



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

**PROPAGAÇÃO DA ATITUDE DE SATÉLITES ARTIFICIAIS  
COM QUATÉRNIONS E TORQUE DEVIDO À FORÇA DE  
LORENTZ**

**RELATÓRIO FINAL DE PROJETO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA  
(PIBIC/CNPq/INPE)**

**Pedro Raphael de S. P. Bento (UNESP, Bolsista PIBIC/CNPq)**  
Email: rapha\_1k@yahoo.com.br

**Dr. Valcir Orlando (CCS/INPE, Orientador)**  
E-mail: valcir@ccs.inpe.br

**Prof<sup>ª</sup>. Dra. Maria Cecília F. P. S. Zanardi (DMA/UNESP, Co-orientadora)**  
E-mail: cecilia@feg.unesp.br

Julho 2009

## **AGRADECIMENTOS**

**Ao CONSELHO NACIONAL DE PESQUISA E DESENVOLVIMENTO – CNPq pelo apoio financeiro recebido através da bolsa de iniciação científica junto ao programa PIBIC do INPE.**

## RESUMO

O objetivo principal deste trabalho é determinar um modelo matemático para descrever o torque devido a Força de Lorentz (Torque Elétrico) e suas componentes no sistema de inércia principal do satélite utilizando-se as matrizes de rotação envolvendo os quatérnions de atitude. O torque devido à força de Lorentz depende da velocidade de rotação do satélite, da velocidade de rotação diurna do campo geomagnético e de características físicas e de inércia da blindagem de proteção, que define a carga elétrica do satélite e a distribuição desta. Neste projeto é considerado que a carga elétrica do satélite é constante e que o campo geomagnético é descrito pelo modelo de vetor de dipolo. As componentes do torque elétrico são determinadas em termos das componentes do quatérnion de atitude, da inclinação orbital, argumento do pericentro e da longitude do nodo ascendente da órbita, da anomalia verdadeira, distância geocêntrica, direção e magnitude do campo geomagnético e do diâmetro e comprimento da manta cilíndrica carregada que envolve o satélite. As componentes do torque devido à força de Lorentz serão úteis para a propagação das equações do movimento rotacional do satélite, a ser desenvolvida em projetos futuros.

## **ATTITUDE PROPAGATION OF ARTIFICIAL SATELLITE WITH QUATERNIONS AND TORQUE DUE TO LORENTZ'S FORCE**

### **ABSTRACT**

The goal of this work is to determine a mathematical model to describe the torque due to the Lorentz's force (Electrical Torque) and the components of this torque in the principal system of the satellite using rotation matrices involving the quaternions of attitude. The torque due to Lorentz's force depends on satellite spin velocity, diurnal spin velocity of the geomagnetic field and of the physical and inertia characteristic of the protection shell. In this project is considered that the satellites electrical charge is constant and the geomagnetic field described by the dipole vector model. The Electrical torque components are presented in function of the attitude quaternion, orbital inclination, the argument of perigee and ascending node longitude of the orbit, the true anomaly, geocentric distance, direction and magnitude of geomagnetic field and of the length and diameter of the cylindrical shell. The components of the torque due to the Lorentz's force will be useful for the propagation of equation of the rotational movement of the satellite, to be developed in future projects.

## SUMÁRIO

|   |    |
|---|----|
| Lista de Figuras.....   | 6  |
| Lista de Símbolos.....  | 7  |
| Lista de Siglas e Abreviaturas.....                                       | 9  |
| 1 Introdução.....   | 10 |
| 2 Desenvolvimento.....  | 12 |
| 2.1 Elementos Orbitais.....   | 12 |
| 2.2 Representação de Atitude.....   | 12 |
| 2.3 Quatérnions.....  | 14 |
| 2.4 Equações do Movimento Rotacional.....                                 | 15 |
| 2.4.1 Equações Dinâmicas.....   | 15 |
| 2.4.2 Equações Cinemáticas.....   | 15 |
| 2.5 Campo Magnético da Terra.....   | 16 |
| 2.5.1 Componentes do Campo Magnético Terrestre no Sistema Equatorial..... | 18 |
| 2.6 Torque devido à Força de Lorentz ou Torque Elétrico.....              | 16 |
| 2.6.1 Modelo Matemático para o Torque Elétrico                            |    |
| 2.6.2 Componentes do Torque devido à Força de Lorentz.....                | 18 |
| 3 Conclusão.....  | 21 |
| 4 Referências Bibliográficas.....   | 22 |

## LISTA DE FIGURAS

|   |    |
|---|----|
| Figura 2.1 – Elementos Orbitais.....  | 12 |
| Figura 2.2 – Sistemas de Coordenadas e ângulos de Euler.....                  | 13 |
| Figura 2.3 – Sistema Magnético ( $O' x_m y_m z_m$ ) e Sistema Equatorial..... | 18 |

## LISTA DE SÍMBOLOS

|  |  |
|--|--|
| $A$  | - matriz de Atitude ou Matriz de Rotação   |
| $a$  | - semi-eixo maior da órbita  |
| $\vec{B}, B_x, B_y, B_z$                   | - vetor campo magnético terrestre e suas componentes                                     |
| $d$  | - diâmetro da manta cilíndrica de cargas envolvendo o satélite                           |
| $e$  | - excentricidade da órbita   |
| $f_0$                                      | - anomalia verdadeira  |
| $\vec{F}_L$                                | - força de Lorentz   |
| $g_n^m, h_n^m$                             | - coeficientes Gaussianos  |
| $h$  | - comprimento da manta cilíndrica de cargas envolvendo o satélite                        |
| $I$  | - inclinação da órbita   |
| $I_x, I_y$ e $I_z$                         | - momentos principais de inércia do satélite   |
| $\hat{I}, \hat{J}, \hat{K}$                | - versores do Sistema Inercial ou Equatorial   |
| $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$                | - versores no Sistema do Satélite  |
| $\hat{i}_m, \hat{j}_m, \hat{k}_m$          | - versores no Sistema Magnético, sendo que $\hat{k}_m$ dá a direção do                   |
| $\hat{i}_o, \hat{j}_o, \hat{k}_o$          | - versores no Sistema Orbital  |
| $\ell$                                     | - módulo vetor momento magnético da Terra ( $1 \times 10^{17}$ [Wb.m] )                  |
| $M_x, M_y, M_z$                            | - componentes dos torques externos atuantes no satélite                                  |
| $\vec{M}_L$                                | - torque devido à Força de Lorentz ou torque Elétrico                                    |
| $\vec{M}_{L1}, \vec{M}_{L2}, \vec{M}_{L3}$ | - componentes do Torque Elétrico   |
| $n, n_1, n_2, n_3$                         | - vetor unitário transposto ao longo do eixo de rotação                                  |
| $O$  | - centro de massa do Satélite  |
| $O'$                                       | - centro de massa da Terra   |
| $OXYZ$                                     | - Sistema Equatorial   |
| $Oxyz$                                     | - Sistema do Satélite  |
| $O'x_my_mz_m$                              | - Sistema Magnético  |
| $Ox_oy_oz_o$                               | - Sistema Orbital  |
| $O'XYZ$                                    | - Sistema Inercial   |
| $P_N^M$                                    | - coeficientes associados de Legendre  |
| $p, q, r$                                  | - componentes da velocidade de rotação no sistema do satélite                            |
| $Q$  | - carga elétrica do satélite   |
| $q, q_1, q_2, q_3, q_4$                    | - quatérnion e suas componentes  |
| $\vec{r}'$                                 | - vetor posição do centro de massa do satélite em relação<br>ao centro de massa da Terra |
| $r'$                                       | - distância geocêntrica do satélite  |
| $r_g$                                      | - distância geocêntrica de um ponto no espaço  |
| $R_T$                                      | - raio da Terra na Linha do Equador  |

