuidade do trabalho que já vinha sendo desenvolvido.

Os procedimentos foram os mesmos efetuados anteriormente, em que analisamos qual o resultado desta inserção no desenvolvimento da órbita do CBERS-1 e quais os efeitos tanto na precisão da manobra de correção a ser efetuada quanto na precisão da previsão dos referidos elementos congelados.

O resultado foi extremamente importante para nós visto que o arrasto atmosférico introduz uma componente secular e uma componente de longo período com perfil senoidal mas de amplitude com envoltório exponencialmente crescente. O fato de se levar em conta ou não o arrasto atmosférico mostrou, desta forma, ter impacto relevante em longos períodos de tempo, principalmente porque o efeito atmosférico utilizado no Centro de Controle de Satélites só leva em conta o efeito secular aproximado do arrasto atmosférico nos elementos orbitais "a" (semi-eixo maior) e "e" (excentricidade).

### 2.5.1 A TEORIA DE BROUWER E DE HORI

A teoria de Brouwer e de Hori supõe que a velocidade do satélite é constante durante toda a órbita e que a densidade atmosférica diminui exponencialmente à medida que a altitude do satélite aumenta. O efeito do arrasto atmosférico no movimento de um satélite artificial no campo gravitacional da Terra achatada é estimado. Um modelo exponencial esférico da atmosfera é então tomado junto com a lei do quadrado da velocidade na aceleração de arrasto. A rotação atmosférica é omitida. O método das transformações canônicas foi usado e se mostrou muito poderoso tanto no problema de sistemas não conservativos como no problema do arrasto. Brouwer e Hori chegaram a conclusão de que o principal efeito da união entre a não esfericidade da Terra e o arrasto foi a mistura entre termos seculares e termos de longo período produzidos por termos de curto período do problema sem o arrasto. Isto ocorre porque o arrasto é uma força não conservativa que será incluída ao sistema de forças conservativas (forças que derivam de um potencial), como o geopotencial por exemplo.

Para satélites em órbitas baixas, o efeito do arrasto atmosférico é o mais importante depois do efeito do achatamento da Terra. A aproximação que até então era feita, simplesmente somando a solução do problema só com o achatamento com a solução somente do arrasto, é uma aproximação grosseira para o efeito conjunto das duas perturbações. Brouwer e Hori ligaram as perturbações devidas ao achatamento terrestre e os efeitos do arrasto em uma única solução. Para tanto, utilizaram transformações canônicas em um sistema não canônico.

O desenvolvimento da Teoria de Brouwer e de Hori pode ser brevemente descrito como se segue:

1. Derivação das equações de movimento expressas em termos das variáveis de Delaunay, obtendo-se um sistema na forma canônica estendida;
2. Utilizando como solução não perturbada a solução do problema só com achatamento, aplica uma transformação canônica no sistema não canônico;
3. O novo sistema é integrado por aproximações sucessivas;
4. Utilizando série de Taylor, expande a solução nas vizinhanças da solução não perturbada.

Expressões completas para a solução, incluindo termos seculares, de curto e longo período, são apresentadas por Brouwer e Hori (Brouwer e Hori, 1963).

No artigo de Brouwer e Hori está também apresentada uma técnica para obter um desenvolvimento convergente rápido de uma exponencial com coeficientes negativos muito grandes em valor absoluto, como é o caso do modelo exponencial para a densidade, e que foi utilizado no nosso trabalho.

## 2.5.2 INCLUSÃO DAS PERTURBAÇÕES RELACIONADAS AO ARRASTO ATMOSFÉRICO

Neste tópico, mostraremos como os termos relacionados ao arrasto atmosférico foram incluídos nas equações (2.4.1.7) e (2.4.1.9) em que as perturbações devidas ao geopotencial até a ordem de  $J_5$  aparecem explicitamente.

Os termos relacionados ao arrasto atmosférico que afetam o argumento do perigeu e a excentricidade, já adaptados do artigo de Brouwer e Hori, são:

$$\begin{aligned}
 \dot{\omega} = & A \frac{J_2 R_E^2}{2a^2(1-e^2)^2} \left(\frac{\mu}{a}\right)^{1/2} \exp(-\alpha a) \times \\
 & \times \left\{ -\frac{1}{e^2} \left( \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \cos^2 i \right) \left[ \frac{1}{2} + \left( -\frac{1}{24} + \frac{11}{12} \alpha a + \frac{5}{24} \alpha^2 a^2 \right) e^2 + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \left( -\frac{1583}{768} - \frac{233}{128} \alpha a - \frac{3}{8} \alpha^2 a^2 + \frac{143}{128} \alpha^3 a^3 + \frac{13}{2304} \alpha^4 a^4 \right) e^4 \right] + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{e^2(1-e^2)} \left( \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \cos^2 i \right) \left[ \frac{1}{2} + \left( \frac{1}{8} + \frac{3}{4} \alpha a + \frac{1}{8} \alpha^2 a^2 \right) e^2 + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \left( -\frac{667}{768} - \frac{95}{192} \alpha a + \frac{241}{384} \alpha^2 a^2 + \frac{49}{576} \alpha^3 a^3 + \frac{11}{2304} \alpha^4 a^4 \right) e^4 \right] - \right. \\
 & \left. - \left( \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \cos^2 i \right) \left[ \frac{1}{2} + \left( \frac{31}{24} + \frac{19}{12} \alpha a + \frac{1}{24} \alpha^2 a^2 \right) e^2 + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \left( -\frac{187}{768} + \frac{49}{192} \alpha a + \frac{123}{128} \alpha^2 a^2 + \frac{97}{576} \alpha^3 a^3 - \frac{5}{2304} \alpha^4 a^4 \right) e^4 \right] - \right. \\
 & \left. - (3 - \cos^2 i) \left[ \left( -\frac{5}{8} + \frac{1}{4} \alpha a + \frac{1}{8} \alpha^2 a^2 \right) e^2 + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \left( -\frac{3}{32} - \frac{3}{16} \alpha a - \frac{5}{16} \alpha^2 a^2 + \frac{3}{16} \alpha^3 a^3 + \frac{1}{96} \alpha^4 a^4 \right) e^4 \right] + \right. \\
 & \left. + \left[ \frac{1}{8} \left( 1 - 11 \cos^2 i - \frac{40 \cos^4 i}{1 - 5 \cos^2 i} \right) - \frac{5J_4}{24J_2^2} \left( 1 - 3 \cos^2 i - \frac{8 \cos^4 i}{1 - 5 \cos^2 i} \right) \right] \times \right. \\
 & \left. \times \left[ 4 + (-1 + \alpha^2 a^2) e^2 + \left( -\frac{3}{16} - \frac{3}{8} \alpha^2 a^2 + \frac{1}{16} \alpha^4 a^4 \right) e^4 \right] \times \right. \\
 & \left. \times \left[ \frac{1}{8} \left( 1 - 33 \cos^2 i - \frac{200 \cos^4 i}{1 - 5 \cos^2 i} - \frac{200 \cos^6 i}{(1 - 5 \cos^2 i)^2} \right) - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{5J_4}{24J_2^2} \left( 1 - 9 \cos^2 i - \frac{40 \cos^4 i}{1 - 5 \cos^2 i} - \frac{80 \cos^6 i}{(1 - 5 \cos^2 i)^2} \right) \right] \right. \\
 & \left. \times \left[ (1 - \alpha a) e^2 + \left( \frac{1}{8} + \frac{5}{8} \alpha a + \frac{1}{8} \alpha^2 a^2 - \frac{1}{8} \alpha^3 a^3 \right) e^4 \right] \right\} \sin 2\omega
 \end{aligned}$$

(2.5.2.1)