|   |  |
|---|--|
| $S$   | - matriz representando uma manta cilíndrica carregada ao redor do satélite                       |
| $V$   | - campo potencial magnético  |
| $\vec{V}$   | - velocidade de translação do satélite   |
| $w$   | - argumento do perigeu   |
| $\vec{W}$   | - vetor velocidade de rotação  |
| $\vec{w}_g$   | - vetor velocidade de rotação diurna do campo geomagnético junto com a terra                     |
| $\hat{\beta}, \beta_1, \beta_2, \beta_3$            | - versor na direção do vetor campo magnético e suas componentes no sistema equatorial            |
| $\beta_m$   | - inclinação do vetor de dipolo magnético em relação ao eixo equatorial $O'Z$                    |
| $\hat{\beta}_P, \beta_{1P}, \beta_{2P}, \beta_{3P}$ | - versor na direção do vetor campo magnético e suas componentes no sistema principal do satélite |
| $\eta_m$  | - argumento do nodo ascendente do equador geomagnético   |
| $\theta_g$  | - co-latidade a leste de um ponto no espaço  |
| $\phi$  | - ângulo de rotação  |
| $\phi_g$  | - longitude a leste de um ponto no espaço  |
| $\mu_0$   | - permeabilidade magnética no vácuo ( $4\pi \times 10^{-7}$ [Wb/A.m] )                           |
| $\Omega$  | - longitude do nodo ascendente   |



## **LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS**

UNESP - Universidade Estadual Paulista

INPE - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais

CM - Centro de Massa

TE - Torque Elétrico

## 1 INTRODUÇÃO

A atitude de um satélite artificial representa a sua orientação espacial em relação a um sistema de referência inercial. A dinâmica de atitude pode ser formulada como a dinâmica rotacional de um corpo rígido nos seguintes termos: *Num dado instante inicial são conhecidas a orientação espacial e a velocidade de rotação do satélite com respeito a um sistema inercial, assim como as características inerciais e os torques externos atuantes sobre o satélite.* Deseja-se propagar a atitude do satélite em um certo intervalo do tempo, ou seja, determinar a orientação do satélite como função do tempo.

O objetivo principal deste projeto estará direcionado na determinação das componentes do torque devido às forças de Lorentz, aqui também denominado de *TORQUE ELÉTRICO – TE*, no sistema de inércia principal do satélite, as quais serão úteis para a propagação da atitude do satélite através da integração das equações dinâmicas e cinemáticas.

A atitude pode ser definida como a posição angular de um sistema de coordenadas em relação a outro sistema de coordenadas. A parametrização ou representação da atitude pode se dar de diferentes modos. Uma das maneiras mais fundamentais é a matriz dos co-senos diretores entre dois sistemas, um sistema inercial e outro sistema que acompanha a rotação do satélite (Pisacane e Moore, 1994; Zanardi e Lopes, 2000), que aqui denominaremos de *MATRIZ DE ATITUDE*.

A parametrização mais clássica da atitude é através dos ângulos de Euler, que correspondem aos ângulos de uma sequência de rotações em torno de eixos e direções (por exemplo, a sequência 3-1-3 que significa rotações em torno dos eixos Z-X-Z). Através dos ângulos de Euler podemos determinar todos os elementos da matriz de atitude. Esta representação tem a vantagem de ser facilmente interpretada pelos usuários. No entanto, há algumas desvantagens na utilização dos ângulos de Euler tais como indefinições matemáticas nas equações de propagação e na determinação dos ângulos a partir de velocidades angulares medidas no satélite. Os cálculos envolvem funções trigonométricas com singularidades intrínsecas (Shuster, 1993).

Devido às dificuldades das singularidades dos ângulos de Euler, neste projeto os parâmetros de Euler – *quatérnions* – como serão aqui denominados, serão utilizados

para a conversão dos vetores entre diferentes sistemas de coordenadas. Os quatérnions não possuem singularidade geométrica e são vantajosos do ponto de vista numérico (Shuster, 1993).

A utilização dos quatérnions na análise do movimento rotacional já vem sendo analisada por Rodrigues, Teixeira e Zanardi (Rodrigues e Zanardi, 2004a, 2004b; Zanardi, 2005; Teixeira e Rodrigues, 2005; Teixeira et al., 2005; Rodrigues e Zanardi, 2005; Zanardi e Teixeira, 2006; Zanardi et al., 2006). Rodrigues e Zanardi (2004a) analisaram a influência do torque de gradiente de gravidade no movimento rotacional utilizando os quatérnions para descrever a orientação espacial do satélite. Rodrigues e Zanardi (2004b) analisaram a influência do torque magnético residual, com o modelo de dipolo para o campo geomagnético, utilizando os quatérnions para descrever a atitude do satélite. Teixeira e Rodrigues (2005) analisaram o torque devido às correntes de Foucault, utilizando os quatérnions para determinar as componentes deste torque no sistema principal e o modelo de dipolo para o campo geomagnético. Teixeira et al. (2005) compararam os resultados com os obtidos com o torque residual e torque de Foucault. Zanardi (2005) apresenta uma abordagem geral na utilização dos quatérnions em representação de atitudes. Zanardi e Teixeira (2006) e Zanardi et al (2006) discutem e comparam os resultados obtidos com a propagação da atitude utilizando os quatérnions e os torques: residual, de Foucault e de gradiente de gravidade.

Este projeto dá continuidade a esses trabalhos, com a definição do modelo matemático para o TE e a determinação de suas componentes no sistema fixo no satélite (aqui considerado como o sistema principal de inércia). Em projeto futuro essas componentes serão introduzidas nas equações do movimento rotacional de modo a analisar sua influência na atitude dos satélites e compará-la com a influência dos outros torques estudados anteriormente em outros projetos.

Na sequência, apresentam-se os tópicos principais necessários ao projeto, que foram estudados no período de março a junho de 2009, o modelo matemático para o TE e a determinação de suas componentes no sistema principal.

## 2 DESENVOLVIMENTO

### 2.1 Elementos Orbitais

Um dos conceitos de grande importância quando se trabalha com veículos espaciais é o dos elementos orbitais, os quais caracterizam a posição do satélite no espaço. São eles:  $a$  (semi-eixo maior da órbita),  $e$  (excentricidade),  $I$  (inclinação da órbita),  $\Omega$  (longitude do nodo ascendente),  $\omega$  (argumento do perigeu) e  $f_0$  (anomalia verdadeira). A figura 2.2 apresenta a visualização dos elementos angulares  $I$ ,  $\omega$ ,  $\Omega$  e  $f_0$ .

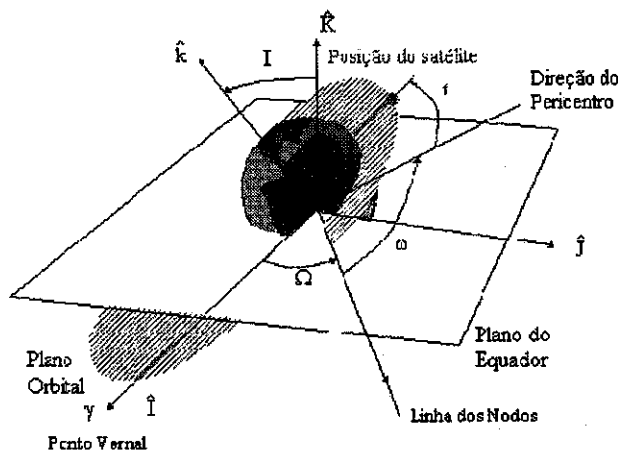
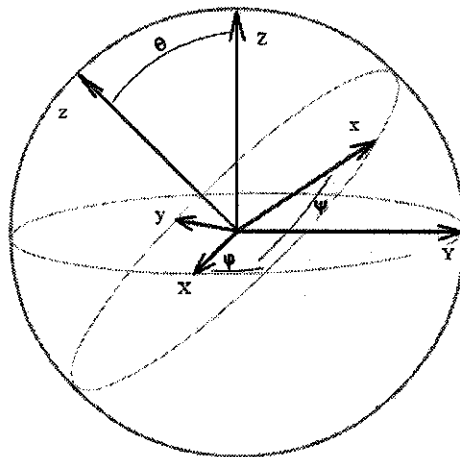


Figura 2.1 – Elementos Orbitais

### 2.2 Representação de Atitude

A atitude de um satélite artificial refere-se à maneira como este está orientado no espaço. Para analisar tal atitude relacionam-se dois sistemas de coordenadas com origens coincidentes com o centro de massa (CM) do satélite. O primeiro sistema acompanha a orientação do satélite no espaço com seus eixos apontando a todo o instante para a mesma direção dos eixos principais de inércia do satélite. A este sistema denomina-se Sistema Principal de Inércia ou Sistema do Satélite (Oxyz) e seus versores (vetores unitários) são  $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ . O outro sistema, um sistema auxiliar, é inercial, e denomina-se Sistema Equatorial (OXYZ) e seus versores são  $\hat{I}, \hat{J}, \hat{K}$ . Este sistema tem seus eixos paralelos aos eixos do Sistema Inercial (O'XYZ), com origem no CM da

Terra, eixo  $O'Z$  em direção ao Pólo Norte Terrestre e eixo  $O'X$  na direção da intersecção entre o plano do Equador e o da eclíptica. Os sistemas são relacionados utilizando a matriz de atitude entre estes dois sistemas. Os elementos da matriz de atitude podem ser obtidos por diferentes parametrizações (Pisacane e Moore, 1994; Shuster, 1993; Zanardi E Lopes, 2000), tais como os ângulos de Euler, os quatérnions e as variáveis de Andoyer.



*Figura 2.2 – Sistemas de Coordenadas e ângulos de Euler*

Outro sistema de coordenadas também utilizado na elaboração deste projeto é o Sistema Orbital ( $O' x_0 y_0 z_0$ ) com sua origem no CM da terra, seu eixo  $x_0$  paralelo ao vetor posição do satélite e seu eixo  $z_0$  perpendicular ao plano orbital do satélite. Seus versores são.

### 2.3 Quatérnions

Se  $\phi$  é o ângulo de rotação e  $\hat{n} = (n_1 \ n_2 \ n_3)^t$  é o vetor unitário ao longo do eixo de rotação, com t indicando a transposta da matriz, o quatérnion de rotação é um vetor (4x1) definido por (Wertz,1978; Pisacane e Moore,1994):

$$q = (\bar{q} \ q_4)^t = (q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4)^t \quad (1)$$

onde  $\bar{q} = (q_1 \ q_2 \ q_3)^t$  representa a parte vetorial do quatérnion e  $q_4$  a parte escalar, sendo:

$$\begin{aligned} q_1 &= n_1 \operatorname{sen}\left(\frac{\phi}{2}\right) \\ q_2 &= n_2 \operatorname{sen}\left(\frac{\phi}{2}\right) \\ q_3 &= n_3 \operatorname{sen}\left(\frac{\phi}{2}\right) \\ q_4 &= \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \end{aligned} \quad (2)$$

Várias propriedades do quatérnion encontram-se em Shuster (1993), dentre as quais destacam-se:

1) Módulo do quatérnion é igual à unidade, ou seja:

$$q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 = 1 \quad (3)$$

2) A matriz de atitude correspondente a uma rotação  $\phi$  em torno do eixo  $\hat{n} = (n_1 \ n_2 \ n_3)^t$ , em termos do quatérnion de rotação é dada por ( Shuster,1993):

$$A = \begin{pmatrix} q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_1q_2 + q_4q_3) & 2(q_1q_3 - q_4q_2) \\ 2(q_1q_2 - q_4q_3) & -q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_1q_3 + q_4q_2) \\ 2(q_1q_3 + q_4q_2) & 2(q_1q_3 - q_4q_2) & -q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 \end{pmatrix} \quad (4)$$

## 2.4 Equações do Movimento Rotacional

### 2.4.1. Equações Dinâmicas

As equações dinâmicas do movimento rotacional de satélites artificiais descritas no Sistema do Satélite (Oxyz), são dadas por (Wertz,1978):

$$\begin{aligned}I_x \dot{p} &= M_x + (I_y - I_z) q r \\I_y \dot{q} &= M_y + (I_z - I_x) p r \\I_z \dot{r} &= M_z + (I_x - I_y) p q\end{aligned}\tag{5}$$

onde  $I_x$ ,  $I_y$  e  $I_z$  são os momentos principais de inércia do satélite;  $p$ ,  $q$  e  $r$  são as componentes da velocidade de rotação no sistema do satélite;  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$  são componentes dos torques externos no sistema do satélite.

### 2.4.2 Equações Cinemáticas

As taxas de variação de cada componente do quatérnio são dadas pelas equações cinemáticas (Shuster, 1993):

$$\begin{aligned}\dot{q}_1 &= \frac{1}{2} [ p q_4 - q q_3 + r q_2 ] \\ \dot{q}_2 &= \frac{1}{2} [ q q_4 - r q_1 + p q_3 ] \\ \dot{q}_3 &= \frac{1}{2} [ r q_4 - p q_2 + q q_1 ] \\ \dot{q}_4 &= -\frac{1}{2} [ p q_1 + q q_2 + r q_3 ]\end{aligned}\tag{6}$$

Por estas equações observa-se que não ocorrem singularidades associadas com denominador nulo ou indefinições das variáveis.