$$\begin{aligned}
\dot{e} = & \frac{1-e^2}{e\sqrt{\mu a}} (-A\mu \exp(-\alpha a)) \times \left\{ \left[ 1 + \left( \frac{3}{4}\alpha a + \frac{1}{4}\alpha^2 a^2 \right) e^2 + \right. \right. \\
& + \left. \left( \frac{21}{64} + \frac{3}{8}\alpha a + \frac{9}{32}\alpha^2 a^2 + \frac{1}{8}\alpha^3 a^3 + \frac{1}{64}\alpha^4 a^4 \right) e^4 \right] + \\
& + \frac{J_2 R_T^2}{2a^2(1-e^2)^2} \left( \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\cos^2 i \right) \left[ \left( \frac{1}{2} + \frac{7}{8}\alpha a + \frac{1}{4}\alpha^2 a^2 - \frac{1}{24}\alpha^3 a^3 \right) e^2 + \right. \\
& + \left. \left( \frac{21}{256} - \frac{93}{256}\alpha a + \frac{27}{128}\alpha^2 a^2 + \frac{39}{128}\alpha^3 a^3 - \frac{65}{768}\alpha^4 a^4 - \frac{1}{256}\alpha^5 a^5 \right) e^4 \right] \cos 2\omega + \\
& + \frac{J_2 R_T^2}{2a^2(1-e^2)^2} \left[ \frac{1}{8} \left( 1 - 11\cos^2 i - \frac{40\cos^4 i}{1-5\cos^2 i} \right) - \frac{5J_4}{24J_2^2} \left( 1 - 3\cos^2 i - \frac{8\cos^4 i}{1-5\cos^2 i} \right) \right] \times \\
& + \left. \left[ \left( \frac{3}{2} + 2\alpha a + \frac{1}{2}\alpha^2 a^2 \right) e^2 + \left( -\frac{3}{16} - \frac{1}{2}\alpha a + \frac{5}{8}\alpha^2 a^2 + \frac{1}{2}\alpha^3 a^3 + \frac{1}{16}\alpha^4 a^4 \right) e^4 \right] \cos 2\omega \right\} - \\
& - \frac{1}{e} \sqrt{\frac{1-e^2}{\mu a}} (-A\mu \exp(-\alpha a)) \times \left\{ \sqrt{1-e^2} \times \left[ 1 + \left( -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\alpha^2 a^2 \right) e^2 + \left( -\frac{3}{64} - \frac{3}{32}\alpha^2 a^2 + \frac{1}{64}\alpha^4 a^4 \right) e^4 \right] + \right. \\
& + \frac{J_2 R_T^2}{2a^2(1-e^2)^2} \left( \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\cos^2 i \right) \left[ \left( \frac{1}{6} + \frac{17}{24}\alpha a + \frac{5}{12}\alpha^2 a^2 - \frac{1}{24}\alpha^3 a^3 \right) e^2 + \right. \\
& + \left. \left( -\frac{179}{768} - \frac{7}{768}\alpha a - \frac{133}{384}\alpha^2 a^2 + \frac{311}{1152}\alpha^3 a^3 + \frac{95}{2304}\alpha^4 a^4 - \frac{1}{256}\alpha^5 a^5 \right) e^4 \right] \cos 2\omega + \\
& + \frac{J_2 R_T^2}{2a^2(1-e^2)^2} \left[ \frac{1}{8} \left( 1 - 11\cos^2 i - \frac{40\cos^4 i}{1-5\cos^2 i} \right) - \frac{5J_4}{24J_2^2} \left( 1 - 3\cos^2 i - \frac{8\cos^4 i}{1-5\cos^2 i} \right) \right] \times \\
& + \left. \left[ \left( -\frac{5}{2} + 2\alpha a + \frac{1}{2}\alpha^2 a^2 \right) e^2 + \left( \frac{1}{16} - \frac{5}{4}\alpha a - \frac{9}{8}\alpha^2 a^2 + \frac{1}{4}\alpha^3 a^3 + \frac{1}{16}\alpha^4 a^4 \right) e^4 \right] \cos 2\omega \right\}
\end{aligned}$$

sendo que as seguintes modificações foram feitas para que chegássemos nas equações (2.5.2.1):

$$\theta = \cos i$$

$$k_2 = \frac{J_2 R_T^2}{2}$$

$$2g = 2\omega$$

$$\eta = (1-e^2)^{1/2}$$

$$k_4 = \frac{J_4 R_T^4}{4}$$

Acrescentando as equações (2.5.2.1) às (2.4.1.7) e (2.4.1.9), obtivemos de forma explícita as expressões relacionadas ao efeito do arrasto atmosférico nos termos de longo período, como segue:

$$\begin{aligned}
\dot{\omega} = & \frac{3nJ_2R_7^2}{a^2(1-e^2)^2} \left(1 - \frac{5}{4}\text{sen}^2 i\right) \left\{1 + \frac{J_3R_7}{2J_2a(1-e^2)} \times \left(\frac{\text{sen}^2 i - e^2 \cos^2 i}{e \text{sen} i}\right) \text{sen } \omega + \right. \\
& + \frac{J_3R_7^3}{J_2a^3(1-e^2)^3} \left\{ \frac{5}{64} \left[ \left( \frac{(1-e^2)\text{sen} i}{e} - \frac{e \cos^2 i}{\text{sen} i} \right) \times (4 + 3e^2) + e \text{sen} i (26 + 9e^2) \right] \times \right. \\
& \times \left( 1 - 9 \cos^2 i - \frac{24 \cos^4 i}{1 - 5 \cos^2 i} \right) - \frac{15}{32} e \cos^2 i \times \text{sen} i (4 + 3e^2) \times \\
& \times \left. \left. \left( 3 + \frac{16 \cos^2 i}{1 - 5 \cos^2 i} + \frac{40 \cos^4 i}{(1 - 5 \cos^2 i)^2} \right) \right\} \text{sen } \omega \right\} + A \frac{J_2R_7^2}{2a^2(1-e^2)^2} \left(\frac{\mu}{a}\right)^{1/2} \exp(-\alpha a) \times \\
& \times \left\{ -\frac{1}{e^2} \left( \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \cos^2 i \right) \left[ \frac{1}{2} + \left( -\frac{1}{24} + \frac{11}{12} \alpha a + \frac{5}{24} \alpha^2 a^2 \right) e^2 + \right. \right. \\
& + \left. \left. \left( -\frac{1583}{768} - \frac{233}{128} \alpha a - \frac{3}{8} \alpha^2 a^2 + \frac{143}{128} \alpha^3 a^3 + \frac{13}{2304} \alpha^4 a^4 \right) e^4 \right] + \right. \\
& + \frac{1}{e^2(1-e^2)} \left( \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \cos^2 i \right) \left[ \frac{1}{2} + \left( \frac{1}{8} + \frac{3}{4} \alpha a + \frac{1}{8} \alpha^2 a^2 \right) e^2 + \right. \\
& + \left. \left. \left( -\frac{667}{768} - \frac{95}{192} \alpha a + \frac{241}{384} \alpha^2 a^2 + \frac{49}{576} \alpha^3 a^3 + \frac{11}{2304} \alpha^4 a^4 \right) e^4 \right] - \right. \\
& - \left( \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \cos^2 i \right) \left[ \frac{1}{2} + \left( \frac{31}{24} + \frac{19}{12} \alpha a + \frac{1}{24} \alpha^2 a^2 \right) e^2 + \right. \\
& + \left. \left. \left( -\frac{187}{768} + \frac{49}{192} \alpha a + \frac{123}{128} \alpha^2 a^2 + \frac{97}{576} \alpha^3 a^3 - \frac{5}{2304} \alpha^4 a^4 \right) e^4 \right] - \right. \\
& - (3 - \cos^2 i) \left[ \left( -\frac{5}{8} + \frac{1}{4} \alpha a + \frac{1}{8} \alpha^2 a^2 \right) e^2 + \right. \\
& + \left. \left. \left( -\frac{3}{32} - \frac{3}{16} \alpha a - \frac{5}{16} \alpha^2 a^2 + \frac{3}{16} \alpha^3 a^3 + \frac{1}{96} \alpha^4 a^4 \right) e^4 \right] + \right. \\
& + \left. \left[ \frac{1}{8} \left( 1 - 11 \cos^2 i - \frac{40 \cos^4 i}{1 - 5 \cos^2 i} \right) - \frac{5J_4}{24J_2^2} \left( 1 - 3 \cos^2 i - \frac{8 \cos^4 i}{1 - 5 \cos^2 i} \right) \right] \times \right. \\
& \times \left[ 4 + (-1 + \alpha^2 a^2) e^2 + \left( -\frac{3}{16} - \frac{3}{8} \alpha^2 a^2 + \frac{1}{16} \alpha^4 a^4 \right) e^4 \right] \times \\
& \times \left[ \frac{1}{8} \left( 1 - 33 \cos^2 i - \frac{200 \cos^4 i}{1 - 5 \cos^2 i} - \frac{200 \cos^6 i}{(1 - 5 \cos^2 i)^2} \right) - \right. \\
& - \left. \frac{5J_4}{24J_2^2} \left( 1 - 9 \cos^2 i - \frac{40 \cos^4 i}{1 - 5 \cos^2 i} - \frac{80 \cos^6 i}{(1 - 5 \cos^2 i)^2} \right) \right] \times \\
& \times \left. \left. \left. \left( (1 - \alpha a) e^2 + \left( \frac{1}{8} + \frac{5}{8} \alpha a + \frac{1}{8} \alpha^2 a^2 - \frac{1}{8} \alpha^3 a^3 \right) e^2 \right) \right\} \text{sen } 2\omega \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{e} = & -\frac{3mJ_2R_T^2}{a^2(1-e^2)^2} \left(1 - \frac{5}{4} \sin^2 i\right) \left[ \frac{J_2R_T}{2J_2a} \text{semi} + \frac{5}{32} \frac{J_2R_T^3}{J_2a^3(1-e^2)^3} \times \right. \\
& \times (4 + 3e^2) \text{semi} \left. \left( \frac{1 - 9 \cos^2 i - 24 \cos^4 i}{1 - 5 \cos^2 i} \right) \right] \cos \omega + \\
& + \frac{1-e^2}{e\sqrt{\mu a}} (-A\mu \exp(-\alpha a)) \times \left\{ \left[ 1 + \left( \frac{3}{4} \alpha a + \frac{1}{4} \alpha^2 a^2 \right) e^2 + \right. \right. \\
& + \left. \left( \frac{21}{64} + \frac{3}{8} \alpha a + \frac{9}{32} \alpha^2 a^2 + \frac{1}{8} \alpha^3 a^3 + \frac{1}{64} \alpha^4 a^4 \right) e^4 \right] + \\
& + \frac{J_2R_T^2}{2a^2(1-e^2)^2} \left( \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \cos^2 i \right) \left[ \left( \frac{1}{2} + \frac{7}{8} \alpha a + \frac{1}{4} \alpha^2 a^2 - \frac{1}{24} \alpha^3 a^3 \right) e^2 + \right. \\
& + \left. \left( \frac{21}{256} - \frac{93}{256} \alpha a + \frac{27}{128} \alpha^2 a^2 + \frac{39}{128} \alpha^3 a^3 - \frac{65}{768} \alpha^4 a^4 - \frac{1}{256} \alpha^5 a^5 \right) e^4 \right] \cos 2\omega + \\
& + \frac{J_2R_T^2}{2a^2(1-e^2)^2} \left[ \frac{1}{8} \left( 1 - 11 \cos^2 i - \frac{40 \cos^4 i}{1 - 5 \cos^2 i} \right) - \frac{5J_4}{24J_2^2} \left( 1 - 3 \cos^2 i - \frac{8 \cos^4 i}{1 - 5 \cos^2 i} \right) \right] \times \\
& + \left. \left[ \left( \frac{3}{2} + 2\alpha a + \frac{1}{2} \alpha^2 a^2 \right) e^2 + \left( -\frac{3}{16} - \frac{1}{2} \alpha a + \frac{5}{8} \alpha^2 a^2 + \frac{1}{2} \alpha^3 a^3 - \frac{1}{16} \alpha^4 a^4 \right) e^4 \right] \cos 2\omega \right\} - \\
& - \frac{1}{e} \sqrt{\frac{1-e^2}{\mu a}} (-A\mu \exp(-\alpha a)) \times \left\{ \sqrt{1-e^2} \times \right. \\
& \times \left[ 1 + \left( -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \alpha^2 a^2 \right) e^2 + \left( -\frac{3}{64} - \frac{3}{32} \alpha^2 a^2 + \frac{1}{64} \alpha^4 a^4 \right) e^4 \right] + \\
& + \frac{J_2R_T^2}{2a^2(1-e^2)^2} \left( \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \cos^2 i \right) \left[ \left( \frac{1}{6} + \frac{17}{24} \alpha a + \frac{5}{12} \alpha^2 a^2 - \frac{1}{24} \alpha^3 a^3 \right) e^2 + \right. \\
& + \left. \left( -\frac{179}{768} - \frac{7}{768} \alpha a - \frac{133}{384} \alpha^2 a^2 + \frac{311}{1152} \alpha^3 a^3 + \frac{95}{2304} \alpha^4 a^4 - \frac{1}{256} \alpha^5 a^5 \right) e^4 \right] \cos 2\omega + \\
& + \frac{J_2R_T^2}{2a^2(1-e^2)^2} \left[ \frac{1}{8} \left( 1 - 11 \cos^2 i - \frac{40 \cos^4 i}{1 - 5 \cos^2 i} \right) - \frac{5J_4}{24J_2^2} \left( 1 - 3 \cos^2 i - \frac{8 \cos^4 i}{1 - 5 \cos^2 i} \right) \right] \times \\
& + \left. \left[ \left( -\frac{5}{2} + 2\alpha a + \frac{1}{2} \alpha^2 a^2 \right) e^2 + \left( \frac{1}{16} - \frac{5}{4} \alpha a - \frac{9}{8} \alpha^2 a^2 + \frac{1}{4} \alpha^3 a^3 + \frac{1}{16} \alpha^4 a^4 \right) e^4 \right] \cos 2\omega \right\}
\end{aligned}$$