## 2.5 Campo Magnético da Terra

O primeiro tratado científico acerca do campo magnético terrestre foi escrito pelo físico e médico inglês William Gilbert (1544-1603) em sua obra “Magneto”, publicado em Londres em 1600. Em 1701, o físico e astrônomo Edmund Halley (1656-1742) também inglês, publicou a primeira carta de declinações magnéticas, que havia preparado, realizando trabalhosas e pacientes medições nas águas do Atlântico.

No século XIX, o químico e físico Michael Faraday (1791-1867) elaborou a difícil noção de campo e empregou pela primeira vez, o termo “Campo Magnético”.

Em 1838, Karl Friedrich Gauss (1777-1855), matemático, astrônomo e físico alemão, encontrou uma representação matemática aproximada para o campo magnético terrestre, que assumiu a forma de uma soma de termos conhecida como harmônicos esféricos. Como o campo magnético gira com a Terra, sendo uma indicação clara que o campo se origina da Terra, e devido à natureza esférica da Terra, o potencial magnético terrestre passou a ser convenientemente expresso em harmônicos esféricos como (WERTZ, 1978):

$$V(r_g, \theta_g, \phi_g) = R_T \sum_{n=1}^k \left( \frac{R_T}{r_g} \right)^{n+1} \sum_{m=0}^n [g_n^m \cos(m\phi_g) + h_n^m \sin(m\phi_g)] P_n^m(\theta_g) \quad (7)$$

em que  $R_T$  é o raio equatorial da Terra;  $g_n^m$  e  $h_n^m$  são os coeficientes Gaussianos;  $P_n^m(\theta_g)$  são polinômios associados de Legendre;  $r_g$ ,  $\theta_g$  e  $\phi_g$  representam a distância geocêntrica, a co-latidade e a longitude a leste de um ponto no espaço, respectivamente.

O truncamento no desenvolvimento da série de harmônicos esféricos da equação acima estabelece o modelo a ser considerado para o campo geomagnético, isto é, se  $n$  vale 1 ou 2, o potencial é denominado modelo de dipolo ou quadripolo, respectivamente, sendo que a partir de  $n$  igual a 3 o potencial é denominado de múltiplos pólos. Os coeficientes gaussianos são determinados empiricamente pelo método de mínimos quadrados para medidas do campo e são encontrados no Internacional Geomagnetic Reference Field, sendo que vários valores destes coeficientes são apresentados em Wertz (1978), para a época de 1975.



O Campo Geomagnético pode ser expresso como o gradiente de um potencial escalar  $V$  (Wertz, 1978), ou seja:

$$\vec{B} = -\nabla V \quad (8)$$

Neste trabalho considera-se que o potencial escalar  $V$  de um dipolo magnético pode ser expresso por (Thomas e Capellari, 1964):

$$V = -\frac{\ell \hat{k}_m \cdot \vec{r}'}{4\pi\mu_0 r'^3} \quad (9)$$

em que  $\mu_0$  é a permeabilidade do espaço livre igual a  $4\pi \times 10^{-7} [\text{Wb/A.m}]$ ;  $\ell$  é módulo do vetor do momento magnético do campo terrestre cuja magnitude é igual a  $1 \times 10^{17} [\text{Wb.m}]$ ;  $\hat{k}_m$  é o vetor unitário que descreve a direção do momento geomagnético;  $\vec{r}'$  é o vetor posição do centro de massa do satélite ao centro de massa da Terra (coincidente com o centro do dipolo do campo geomagnético). Nestas unidades a parcela  $\frac{\ell}{4\pi\mu_0}$  é dada em  $[A.m^2]$ , mas nas equações do movimento é necessário que seja dada em  $[Wb.m]$ . Então, de acordo com Wertz (1978), esta parcela assume o valor de  $7,943 \times 10^{15} [Wb.m]$ .

### 2.5.1 Componentes do Campo Magnético Terrestre no Sistema Equatorial

Ao vetor de dipolo está associado o sistema magnético  $O'x_my_mz_m$ , que se relaciona com o sistema equatorial através dos ângulos  $\beta_m$  e  $\eta_m$  que definem a orientação do vetor de dipolo, sendo  $\beta_m$  a inclinação do vetor de dipolo em relação ao eixo equatorial  $O'Z$  e  $\eta_m$  o argumento do nodo ascendente do equador geomagnético, como mostra a Figura 2.3.

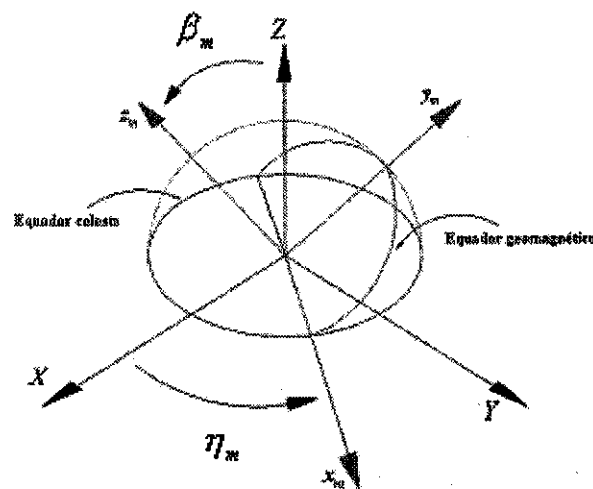


Figura 2.3 - Sistema Magnético ( $O'x_my_mz_m$ ) e Sistema Equatorial

Os vetores unitários do sistema magnético são representados por  $\hat{i}_m$ ,  $\hat{j}_m$  e  $\hat{k}_m$ , sendo que o eixo  $O'z_m$  representa a direção do vetor dipolo magnético. Consideremos o vetor posição do CM satélite  $\vec{r}'$  expresso no sistema magnético :

$$\vec{r}' = x_m \hat{i}_m + y_m \hat{j}_m + z_m \hat{k}_m \quad (10)$$

Substituindo o potencial do dipolo geomagnético, dado pela equação (9), em (8) o campo magnético da Terra é obtido por:

$$\vec{B} = -\frac{\ell}{4\pi\mu_0} \nabla \left( \frac{z_m}{r'^3} \right) \quad (11)$$

em que:

$$r'^3 = (x_m^2 + y_m^2 + z_m^2)^{3/2} \quad (12)$$

Substituindo (12) em (11) e evoluindo os cálculos obtém-se:

$$\vec{B} = -\frac{\ell}{4\pi\mu_0 r'^5} [3x_m z_m \hat{i}_m + 3y_m z_m \hat{j}_m + (3z_m^2 - r'^2) \hat{k}_m] \quad (13)$$