Ao obter as equações acima, determinamos qual a influência do arrasto atmosférico nos elementos congelados e melhoramos as análises que o Centro de Controle de Satélites do INPE faz porque passamos a considerar mais uma perturbação a que as órbitas da família CBERS estão sujeitas. E isto significa, conforme mostramos em um projeto de

Inicição Científica anterior a este, que os estudos feitos no Centro de Controle estão mais próximos da real órbita do satélite, que não é ideal, e sim perturbada, por diversos fatores, como o geopotencial, a pressão de radiação solar, a atração do Sol e da Lua, a não homogeneidade da distribuição da massa de Terra, forças devidas às marés terrestres, o arrasto Poynting Robertson, entre outros.

### **3. COMPARAÇÃO COM A TEORIA UTILIZADA NO CENTRO DE CONTROLE DE SATÉLITES DO INPE**

Nos trabalhos que foram desenvolvidos por dois anos e dos quais este é continuação, o nosso objetivo foi verificar qual a influência na teoria de órbitas congeladas das perturbações relacionadas ao geopotencial até a ordem de  $J_5$  e também ao arrasto atmosférico, que são os efeitos perturbadores mais significativos para satélites da família CBERS e para satélites similares (SPOT, Landsat, ERS e IRS). A teoria analisada foi a de orbitas congeladas porque tais missões espaciais do Centro de Controle do INPE aplicam estes conceitos.

As conclusões que tiramos destes trabalhos foram que incluir termos a mais nas perturbações devidas ao geopotencial (no caso  $J_5$ ) e ao arrasto atmosférico melhoram a precisão na previsão dos elementos congelados argumento do perigeu e excentricidade, pois as amplitudes de variação de tais elementos diminuem quando se incluem estas perturbações. Isto significa maior precisão não só no cálculo da manobra, mas também na previsão da manobra, o que contribui para um melhor desempenho nas operações do Centro de Controle de Satélites INPE.

E em relação ao arrasto atmosférico especificamente, constatou-se que ele introduz uma componente secular e uma componente de longo período com perfil senoidal, mas de amplitude com envoltório exponencialmente crescente. O fato de se levar em conta ou não o arrasto atmosférico mostrou, portanto, ter impacto relevante em longos períodos de tempo (no caso do satélite CBERS-1, por exemplo, em 2,5 ciclos de " $\omega$ " por " $e$ ". para atividade solar máxima, o efeito no argumento do perigeu foi de até  $0,25^\circ$  e de até  $3,4 \times 10^{-6}$  na excentricidade da órbita congelada.

Uma outra conclusão importante é que as equações da teoria de Brouwer e da teoria de Brouwer e Hori (1961) desenvolvidas para manutenção de órbitas congeladas mostraram uma carga computacional adicional pequena, o que pode justificar sua inclusão nas atividades de operação do Centro de Controle.

### 3.1 TEORIA UTILIZADA NO CENTRO DE CONTROLE DE SATÉLITES DO INPE

O Centro de Controle utiliza a teoria não singular para as órbitas congeladas e não as teorias de Brouwer e de Brouwer e Hori. As variáveis não singulares  $\xi$  e  $\eta$  são definidas por:

$$\xi = e \cos \omega \quad \eta = -e \operatorname{sen} \omega \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} e = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \\ \omega = \arctan\left(-\frac{\eta}{\xi}\right) \end{cases} \quad (3.1.1)$$

cujas derivadas primeiras são dadas por:

$$\dot{\xi} = \dot{e} \cos \omega - e \dot{\omega} \operatorname{sen} \omega \quad \dot{\eta} = -\dot{e} \operatorname{sen} \omega - e \dot{\omega} \cos \omega \quad (3.1.2)$$

A solução para as variáveis não singulares segundo a teoria utilizada pelo Centro de Controle de Satélites do INPE,  $\bar{\xi}$  e  $\bar{\eta}$ , são dadas por:

$$\begin{aligned} \bar{\xi} &= \xi_0 \cos(\omega_1(t - t_0)) + \left(\eta_0 + \frac{\xi_2}{\omega_1}\right) \sin(\omega_1(t - t_0)) + \xi_\lambda(t - t_0) \\ \bar{\eta} &= -\xi_0 \sin(\omega_1(t - t_0)) + \left(\eta_0 + \frac{\xi_2}{\omega_1}\right) \cos(\omega_1(t - t_0)) + \eta_\lambda(t - t_0) - \frac{\xi_2}{\omega_1} \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

em que:

$$\xi_2 = \frac{3}{4} \frac{A_3}{P_0^2} n_0 \operatorname{sen} i_0 (2 - 2.5 \operatorname{sen}^2 i_0)$$

$$\xi_\lambda = \dot{e}_0 \cos \omega_0$$

$$\omega_1 = \frac{A_2}{P_0^2} n_0 (2 - 2.5 \operatorname{sen}^2 i_0)$$

$$\eta_\lambda = -\dot{e}_0 \operatorname{sen} \omega_0$$



### 3.2 EQUIVALÊNCIA ENTRE TEORIA DE BROUWER E TEORIA UTILIZADA NO CENTRO DE CONTROLE DE SATÉLITES DO INPE

Partindo de uma parcela  $\omega_1$  da equação do argumento de perigeu segundo a teoria de Brouwer para os termos do geopotencial até a ordem de J5 aparecendo explicitamente, vamos tentar escrevê-la no mesmo formato. Partiremos de:

$$\omega_1 = \frac{3nJ_2R_T^2}{a^2(1-e^2)^2} \left(1 - \frac{5}{4}\text{sen}^2i\right) = \frac{1}{2} \frac{3nJ_2R_T^2}{a^2(1-e^2)^2} \left(2 - \frac{5}{2}\text{sen}^2i\right) \quad (3.2.1)$$

com 
$$\begin{cases} \frac{3}{2}J_2 = A_2 \\ a_0 = \frac{a}{R_T} \text{ (Fu - min g, et.al., 1999)} \Rightarrow a = a_0R_T \end{cases}$$