Sejam as coordenadas normalizadas das componentes do vetor posição  $\vec{r}'$  :

$$r'_x = \frac{x_m}{r'} ; \quad r'_y = \frac{y_m}{r'} ; \quad r'_z = \frac{z_m}{r'} \quad (14)$$

Substituindo (14) em (13), o campo magnético  $\vec{B}$  pode ser expresso no sistema magnético por:

$$\vec{B} = -\frac{\ell}{4\pi\mu_0 r'^5} [3r'_x r'_z \hat{i}_m + 3r'_y r'_z \hat{j}_m + (3r_z'^2 - 1) \hat{k}_m] \quad (15)$$

logo:

$$3(r'_x \hat{i}_m + r'_y \hat{j}_m + r'_z \hat{k}_m) r'_z = \frac{3z_m \vec{r}'}{r'^2} \quad (16)$$

Se  $\vec{i}_o$  é o vetor unitário ao longo do vetor posição, então:

$$\vec{r}' = r' \vec{i}_o \quad (17)$$

$$z_m = \vec{r}' \cdot \hat{k}_m = r' (\vec{i}_o \cdot \hat{k}_m) \quad (18)$$

E substituindo (17) e (18) em (16) tem-se:

$$3(r_x \hat{i}_m + r_y \hat{j}_m + r_z \hat{k}_m) = 3(\hat{i}_o \cdot \hat{k}_m) \hat{i}_o \quad (19)$$

Assim, utilizando (19), a equação (15) pode ser colocada na forma:

$$\vec{B} = \frac{\ell}{4\pi\mu_0 r^3} \left[ \vec{k}_m - 3(\hat{i}_o \cdot \vec{k}_m) \hat{i}_o \right] \quad (20)$$

Os vetores unitários  $\hat{i}_o$  e  $\hat{k}_m$  podem ser expressos no Sistema Equatorial. Para se obter o vetor unitário  $\hat{i}_o$  no Sistema Equatorial é utilizado os ângulos de Euler, em um conjunto de três rotações consecutivas (ZXZ), tem-se a matriz de rotação  $R$  que relaciona o Sistema Equatorial com o Sistema Orbital dada por (Bate et al., 1971; Zanardi, 2005):

$$\begin{bmatrix} \text{Sistema} \\ \text{Orbital} \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} \text{Sistema} \\ \text{Equatorial} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \text{Sistema} \\ \text{Equatorial} \end{bmatrix} = R' \begin{bmatrix} \text{Sistema} \\ \text{Orbital} \end{bmatrix}$$

com:

$$R = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix}$$

cujos elementos são:

$$R_{11} = \cos(w + f_0)\cos(\Omega) - \text{sen}(w + f_0)\cos(I)\text{sen}(\Omega) \quad (21)$$

$$R_{12} = \cos(w + f_0)\text{sen}(\Omega) + \text{sen}(w + f_0)\cos(I)\cos(\Omega) \quad (22)$$

$$R_{13} = \text{sen}(w + f_0)\text{sen}(I) \quad (23)$$

$$R_{21} = -\text{sen}(w + f_0)\cos(\Omega) - \cos(w + f_0)\cos(I)\text{sen}(\Omega) \quad (24)$$

$$R_{22} = -\text{sen}(w + f_0)\text{sen}(\Omega) + \cos(w + f_0)\cos(I)\cos(\Omega) \quad (25)$$

$$R_{23} = \cos(w + f_o) \text{sen}(I) \quad (26)$$

$$R_{31} = \text{sen}(I) \text{sen}(\Omega) \quad (27)$$

$$R_{32} = -\text{sen}(I) \cos(\Omega) \quad (28)$$

$$R_{33} = \cos(I) \quad (29)$$

onde  $I$  é a inclinação da órbita,  $w$  é o argumento do perigeu,  $f_o$  é a anomalia verdadeira e  $\Omega$  é a longitude do nodo ascendente.

Deste modo, utilizando a matriz de rotação  $R$  entre estes dois sistemas, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \hat{i}_o \\ \hat{j}_o \\ \hat{k}_o \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} \hat{I} \\ \hat{J} \\ \hat{K} \end{bmatrix} \quad (30)$$

logo:

$$\hat{i}_o = R_{11} \hat{I} + R_{12} \hat{J} + R_{13} \hat{K} \quad (31)$$

$$\hat{j}_o = R_{21} \hat{I} + R_{22} \hat{J} + R_{23} \hat{K} \quad (32)$$

$$\hat{k}_o = R_{31} \hat{I} + R_{32} \hat{J} + R_{33} \hat{K} \quad (33)$$

Para se obter o vetor unitário  $\hat{k}_m$  no Sistema Equatorial, é utilizado um conjunto de duas rotações:

Rotação de um ângulo  $\eta_m$  em torno de  $O'Z$ , no Sistema Equatorial, tal que  $R(\hat{Z}, \eta_m)$ ;

Rotação de um ângulo  $\beta_m$  em torno de  $O'x_m$ , no Sistema Magnético, tal que  $R(\hat{x}_m, \beta_m)$ .

Deste modo utilizando a matriz de rotação que relaciona os sistemas temos:

$$\begin{bmatrix} \hat{i}_m \\ \hat{j}_m \\ \hat{k}_m \end{bmatrix} = L \begin{bmatrix} \hat{I} \\ \hat{J} \\ \hat{K} \end{bmatrix} \quad (34)$$

em que:

$$L = R(\hat{Z}, \eta_m) R(\hat{x}_m, \beta_m) = \begin{bmatrix} \cos \eta_m & \text{sen} \eta_m & 0 \\ -\cos \beta_m \text{sen} \eta_m & \cos \beta_m \cos \eta_m & \text{sen} \beta_m \\ \text{sen} \beta_m \text{sen} \eta_m & -\text{sen} \beta_m \cos \eta_m & \cos \beta_m \end{bmatrix} \quad (35)$$

De forma simplificada:

$$L = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \quad (36)$$

Substituindo a equação (35) na equação (34), obtém-se:

$$\hat{i}_m = L_{11} \hat{I} + L_{12} \hat{J} \quad (37)$$

$$\hat{j}_m = L_{21} \hat{I} + L_{22} \hat{J} + L_{23} \hat{K} \quad (38)$$

$$\hat{k}_m = L_{31} \hat{I} + L_{32} \hat{J} + L_{33} \hat{K} \quad (39)$$

Assim o produto escalar de  $\hat{i}_o$  e  $\hat{k}_m$  é dado por:

$$\hat{i}_o \cdot \hat{k}_m = R_{11} L_{31} + R_{12} L_{32} + R_{13} L_{33} = I_S K_m \quad (40)$$