Então, substituindo em (3.2.1):

$$\omega_1 = \frac{A_2 n R_T^2}{a_0^2 R_T^2 (1-e^2)^2} (2 - 2.5\text{sen}^2i) = \frac{A_2 n}{a_0^2 (1-e^2)^2} (2 - 2.5\text{sen}^2i) \quad (3.2.2)$$

Mas (Fu-ming et. al.):

$$n_0 = \sqrt{\frac{\mu}{(a_0 R_T)^3}}, \text{ com } \begin{cases} \mu = n^2 a^3 \\ a_0 = \frac{a}{R_T} \Rightarrow \mu = n^2 (a_0 R_T)^3 \end{cases}$$

Assim:

$$n_0 = \sqrt{\frac{n^2 (a_0 R_T)^3}{(a_0 R_T)^3}} = \sqrt{n^2} \Rightarrow n_0 = n$$

Desta forma, (3.2.2) ficará:

$$\omega_1 = \frac{A_2 n_0}{a_0^2 (1-e^2)^2} (2 - 2.5\text{sen}^2i) \quad (3.2.3)$$

$$\text{sendo } \begin{cases} P_0 = a_0 (1 - e_0^2) \\ e = e_0 \\ i = i_0 \end{cases}$$

Finalmente,  $\omega_1$  a partir da teoria de Brouwer é:

$$\omega_1 = \frac{A_2}{P_0^2} n_0 (2 - 2.5 \text{sen}^2 i_0) \quad (3.2.4)$$

E  $\omega_1$  do artigo de Fu-ming et. al. é:

$$\omega_1 = \frac{A_2}{P_0^2} n_0 (2 - 2.5 \text{sen}^2 i_0) \quad (3.2.5)$$

Como (3.2.4) e (3.2.5) são iguais, podemos concluir que a teoria utilizada no Centro de Controle é a mesma de Brouwer, somente escrita de forma diferente (em outras variáveis, as variáveis não singulares). Sendo assim, podemos trabalhar com as equações da teoria de Brouwer, juntamente com as equações em variáveis não singulares do Centro de Controle, para analisar nestas últimas qual a contribuição de introduzir mais termos perturbadores, devidos ao geopotencial até a ordem de J5 e ao arrasto atmosférico.

### 3.3 DESENVOLVIMENTO DA COMPARAÇÃO

Na seção (3.2) vimos que podemos comparar a teoria não singular (teoria utilizada no Centro de Controle) com a teoria de Brouwer, pois elas são a mesma teoria e estão apenas escritas de forma diferente. Vamos agora analisar o efeito do acréscimo da perturbação de longo período devida ao geopotencial até a ordem de J5, segundo a teoria de Brouwer, nas equações da teoria não singular, que utiliza perturbações do geopotencial somente até a ordem de J3.

Substituindo as equações (2.4.1.7) e (2.4.1.9), que descrevem a variação temporal dos elementos congelados excentricidade e argumento do perigeu, nas equações (3.1.2), encontramos tais em termos das variáveis não singulares, segundo a teoria de Brouwer e de Hori. Teremos então:

$$\begin{aligned}
\dot{\xi} = & -\frac{3nJ_2R_T^2}{a^2(1-e^2)^2} \left(1 - \frac{5}{4}\text{sen}^2 i\right) \left[ \frac{J_3R_T}{2J_2a} \text{sen}i + \frac{5}{32} \frac{J_3R_T^3}{J_2a^3(1-e^2)^3} \times \right. \\
& \left. \text{sen}i(4+3e^2) \left( \frac{1-9\cos^2 i - 24\cos^4 i}{1-5\cos^2 i} \right) \right] \cos^2 \omega - \\
& \left. \left\{ 1 + \frac{J_3R_T}{2J_2a(1-e^2)} \times \left( \frac{\text{sen}^2 i - e^2 \cos^2 i}{e \text{sen} i} \right) \text{sen} \omega + \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{5}{64} \left[ \left( \frac{(1-e^2)\text{sen}i}{e} - \frac{e \cos^2 i}{\text{sen}i} \right) \times \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \frac{3nJ_2R_T^2 e}{a^2(1-e^2)^2} \left(1 - \frac{5}{4}\text{sen}^2 i\right) \right\} \frac{J_3R_T^3}{J_2a^3(1-e^2)^3} \left\{ \left(1 - 9\cos^2 i - \frac{24\cos^4 i}{1-5\cos^2 i}\right) - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{15}{32} e \cos^2 i \times \text{sen}i(4+3e^2) \times \right. \right. \\
& \left. \left. \left( 3 + \frac{16\cos^2 i}{1-5\cos^2 i} + \frac{40\cos^4 i}{(1-5\cos^2 i)^2} \right) \right\} \right\} \text{sen} \omega
\end{aligned} \tag{3.3.1}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\eta} = & -\frac{3nJ_2R_T^2}{a^2(1-e^2)^2} \left(1 - \frac{5}{4}\text{sen}^2 i\right) \left[ \frac{J_3R_T}{2J_2a} \text{sen}i + \frac{5}{32} \frac{J_3R_T^3}{J_2a^3(1-e^2)^3} \times \right. \\
& \left. \text{sen}i(4+3e^2) \left( \frac{1-9\cos^2 i - 24\cos^4 i}{1-5\cos^2 i} \right) \right] \cos \omega \text{sen} \omega - \\
& \left. \left\{ 1 + \frac{J_3R_T}{2J_2a(1-e^2)} \times \left( \frac{\text{sen}^2 i - e^2 \cos^2 i}{e \text{sen} i} \right) \text{sen} \omega + \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{5}{64} \left[ \left( \frac{(1-e^2)\text{sen}i}{e} - \frac{e \cos^2 i}{\text{sen}i} \right) \times \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - \frac{3nJ_2R_T^2 e}{a^2(1-e^2)^2} \left(1 - \frac{5}{4}\text{sen}^2 i\right) \right\} \frac{J_3R_T^3}{J_2a^3(1-e^2)^3} \left\{ \left(1 - 9\cos^2 i - \frac{24\cos^4 i}{1-5\cos^2 i}\right) - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{15}{32} e \cos^2 i \times \text{sen}i(4+3e^2) \times \right. \right. \\
& \left. \left. \left( 3 + \frac{16\cos^2 i}{1-5\cos^2 i} + \frac{40\cos^4 i}{(1-5\cos^2 i)^2} \right) \right\} \right\} \cos \omega
\end{aligned}$$

sendo que:

$$\omega_1 = \frac{3nJ_2R_T^2}{a^2(1-e^2)^2} \left(1 - \frac{5}{4} \text{sen}^2 i\right) \left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{J_3R_T}{2J_2a(1-e^2)} \times \left( \frac{\text{sen}^2 i - e^2 \cos^2 i}{e \text{sen} i} \right) \text{sen } \omega + \\ \left[ \frac{5}{64} \left( \frac{(1-e^2)\text{sen} i}{e} - \frac{e \cos^2 i}{\text{sen} i} \right) \times \right. \\ \left. \frac{J_3R_T^3}{J_2a^3(1-e^2)^3} \left( 1 - 9 \cos^2 i - \frac{24 \cos^4 i}{1-5 \cos^2 i} \right) - \right. \\ \left. - \frac{15}{32} e \cos^2 i \times \text{sen} i (4 + 3e^2) \times \right. \\ \left. \left( 3 + \frac{16 \cos^2 i}{1-5 \cos^2 i} + \frac{40 \cos^4 i}{(1-5 \cos^2 i)^2} \right) \right] \end{array} \right\} \text{sen } \omega$$

$$\xi_2 = -\frac{3nJ_2R_T^2}{a^2(1-e^2)^2} \left(1 - \frac{5}{4} \text{sen}^2 i\right) \left[ \begin{array}{l} \frac{J_3R_T}{2J_2a} \text{sen} i + \frac{5}{32} \frac{J_3R_T^3}{J_2a^3(1-e^2)^3} \times \\ \text{sen} i (4 + 3e^2) \left( \frac{1 - 9 \cos^2 i - 24 \cos^4 i}{1 - 5 \cos^2 i} \right) \end{array} \right] \cos \omega$$

- $\omega_1 \dots$  representa a parte da equação de  $\dot{\omega}$  segundo a teoria de Brouwer e de Hori que inclui as perturbações do geopotencial até a ordem de  $J_5$ .
- $\xi_2 \dots$  representa a parte da equação de  $\dot{\xi}$  segundo a teoria de Brouwer e de Hori que inclui as perturbações do geopotencial até a ordem de  $J_5$ .

As equações (3.1.1) foram codificadas em computador, através de um programa em linguagem FORTRAN e os dados resultantes foram transformados das variáveis não singulares  $\xi$  e  $\eta$  para os elementos orbitais congelados através de  $e = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$  e  $\omega = \arctan\left(-\frac{\eta}{\xi}\right)$ . Posteriormente, estes resultados foram comparados com os resultados obtidos das equações (3.1.2), a seguir (também transformados para elementos congelados):

$$\dot{\xi} = -\frac{3nJ_2R_T^2}{a^2(1-e^2)^2} \left(1 - \frac{5}{4} \text{sen}^2 i\right) \left[ \begin{array}{l} \frac{J_3R_T}{2J_2a} \text{sen} i + \frac{5}{32} \frac{J_3R_T^3}{J_2a^3(1-e^2)^3} \times \\ \text{sen} i (4 + 3e^2) \left( \frac{1 - 9 \cos^2 i - 24 \cos^4 i}{1 - 5 \cos^2 i} \right) \end{array} \right] \cos^2 \omega$$

(3.1.2)

$$\dot{\eta} = -\frac{3nJ_2R_p^2}{a^2(1-e^2)^2} \left(1 - \frac{5}{4}\sin^2 i\right) \left[ \begin{array}{l} \frac{J_3R_p}{2J_2a} \text{sen } i + \frac{5}{32} \frac{J_2R_p^3}{J_2a^3(1-e^2)^3} \times \\ \text{sen } i(4+3e^2) \left( \frac{1-9\cos^2 i - 24\cos^4 i}{1-5\cos^2 i} \right) \end{array} \right] \cos \omega \text{sen } \omega$$

As equações (3.1.2) são as equações da teoria não singular considerando as perturbações do geopotencial até a ordem de J3 e aqui representarão a teoria utilizada no Centro de Controle do INPE, ou seja, os resultados aqui obtidos representam os resultados que o Centro de Controle obteve.

Foram construídos diversos gráficos e os resultados da teoria não singular incluindo termos até a ordem de J3 foram comparados com os resultados das expressões para esta mesma teoria que incluem as perturbações do geopotencial até a ordem de J5. Os resultados de tais comparações e as análises encontram-se no próximo capítulo deste relatório.

## 4. RESULTADOS E ANÁLISES

Incluir os termos perturbadores de longo período devidos ao geopotencial até a ordem de J5 indica que esperamos obter maior precisão dos elementos congelados argumento do perigeu e excentricidade, ou seja, esperamos, antes de tudo, uma maior capacidade de previsão na variação destes elementos, quando comparadas à variação incluindo somente os termos relacionados às perturbações devidas ao geopotencial até J3.

A seguir, serão mostrados os gráficos com as curvas obtidas para diversas condições iniciais do argumento do perigeu (desde 92° até 130°). A elaboração destes gráficos foi baseada nos dados obtidos como resultado da codificação em computador, em linguagem FORTRAN, das equações (3.1.1) e (3.1.2), do Capítulo 3 deste relatório. Na obtenção dos dados utilizados para a elaboração do Gráfico 1, baseamo-nos nas equações (3.1.1); e para o Gráfico 2, nas equações (3.1.2). Com estes dois gráficos poderemos comparar os efeitos da inclusão das perturbações devidas ao geopotencial até a ordem de J5 nas equações da teoria não singular, utilizada pelo Centro de Controle de Satélites do INPE.

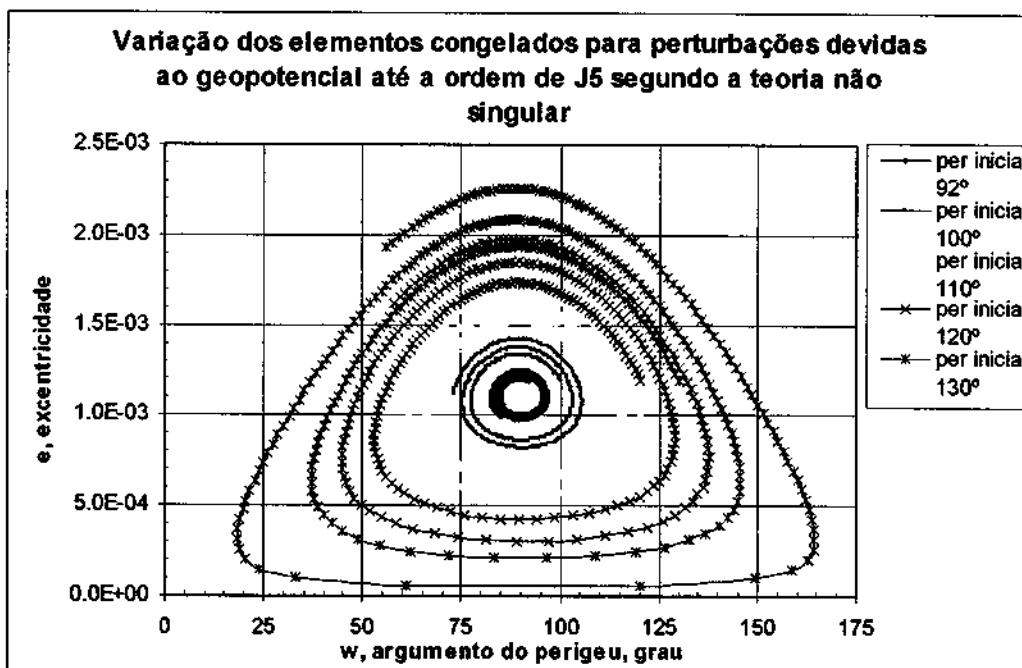


Gráfico 1 – Variação dos elementos congelados incluindo as perturbações devidas ao geopotencial até a ordem de J5.

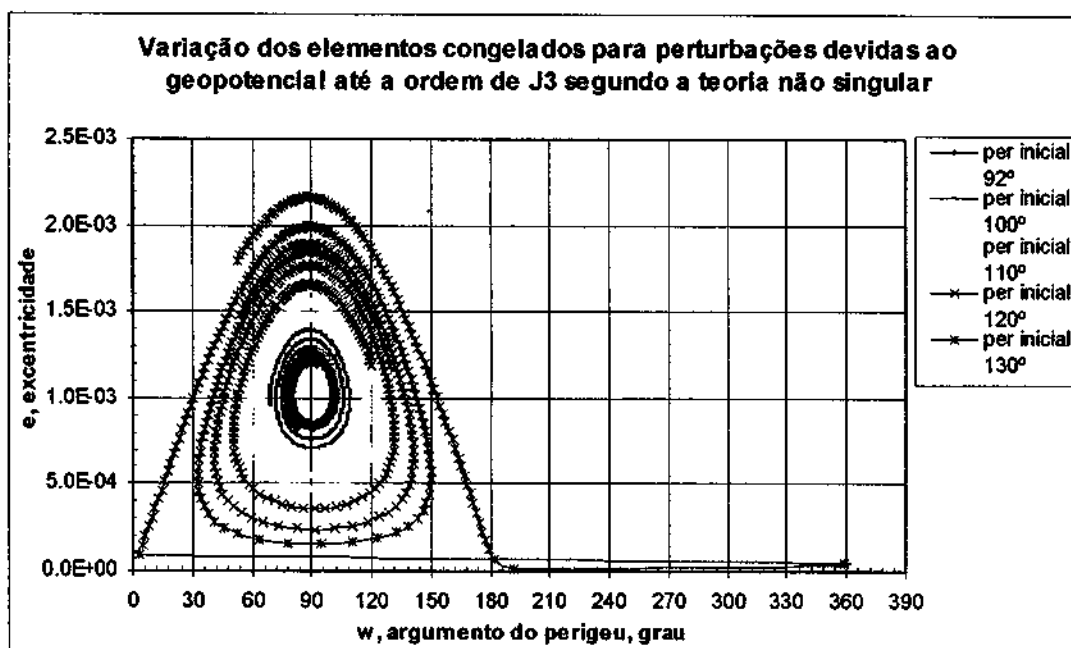


Gráfico 2 – Variação dos elementos congelados incluindo as perturbações devidas ao geopotencial até a ordem de J3.

Os gráficos 1 e 2 mostram a evolução dos elementos congelados do satélite CBERS-1 e foram obtidos para os seguintes valores dos elementos orbitais do referido satélite, para uma dada data:

- Semi-eixo maior ( $a$ ) = 7148,763507291386 km
- excentricidade ( $e$ ) = 0,001193381487911
- inclinação ( $i$ ) = 98,4895748835131°
- argumento do perigeu ( $\omega$ ): começando com 92,1465931949856° e variando até 130°

Pela análise dos gráficos é perceptível que as curvas do Gráfico 1 têm menor amplitude de variação para os elementos congelados “ $\omega$ ” e “ $e$ ” que as curvas do Gráfico 2. Para confirmar o que a análise gráfica já mostra (que o acréscimo do geopotencial até a ordem de J5 é significativo), fizemos uma tabela, a partir das planilhas dos dados gerados para a obtenção dos gráficos. Esta tabela indica as amplitudes máximas de variação do argumento do perigeu e da excentricidade quando comparamos as perturbações devidas ao geopotencial até o termo em J3 com as perturbações devidas ao geopotencial até o termo em J5 para valores iniciais de argumento do perigeu 92°, 100°, 110°, 120° e 130°. Por esta Tabela 1, percebe-se que as amplitudes de variação diminuem (em valores numéricos) quando são incluídas as perturbações devidas ao geopotencial até a ordem de J5 na teoria não singular.