O campo magnético terrestre  $\vec{B}$  dado pela equação (20), utilizando as relações anteriormente demonstradas, é expresso no sistema equatorial  $O'XYZ$  por:

$$\vec{B} = B_x \hat{I} + B_y \hat{J} + B_z \hat{K} \quad (41)$$

em que:

$$B_x = \frac{\ell}{4\pi\mu_0 r^3} [L_{31} - 3(I_s K_m) R_{11}] \quad (42)$$

$$B_y = \frac{\ell}{4\pi\mu_0 r^3} [L_{32} - 3(I_s K_m) R_{12}] \quad (43)$$

$$B_z = \frac{\ell}{4\pi\mu_0 r^3} [L_{33} - 3(I_s K_m) R_{13}] \quad (44)$$

Assim a magnitude e a direção o campo geomagnético são expressas por:

$$B = (B_x^2 + B_y^2 + B_z^2)^{1/2} \quad (45)$$

$$\beta_1 = \frac{B_x}{B}, \beta_2 = \frac{B_y}{B}, \beta_3 = \frac{B_z}{B} \quad (46)$$

de modo que o vetor do campo magnético no sistema equatorial pode ser dado por:

$$\vec{B} = B \hat{\beta} \quad (47)$$

com:

$$\hat{\beta} = \beta_1 \hat{I} + \beta_2 \hat{J} + \beta_3 \hat{K} \quad (48)$$

## **2.6 Torque devido à Força de Lorentz ou Torque Elétrico**

Muitas análises já foram realizadas para avaliar os efeitos da força de Lorentz e mostraram que em princípio esta força possui um valor negligenciável em comparação com as demais forças externas (Sehnal, 1969). Entretanto, a necessidade de uma alta precisão nos resultados de experimentos espaciais em algumas missões espaciais requer um conhecimento claro dos efeitos eletrodinâmicos conectados com a força de Lorentz, o qual deverá ser estudado com detalhes neste projeto, mas com aplicações no movimento rotacional do satélite.

A carga elétrica do satélite é a grandeza mais importante na determinação da magnitude do efeito da força de Lorentz. A superfície do satélite é carregada com um potencial negativo e em primeira aproximação comporta-se como um capacitor esférico para a vizinhança ao redor. Deve se levar também em consideração a importância da missão e a configuração do satélite.

A imposição de grandes potenciais no satélite aumenta a contaminação da superfície do satélite, a qual degrada suas propriedades térmicas. O aumento do potencial ainda pode produzir uma diferença de potencial na superfície do satélite ou entre a superfície do satélite e o interior do mesmo acima do limite de ruptura. Quando este limite é excedido, uma descarga eletrostática pode ocorrer e o veículo espacial pode oscilar ou cambaleiar (Purvis et al., 1984).

Vokrouhlicky (1989) determinou os efeitos orbitais da força de Lorentz no movimento de um satélite artificial carregado eletricamente movendo-se no campo magnético da Terra, com o campo magnético dado pelo modelo de multipolo e a carga elétrica do satélite considerada constante. A variação de carga elétrica do satélite é incluída em Vokrouhlicky (1990), sendo que nenhuma mudança significativa foi observada nos resultados e nenhum efeito secular observado na excentricidade e inclinação da órbita devido à força de Lorentz.

Juhász e Horanyi (1997) estudaram objetos em degradação em órbita ao redor da Terra assim como resíduos da dimensão de microns gerados pelos motores dos foguetes. Eles mostram que o movimento destas partículas é regido por forças gravitacionais, forças de pressão de radiação solar e eletromagnética, sendo que os grãos ganham carga



eletrostática e tornam-se vulneráveis aos campos elétricos e magnéticos na magnetosfera da Terra. Eles mostraram que os efeitos da magnetosfera tendem a reduzir o tempo de vida destes grãos, colocando-os em uma órbita elíptica que colide com a Terra ou ejetando-os no espaço interplanetário.

Anderson et al. (1994) examinaram a relação entre o ambiente de plasma e o potencial do satélite para o satélite Dynamics Explorer 2 (DE 2) em uma tentativa de melhorar a precisão das medidas de desvio de íons pelo analisador de potencial retardado (RPA). Eles deduziram um algoritmo para determinar o potencial do satélite DE 2 em cada ponto de sua órbita.

Tikhonov (2002) analisou o movimento rotacional de um satélite artificial em órbita equatorial circular e com simetria dinâmica, incluindo o torque devido à força de Lorentz e o campo geomagnético descrito pelo modelo de quadripolo. Um modelo aproximado para este torque é introduzido e suas componentes médias incluídas nas equações do movimento. Os resultados mostram como as variações seculares e de longo período do movimento rotacional dependem dos coeficientes de Gauss do modelo de quadripolo.

A estabilidade da atitude de veículos espaciais rígidos em órbitas circulares foi investigada por Abdel-Aziz (2007), incluindo o torque devido à força de Lorentz, o torque de gradiente de gravidade e o torque magnético residual para o caso particular do campo geomagnético alinhado ao longo da normal à órbita. As equações do movimento são descritas pelas equações dinâmicas e pelas equações cinemáticas dos co-senos diretores. Através da aplicação do teorema de estabilidade de Liapunov, os resultados numéricos mostram que a força de Lorentz tem uma influência significativa na estabilidade dos pontos de equilíbrio das equações do movimento rotacional.

Assim, diversos autores estão interessados na análise dos efeitos da força de Lorentz no movimento translacional de veículos espaciais, mas ainda existe uma lacuna nas abordagens envolvendo a análise dos efeitos desta força no movimento rotacional do satélite artificial.

### 2.6.1 Modelo Matemático para o Torque Elétrico

O modelo para o torque devido à força de Lorentz depende da velocidade de rotação do satélite, da velocidade de rotação diurna do campo geomagnético e da Terra e de características físicas e de inércia da blindagem de proteção, que define a carga elétrica do satélite. Neste projeto é considerado que a carga elétrica do satélite é constante e que o campo geomagnético é descrito pelo modelo de vetor de dipolo.

A força de Lorentz é dada por (Sehna, 1969):

$$\vec{F}_L = Q\vec{V} \times \vec{B} \quad (49)$$

sendo  $Q$  a carga elétrica do satélite,  $\vec{V}$  a velocidade do satélite em órbita e  $\vec{B} = B\hat{\beta}$  é o campo magnético da Terra, cuja direção  $\hat{\beta}$  é definida pelo modelo de vetor de dipolo.

O modelo a ser utilizado neste projeto para o torque devido à força de Lorentz é o mesmo utilizado por Abdel-Aziz (2007) e dado por (Beletskii e Khentov, 1985):

$$\vec{M}_L = \vec{W} \times \vec{\beta}_s + \vec{w}_g \times \vec{\beta}_s \quad (50)$$

sendo:  $\vec{W}$  a velocidade de rotação do satélite;  $\vec{w}_g$  vetor velocidade de rotação diurna do campo geomagnético junto com a Terra, cuja direção é também dada pelo versor  $\vec{\beta}$ , e

$$\vec{\beta}_s = S\hat{\beta} \quad (51)$$

com  $S$  sendo a matriz de uma manta cilíndrica carregada, dada por (Beletskii e Khentov, 1985):

$$S = \begin{pmatrix} 4Dd^2 & 0 & 0 \\ 0 & 4Dd^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4Dh^2 \end{pmatrix} \quad (52)$$

onde  $D = \frac{QB}{4r'^3}$ , com B sendo a magnitude do campo geomagnético,  $r'$  a distância geocêntrica do satélite, d e h o diâmetro e o comprimento da manta cilíndrica carregada que envolve o satélite, onde idealmente a carga é depositada uniformemente.

Uma vez determinadas as componentes do torque devido à força de Lorentz  $\vec{M}_L$ , a partir de (50), no sistema do satélite, tais componentes podem ser substituídas nas equações dinâmicas (5). Num trabalho futuro essas equações podem ser integradas e a influência do torque elétrico pode ser numericamente determinada e comparada com as influências dos outros torques.

### 2.6.2 Componentes do Torque devido à Força de Lorentz

Para a determinação das componentes do Torque Elétrico parte-se de (50), com:

$$\hat{\beta} = (\beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3)^t \text{ - dado no sistema equatorial.}$$

$$\vec{w}_g = w_g (\beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3)^t \text{ - dado no sistema equatorial.}$$

$$\vec{W} = (p \ q \ r)^t \text{ - dado no sistema principal do satélite.}$$

É então necessário determinar o vetor  $\hat{\beta}$  no sistema principal do satélite através da matriz de rotação envolvendo quatérnions (4), tem-se:

$$\hat{\beta}_p = A\hat{\beta} = \begin{pmatrix} q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2 (q_1 q_2 + q_4 q_3) & 2(q_1 q_3 - q_4 q_2) \\ 2 (q_1 q_2 - q_4 q_3) & -q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2 (q_1 q_3 + q_4 q_2) \\ 2 (q_1 q_3 + q_4 q_2) & 2 (q_1 q_3 - q_4 q_2) & -q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} \quad (53)$$

portanto:

$$\hat{\beta}_p = \begin{pmatrix} (q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2)\beta_1 + 2 (q_1 q_2 + q_4 q_3)\beta_2 + 2(q_1 q_3 - q_4 q_2)\beta_3 \\ 2 (q_1 q_2 - q_4 q_3)\beta_1 + (-q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 + q_4^2)\beta_2 + 2 (q_1 q_3 + q_4 q_2)\beta_3 \\ 2 (q_1 q_3 + q_4 q_2)\beta_1 + 2 (q_1 q_3 - q_4 q_2)\beta_2 + (-q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_4^2)\beta_3 \end{pmatrix} \quad (54)$$

e reescrevendo:

$$\beta_{1P} = (q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2)\beta_1 + 2(q_1q_2 + q_4q_3)\beta_2 + 2(q_1q_3 - q_4q_2)\beta_3 \quad (55)$$

$$\beta_{2P} = 2(q_1q_2 - q_4q_3)\beta_1 + (-q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 + q_4^2)\beta_2 + 2(q_1q_3 + q_4q_2)\beta_3 \quad (56)$$

$$\beta_{3P} = 2(q_1q_3 + q_4q_2)\beta_1 + 2(q_1q_2 - q_4q_3)\beta_2 + (-q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_4^2)\beta_3 \quad (57)$$

Agora pode-se obter as componentes do torque elétrico, substituindo na equação (50), as equações (51) e (52) e escrevendo o vetor  $\hat{\beta}$  no sistema principal do satélite, resultando em:

$$\vec{M}_L = \vec{w} \times (S\hat{\beta}_P) + \vec{w}_g \times (S\hat{\beta}_P) \quad (58)$$

onde:

$$S\hat{\beta}_P = \begin{bmatrix} \left( \begin{array}{ccc} 4Dd^2 & 0 & 0 \\ 0 & 4Dd^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4Dh^2 \end{array} \right) \begin{pmatrix} \beta_{1P} \\ \beta_{2P} \\ \beta_{3P} \end{pmatrix} \end{bmatrix} \quad (59)$$

e efetuando os devidos produtos vetoriais, os dois termos da equação (58) resultam cada um em um vetor e poderão ser reescritos respectivamente como:

$$\vec{w} \times (\vec{\beta}_P S) = \begin{pmatrix} q\beta_{3P}Dh^2 - r\beta_{2P}Dd^2 \\ r\beta_{1P}Dd^2 - p\beta_{3P}Dh^2 \\ p\beta_{2P}Dd^2 - q\beta_{1P}Dd^2 \end{pmatrix} \quad (60)$$

e

$$\vec{w}_g \times (\vec{\beta}_P S) = w_g \begin{pmatrix} \beta_{2P}\beta_{3P}Dh^2 - \beta_{3P}\beta_{2P}Dd^2 \\ \beta_{3P}\beta_{1P}Dd^2 - \beta_{1P}\beta_{3P}Dh^2 \\ \beta_{1P}\beta_{2P}Dd^2 - \beta_{2P}\beta_{1P}Dd^2 \end{pmatrix} \quad (61)$$

somando-se (60) e (61), separando as componentes e reagrupando tem-se:

$$\bar{M}_L = \bar{M}_{1L}\hat{i} + \bar{M}_{2L}\hat{j} + \bar{M}_{3L}\hat{k} \quad (62)$$

Com:

$$M_{1L} = Dh^2 \beta_{3P}(q + w_g \beta_{2P}) - Dd^2 \beta_{2P}(r + w_g \beta_{3P}) \quad (63)$$

$$M_{2L} = Dd^2 \beta_{1P}(r + w_g \beta_{3P}) - Dh^2 \beta_{3P}(p + w_g \beta_{1P}) \quad (64)$$

$$M_{3L} = Dd^2(p\beta_{2P} - q\beta_{1P}) \quad (65)$$

### 3 CONCLUSÃO

Os resultados aqui obtidos são puramente teóricos, no entanto representam um grande avanço no sentido de descobrir a real influência do TE (Torque Elétrico) na dinâmica de atitude dos satélites que poderão ser úteis para a análise de missões de satélites brasileiros, principalmente no que se refere à predição e controle de atitude de satélites.

Todas as etapas estipuladas na proposta inicial de pesquisas foram cumpridas dentro do prazo e dando continuidade ao projeto pretende-se determinar numericamente a influência do TE na dinâmica de atitude dos satélites através da integração numérica das equações dinâmicas e cinemáticas do movimento com quatérnions. A partir desses valores pode-se comparar a magnitude deste torque com a magnitude de outros torques já pesquisados.

Saliente-se que uma aplicação do torque devido à força de Lorentz é gerar um torque de controle de atitude, através de interações entre a carga elétrica do satélite e o campo geomagnético. A vantagem da utilização de interações controladas com o campo ambiente para o processo de controle do satélite é a economia no gasto de combustível, o qual é necessário quando o torque de controle é gerado por forças de empuxo de motores. Este tipo de abordagem poderá ser dado em futuros projetos, após a análise inicial sobre o torque elétrico a ser aqui realizado, uma vez que este tipo de sistema de controle é de grande interesse para as futuras missões de satélites brasileiros e já vem sendo foco de pesquisa de alguns pesquisadores do Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais.