Teoria Não Singular									
Condições Iniciais		Perturbações devidas a J3 (Gráfico 1)				Perturbações devidas a J3+J5 (Gráfico 2)			
$e_0$	$\omega_0$	Mín. $\Delta e$	Máx. $\Delta e$	Mín. $\Delta \omega$	Máx. $\Delta \omega$	Mín. $\Delta e$	Máx. $\Delta e$	Mín. $\Delta \omega$	Máx. $\Delta \omega$
1.193E-03	92.1°	-2.325E-04	2.098E-04	-12.0346	13.583	-1.361E-04	-1.238E-04	-6.656	7.390
1.193E-03	100.0°	-3.862E-04	2.979E-04	-20.1951	20.137	-3.381E-04	2.623E-04	-16.548	15.979
1.193E-03	110.0°	-6.811E-04	4.707E-04	-31.2527	33.496	-6.638E-04	4.684E-04	-28.755	29.996
1.193E-03	120.0°	-1.017E-03	6.395E-04	-49.498	50.737	-1.017E-03	6.564E-04	-46.345	46.574
1.193E-03	130.0°	-1.362E-03	7.850E-04	-90.5624	265.747	-1.385E-03	8.173E-04	-73.663	72.514

Tabela 1 – Tabela comparativa entre os resultados obtidos para J3 e J3+J5.

Nesta tabela, estão destacadas as linhas relacionadas aos valores de argumento do perigeu que realmente interessam para este trabalho: aproximadamente 92°, valor típico para satélites com controle do argumento do perigeu; e 100°, valor máximo prático para manutenção de características de órbita congelada.

Por esta tabela percebemos que a amplitude da variação do argumento do perigeu com a inclusão de J5, tanto máxima quanto mínima, diminuiu em todos os casos, comparado com J3. Para valores muito maiores que 90° do argumento do perigeu (neste caso 130°), os valores com J5 ainda completam o ciclo, ao passo que com J3 o ciclo começa a se degradar (veja Gráfico 2). Ou seja, a inclusão do efeito devido a J5 melhora a precisão na previsão do argumento do perigeu. Para a excentricidade, a diminuição na variação é mais sutil, mas ainda ocorre.

Em termos práticos, a teoria utilizando somente o termo J3 pode induzir a necessidades equivocadas de manobras orbitais de correção. Supondo por exemplo que a missão requeira que o perigeu permaneça com valor  $90^\circ \pm 10^\circ$ , a teoria com J3 preveria

uma manobra corretiva, ao passo que a teoria incluindo J5 exclui a necessidade de manobra (conforme primeira linha da Tabela 1). Concluímos portanto que é imperativo a inclusão do termo em J5 para aumentar a precisão no planejamento de manobras do Centro de Controle.

Mostraremos em seguida, para efeitos de comparação, gráficos das curvas só com J3 e com a inclusão de J5 para cada par de curvas correspondentes, para que sejam percebidas as contribuições acarretadas pela inclusão de um termo em J5.

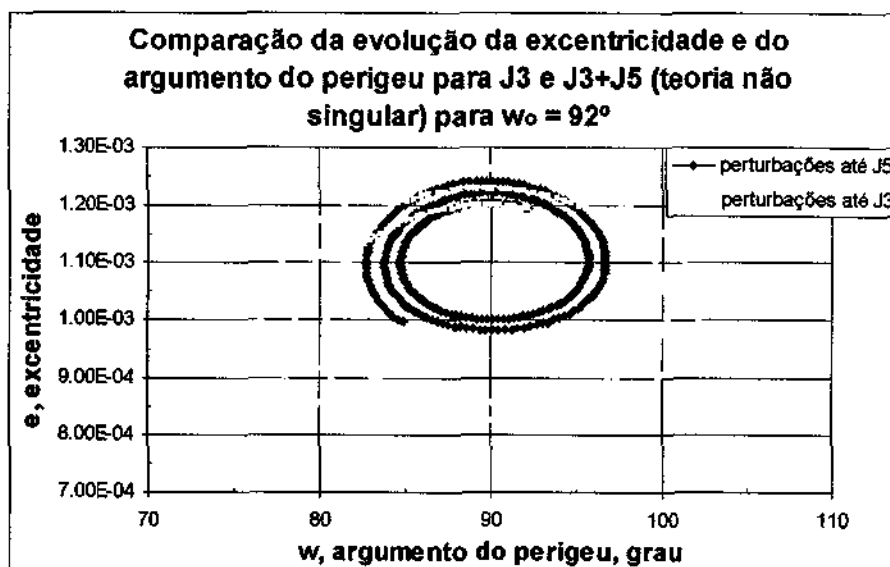


Gráfico 3 – Comparação das curvas de J3 e J3+J5 para  $w_0 = 92^\circ$ .

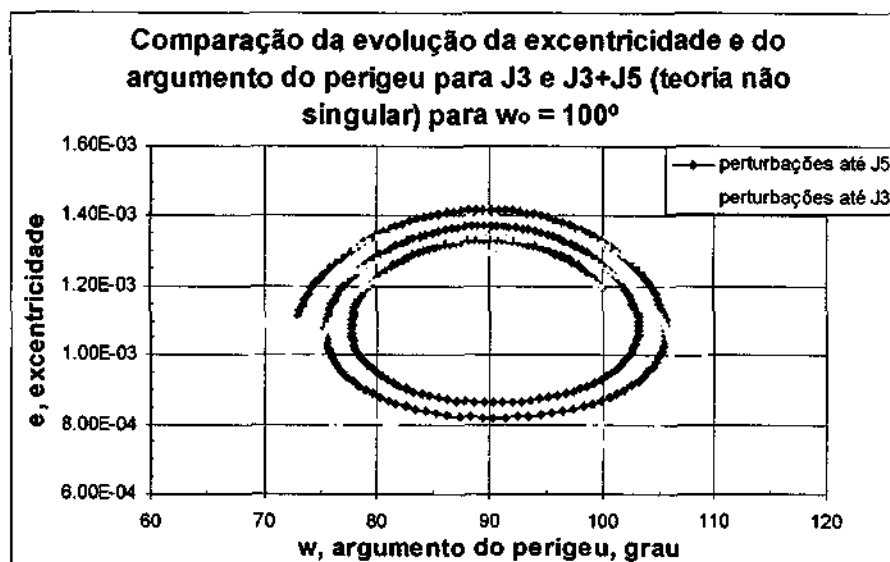


Gráfico 4 – Comparação das curvas de J3 e J3+J5 para  $w_0 = 100^\circ$ .

Novamente, foram mostrados nos Gráficos 3 e 4 apenas os valores iniciais de argumento do perigeu  $92^\circ$  e  $100^\circ$ , por serem os quais interessam para a teoria das órbitas congeladas. Por eles também percebemos que as amplitudes de variação máxima e mínima



dos elementos congelados diminuem quando da inclusão dos termos de longo período das perturbações devidas ao geopotencial até a ordem de J5.

Ainda com o intuito de verificar que os elementos congelados “ $\omega$ ” e “ $e$ ” sofrem diminuição nas amplitudes de variação máxima e mínima com a inclusão das perturbações devidas ao geopotencial até a ordem de J5, seguem gráficos da evolução tanto da excentricidade quanto do argumento do perigeu em função do intervalo de tempo de 300 dias (período utilizado para obter os dados que geraram todos os gráficos do presente relatório).

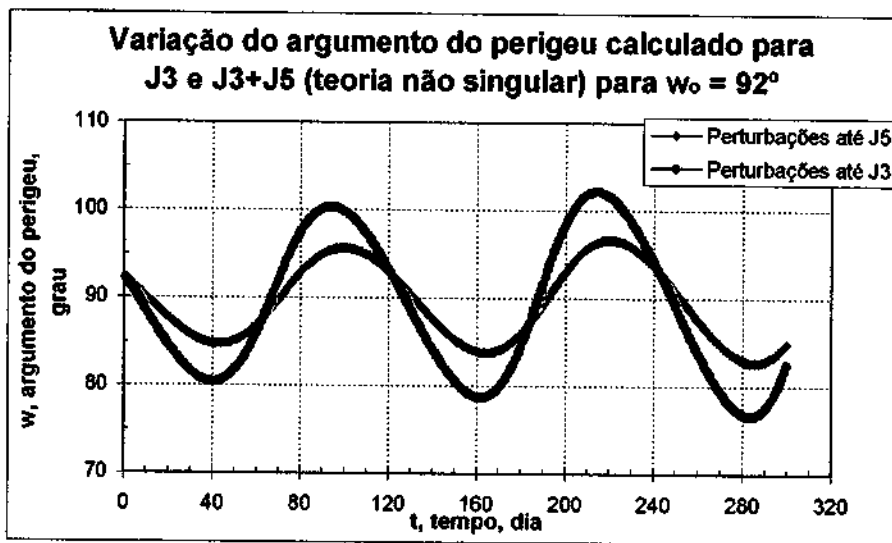


Gráfico 5 – Evolução do argumento do perigeu em relação ao tempo considerando os efeitos do geopotencial até J5