#### 4 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Anderson, P. C.; Hanson, W. B.; Coley, W. R.; Hoegy, W. R.,. Spacecraft potential effects on the Dynamics Explorer 2 satellite. **Journal of Geophysical Research**, Volume 99, Issue A3, p. 3985-3998, 1994.
- Abdel-Aziz, Y. A. Attitude Stabilization of a Rigid Spacecraft in the Geomagnetic Field. **Advances in Space Research**, Elsevier Science Ltda, v. 40, p. 30-36, 2007.
- Bate, R. R.; Mueller, D. D.; White, E. W. **Fundamentals of astrodynamics**. Ed. Dover Publications, INC, 1971.
- Beletskii, V. V., Khentov, A. A. Rotational Motion of a magnetized satellite, Moscow, 1985 (russo).
- Juhász, A; Horányi, M. Dynamics of charged space debris in the Earth's plasma environment. **Journal of Geophysical Research**, Volume 102, Issue A4, p. 7237-7246, 1997.
- Pisacane, V. L.; Moore, R. C. **Fundamentals of Space Systems**. Oxford University Press, New York, 1994.
- Purvis, H.B.C.K.; Whittlesy, A.C.; Stevens, N. J., Design Guidelines for Assessing and Controlling Spacecraft Charging Effects. **NASA Technical paper 2361**, 1984.
- Rodrigues, D. S. S **Propagação de atitude de satélites artificiais com quatérnions e o torque magnético residual**. Relatório Final do PIBIC/CNPq, INPE/São José dos Campos, SP, 2004.
- Rodrigues, D. S. S.; Zanardi, M. C. Propagação da atitude de satélites artificiais com quatérnions e torque magnético residual. **IN: Jornada de Iniciação Científica e Pós-graduação da FEG/UNESP, Anais, CD-ROM, Guaratingutá, 2004a.**
- Rodrigues, D. S. S.; Zanardi, M. C. Spacecraft Attitude Propagation with Different Representations. **Advances in Space Dynamics 4: Celestial Mechanics and Astronautics**, 143 – 150, São José dos Campos, 2004b.
- Rodrigues, D. S. S.; Zanardi, M. C. Propagação de Atitude de Satélites Artificiais com Quatérnions e Torque Magnético Residual. In: CONGRESSO TEMÁTICO DE

- DINÂMICA, CONTROLE E APLICAÇÕES. **ANais DINCON2005**, p. 518-525, Bauru, 2005.
- Sehna, L. The motion of a charged satellite in the Earth's magnetic field, **SAO Report**, No. 271, 1969.
- Shuster, M. D. A Survey of Attitude Representations. **Journ. of Astron. Scienc.**, vol. 41, no. 4, pp 439-517, 1993.
- Teixeira, J.E. C.T. **Propagação Numérica da Atitude de Satélites Artificiais com Torque Induzido e Quatérions**. Trabalho de Conclusão de Curso, FEG.UNESP, 2005.
- Teixeira, J. E. C.; Rodrigues, D. S. S. **Propagação da Atitude de Satélites artificiais com Quatérions e Torque Induzido**. In: Jornada de Iniciação Científica e Pós-graduação. **Anais...SP**, CD-ROM, 2005.
- Teixeira, J. E. C.; Zanardi, M. C.; Rodrigues, D. S. S. **Análise Preliminar da Propagação da Atitude de Satélites artificiais com Quatérions e Torque Induzido**. In: XXVIII CNMAC Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional. **Anais...SP**, CD-ROM, 2005.
- Thomas, L. C.; Capellari, J. O. **Attitude determination and prediction of spin-stabilized satellites**. The Bell System Technical Journal, July, 1964.
- Tikhonov, A. A. **Equations of rotational motion of a charged rigid body in the geomagnetic field**, *Vestn. Leningr. Univ., Ser. 1, Part 3* (No. 15), 83-87, 1990.
- Tikhonov, A. A. **Refinement of the oblique dipole model in the evolution of rotary motion of a charged body in the geomagnetic field**, *Cosmic Research*, vol. 40, no. 2, 2002.
- Vokrouhlicky, D. The geomagnetic effects on the motion of an electrically charged artificial satellite. **Celest. Mech.** 46, 85-104, 1989.
- Vokrouhlicky, D. Lorentz force perturbations of an electrically charged satellite – case of varying charge. *Bull. Astron. Inst. Czechoslovak*, v. 41, pp 205-211, 1990.



- Wertz, J. R. **Spacecraft Attitude Determination and Control**, D. Reidel, Dordrecht, Holanda, 1978.
- Zanardi, M. C. Study of the Terms of Coupling between Rotational and Translational Motion, **Cel. Mech.**, vol. 39, pp 147 – 158, 1986.
- Zanardi, M. C. Attitude Propagation using Non-Singular Canonical Variables, **Adv. Astr. Sci.**, vol. 1000, pp 511-525, 1998.
- Zanardi, M. C.; Lopes, R. V. F. L. Spacecraft Attitude Representation, Propagation and Determination: Theory and some Applications on the Brazilian Space Program, **Adv. Space Dynamics**, pp. 503-515, 2000.
- Zanardi, M. C. ; Santos, R. M. K.; Fernandes, S. S. **Optimal Attitude Control of an Artificial Satellite with Spherical Symmetry using Andoyer Variables**. IN: International Symposium in Space Flight Dynamics, **Proceeding**, pp. 747-756, França, L.
- Zanardi, M. C. **Dinâmica da Atitude de Satélites Artificiais**, Tese de Livre Docência, FEG/UNESP, Guaratingutá, SP, 2005.
- Zanardi, M. C.; Vilhena de Moraes, R. Analytical and Semi-Analytical Analysis of an Artificial Satellite's Rotational Motion. **Cel. Mech. and Dyn. Astron.**, vol. 75, no. 4, pp. 227-250, 2000.
- Zanardi, M. C.; Rodrigues, D. S. S. Propagação da Atitude de Satélites Artificiais com Quatérnions e Torque de Gradiente de Gravidade. In: 3º Congresso Temático de Dinâmica e Controle do SBMAC, **Anais ...**, pp 1832 – 1841, CD-ROM, Ilha Solteira, 2004.
- Zanardi, M. C.; Teixeira, J. E. C. T. Propagação de atitude de veículos espaciais com quatérnions e torque devido à correntes de Foucault, **Brazilian Conference on Dynamics, Control and Their Applications**, 1-6, Guaratinguetá, 2006.
- Zanardi, M. C.; Orlando, V.; Sene, L. F. T.; Teixeira, J. E. C. T. Propagação da atitude de satélites artificiais com quatérnions, incluindo torques magnéticos e torque de gradiente de gravidade. **Anais do CBDO 2006**, Bertioga, 2006.
- Zanardi, M. C.; Simal Moreira, L. Analytical attitude propagation with non-singular variables and gravity gradient torque for spin stabilized satellite. **Advances in Space Research**, Elsevier Science Ltda, v. 40, p. 11-17, 2007.