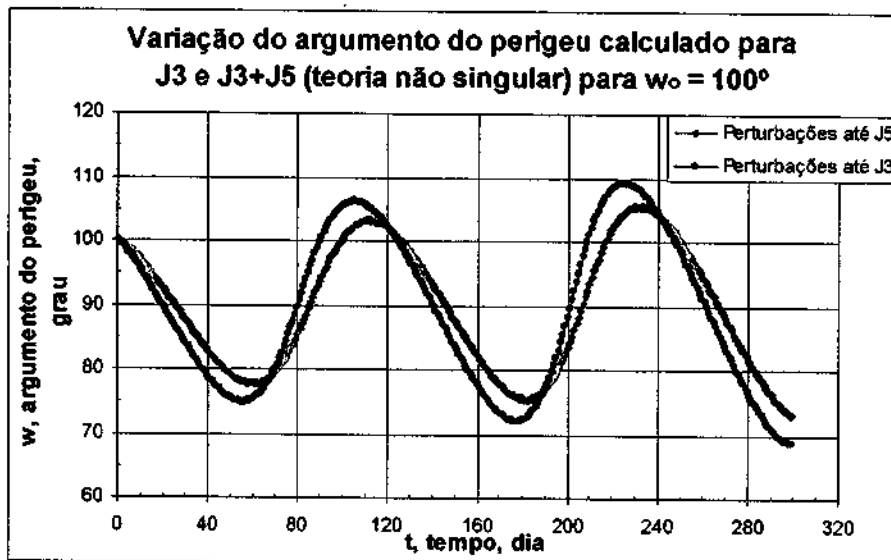


Gráfico 6 – Evolução do argumento do perigeu em relação ao tempo considerando os efeitos do geopotencial até J5

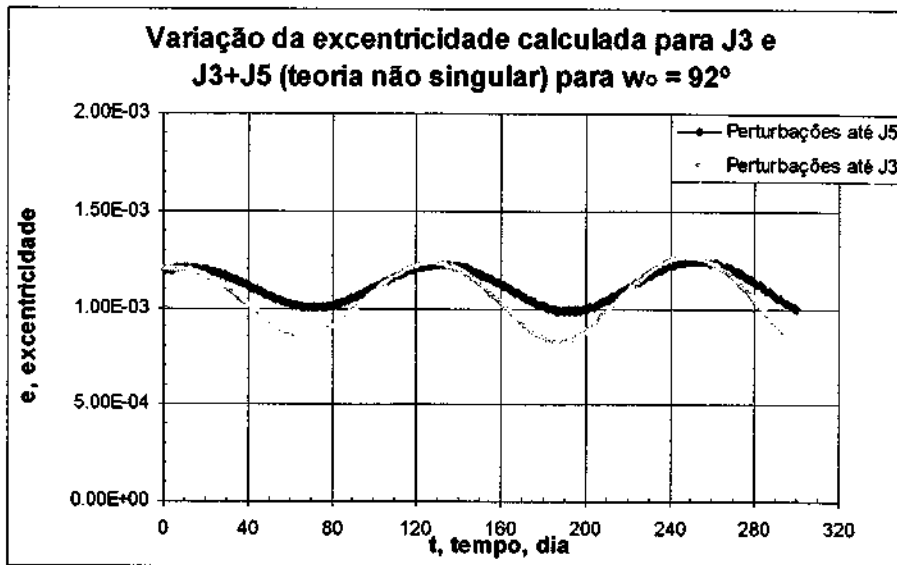


Gráfico 7 – Evolução da excentricidade em relação ao tempo considerando os efeitos do geopotencial até J5

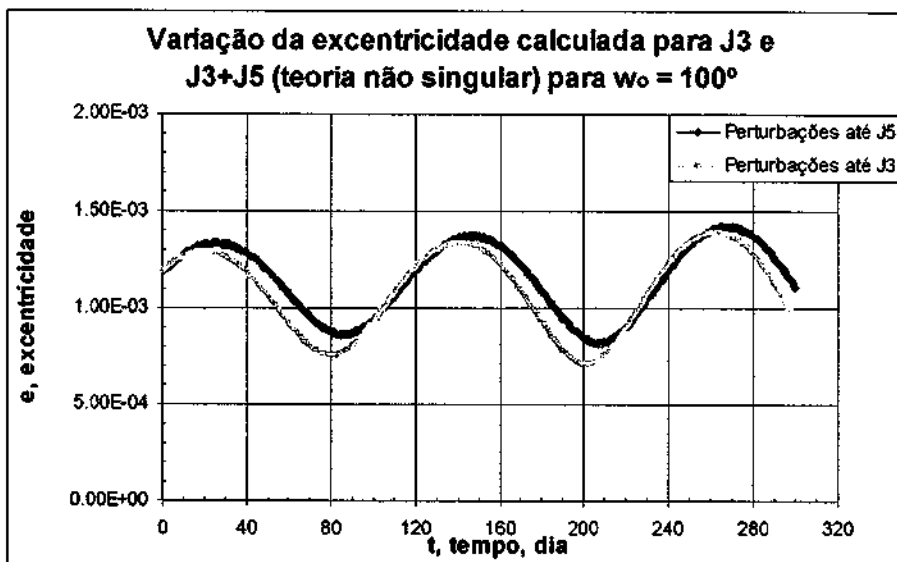


Gráfico 8 – Evolução da excentricidade em relação ao tempo considerando os efeitos do geopotencial até J5

Como foi dito na seção (3.2) do Capítulo 3, pudemos incluir as perturbações do geopotencial até a ordem de J5, obtidas a partir da teoria de Brouwer, nas equações das variáveis não singulares porque elas são exatamente a mesma teoria, expressa apenas de forma diferente. Para comprovar tais argumentos, que embasam todo o trabalho que desenvolvemos, a seguir mostraremos alguns gráficos em que calculamos o diagrama de fases da excentricidade e do argumento do perigeu tanto pela teoria de Brouwer quanto pela teoria não singular, confirmando que a teoria é uma só, pois as curvas são praticamente iguais, a menos de diferenças numéricas pequenas que podem ser desprezadas em relação ao valor (magnitude) dos elementos congelados.

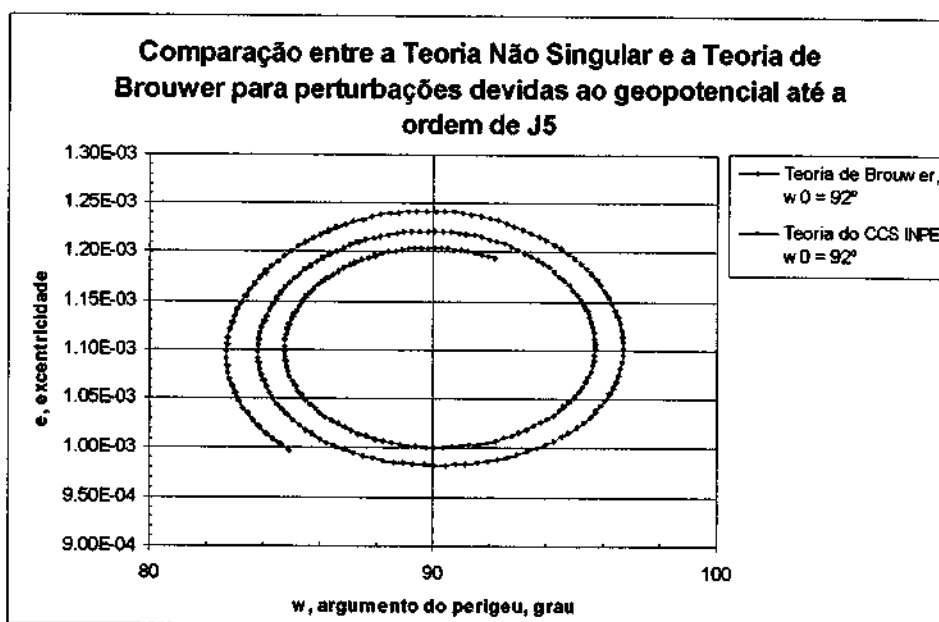


Gráfico 9 – Comparação entre a teoria de Brouwer e a teoria não singular para perturbações até a ordem de J5.

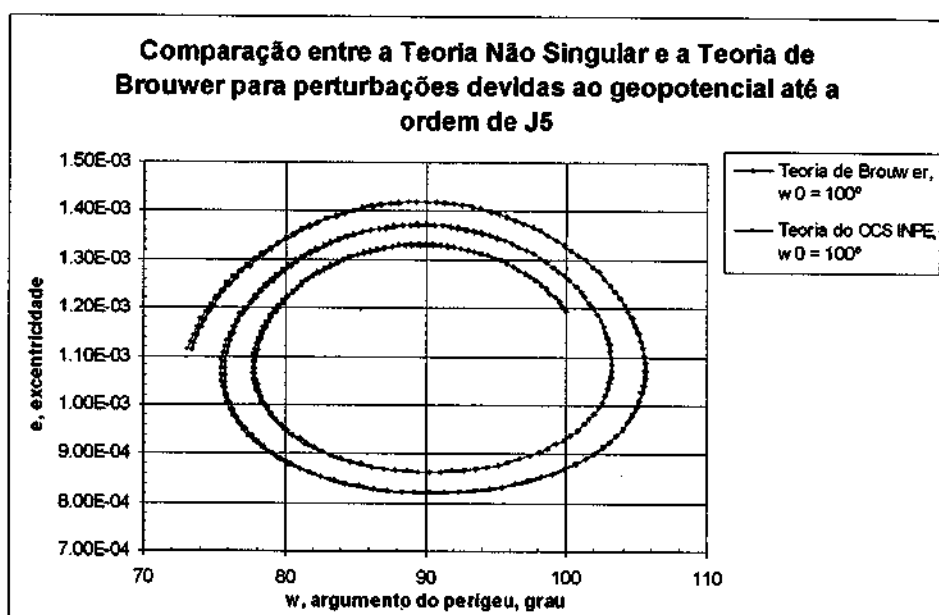


Gráfico 10 – Comparação entre a teoria de Brouwer e a teoria não singular para perturbações até a ordem de J5.

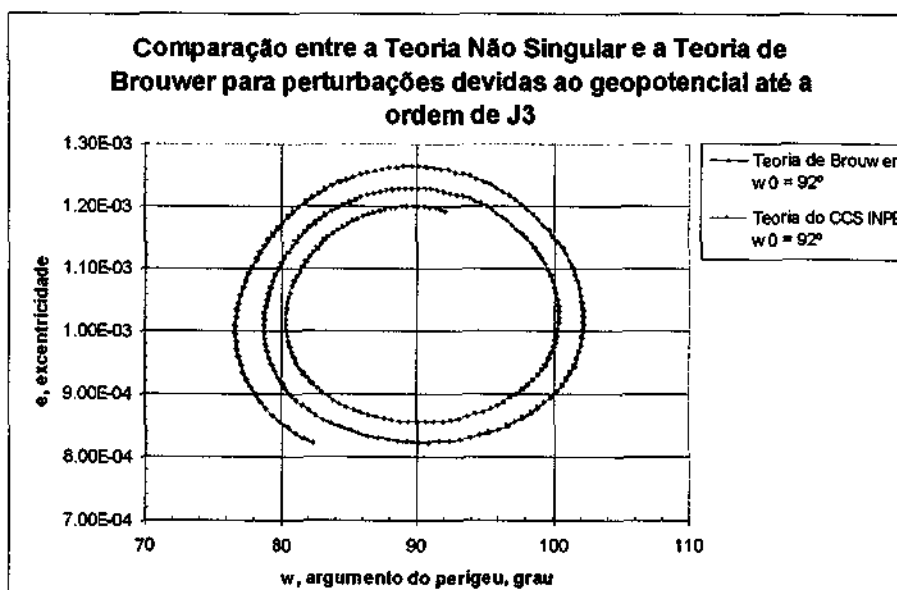


Gráfico 11 – Comparação entre a teoria de Brouwer e a teoria não singular para perturbações até a ordem de J3.

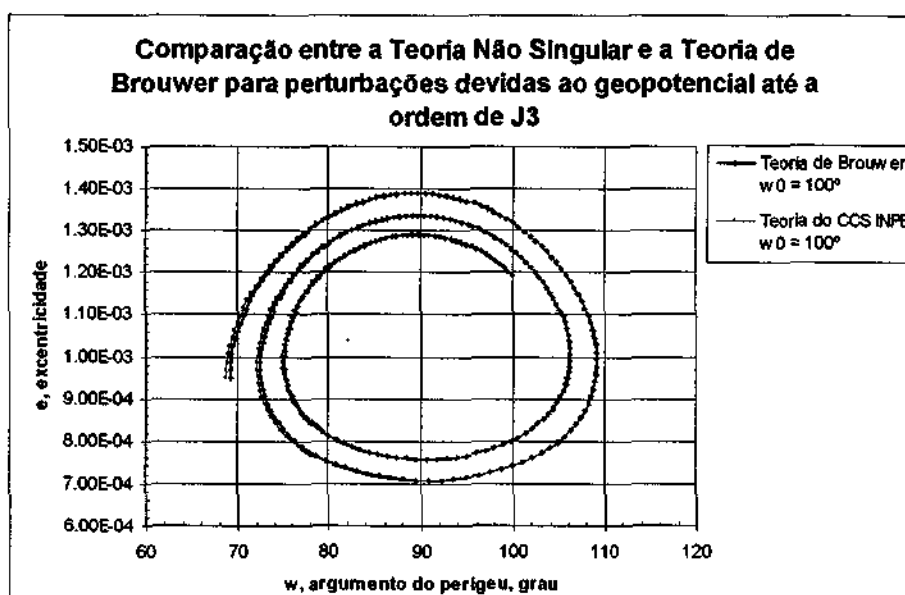


Gráfico 12 – Comparação entre a teoria de Brouwer e a teoria não singular para perturbações até a ordem de J3.

Pelos Gráficos 9, 10, 11 e 12, construídos para valores iniciais de argumento do perigeu  $92^\circ$  e  $100^\circ$  e para perturbações do geopotencial até J3 e até J3+J5, percebemos nitidamente que a teoria é uma só, quer seja por Brouwer, quer por variáveis não singulares, pois os gráficos são praticamente idênticos.

## 5. CONCLUSÕES

Os principais objetivos deste trabalho eram adaptar as equações da teoria de Brouwer e para as variáveis orbitais utilizadas no Centro de Controle de Satélites do INPE (variáveis não singulares) e comparar o desempenho da teoria de Brouwer e de Brouwer e Hori com a presente em uso. Esperava-se assim obter maior precisão no cálculo dos efeitos das perturbações nas chamadas órbitas congeladas (“frozen orbits”), cuja teoria está sendo aplicada em missões espaciais, especialmente no satélite CBERS-1 (“China-Brazil Earth Resources Satellite”) e em satélites similares (SPOT, Landsat, ERS e IRS).

Em relação aos efeitos perturbadores do geopotencial (até J5) segundo a teoria de Brouwer, comparamos com a teoria utilizada presente no Centro de Controle (até J3), incluímos nela os termos até a ordem de J5 e concluímos que as menores amplitudes quando se incluem tais termos permitem uma maior precisão na previsão dos elementos congelados “ $\omega$ ” e “ $e$ ”. Em termos práticos, a teoria utilizando somente o termo J3 pode induzir a necessidades equivocadas de manobras orbitais de correção. Supondo por exemplo que a missão requiera que o perigeu permaneça com valor  $90'' \pm 10''$ , a teoria com J3 preveria uma manobra corretiva, ao passo que a teoria incluindo J5 exclui a necessidade de manobra. Concluímos portanto que é imperativo a inclusão do termo em J5 para aumentar a precisão no planejamento de manobras do Centro de Controle.

Estas menores amplitudes quando se incluem os termos perturbadores até a ordem de J5 permitem uma maior precisão na previsão dos elementos congelados “ $\omega$ ” e “ $e$ ”, o que significa maior precisão não só no cálculo da manobra, mas também na previsão da manobra, o que contribuirá para um melhor desempenho nas operações do Centro de Controle de Satélites do INPE.

As equações da teoria de Brouwer desenvolvidas para manutenção de órbitas congeladas mostraram uma carga computacional adicional pequena, o que justifica sua inclusão no software de operação do Centro de Controle de Satélites do INPE.

Ao incluir os termos devidos às perturbações do geopotencial até a ordem de J5 nas equações da teoria utilizada pelo Centro de Controle, o que se pretendia era a melhora na precisão da previsão dos elementos congelados, argumento do perigeu e excentricidade, objetivo que foi plenamente atingido. Como continuidade, propõe-se analisar os efeitos do arrasto atmosférico na teoria presente em uso no Centro de Controle, além de realizar comparações entre a teoria de Brouwer e Hori (1961) com o modelo utilizado por Fu Ming e Kuga (1999).

## 6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Brouwer, D.: "Solution of the Problem of an Artificial Satellite, Theory without Drag", *Astronomical Journal*, 64, #9, pp.378-397, 1959.
- Brouwer, D. and Hori, G. I.: "Theoretical Evaluation of Atmospheric Drag Effects in the Motion of an Artificial Satellite", *The Astronomical Journal*, 66, #5, pp. 203-205, 212-213, 264-265, 1961.
- Cutting, E., Born, G. H. and Frautnick, J. C.: "Orbit Analysis for SEASAT-A", *The Journal of Astronautical Sciences*, 26, #4, 315-342, Oct. – Dec., 1978.
- Ferraz Melo, S.: "Teoria de Perturbação", ITA, (Publicação Interna), São José dos Campos, 1972.
- Fuming, H. and Kuga, H. K.: "CBERS Simulator Mathematical Models", XSCC/INPE, 1999.
- Kovalevsky, J.: "Introduction to Celestial Mechanics", D. Reidel Publishing Company, Netherlands, 1967.
- Morando, B.: "Mouvement d'un satellite artificiel de la terre", Gordon & Breach, Paris, 1974
- Raimundo, P. C. P.: "Órbitas Congeladas", Relatório de Bolsa CNPq, PIBIC-INPE, 2002.
- Raimundo, P. C. P.: "Órbitas Congeladas: Efeito do Arrasto Atmosférico", Relatório de Bolsa CNPq, PIBIC-INPE, 2003.
- Vilhena de Moraes, R.: "Trajetórias de Veículos Espaciais", ITA, (Publicação Interna), São José dos Campos, 1978.
- Vilhena de Moraes R.: Non Gravitational Disturbing Forces, *Adv. Space Research*, Vol. 14, 5, pp. 45-68, 1994.

*Algumas das referências citadas referem-se a obras consultadas para a elaboração do relatório, embora não tenham sido referenciadas no texto.*